This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

LIBRARY
UNIVERSITY OF
CALIFORNIA
SANTA CRUZ

21513

Nachrichten

von der

Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

Aus dem Jahre 1891.

Nro. 1—11.

Göttingen,
Dieterichsche Verlags-Buchhandlung.
1891.

Man bittet die Verzeichnisse der Accessionen zugleich als Empfangsanzeigen für die der Königl. Societät übersandten Werke betrachten zu wollen.

Register

über

die Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

und

der Georg-Augusts-Universität

aus dem Jahre 1891.

Bericht des Beständigen Secretairs. 359.

Bürger, Otto, Vorläufige Mitteilungen über Untersuchungen an Nemertinen des Golfes von Neapel. 286.

Drude, Paul, und Nernst, Walther, Ueber die Fluorescenzwirkungen stehender Lichtwellen. 346.

Frobenius, G., Ueber Potentialfunctionen, deren Hesse'sche Determinante verschwindet. 323.

Heun, Karl, Die Schwingungsdauer des Gauß'schen Bifilarpendels. 154.

Hilbert, David, Ueber die Theorie der algebraischen Invarianten. 232.

Kielhorn, Franz, Die Colebrooke'schen Pāṇini-Handschriften der K. Bibliothek zu Göttingen. 101.

— — Die Vikrama-Aera. 179.

— — Die Nītimañjarī des Dyā Dvivēda. 182.

† de Lagarde, Paul, Thevenots caffarre. 135.

— — Das aramäische Evangeliar des Vatikan. 140.

† de Lagarde, Paul, Neue Ausgabe Clementischer Schriften. 153.
— — Arabes mitrati. 160.
— — Samech. 164.

Meyer, Franz, Ueber Discriminanten und Resultanten von Singularitätengleichungen 14.
— — Ueber Realitätseigenschaften von Raumcurven. 88.
— — Ueber ein Trägheitsgesetz für algebraische Gleichungen. 279.

Nernst, Walther, Ueber das Henry'sche Gesetz. 1.
— — sieh Drude.
— — sieh Tammann.
Nestle, Eberhard, Eine denkwürdige Sitzung der K. Gesellschaft der Wissenschaften. 187.

Preisaufgaben:
Benekestiftung. 126.
K. Gesellschaft der Wissenschaften. 363.
Petschestiftung. 125.
Wedekindstiftung. 127.

Rahlfs, Alfred, Lehrer und Schüler bei Iunilius Africanus. 242.
Riecke, Eduard, Zur Moleculartheorie der piëzoëlectrischen und pyroëlectrischen Erscheinungen. 191.
— — Ueber eine mit den electrischen Eigenschaften des Turmalins zusammenhangende Fläche. 223.
— — und Voigt, Woldemar, Die piëzoëlectrischen Constanten des Quarzes und Turmalins. 247.

Schilling, Fr., Ueber die geometrische Bedeutung der Formeln der sphärischen Trigonometrie im Falle complexer Argumente. 188.
Schönflies, Arthur, Bemerkung zu Hilberts Theorie der algebraischen Formeln. 339.
Sella, Alfonso, Beitrag zur Kenntnis der specifischen Wärme der Mineralien. 311.

Tammann, Gustav, Ueber die Stromleitung durch Niederschlagsmembranen. 112.
— — Ueber die Permeabilität von Niederschlagsmembranen. 213.

Tammann, Gustav, und Nernst, Walther, Ueber die Maximaltension, mit der Wasserstoff aus Lösungen durch Metalle in Freiheit gesetzt wird. 202.

Tonelli, Alberto, Bemerkung über die Auflösung quadratischer Congruenzen. 344.

Venske, Otto, Zur Integration der Gleichung $\Delta\Delta u = 0$ für ebene Bereiche. 27.

— — Integration eines speciellen Systems linearer, homogener Differentialgleichungen mit doppelt-periodischen Functionen als Coefficienten. 85.

— — Ueber einen neuen Apparat zur Bestimmung der inneren Wärmeleitungsfähigkeit schlecht leitender Körper in absolutem Maaße. 121.

Verzeichnisse der eingelaufenen Druckschriften. 34, 100, 133, 278, 310, 388.

Voigt, Woldemar, Beiträge zur Hydrodynamik I und II. 37.

— — sieh Riecke.

Wagner, Hermann, Ueber das von S. Günther 1888 herausgegebene spätmittelalterliche Verzeichnis geographischer Coordinatenwerte. 256.

Wallach, Otto, Ueber einige neue Kohlenwasserstoffe mit ringförmiger Bindung der Kohlenstoffatome. 301.

Wieseler, Friedrich, Ueber den Stierdionysos. 367.

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

25. Februar. **№ 1.** 1891.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 7. Februar.

Riecke legt eine Abhandlung des Herrn Privatdocenten Dr. Nernst vor: „Ueber das Henry'sche Gesetz."

Voigt legt: „Beiträge zur Hydrodynamik" vor.

Klein legt die Abhandlung des Herrn Prof. Franz Meyer in Clausthal vor: „Ueber Discriminanten und Resultanten von Singularitätengleichungen." 4. Mittheilung.

de Lagarde spricht über Inhalt und Bedeutung seiner „Septuagintastudien II und III", die im Band 37 der Abhandlungen erscheinen werden.

Frensdorff legt einen Aufsatz vor: „Eine Krisis in der K. Gesellschaft der Wissenschaften."

Ueber das Henry'sche Gesetz.

Von

W. Nernst.

In der Abhandlung, welche der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in der Sitzung vom 2. August vorgelegt wurde, habe ich den Satz aufgestellt, daß jeder Molekülgattung zwischen zwei Phasen eines inhomogenen Systems ein konstantes Theilungsverhältnis zukomme, unabhängig insbesondere, welche anderen Stoffe (in nicht zu großer Konzentration) zugegen sind. Von den Folgerungen, welche sich

aus diesem Satze für die Vertheilung eines Stoffes zwischen zwei Lösungsmitteln ergeben, konnte ich bereits durch die Berechnung älterer Versuche und durch eine Anzahl eigener Messungsreihen nachweisen, daß sie an der Erfahrung eine zahlenmäßige Bestätigung finden. Inzwischen habe ich nach einer in der erwähnten Mittheilung bereits angedeuteten Methode auch den Fall experimentell untersucht, daß ein Stoff sich zwischen einer flüssigen und einer gasförmigen Phase vertheilt, worüber im Folgenden nach einigen theoretischen Betrachtungen über diesen Fall zu berichten mir gestattet sei.

Die Anwendung obigen Satzes auf die Vertheilung von Stoffen zwischen Lösungsmittel und dem mit diesem in Berührung befindlichen Gasgemische, d. h. auf die Abhängigkeit des Partialdrucks, mit welchem ein in Lösung befindlicher Stoff in dem über der Lösung lagernden Gasgemische vorhanden ist, von der Konzentration jener, führt zu folgenden Gesetzmäßigkeiten.

1) Der Partialdruck eines gelösten Stoffes über einer Lösung ist bei konstanter Temperatur der Konzentration desselben in der Lösung direkt proportional, wenn derselbe in Lösung und im Gaszustande gleiche Molekulargröße besitzt; unter dieser Bedingung gilt mit andern Worten Henry's Gesetz.

2) Befindet sich der gelöste Stoff im Dissociationszusstande, so gilt der Satz für jede einzelne Molekülgattung, die in der Reaktionsgleichung der Dissociation vorkommt.

3) Es finde im allgemeinsten Falle zwischen den gleichzeitig in einem beliebigen Lösungsmittel gelösten und verflüchtigten Stoffen eine Reaktion nach dem Schema

$$n_1 A_1 + n_2 A_2 + \ldots = n_1' A_1' + n_2' A_2' + \ldots$$

statt, d. h. es treten n_1 Moleküle vom Körper A_1, n_2 Moleküle vom Körper A_2 u. s. w. zusammen, um n_1' Moleküle vom Körper A_1', n_2' Moleküle vom Körper A_2' u. s. w. zu bilden; Gleichgewicht sei eingetreten, wenn die Partialdrucke der einzelnen Molekülgattungen p_1, $p_2 \ldots$, p_1', $p_2' \ldots$ und ihre Konzentrationen in der Lösung c_1, $c_2 \ldots$, c_1', $c_2' \ldots$ betrogen. Dann liefert die Anwendung des Guldberg-Waage'schen Gesetzes der chemischen Massenwirkung, welche in gleicher Weise für das gasförmige und flüssige System gemäß den von van 't Hoff in seiner Schrift: „Lois de l'équilibre chimique dans l'état dilué, gazeux ou dissons" (Stockholm 1885) entwickelten Grundsätzen zu erfolgen hat, die beiden

Gleichungen

$$\frac{p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots}{p_1'^{n_1'} p_2'^{n_2'} \dots} = K \tag{1}$$

$$\frac{c_1^{n_1} c_2^{n_2} \dots}{c_1'^{n_1'} c_2'^{n_2'} \dots} = K' \tag{2}$$

worin K und K', die Reaktionskoefficienten, nur von der Temperatur in der bekannten Weise abhängen. Der eingangs erwähnte Satz liefert uns eine Anzahl Gleichungen

$$c_1 = p_1 k_1, \; c_2 = p_2 k_2, \; \dots \; c_1' = p_1' k_1', \; c_2' = p_2' k_2' \; \dots \tag{3}$$

worin k_1, $k_2 \dots$, k_1', $k_2' \dots$ die Löslichkeitskoefficienten der einzelnen Molekülgattungen bedeuten, die wiederum nur von der Temperatur abhängen, und zwar in einer aus der Lösungswärme derselben leicht zu berechnenden Weise.

Aus (1) bis (3) erschließen wir

$$K = K' \frac{k_1'^{n_1'} k_2'^{n_2'} \dots}{k_1^{n_1}, k_1^{n_2} \dots}. \tag{4}$$

Dies Resultat ist vielleicht nicht ohne weiter gehende allgemeine Bedeutung. In den meisten Fällen lassen sich die Löslichkeitskoeffizienten einer Molekülgattung gegenüber einem beliebigen Lösungsmittel direkt bestimmen, und es wird bei Kenntnis dieser ermöglicht, vorherzusagen, wie eine Anzahl Stoffe in einem beliebigen Lösungsmittel auf einander einwirken, wenn ihre Reaktionsfähigkeit im Gaszustande bekannt ist, und umgekehrt.

Es muß jedoch betont werden, daß die Gleichungen (3) nur für elektrisch neutrale Moleküle gültig sind; für eine bestimmte Ionengattung nämlich kann der Theilungskoefficient im allgemeinen nicht unabhängig von der Gegenwart anderer Ionen sein, weil infolge Ausbildung elektrischer Doppelschichten an der Grenzfläche der verschiedenen Phasen die einfache Superposition der Gleichungen (3) aus dem gleichen Grunde aufhört, wie die Salze sich bei der Diffusion in wässeriger Lösung wegen der hierbei auftretenden Potentialdifferenzen beeinflussen. Außerdem wird vorausgesetzt, daß die betreffenden Stoffe weder in Lösung noch im Gaszustande in zu großer Konzentration vorhanden sind.

Satz 1) ist der bekannte van 't Hoff'sche Satz; nimmt man zur Bestimmung des Partialdruckes die van 't Hoff'sche Dampfdruckformel zu Hülfe, so gelangt man zu der von Planck[1]) ge-

1) M. Planck, Zeitschr. physik. Chem. 2. 405 (1888).

gebenen Theorie der Dampfspannungen von verdünnten Lösungen flüchtiger Stoffe; die von Planck gemachte Voraussetzung, daß der Dampf des Lösungsmittels in großem Ueberschuß im Vergleich zu dem des gelösten Stoffes zugegen ist, kann man ohne Weiteres fallen lassen, da sie weder nothwendig ist noch eine merkliche Vereinfachung mit sich bringt. Von der weiteren Beschränkung in Planck's Theorie, daß nämlich der gelöste Stoff als solcher und im Gaszustande gleiche Molekulargröße besitzt, kann man sich mittelst des Satzes 2) befreien; durch wiederholte Hinzuziehung des Satzes 3) schließlich kann ohne weiteres eine allgemeine Theorie für die Dampfspannung einer Lösung gegeben werden, die beliebige Stoffe (in nicht zu großer Konzentration) enthält, zwischen denen außerdem beliebige chemische Einwirkungen stattfinden können. Die Formeln die sich bei Anwendung des Satzes 2) ergeben werden, (bezüglich des experimentell noch nicht untersuchten Satzes 3) mögen obige Andeutungen genügen) haben neuerdings eine strenge thermodynamische Begründung durch Herrn Professor Riecke erfahren[1]); die unten mitzutheilenden Messungen sind also gleichzeitig dazu geeignet, der Riecke'schen Betrachtungsweise dieser und verwandter Probleme eine neue experimentelle Bestätigung zu verleihen.

Zur Messung des Partialdruckes, mit welchem der gelöste Stoff über der Lösung vorhanden war, bediente ich mich des Beckmann'schen Siedeapparates[2]), dessen Theorie sich unschwer auch für den Fall erweitern läßt, daß der gelöste Stoff in merklicher Weise an der Verdampfung theilnimmt. Es seien in N Molekülen des Lösungsmittels n Moleküle eines fremden Stoffes gelöst, welche letzteren einheitlich sein können oder nicht, und im letzteren Falle mit einander beliebig reagieren mögen. Sei B der Barometerstand, P der Partialdruck des Lösungsmittels und p derjenige des gelösten Stoffes, so ist

$$p = B - P$$

und, wenn P_0 den Dampfdruck des reinen Lösungsmittels bei der betreffenden Temperatur bedeutet, so wird mit Einführung der van 't Hoff'schen Dampfdruckformel

$$\frac{P_0 - P}{P_0} = \frac{n}{N+n} \tag{5}$$

1) E. Riecke, Gött. Nachr. 1890 No. 14.

2) E. Beckmann, Zeitschr. f. physik. Chem. 4. 532 (1889).

$$p = B - P_0 \frac{N}{N+n}. \tag{6}$$

Es sei nun t die Aenderung, welche der Siedepunkt des Lösungsmittels durch Hinzufügen der n Moleküle des gelösten Stoffes erfahren hat und die bei nicht flüchtigen Stoffen immer positiv ist, bei flüchtigen aber sowohl positiv wie negativ sein kann; bedeutet α ferner die Zunahme des Dampfdruckes des Lösungsmittels, welche einer Temperatursteigerung um 1° entspricht, so wird

$$P_0 = B + \alpha t$$

und demgemäß

$$p = B\left[\frac{n}{N+n} - \frac{\alpha t}{B}\frac{N}{N+n}\right]. \tag{7}$$

α kann entweder den Dampfdrucktabellen direkt entnommen oder aus der Clausius'schen Dampfdruckformel mittelst der Verdampfungswärme berechnet werden; man erhält auf dem letzteren Wege

$$\alpha = \frac{BMw}{2T^2} \text{ mm Quecksilber} \tag{8}$$

worin M das Molekulargewicht, w die Verdampfungswärme in g-cal und T die absolute Siedetemperatur des Lösungsmittels bedeuten. Handelt es sich um größere Aenderungen des Siedepunktes, so muß natürlich berücksichtigt werden, daß dann der Dampfdruck mit der Temperatur nicht mehr linear variiert; im Folgenden, wo diese Aenderung immer nur nach Bruchtheilen eines Grades zählen wird, ist dies nicht erforderlich.

Für nicht flüchtige Substanzen wird $p = 0$ und es resultiert aus (7) die von Arrhenius abgeleitete und von Beckmann verificierte Formel, welche das Molekulargewicht einer nicht flüchtigen Substanz aus der Siedepunktserhöhung zu berechnen gestattet. Bei Anwendung flüchtiger Substanzen als gelöster Stoffe wird Proportionalität zwischen Konzentration und Temperaturänderung, die in einer Erhöhung oder Erniedrigung des Siedepunktes bestehen kann, nur dann stattfinden, wenn p und Konzentration proportional sind, d. h. wenn dem gelösten Stoffe als solchem und als Gas gleiche Molekulargröße zukommt. Ist dies nicht der Fall, so finden (genügende Flüchtigkeit der gelösten Substanz vorausgesetzt), sofort die grellsten Abweichungen von dieser Proportionalität statt.

Als Beispiel von Stoffen, die in Lösung und als Gas gleiche Molekulargröße besitzen, untersuchte ich Benzol und Chloroform in ätherischer Lösung mittelst des Beckmann'schen Siedeapparats. Thatsächlich waren denn auch die beobachteten Siedepunktserhöhungen der angewandten Konzentration proportional und um 20, bez. 10 % in beiden Fällen kleiner, als sich aus dem Molekulargewichte beider Substanzen unter Annahme von Nichtflüchtigkeit berechnen würde.

Wir gehen jetzt zu den Messungen über, welche mit Anwendung einer Substanz ausgeführt sind, die in Lösung und als Gas in merklich verschiedenem Molekularzustande sich befindet. Als Lösungsmittel wurde Benzol verwandt, als gelöste Substanz diente Essigsäure, die nach den Gefrierpunktsbestimmungen sowie nach den Resultaten, welche nach der Siedemethode mit anderen einbasischen organischen Säuren, wie Benzoesäure, Salicylsäure u. dgl. erhalten sind und einen sicheren Analogieschluß gestatten, bei den hier in Betracht kommenden Konzentrationen zum weitaus größten Theile in Benzollösung bimolekular ist; in Dampfform hingegen, wo ihr Dissociationszustand nach einer von Gibbs berechneten Formel sich sehr genau für alle Drucke und ein großes Temperaturintervall berechnen läßt, werden wir sie, den Bedingungen der Temperatur und der Druckverhältnisse entsprechend, erheblich stärker in die normalen Moleküle dissociiert vorfinden.

Bei Ausführung der Messungen wurde das Hauptaugenmerk auf Anwendung möglichst wasserfreier Substanzen gerichtet, weil Gegenwart selbst nur geringer Spuren von Wasser die Dampfspannung der Lösungen aus mancherlei Gründen erheblich beeinflussen muß. Demgemäß gelangte nur über Natiumdraht längere Zeit getrocknetes Benzol und durch mehrmaliges Ausfrieren vor jedem Versuch frisch gereinigte Essigsäure zur Verwendung. Es gelang so in der That, in fünf Versuchsreihen gut miteinander stimmende Resultate zu erhalten; zur Kontrolle des Apparats wurde außerdem eine Bestimmung mit einer kaum flüchtigen Substanz (Diphenylamin) gemacht, die folgendes befriedigende Resultat lieferte:

Tab. I.

Diphenylamin in Benzollösung.

m	*t*	*M*
1·51	0·229	175
3·11	0·463	179
5·61	0·828	181

m bedeutet die Anzahl g gelöster Substanz auf 100 g Benzol, t die beobachtete Siedepunktserhöhung und M das nach der Formel

$$M = 26{\cdot}7\,\frac{m}{t}$$

berechnete Molekulargewicht, welches sich nur wenig höher, der geringen Flüchtigkeit des Diphenylamins entsprechend, als das theoretische, 169, ergiebt.

Die Essigsäure wurde in der von Beckmann für Flüssigkeiten vorgeschlagenen Weise[1]) in das siedende Benzol successive eingeführt; auffallend war, daß sich, besonders bei größeren Konzentrationen, der Siedepunkt der Lösung etwas träge konstant einstellte, wie wenn es einiger Zeit bedurfte, damit das Gleichgewicht zwischen der in Lösung und im Gaszustande befindlichen Essigsäure sich herstellte. Gleichwohl dürften die nun mitzutheilenden Zahlen fast durchweg, besonders da sie großentheils das Mittel aus mehreren gut mit einander stimmenden, unabhängigen Versuchsreihen sind, bis auf weniger als 0·01° sicher sein. Der Barometerstand schwankte bei allen Versuchen nur so wenig um 750 mm, daß er unbedenklich für alle Messungen diesem Mittelwerthe gleichgesetzt werden kann, um so mehr, als ein außerdem bei einem ungewöhnlich niedrigen Barometerstande, 730 mm, ausgeführter Kontrollversuch keine merkliche Beeinflussung dieser großen Schwankung des äußeren Druckes auf die beobachteten Siedepunktsänderungen des Benzols durch Zusatz von Essigsäure erkennen ließ. Die Korrektion, welche infolge der durch die Verdampfung der Essigsäure bedingten Konzentrationsänderung anzubringen ist und sich aus der unten zu gewinnenden Kenntnis ihres Partialdrucks und der Angabe, daß das Volum der Lösung und dasjenige des Dampfraumes je ca. 50 cc betrug, leicht berechnet, liegt vollkommen innerhalb der Versuchsfehler.

Tab. II.

Essigsäure in Benzol.

m	t	m	t	
0·150	−0·070	4·13	−0·066	
0·663	−0·139	5·00	+0·032	
1·64	−0·152	6·83	+0·063	Barometerstand = 750 mm
1·87	−0·155	7·53	+0·118	
2·60	−0·132	8·42	+0·180.	

1) Beckmann l. c. 548.

Wie man sieht, ist von Proportionalität zwischen Konzentrationen und Siedepunktsänderung t gar nicht die Rede; vielmehr findet beim anfänglichen Zusatz eine Erniedrigung, beim weiteren eine Erhöhung des Siedepunktes statt und wir dürfen aus dem bloßen Anblick der Zahlen das erwartete Resultat schließen, daß nämlich Essigsäure in den beiden Phasen des untersuchten Systems sicherlich in merklich verschiedenem Molekularzustande sich befindet. Die strenge Berechnung wird uns sofort lehren, daß auch quantitativ der absonderliche Verlaut der Zahlen der von der Theorie geforderte ist.

Die Berechnung des Partialdruckes p der Essigsäure im Dampfraume geschieht nach Formel (7); α, die Aenderung des Dampfdruckes des Benzols, welche einer Aenderung um 1° entspricht, beträgt in der Nähe das dem Drucke von 750 mm entsprechenden Temperaturpunktes der Dampfspannungskurve 22·0 mm, wie sich aus der Formel (8)

$$\alpha = 750 \frac{78 \cdot 93{\cdot}4}{2 \cdot 353^2}$$

berechnet. Die Anzahl Moleküle n der Essigsäure, welche auf N Moleküle Benzol enthalten sind, ergiebt sich aus m, welche Größe die Anzahl g Essigsäure auf $N = \frac{100}{78}$ Moleküle Benzol (78 = Molekulargewicht des Benzols im Gaszustande) bedeutet, und dem Molekularzustande der Essigsäure im Benzol. Wie schon hervorgehoben, ist das Molekulargewicht der Essigsäure in Benzol $= 2 \times 60 = 120$ zu setzen (60 Molekulargewicht der Essigsäure bei hoher Temperatur und niederem Druck im Gaszustande), und bedeutet x den Dissociationskoefficienten der Doppelmoleküle, so wird

$$n = \frac{m}{120}(1 + x) .$$

Da Essigsäure bei den hier in Betracht kommenden Konzentrationen nur wenig dissociiert ist, so spielt x die Rolle einer Korrektionsgröße, deren angenäherte Kenntnis wir uns aus den Gefrierpunktsbeobachtungen dieses Stoffes in Benzol sowie besonders aus den Messungen verschaffen, welche Beckmann[1]) an der Benzoesäure, die sich sicherlich analog der Essigsäure verhält, angestellt hat. Wir schließen daraus, daß letzterer Stoff bei dem $m = 0{\cdot}663$ entsprechenden

1) E. Beckmann, Zeitschr. f. physikal. Chem. 6. 440 (1890).

Gehalte zu rund 10 % dissociiert ist. Für die anderen Konzentrationen berechnet sich dann der Dissociationskoefficient aus der Gleichung der Dissociationsisotherme $\frac{mx^2}{1-x} = \frac{0{\cdot}663 \cdot 0{\cdot}1^2}{0{\cdot}9}$.

Setzen wir also

$$\frac{\frac{m}{120}(1+x)}{\frac{100}{78}+\frac{m}{120}(1+x)} = \frac{m(1+x)}{154{\cdot}4+m(1+x)} = v \qquad (9)$$

wo wir x im Nenner unbedenklich vernachlässigen können, so wird

$$p = 750\,v - 22{\cdot}2\,t\,(1-v) \text{ mm Quecksilber.} \qquad (10)$$

Wir berechnen so folgende Partialdrucke der Essigsäure, welche den einzeln Konzentrationen entsprechen und unter p ber. 1 verzeichnet sind.

Tab. III.

Partialdruck des Essigsäuredampfes über dessen Lösung in Benzol bei 80°.

m	x	p ber. 1	p ber. 2	Δ	ξ
0·150	0·20	2·4	2·6	2·24	0·87
0·663	0·10	6·6	6·5	2·44	0·70
1·64	0·065	11·8	11·6	2·61	0·60
1·87	0·061	12·9	12·6	2·63	0·58
2·60	0·055	16·1	15·7	2·71	0·54
4·13	0·042	21·8	21·4	2·81	0·48
5·00	0·038	23·6	23·9	2·83	0·47
6·83	0·033	31·4	31·1	2·96	0·40
7·53	0·031	33·5	33·4	2·99	0·38
8·42	0·029	36·4	36·5	3·02	0·36

Was die Genauigkeit der nach Formel (10) berechneten Werthe von p anlangt, so ist zu beachten, daß ein Fehler von 0·01° in der Bestimmung von t in p mit einem Fehler von 0·2 mm Quecksilber eingeht; es darf wohl betont werden, daß einem Versuche, auf gewöhnliche Weise den Dampfdruck einer Lösung so genau zu messen, kaum überwindliche Schwierigkeiten gegenüberstehen, wie ich überhaupt der Meinung bin, daß mit Hülfe des ausgezeichneten Siedeapparates von Beckmann sich Absorptionskoefficienten häufig einfacher und viel genauer werden bestimmen lassen, als

nach irgend einer anderen Methode. Der Partialdruck des Benzols ergiebt sich natürlich zu $750 - p$.

Man ersieht aus Tab. III sofort, daß Proportionalität zwischen m und p im Sinne des Henry'schen Gesetzes in der gewöhnlichen Fassung nicht einmal angenähert stattfindet; wohl aber muß das Gesetz nach dem eingangs aufgeführten Satze gelten, wenn man eine bestimmte Molekülgattung, etwa die normale, welche der Formel CH_3COOH entspricht, in Betracht zieht.

In Lösung ist nun die Anzahl normaler Moleküle

$$m\sqrt{\frac{(1-x)}{m}} = \sqrt{m(1-x)}$$

proportional. Für den Gaszustand berechnet sich der Dissociationskoefficient ξ aus der Dampfdichte Δ zu

$$\xi = \frac{4{\cdot}146 - \Delta}{\Delta} \tag{11}$$

wo 4·146 der dem Werte $\xi = 0$ entsprechende Grenzwert der Dampfdichte der Essigsäure darstellt; für die Abhängigkeit der Dampfdichte von Temperatur und Druck hat Gibbs[1]) folgende Formel gegeben:

$$\log \frac{2{\cdot}073\,(\Delta - 2{\cdot}073)}{(4{\cdot}146-\Delta)^2 p} = \frac{3520}{T} - 11{\cdot}349 \tag{12}$$

worin T die absolute Temperatur bedeutet, welcher Ausdruck sich den zahlreichen Messungen von Bineau, Naumann, Horstmann u. A. gut anschließt.

Wenn wir $T = 273 + 80$ einsetzen (80° Siedepunkt des Benzols), so wird

$$\frac{\Delta - 2{\cdot}073}{(7{\cdot}146-\Delta)p^2} = 0{\cdot}0201$$

eine Gleichung, welche die bekannte Form der Dissociationsisotherme besitzt und deren Berechnung zu den in Kolumne V verzeichneten Werthen von Δ und mit Hinzuziehung von Gl. (11) zu den in Kolumne VI verzeichneten Werthen von ξ führt.

Die Anzahl normaler Moleküle in der Volumeinheit des Dampfes der Essigsäure ist nun proportional dem Produkte aus der in der Volumeinheit befindlichen Masse des Dampfes und seinem Disso-

1) W. Gibbs, Sil. Journ. 18. 371 (1879).

ciationskoefficienten, also proportional dem Ausdruck

$$\Delta p \frac{4{\cdot}146-\Delta}{\Delta} = p(4{\cdot}146-\Delta).$$

Die Gültigkeit des Henry'schen Gesetzes in der eingangs dargelegten Fassung verlangt also Proportionalität zwischen den Ausdrücken

$$\sqrt{m(1-x)} \quad \text{und} \quad p(4{\cdot}146-\Delta).$$

Thatsächlich finden wir denn auch, daß die nach Formel

$$p = 14{\cdot}4 \frac{\sqrt{m(1-x)}}{4{\cdot}146-\Delta} \text{ mm Quecksilber} \qquad (13)$$

berechneten, in Kolumne IV der Tabelle III verzeichneten Druckwerthe mit dem unmittelbaren Ergebnis des Experiments in ausgezeichneter Weise übereinstimmen. Diese Messungen im Verein mit den über die Vertheilung eines Stoffes zwischen zwei Lösungsmitteln angestellten beweisen wohl zur Genüge, daß der Satz über die Konstanz der Theilungskoeffizienten einer bestimmten Molekülgattung zwischen zwei Phasen zu mit der Erfahrung völlig stimmenden Resultaten führt.

Der Proportionalitätsfaktor 14·4 entspricht (bei Berücksichtigung des in Gl. (13) befolgten Maaßsystems) dem Löslichkeitskoeffizienten der (CH_3COOH)-Moleküle; natürlich kann in gleicher Weise auch der Löslichkeitskoefficient der $(CH_3COOH)_2$-Moleküle gefunden werden. Vernachlässigt wurde in den obigen Rechnungen die bei den geringen Temperaturänderungen jedenfalls nur äußerst geringe Aenderung des Löslichkeitkoefficienten mit der Temperatur.

Einen zweiten Fall, der in genau der gleichen Weise behandelt werden kann, verdanke ich der gütigen Mittheilung von Herrn Professor Dr. Beckmann in Leipzig, welcher bei Zusatz von Wasser zu siedendem Aether folgende Siedepunktserniedrigungen erhielt:

Tab. IV.

Wasser in Aether.

m	t	
0·429	−0·206	
1·032	−0·206	Barometerstand = 752 mm
1·315	−0·324.	

Man sieht auch hier, daß zwischen m und t durchaus keine Proportionalität stattfindet, daß also Wasser unter den Bedingungen des Versuchs in Aether gelöst und als Gas nicht in gleichem Molekularzustande sich befindet. Im Wasserdampfe kommen nach Avogadro's Gesetz nun fast ausschließlich H_2O-Moleküle vor, wenn auch der ein wenig größer als dem Molekulargewichte 18 entsprechend gefundene Werth der Dampfdichte auf Bildung von Doppelmolekülen in sehr geringer Anzahl hindeutet. Es muß demnach das Wasser im Aether in einem anderen Molekularzustande wie dem normalen vorkommen.

Dies Resultat können wir auf einem unabhängigen zweiten Wege bestätigen. Bei der dritten Beobachtung nämlich war der Aether mit Wasser gesättigt; der Werth $m = 1{\cdot}315$ ist von mir mit Hülfe der von Walker[1]) neulich bis zu 30° gemessenen Löslichkeit des Wassers in Aether mittelst einer kleinen Extrapolation bis auf 35·2° berechnet worden. Nun können wir den Partialdruck des Wasserdampfes über mit Wasser gesättigten Aether anderweitig berechnen; er ist nämlich gleich dem Partialdruck des Wasserdampfes über mit Aether gesättigten Wasser bei der gleichen Temperatur und dieser ergiebt sich, indem wir beachten, daß durch die 9 % Aether, welche vom Wasser bei 35·2° gelöst werden, der Dampfdruck des reinen Wassers bei dieser Temperatur, 40·0 mm, um 2·5 % erniedrigt wird, zu 39·0 mm. Der Partialdruck des Aethers war nun bei dem dritten Versuch gleich 752·0 — 39·0 = 718 mm; der Dampfdruck des reinen Aethers würde bei einer Temperaturerniedrigung um 0·324°

$$752 - 26{\cdot}7 \times 0{\cdot}324 = 743{\cdot}4 \text{ mm Quecksilber}$$

betragen, weil der Dampfdruck des Aethers in der Nähe von 35·5° für 1° Temperaturerniedrigung um 26·7 mm sinkt. Aus der van 't Hoff'schen Dampfdruckformel finden wir, daß

$$\frac{743{\cdot}4 - 713}{713} = 0{\cdot}0426$$

beträgt, d. h. daß beim dritten Versuch auf 100 Molekele Aether 4·26 Wassermoleküle gelöst waren.

Wäre nun Wasser im Aether in Gestalt von Doppelmolekülen vorhanden, so müßte die relative Dampfspannungserniedrigung

$$\frac{1{\cdot}315 \cdot 74}{36 \cdot 100} = 0{\cdot}0270$$

1) Walker, Zeitschr. physik. Chem. 5. 196 (1890).

betragen, und sie würde doppelt so groß sein, wenn Wasser im Aether in Gestalt von normalen Molekülen gelöst wäre. Aus dem obigen Werth berechnet sich nun, daß bei dieser Konzentration der Dissociationskoeffizient 0·58 beträgt.

Für die beiden geringeren Konzentrationen läßt sich der Partialdruck des Wasserdampfes über der Lösung wiederum auf zwei Wegen berechnen; zunächst aus den beobachteten Siedepunktserniedrigungen nach Gl. (7), wo x für die betreffenden beiden Konzentrationen nach der Gleichung der Dissociationsisotherme zu ermitteln ist; sodann mit Hülfe des Vertheilungssatzes, demzufolge p der Anzahl der normalen Wassermoleküle proportional, also gleich

$$39{\cdot}0\frac{mx}{1{\cdot}315\cdot 0{\cdot}58}$$

sein muß. Auf diese Weise gelangen wir zu

Tab. V.

Partialdruck des Wasserdampfes über dessen Lösung in Aether bei 35·3°.

m	x	p ber. 1	p ber. 2
1·315	0·58	39·0	39·0
1·032	0·62	31·7	32·8
0·429	0·76	17·0	16·8

Die Uebereinstimmung zwischen den auf zwei Wegen berechneten p-Werthen kann wohl als genügend angesehen werden. Jedenfalls setzen es die obigen Zahlen außer Zweifel, daß Wasser in Aether gelöst zum größeren Theile aus normalen Molekülen besteht, weil andernfalls die Abhängigkeit der beobachteten Siedepunktserniedrigungen von der Konzentration eine gänzlich andere sein müßte.

Den obigen Messungen entnehmen wir gleichzeitig das praktische Resultat, daß auch bei Anwendung flüchtiger Stoffe als gelöster Körper der Beckmann'sche Siedeapparat sichere Auskunft über den Molekularzustand derselben zu liefern und uns gleichzeitig in den Besitz ihrer Absorptionskoefficienten zu setzen im Stande ist.

Es sei zum Schluß noch darauf hingewiesen, daß, obwohl die von mir gewählte Fassung des Vertheilungssatzes an molekulare

Vorstellungen anknüpft, er gleichwohl von diesen unabhängig ist, und daß alle Folgerungen aus ihm auch dann bestehen bleiben würden, wenn man Avogadro's Satz für Lösungen als nicht gültig annähme. Mit der Bezeichnung, ein Stoff hat in zwei verschiedenen Phasen gleiche Molekulargröße oder nicht, ist nämlich im Obigen wie früher bei ähnlicher Gelegenheit[1]) keine andere Vorstellung verbunden, als daß der betreffende Stoff in diesen beiden Phasen unter Partialdrucken steht, die sich wie seine Konzentrationen verhalten oder nicht, oder, allgemeiner ausgedrückt, daß die Aenderungen der freien Energie einer bestimmten Menge des Stoffes bei gleicher procentischer Konzentrationsänderung in beiden Phasen gleich sind oder nicht. Der methodische Verstoß, welchen ich hierdurch gegen das Grundprinzip der Naturwissenschaft, niemals mit einem größeren Aufwand an Hypothese zu operieren, als unbedingt für den vorliegenden Zweck erforderlich, begangen habe, möge im Hinblick darauf entschuldigt werden, daß durch Hinzuziehung molekularer Vorstellungen die Darstellung an Anschaulichkeit und der Ausdruck an Kürze ungemein gewinnt.

Physikal. Inst. Göttingen. Februar 1891.

1) Nernst, Zeitschr. f. physik. Chem. 6. 17 (1890).

Ueber Discriminanten und Resultanten von Singularitätengleichungen.

Von

Franz Meyer in Clausthal.

(Vierte Mittheilung[1]).

Vorgelegt von F. Klein.

In zwei voraufgegangenen Mittheilungen sind für rationale Raumcurven R_n^3 die Hyperosculationsebenen „α^4“, die Schmiegungsberührebenen „$\alpha^3\beta^2$“ und die Trefftangenten „$(\alpha^3\beta)$“ bezüglich der Coincidenzen ihrer Stellen α untersucht worden.

1) Vgl. diese Nachrichten. 1888 No. 5, 1890 No. 10, 1890 No. 15.

Im Nachfolgenden sollen die zwei noch übrigen Elementarsingularitäten einer Raumcurve, nämlich die Tritangentialebenen „$\alpha^2\beta^2\gamma^2$“ und die Quadrisecanten „$(\alpha\beta\gamma\delta)$“ in demselben Sinne ihre Erledigung finden, sowohl in ihren Beziehungen zu einander, wie zu den drei ersterwähnten Singularitäten.

Man wird wiederum die Discriminanten und Resultanten der binären Formen, welche, gleich Null gesetzt, die Werthe α zu Wurzeln besitzen, in Elementarfactoren auflösen, welche in dem zu Grunde gelegten Rationalitätsbereiche der Größen δ irreducibel sind.

Zu dem Zwecke sind vorerst die Grade der gemeinten Elementarfactoren in den δ festzustellen.

Hierzu erweisen sich indessen die bisher angewandten Hülfsmittel als nicht völlig zureichend, insofern bei einer Reihe von Zerlegungen immer je ein Factor übrig bleibt, für den eine directe Gradbestimmung auf unüberwindliche Schwierigkeiten zu stoßen scheint.

Man kann jedoch diese Schwierigkeiten umgehen sobald man die früher auseinandergesetzte Methode des Projicirens in geeigneter Weise mit dem Chasles'schen Correspondenzprincip verknüpft. Dadurch gelingt es, zwischen der jedesmal gesuchten Gradzahl und anderen, bereits bekannten eine Relation herzustellen.

Es möge das Verfahren an dem Beispiel der Discriminante der Tritangentialebenen -Form $[\alpha^2\beta^2\gamma^2]$ ausführlicher erläutert werden.

Wie die geometrische Anschauung zeigt, existiren hier fünf verschiedene Möglichkeiten für ein (durch je eine einzige Bedingung herbeigeführtes) Zusammenrücken zweier Berührstellen.

Erstlich können zwei der Tritangentialebenen in der Weise consecutiv werden, daß die drei Berührungspunkte auf deren Schnittlinie zu liegen kommen (sodaß die letztere eine Trisecante der Curve R_n^3 wird).

Sodann können sich vier solcher Ebenen zu einer einzigen, viermal berührenden Ebene vereinigen. Des Weiteren zwei solcher Ebenen zu einer einmal osculirenden und noch zweimal berührenden.

Viertens kann eine Coincidenz zweier Berührstellen ein und derselben Tritangentialebene eintreten, sodaß die letztere einmal hyperosculirt und außerdem noch einmal berührt.

Endlich kann es noch vorkommen, daß durch eine Tangente

der Curve zwei verschiedene Ebenen gehen, welche je noch zweimal berühren.

Man hat demnach, bei der eingeführten Bezeichnungsweise, für die Discriminante $D[\alpha^2\beta^2\gamma^2]$ den Zerlegungsansatz:

$$D[\alpha^2\beta^2\gamma^2] = [\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha\beta\gamma)]^a [\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2]^b [\alpha^3\beta^2\gamma^2]^c [\alpha^4\beta^2]^d [\alpha^2\beta^2\gamma^2, \alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2]^e$$

wo die Exponenten a, b, c, d, e zu bestimmende ganze positive Zahlen sind.

Nun lassen sich die Grade der vier ersten Elementarfactoren, wie auch der Discriminante selbst, unter Benutzung der früher angegebenen Hülfsmittel finden (vgl. die weiter unten aufgestellte Tabelle) und es ist nur der letzte Factor rechterhand, dem man so nicht beikommen kann.

Zuvörderst denken wir uns wiederum im vierdimensionalen Raume eine punktallgemeine R_n^4 nebst einer beliebigen Geraden g und fragen: Von wieviel Punkten P auf g läßt sich die R_n^4 so in eine R_n^3 projiciren, daß die letztere der invarianten Bedingung $\alpha^2\beta^2\gamma^2, \alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2] = 0$ genügt? Die Anzahl derartiger Punkte P ist zugleich der Grad der in Rede stehenden Invariante in den δ.

Man construire nunmehr auf der Curve R_n^4 folgende Correspondenz. Durch irgend eine Tangente $((\alpha_1^3))$ lassen sich $2(n-4)(n-5)$ Räume M_3 legen, welche die Curve noch zweimal berühren. Diese Räume M_3 treffen die Gerade g in ebensoviel Punkten Q. Von jedem solchen Punkte Q gehen, außer der jeweils ihn ausschneidenden M_3 noch $\frac{1}{3}(n-3)(n-4)(n-5) - 1$ weitere aus, welche die R_n^4 gleichfalls dreimal berühren. Ein Berührungspunkt der letzteren Art heiße β.

Dadurch entsprechen irgend einer Stelle α auf R_n^4 im Ganzen $2(n-4)(n-5)\{4(n-3)(n-4)(n-5) - 3\}$ Stellen β und umgekehrt, und es müssen demnach doppelt so viele Coincidenzen $\alpha = \beta$ existiren.

Diese Coincidenzen zerfallen in vier getrennte Klassen.

Die erste besteht aus Tripeln α_1, α_2, α_3, in denen eine M die R_n^4 berührt und deren Verbindungsebene $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ zugleich g trifft. Jede Stelle α repräsentirt eine einfache Coincidenz.

Die zweite enthält die Quadrupel α_1, α_2, α_3, α_4, in denen eine M_3 die R_n^4 berührt. Eine derartige Stelle α zählt aber als Coincidenz sechsfach. Denn durch eine Tangente $((\alpha_1^3))$ gehen zunächst die drei M_3: $\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2$, $\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_4^2$, $\alpha_1^2\alpha_3^2\alpha_4^2$. Greift man aus diesen etwa die erste heraus, so passiren durch den Treffpunkt Q auf g außer

ihr noch zwei M_3, welche die Curve in α_1 und zudem noch zweimal berühren, nämlich $\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_4^2$, $\alpha_1^2\alpha_3^2\alpha_4^2$.

Die dritte Klasse umfaßt diejenigen Stellen α, wo eine M_3 osculirt und überdies noch zweimal, etwa in γ und δ, berührt. Coincidenzen dieser Klasse sind siebenfach zu rechnen. Zuvörderst entfällt von den durch eine Tangente $((\alpha^2))$ legbaren Tritangential-M_3 der R_n^4 nur eine einzige in die vorliegende: $[\alpha^2\gamma^2\delta^2]$ (wie an dem Beispiel einer R_6^4 leicht direct bestätigt werden kann), dagegen durch den Treffpunkt Q auf g außer jener noch eine zweite, wie aus dem früher studirten Verhalten der Discriminante $D[\alpha^2\beta^2]$ hervorgeht.

Andererseits lehrt das für die Discriminante der zu einer R_n^2 gehörigen Doppeltangentenform $[\alpha^2\beta^2]$ Hergeleitete, daß von den Tritangential-M_3 der R_n^4, welche sich in einer Tangente $((\gamma^2))$ schneiden, genau zwei mit $\alpha^2\gamma^2\delta^2$ zur Deckung kommen, während von dem Treffpunkt Q auf g das Nämliche gilt, wie oben. Trotzdem zählt die Coincidenz γ wiederum dreifach (wegen des Hineinrückens einer Verzweigung).

Wiederholt man die letzte Betrachtung für die Stelle δ, so erkennt man in der That, daß unsere Coincidenz $1+3+3=7$-mal zählt.

Der letzten Klasse endlich gehören die Stellen α an, für welche es zwei getrennte M_3: $\alpha^2\gamma^2\delta^2$, $\alpha^2\gamma_1^2\delta_1^2$ giebt, deren gemeinsame Ebene die Gerade g trifft.

Offenbar sind das doppelt zählende Coincidenzen. Projicirt man der Reihe nach für jede Klasse die R_n^4 von einem entsprechenden Punkte Q auf g, so ist die Projectionscurve R_n^2 der Art, daß für sie jeweils der erste, zweite, dritte und fünfte Elementarfactor der für $D[\alpha^2\beta^2\gamma^2]$ angesetzten Zerlegung verschwindet.

Entnimmt man jetzt der Tabelle C die Grade der drei erstgenannten Factoren, so bestimmt sich vermöge des Correspondenzprincips der Grad des letzten:

$$\begin{aligned}[\alpha^2\beta^2\gamma^2,\ \alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2] &= 2(n-4)(n-5)\{4(n-3)(n-4)(n-5)-3\}\\ &\qquad -3(n-2)(n-4)(n-5)\\ &\quad -21(n-4)(n-5)(n-6)-8(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)\\ &= 2(n-4)(n-5)(4n^3-52n^2+228n-345).\end{aligned}$$

Das gefundene Ergebniß läßt sich noch auf eine zweite Art begründen, indem man sich eine ähnliche Correspondenz, statt auf der Curve R_n^4, auf der Geraden g bildet.

Durch einen Punkt P auf g gehen $\frac{1}{3}(n-3)(n-4)(n-5)$ M_3 von Typus $\alpha^2\beta^2\gamma^2$; man lege durch die Tangente $((\alpha^2))$ die weiteren M_3: $\alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2$, welche g in Punkten Q treffen mögen. So entsprechen jedem Punkte P $4(n-3)(n-4)(n-5)\{2(n-4)(n-5)-1\}$ Punkte Q u. umg., sodaß die Anzahl der Coincidenzen $P = Q$ doppelt so groß ist.

Man hat wiederum vier Klassen von Coincidenzen. Entweder wird die R_n^4 von der Tangente $((\alpha^2))$ aus in eine R_n^2 mit Selbstberührung projicirt — solcher Stellen α giebt es $2(n-4).2(n-3)(n-5)$ — oder von einem Punkte $P = Q$ aus in eine R_n^3 mit einer M_3: $\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta_1^2$ resp. $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ oder endlich mit einem M_3-Paare: $\alpha^2\beta^2\gamma^2$, $\alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2$. Diese vier Arten von Coincidenzen zählen der Reihe nach einfach, $4.3.2 = 24$ fach, $3+3 = 6$ fach, $1+1 = 2$ fach. Somit liefert das Correspondenzprincip als Grad der Invariante $[\alpha^2\beta^2\gamma^2, \alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2]$ die obige Zahl:

$$4(n-3(n-4)(n-5)\{2(n-4)(n-5)-1\} - 8(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)$$
$$- 18(n-4)(n-5)(n-6) - 4(n-3)(n-4)(n-5)$$
$$= 2(n-4)(n-5)(4n^3-52n^2+228n-345)$$

q. e. d.

Nunmehr lassen sich die unbekannten Exponenten a, b, c, d, e des Zerlegungsansatzes:

$$D[\alpha^2\beta^2\gamma^2] = [\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha\beta\gamma)]^a [\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2]^b [\alpha^2\beta^2\gamma^2]^c [\alpha^4\beta^2]^d [\alpha^2\beta^2\gamma^2, \alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2]^e$$

durch Auflösung einfacher diophantischer Gleichungen ermitteln. Nach Gleichsetzung der beiderseitigen Grade und Weglassung des gemeinsamen Factors $2(n-4)(n-5)$ kommt:

$$8(n-3)(n-4)(n-5) - 2 = \left(a - \frac{3\varepsilon}{2}\right)(n-2) + \frac{b-12\varepsilon}{3}(n-6)(n-7)$$
$$+ 3\left(c - \frac{7\varepsilon}{2}\right)(n-6) + 4e(n-3)(n-4)(n-5) - 3e + 4d.$$

Der Coefficient von n^3 ist links 8, rechts $4e$, mithin $e = 2$. Setzt man dies ein, so bleibt:

$$0 = (a-3)(n-2) + \frac{b-24}{3}(n-6)(n-7) + 3(c-7)(n-6) - 4(1-d).$$

Da der Coefficient von n^3 verschwinden muß, so gilt $b = 24$. Für $n = 6$ ergiebt sich $4(a-3) = 4(1-d)$, oder $a+d = 4$, während für $n = 2 : 3(7-c) = 1-d$ wird.

Von den drei Möglichkeiten $a = 3$, $d = 1$; $a = d = 2$; $a = 1$, $d = 3$ sind die beiden letzteren auszuschließen, da sie keinen ganzzahligen Werth von c zulassen würden.

$d = 1$ hat aber $c = 7$ zur Folge.

Demnach existirt nur das einzige Lösungssystem:

$$a = 3,\ b = 24,\ c = 7,\ d = 1,\ e = 2.$$

Was die weiteren Zerlegungen unserer Discriminanten und Resultanten angeht, so möge nunmehr eine kürzere Fassung gestattet sein.

Für die Discriminante der Quadrisecantenform besteht die vorläufige Zerfällung:

$$D[(\alpha\beta\gamma\delta)] = [(\alpha\beta\gamma\delta)^2]^a\,[(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)]^b\,[(\alpha^2\beta\gamma)]^c \cdot$$
$$+ [((\alpha\beta))]^d \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2} \cdot [(\alpha\beta\gamma\delta),\ (\alpha\beta_1\gamma_1\delta_1)]^e$$

wo die Zahl d ev. auch rational sein könnte.

Der erste Factor entspricht der Erscheinung, daß zwei Quadrisecanten consecutiv werden (ohne sich jedoch zu schneiden); die übrigen sind ohne Weiteres zu interpretiren. Der Grad des fünften Factors wird wieder indirect vermöge einer geeigneten Correspondenz auf der Curve R_n^4 gewonnen, und nimmt den Werth an:

$$\tfrac{1}{3}(n-2)(n-3)(n-4)\left\{\tfrac{1}{12}(n-2)(n-3)^2(n-4) - 1\right\}$$
$$- (n-1)(n-2)(n-4)(n-5)$$
$$- \tfrac{5}{4}(n-2)(n-3)(n-4)^2(n-5) - \tfrac{1}{8}(n-1)(n-2)^2(n-3)(n-4)(n-5)$$
$$= \tfrac{1}{12}(n-2)(n-4)(n-5)(n-6)(8n^2-41n^2+30n+111).$$

Durch Gradvergleichung und Weglassung des Factors $(n-2(n-4)$ gelangt man jetzt zur Identität:

$$\tfrac{2}{3}(n-3)\left\{\tfrac{1}{3}(n-2)(n-3)^2(n-4)-1\right\} = \frac{a-2e}{2}(n-1)(n-5)$$

$$+\frac{b-30e}{24}(n-3)(n-4)(n-5)+2c(n-3)+\frac{2d-e}{8}(n-1)(n-2)(n-5)$$

$$+\frac{e}{9}(n-2)(n-3)^2(n-4)-\frac{4e}{3}(n-3).$$

Die Gleichsetzung der Coefficienten von n^5 giebt $e=2$. Damit verwandelt sich die Identität in:

$$0 = \frac{a-4}{2}(n-1)(n-5)+\frac{b-60}{24}(n-3)(n-4)(n-5)$$

$$+\frac{d-1}{4}(n-1)(n-2)(n-5)$$

$$+2(c-1)(n-3).$$

Für $n=5$ schließt man $c=1$, sodann für $n=1: b=60$, endlich für $n=2: a=4$, was von selbst $d=1$ zur Folge hat.

Es resultirt daher das einzige Werthsystem:

$$a=4,\ b=60,\ c=1,\ d=1,\ e=2.$$

Von den zehn Resultanten der fünf Singularitätenformen sind uns drei bereits von früher her bekannt; weitere drei stellen sich als irreducibel heraus, sodaß nur noch vier Zerlegungen in Betracht kommen.

Dies sind erstens $R[\alpha^4, \alpha^2\beta^2\gamma^2]$; zweitens $R[\alpha^2\beta^2, \alpha^2\beta^2\gamma^2]$; drittens $R[(\alpha\beta\gamma\delta), (\alpha^2\beta)]$, viertens $R[\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha^2\beta)]$.

Erstens. $R[\alpha^4, \alpha^2\beta^2\gamma^2] = [\alpha^4, \alpha^2\beta^2\gamma^2]^2 \cdot [\alpha^4\beta^2]^3$.

$$12(n-3)(n-4)(n-5) = 4a(n-4)(n-5)(3n-11)+8b(n-4)(n-5).$$

$a=1,\ b=1.$

Zweitens. $R[\alpha^2\beta^2, \alpha^2\beta^2\gamma^2] = [\alpha^2\delta^2, \alpha^2\beta^2\gamma^2]^a \cdot [\alpha^4\beta^2]^b \cdot [\alpha^2\beta^2\gamma^2]^c$.

$$20(n-3)(n-4)^2(n-5) = 4a(n-4)(n-5)(5n^2-38n+74)$$

$$+8b(n-4)(n-5)+6c(n-4)(n-5)(n-6).$$

$a=1,\ b=2,\ c=2.$

Drittens. $R[(\alpha\beta\gamma\delta), (\alpha^2\beta)] = ((\alpha\beta))^{a(n-3)(n-4)} \cdot [(\alpha^2\beta\gamma)]^b \cdot [(\alpha\beta\gamma\delta), (\alpha^2\varepsilon)]^c$.

$$(n-2)^2(n-3)^2(n-4) = \frac{a}{2}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$
$$+ 2b(n-2)(n-3)(n-4) + c(n-\tfrac{1}{2})(n-2)(n-3)(n-4)(n-5).$$
$$a = 1,\ b = 2,\ c = 1.$$

Viertens $R[\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha^2\beta)] = [\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha^2\beta)]^a \cdot [\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha^2\delta)]^b \cdot$

$$8(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) = 12a(n-2)(n-4)(n-5)$$
$$+ 8b(n-2)(n-4)(n-5)(n-6).$$
$$a = 2,\ b = 1.$$

Im dritten Falle ist der letzte Elementarfactor, in den beiden ersten jedesmal der erste indirect untersucht worden, wiederum mit Hülfe von Correspondenzen auf der R_n^4.

In den folgenden drei Tabellen stellen wir noch einmal alle Ergebnisse übersichtlich zusammen; in der ersten die fünf Singularitätenformen mit ihren Graden in α, wie in den δ, in der zweiten die Zerlegungen der fünf Discriminanten und zehn Resultanten, in der letzten endlich der 24 Elementarfactoren Gewichte (aus denen vermöge Streichung des Factors $2(n-3)$ die bez. Grade hervorgehen), geordnet nach dem Grade in n.

Tabelle A.

Die fünf Singularitätenformen.

		Grad in α.	Grad in den δ.
Ebenen	$[\alpha^4]$	$4(n-3)$	1
„ „	$[\alpha^3\beta^3]$	$6(n-3)(n-4)$	$2(n-4)$
„ „	$[\alpha^3\beta^3\gamma^3]$	$4(n-3)(n-4)(n-5)$	$2(n-4)(n-5)$
Gerade	$[(\alpha^2\beta)]$	$2(n-2)(n-3)$	$n-2$
„ „	$[(\alpha\beta\gamma\delta)]$	$\frac{1}{3}(n-2)(n-3)^2(n-4)$	$\frac{1}{3}(n-2)(n-3)(n-4)$.

Tabelle B.

Die Zerlegungen der fünf Discriminanten und zehn Resultanten.

Discriminanten.

$$D[\alpha^4] = [(\alpha^2)] \cdot [\alpha^2] \cdot$$
$$D[\alpha^3\beta^3 = [(\alpha^2)]^{(2n-3)(2n-6)}[\alpha^5] \cdot [\alpha^4\beta^2] \cdot [\alpha^3\beta^3]^6 \cdot [\alpha^3\beta^3\gamma^3]^2 \cdot [\alpha^3\beta^3, (\alpha^2\beta)]$$
$$D[\alpha^3\beta^3\gamma^3] = [\alpha^3\beta^3\gamma^3, (\alpha\beta\gamma)]^2\,[\alpha^3\beta^3\gamma^3\delta^3)^{24}\,[\alpha^3\beta^3\gamma^3]^7\,[\alpha^4\beta^2] \cdot [\alpha^3\beta^3\gamma^3, \alpha^3\beta_1^3\gamma_1^3]^2 \cdot$$
$$D[(\alpha^2\beta)] = [(\alpha^2)] \cdot [(\alpha^2\beta\gamma)]^3\,[((\alpha\beta))]^2\,[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)] \cdot$$
$$D[(\alpha\beta\gamma\delta)] = [(\alpha\beta\gamma\delta)^2]^4\,[(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)]^{20}\,[(\alpha^2\beta\gamma)]\,[((\alpha\beta))]^{\frac{1}{2}(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}[(\alpha\beta\gamma\delta), (\alpha\beta_1\gamma_1\delta_1)]^2 \cdot$$

Resultanten.

$$R\{[\alpha^4],[\alpha^2\beta^2]\} = [\alpha^4\beta^2]\cdot[(\alpha^3)]^{2(n-4)}\cdot[\alpha^5]^2\cdot$$

$$R\{[\alpha^4],[\alpha^2\beta^2\gamma^2]\} = [\alpha^4,\alpha^2\beta^2\gamma^2]\cdot[\alpha^4\beta^2]$$

$$R\{[\alpha^4],[(\alpha^2\beta)]\} = [\alpha^4,(\alpha^2\beta)][(\alpha^3)]^2\cdot$$

$$R\{[\alpha^4],[(\alpha\beta\gamma\delta)]\} = [\alpha^4,\alpha\beta\gamma\delta)]\cdot$$

$$R\{[\alpha^3\beta^2],[\alpha^2\beta^2\gamma^2]\} = [\alpha^3\delta^2,\alpha^2\beta^2\gamma^2][\alpha^4\beta^2]^2\cdot[\alpha^2\beta^2\gamma^2]^2$$

$$R\{[\alpha^3\beta^2],[(\alpha^3\beta)]\} = [(\alpha^3)]^{2(n-4)}[\alpha^3\beta^2,(\alpha^2\beta)]^2\cdot[\alpha^3\beta^2,(\alpha^2\gamma)]$$

$$R\{[\alpha^3\beta^2],[(\alpha\beta\gamma\delta)]\} = [\alpha^3\varepsilon^2,(\alpha\beta\gamma\delta)]$$

$$R\{[\alpha^2\beta^2\gamma^2],[(\alpha^3\beta)]\} = [(\alpha^3\delta),\alpha^2\beta^2\gamma^2]\cdot[(\alpha^3\beta),\alpha^2\beta^2\gamma^2]^2$$

$$R\{[\alpha^2\beta^2\gamma^2],[(\alpha\beta\gamma\delta)]\} = [\alpha^2\varepsilon^2\zeta^2,(\alpha\beta\gamma\delta)]$$

$$R\{[(\alpha^2\beta)],[(\alpha\beta\gamma\delta)]\} = [((\alpha\beta))]^{(n-3)(n-4)}[(\alpha^2\beta\gamma)]^2\cdot[(\alpha\beta\gamma\delta),(\alpha^2\varepsilon)].$$

Tabelle C.

Gewichte der 24 Invarianten.

1. $[\alpha^5]$	$10(n-3)(n-4)$
2. $[(\alpha^3)]$	$6(n-2)(n-3)$
3. $[\alpha^4\beta^2]$	$16(n-3)(n-4)(n-5)$
4. $[\alpha^3\beta^3]$	$9(n-3)(n-4)(n-5)$
5. $[\alpha^4,(\alpha^2\beta)]$	$12(n-2)(n-3)(n-4)$
6. $[\alpha^3\beta^2,(\alpha^2\beta)]$	$14(n-2)(n-3)(n-4)$
7. $[((\alpha\beta))]$	$(n-1)(n-2)(n-3)$
8. $[\alpha^3\beta^2\gamma^2]$	$12(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$
9. $[\alpha^4,\alpha^2\beta^2\gamma^2]$	$8(n-3)(n-4)(n-5)(3n-11)$
10. $[\alpha^3\beta^2\gamma^2,(\alpha\beta\gamma)]$	$4(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$
11. $[(\alpha^2\gamma),\alpha^3\beta^2]$	$20(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$
12. $[(\alpha^2\beta\gamma)]$	$4(n-2)(n-3)^2(n-4)$
13. $[\alpha^2\beta^2\gamma^2,(\alpha^2\beta)]$	$24(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$
14. $[\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2]$	$\frac{1}{3}(n-3)(n-4)(n-5)(n-5)(n-7)$
15. $[\alpha^3\delta^2,\alpha^2\beta^2\gamma^2]$	$8(n-3)(n-4)(n-5)(5n^2-38n+74)$
16. $[(\alpha^2\delta),\alpha^2\beta^2\gamma^2]$	$16(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$
17. $[\alpha^4,(\alpha\beta\gamma\delta)]$	$\frac{10}{3}(n-2)(n-3)^2(n-4)$
18. $[(\alpha\beta\gamma\delta)^2]$	$(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$

19. $[\alpha^3\beta^2\gamma^2, \alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2]$ $4(n-3)(n-4)(n-5)(4n^3-52n^2+228n-345)$

20. $[\alpha^2\varepsilon^2, (\alpha\beta\gamma\delta)]$ $\frac{16}{3}(n-2)(n-3)^2(n-4)^2$

21. $[(\alpha^2\varepsilon), (\alpha\beta\gamma\delta)]$ $(2n-1)(n-2)(n-3)^2(n-4)(n-5)$

22. $[(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)]$ $\frac{1}{12}(n-2)(n-3)^2(n-4)^2)(n-5)$

23. $[\alpha^2\varepsilon^2\zeta^2, (\alpha\beta\gamma\delta)]$ $4(n-2)(n-3)^2(n-4)^2(n-5)$

24. $[(\alpha\beta\gamma\delta),(\alpha\beta_1\gamma_1\delta_1)]\frac{1}{36}(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(8n^3-41n^2+30n+111)$.

Man bemerkt, daß die an den Gewichtszahlen der früher berechneten zehn Invarianten gemachten Beobachtungen zum Theil auch für die neu hinzutretenden dreizehn Bildungen gültig bleiben, zum Theil aber auch verloren gehn.

Nach wie vor ist der Grad in n um die Einheit größer, als die Anzahl der jedesmal links stehenden, von einander verschiedenen Argumente. Dem Auftreten der linearen Factoren $(n-1)$, $(n-2)$, $(n-3)$, ... entspricht es, daß das bez. singuläre Ereigniß bei Curven von der Ordnung 1, 2, 3 . . . noch nicht eintreten kann, während umgekehrt das Fehlen des Factors $n-1$ resp. $n-2$ ein Zeichen dafür ist, daß die Gerade resp. der Kegelschnit die gemeinte Singularität (in uneigentlichem Sinne) zuläßt.

Dagegen stößt man jetzt in einigen Fällen auch auf rationale Factoren von der Form $n-a$, wo a nicht mehr ganzzahlig ist, wie $n-\frac{11}{3}$ (No. 9) und $n-\frac{1}{2}$ (No. 21), weiterhin auf quadratische und cubische Factoren der Art (No. 15, 19, 24), die einer Zerspaltung in rationale Linearfactoren widerstehn. Endlich kann auch da, wo nur Factoren vom Typus $n-1$, $n-2$, $n-3$ . . . eingehen, die Symmetrie nach der Mitte hin aufgehoben sein, wie bei No. 20, 23.

Wir gehen dazu über, nach Anleitung der letzten Mittheilung auch für die neu gewonnenen Zerlegungen die Vielfachheit der einzelnen Elementarfactoren unmittelbar aus dem Verhalten der Anfangsglieder der Singularitätenformen selbst zu erkennen. Indessen mag die Vorführung der Fälle, in denen der betr. Exponent die Einheit übersteigt, genügen.

Handelt es sich also z. B. um die Singularität $\alpha^4\beta^2$, so mache man die linken Seiten der Bedingungen, welche nothwendig und hinreichend sind, damit dieselbe in der canonischen Form $0^4\beta^2$ eintrete, mit einer beliebig kleinen Größe ε proportional, und entwickele die betheiligten Singularitätenformen nach aufsteigenden

Potenzen von α soweit, als die successiven Coefficienten den Factor ε (ein oder mehrmals) zulassen. So hat man hier:

$$[\alpha^4] = \varepsilon + \ldots; \quad [\alpha^3\beta^2] = \varepsilon + a\varepsilon\alpha + \ldots; \quad [\alpha^2\beta^2\gamma^2] = \varepsilon + b\varepsilon\alpha + \ldots$$

sodaß die Resultante der ersten und zweiten, wie der ersten und dritten Form, ferner die Discriminanten der beiden letzten Formen mit der ersten Potenz von ε vergleichbar werden, und allein die Resultante der beiden letzten Formen mit der zweiten Potenz von ε. Damit weiß man zugleich, daß der Elementarfactor $[\alpha^4\beta^2]$ überall nur einmal auftritt, ausgenommen die Zerlegung von $R\{[\alpha^3\beta^2], [\alpha^2\beta^2\gamma^2]\}$, wo er sich zum Quadrat erhebt.

Danach sollen die noch in Frage kommenden Vielfachheiten der Reihe nach kurz erledigt werden.

No. 8. $[\alpha^3\beta^2\gamma^2]$. Zunächst kommt, bei Verlegung von α nach der Stelle Null:

$$[\alpha^3\beta^2] = \varepsilon^2 + a\varepsilon\alpha + \ldots; \quad [\alpha^2\beta^2\gamma^2] = \varepsilon + b\varepsilon\alpha + \ldots$$

Somit steigt ε in der Discriminante der ersten, wie in der Resultante beider Formen bis zum zweiten Grade an. Dagegen ist für die Discriminante von $[\alpha^2\beta^2\gamma^2]$ die erste Potenz von ε erst ein einzelner Beitrag. Die beiden weiteren Beiträge erzielt man, wenn man nunmehr β resp. γ zur Stelle Null macht. Dann wird:

$$[\alpha^2\beta^2\gamma^2] = \varepsilon^2 + \varepsilon c\beta + \ldots, \quad [\alpha^2\beta^2\gamma^2] = \varepsilon^2 + \varepsilon d\gamma + \ldots$$

es muß indessen, wie eine genauere Untersuchung lehrt, ganz wie bei $n = 2$, beidemal die dritte Potenz von ε als Factor berücksichtigt werden. So entsteht durch Zusammenfassung die $1 + 3 + 3 = 7^{\text{te}}$ Potenz von $[\alpha^2\beta^2\gamma^2]$, wie die Tabelle B bestätigt.

No. 10. $[\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha\beta\gamma)]$. Jede der drei Stellen α, β, γ ist gleichberechtigt. Man hat etwa für $\alpha = 0$:

$$[\alpha^2\beta^2\gamma^2] = \varepsilon + a\varepsilon\alpha + \ldots$$

und die Discriminante wird also ε zur ersten, somit allgemein den Factor $[\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha\beta\gamma)]$ zur $3.1 = 3^{\text{ten}}$ Potenz enthalten.

Dieselbe Betrachtung ist fast wörtlich für die Invariante No. 18: $[(\alpha\beta\gamma\delta)^2]$ zu wiederholen; ihre Vielfachheit in der Discriminante von $[(\alpha\beta\gamma\delta)]$ muß die $4.1 = 4$fache sein.

No. 12. $[(\alpha^2\beta\gamma)]$. Für $\alpha = 0$ sind die Entwickelungen:

$$[(\alpha^2\beta)] = \varepsilon^2 + a\varepsilon\alpha + \ldots; \quad [\alpha\beta\gamma\delta)] = \varepsilon + b\varepsilon\alpha + \ldots,$$

und der Factor $[(\alpha^2\beta\gamma)]$ tritt in der That bei $D[(\alpha^2\beta)]$ und $R\{[(\alpha^2\beta)], [(\alpha\beta\gamma\delta)]\}$ doppelt, bei $D[\alpha\beta\gamma\delta)]$ nur einmal auf.

No. 14. $[\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2]$.

$$[\alpha^2\beta^2\gamma^2] = \varepsilon^3 + a_1\varepsilon^2\alpha + a_2\varepsilon\alpha^2 + \ldots$$

Die Discriminante wird mit ε^6 vergleichbar. Wegen der Gleichberechtigung der vier Argumente ist der Exponent von $[\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2]$ in der Zerlegung von $D[\alpha^2\beta^2\gamma^2]$ gleich $4.6 = 24$.

Ganz analog gestaltet sich die Untersuchung von No. 22: $[(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)]$. Die Entwickelung von $[(\alpha\beta\gamma\delta)]$ beginnt mit ε^4, die Discriminante ist noch durch ε^{12} theilbar, also allgemein durch die 5. $12 = 60^{te}$ Potenz von $[(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)]$.

No. 19. $[\alpha^2\beta^2\gamma^2, \alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2]$.

$$[\alpha^2\beta^2\gamma^2] = \varepsilon^3 + a\varepsilon\alpha + \ldots$$

Die Discriminante läßt ε, also auch die Invariante doppelt als Factor zu. Ganz analog für No. 24: $[(\alpha\beta\gamma\delta), (\alpha\beta_1\gamma_1\delta_1)]$.

Eine besondere Stellung nimmt der Elementarfactor No. 7: $[((\alpha\beta))]$ ein, insofern er zu Exponenten Veranlassung giebt, die von der Ordnung n der Curve abhängig sind. Es hat das darin seinen Grund, daß durch einen Doppelpunkt $((\alpha\beta))$ einer R_n^2 $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ Quadrisecanten $(\alpha\beta\gamma\delta)$ an dieselbe gehen. Es gilt:

$$[(\alpha^2\beta)] = \varepsilon + a\varepsilon\alpha + \ldots; \quad [(\alpha\beta\gamma\delta)] = \varepsilon^{\frac{1}{2}(n-3)(n-4)} + b\varepsilon^{\frac{1}{2}(n-3)(n-4)-1}.\alpha + \ldots$$

Die Discriminante der ersten Form wird mit ε^1, die der zweiten mit $\varepsilon^{\frac{(n-3)(n-4)}{2}.\frac{(n-3)(n-4)}{2}-1} = \varepsilon^{\frac{1}{2}(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}$, endlich die Resultante beider mit $\varepsilon^{\frac{1}{2}(n-3)(n-4)}$ vergleichbar. Wegen der Gleichberechtigung von α und β erhöhen sich aber für den Elementarfactor $[((\alpha\beta))]$ selbst die angegebenen Exponenten auf das Doppelte.

Die bisher herangezogenen Methoden machen Verallgemeinerungen auf Curven R_n^d in Räumen von d Dimensionen ausführbar. (Vgl. die dritte Mittheilung). Es mögen hier noch zwei naheliegende und besonders interessante Fälle der Art eine Erwähnung finden, die Zerlegungen der Discriminanten $D[\alpha_1^2\alpha_2^2 \ldots \alpha_d^2]$ und $D[(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2d-2})]$:

$$D[\alpha_1^2\alpha_2^2\ldots\alpha_d^2] = [\alpha_1^2\alpha_2^2\ldots\alpha_d^2, (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_d)]^d \cdot [\alpha_1^2\alpha_2^2\ldots\alpha_{d+1}^2]^{(d+1)d(d-1)} \cdot [\alpha_1^2\alpha_2^2\ldots\alpha_d^2]^{3d-2}$$
$$+ [\alpha_1^4\alpha_2^2\ldots\alpha_{d-1}^2] \cdot [\alpha_1^2\alpha_2^2\ldots\alpha_d^2, \alpha_1^2\beta_2^2\ldots\beta_d^2]^2.$$

$$D[(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2d-2})] = [(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2d-2})^2]^{3d-3} [(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2d-1})]^{(2d-1)(2d-2)(3d-3)} \cdot$$
$$+ [(\alpha_1^2\alpha_2\ldots\alpha_{2d-3})] \cdot [(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2d-2}), (\alpha_1\beta_2\ldots\beta_{2d-2})]^2.$$

Lehrreich ist wiederum der Vergleich mit den untersten Fällen $d = 2$ und $d = 3$, die einige bemerkenswerthe Besonderheiten aufweisen.

Für $d = 2$ werden bei der ersten Zerlegung die Exponenten $d, (d+1)d(d-1), 3d-2, 1$ des ersten, zweiten, dritten und vierten Factors genau die früher abgeleiteten 2, 6, 4, 1.

Der letzte Factor: $[\alpha_1^2\alpha_2^2, \alpha_1^2\beta_2^2]^2$ dagegen ergiebt die Existenz einer Spitze (α_1^2), und liefert insofern den Bestandtheil $[(\alpha_1^2)]^{(2n-6)(2n-7)}$.

Für $d = 3$ entsteht aus der Zerlegung von $D[\alpha_1^2\alpha_2^2\ldots\alpha_d^2]$ ohne Weiteres diejenige von $D[\alpha^2\beta^2\gamma^2]$.

Die zweite Zerlegung ist bereits für $d = 3$ zu modificiren. Der letzte Factor spaltet sich nämlich in die beiden rationalen Theile $[((\alpha\beta))]^{\frac{1}{2}(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}$ und $[(\alpha\beta\gamma\delta), (\alpha\beta_1\gamma_1\delta_1)]^2$, während er für $d = 2$ überhaupt noch nicht existiren kann. Dagegen verhalten sich die übrigen Factoren regulär.

Die hiermit geleisteten Zerfällungen der Discriminanten und Resultanten der fünf, für Raumcurven überhaupt in Betracht zu ziehenden Singularitätenformen bilden das Substrat für eine Untersuchung über die Realität der jeweils coincidirenden Singularitäten: in der That hängt dieselbe nach von H. Brill angegebenen Sätzen im Wesentlichen von den Exponenten der irreducibelen Factoren jener Formen, insbesondere von deren Gerade- resp. Ungeradesein, ab.

Clausthal, den 28. October 1890.

Zur Integration der Gleichung $\Delta\Delta u = 0$ für ebene Bereiche.

Von

O. Venske.

Vorgelegt in der Sitzung am 8. November 1890.

Ich werde im Folgenden einige für specielle ebene Bereiche zur Lösung der Randwertaufgabe der Gleichung

$$\Delta\Delta u = 0$$

führende Methoden auseinandersetzen.

Unter „Randwertaufgabe" verstehe ich folgende Aufgabe:

Es soll eine in einem berandeten Bereiche stetige Lösung obiger Differentialgleichung gefunden werden, welche auf dem Rande gegebene Werte $\bar{u}$ und $\frac{d\bar{u}}{dn}$ annimmt.

Eine Function, welche im Innern eines berandeten Bereiches mit Ausnahme eines Punktes, in welchem sie logarithmisch unendlich wird, der in Rede stehenden Differentialgleichung genügt, und welche auf dem Rande nebst der Ableitung nach der Normalen verschwindet, spielt in der Theorie der Differentialgleichung $\Delta\Delta u = 0$ eine ähnliche Rolle, wie die Green'sche Function in der Theorie des logarithmischen Potentials. Sie ermöglicht die Berechnung von Δu aus den Randwerten $\bar{u}$ und $\frac{d\bar{u}}{dn}$ durch bloße Quadratur[1]). Diese Function wird im Folgenden mit v bezeichnet und „zweite Green'sche Function" genannt.

1.

Lösung der Randwertaufgabe für den Kreis, den Kreisring und den Winkelraum.

Im Folgenden wird der Satz zu Grunde gelegt, daß sich jede Lösung der Gleichung $\Delta\Delta u = 0$ in die Form bringen läßt

$$u = U + r^2 V,$$

wo U und V logarithmische Potentiale bedeuten, und r der Radiusvector in einem Polarcoordinatensystem ist.

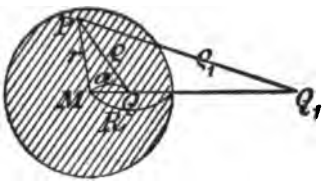
1) Vgl. Mathieu, Journal de Liouville 1869, pg. 385.

a) Lösung für den Kreis.

Entwickelt man U und V in Reihen, welche nach ganzen Potenzen von r fortschreiten, und macht den Ansatz

$$u = \sum_{i=0,1,2,\ldots}^{\infty} \{(a_i r^i + a_i' r^{i+2}) \cos i\varphi + (b_i r^i + b_i' r^{i+2}) \sin i\varphi\},$$

so gelingt die Coefficientenbestimmung in der Weise, daß $\bar{u}$ und $\frac{d\bar{u}}{dn}$ auf der Kreisperipherie ($r = R$) gegebene Werte annehmen, mit Hülfe des Fourier'schen Satzes.



Die zweite Green'sche Function, deren Berechnung durch den obigen Ansatz ermöglicht ist, besitzt den Wert

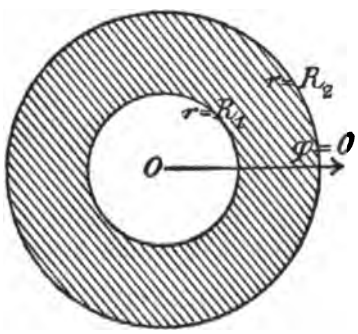
$$v = l\frac{\varrho R}{\varrho_1 a} + \left(\frac{r^2}{R^2} - 1\right)\left(-\tfrac{1}{2} + \frac{dl\varrho_1}{dlr}\right).$$

In dieser Formel haben die Größen ϱ und ϱ_1 die Bedeutung der Abstände des Punktes $P = (r, \varphi)$ vom Pole Q der Function v und seinem Thomson'schen Bilde Q_1 bezüglich der Kreisperipherie.

b) Lösung für den Kreisring.

Wir nehmen für U und V Entwickelungen nach ansteigenden und absteigenden Potenzen von r und setzen

$$u = \sum_{i=0,1,2,\ldots}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} (a_i r^i + a_i' r^{i+2} + a_i'' r^{-i} + a_i''' r^{-i+2}) \cos i\varphi \\ + (b_i r^i + b_i' r^{i+2} + b_i'' r^{-i} + b_i''' r^{-i+2}) \sin i\varphi \end{array} \right\}.$$



Durch den Fourier'schen Satz lassen sich die Coefficienten so bestimmen, daß $\bar{u}$ und $\frac{d\bar{u}}{dn}$ auf den begrenzenden Kreisperipherieen gegebene Werte erhalten.

c) Lösung für den Winkelraum von der Oeffnung $\alpha\pi$.

Es werde die zu V conjugierte Function mit V_1 bezeichnet und folgende neue Benennung eingeführt:

$$r^2 V \cos\frac{2\varphi}{\alpha} - r^2 V_1 \sin\frac{2\varphi}{\alpha} = W.$$

Die Größen r und φ sind Polarcoordinaten in einem Systeme, dessen Anfangspunkt mit dem Scheitel, und dessen Axe mit der Halbierungslinie des gegebenen Winkels zusammenfällt. Infolge der Bedeutung, welche die Größen V und V_1 haben, ist W ein logarithmisches Potential, und die Randwertaufgabe kommt darauf hinaus, zwei logarithmische Potentiale U und W zu finden, welche die Eigenschaft haben, daß auf den Schenkeln des gegebenen Winkels die Größen

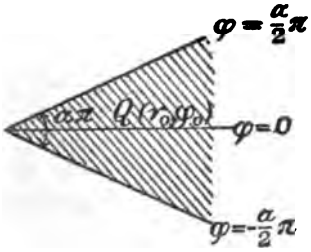
$$U - W, \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} - \frac{\partial W}{\partial \varphi} - \frac{2}{\alpha} W_1$$

gegebene Werte annehmen. Diese Aufgabe läßt sich durch den Ansatz

$$U = \int_0^\infty \{(a_\mu e^{\mu\varphi} + a'_\mu e^{-\mu\varphi}) \cos\mu lr + (b_\mu e^{\mu\varphi} + b'_\mu e^{-\mu\varphi}) \sin\mu lr\} d\mu$$

und einen ähnlichen für W lösen.

Die zweite Green'sche Function, deren Berechnung somit



möglich ist, besitzt, wenn α eine ganze Zahl ist, den Wert

$$v = 2\sin(\varphi + \tfrac{1}{2}\alpha\pi)\Big(\sin(\varphi + \tfrac{1}{2}\alpha\pi)\frac{\partial l\Big(r^{\frac{2}{\alpha}} + r_0^{\frac{2}{\alpha}} + 2r^{\frac{1}{\alpha}} r_0^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\varphi+\varphi_0}{\alpha}\Big)}{\partial lr}$$

$$+ \cos(\varphi + \tfrac{1}{2}\alpha\pi)\frac{\partial l\Big(r^{\frac{2}{\alpha}} + r_0^{\frac{2}{\alpha}} + 2r^{\frac{1}{\alpha}} r_0^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\varphi+\varphi_0}{\alpha}\Big)}{\partial \varphi}\Big)$$

$$+ l\frac{\Big(r^{\frac{2}{\alpha}} + r_0^{\frac{2}{\alpha}} - 2r^{\frac{1}{\alpha}} r_0^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\varphi-\varphi_0}{\alpha}\Big)}{\Big(r^{\frac{2}{\alpha}} + r_0^{\frac{2}{\alpha}} + 2r^{\frac{1}{\alpha}} r_0^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\varphi+\varphi_0}{\alpha}\Big)}.$$

Hierbei ist angenommen, daß der Pol Q der Function v im Punkte (r_0, φ_0) liegt.

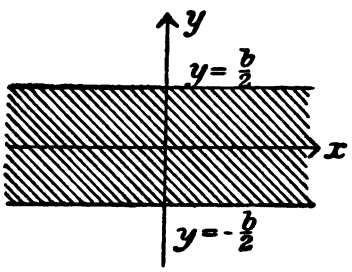
2.

Lösung der Randwertaufgabe für den Parallelstreifen.

Es werde ein orthogonales Coordinatensystem zu Grunde gelegt. Jede Function, welche der Differentialgleichung $\Delta\Delta u = 0$ genügt, läßt sich in die Form setzen

$$u = U + yV,$$

wo wiederum die Functionen U und V logarithmische Potentiale sind.



Macht man nun den Ansatz

$$U = \int_0^\infty \{(a_\mu e^{\mu y} + a'_\mu e^{-\mu y}) \cos \mu x + (b_\mu e^{\mu y} + b'_\mu e^{-\mu y}) \sin \mu x\} d\mu$$

und einen ähnlichen für V, so stößt die Bestimmung der Functionen $a_\mu, \cdots, b'_\mu$ in der Weise, daß den Randbedingungen Genüge geleistet wird, auf keine Schwierigkeiten.

3.

Lösung der Randwertaufgabe für ein von zwei Radien und zwei concentrischen Kreisbogen begrenztes Kreisbogenrechteck.

Die beiden Kreisbogen mögen die Radien R_1 und R_2 besitzen. Ihr Mittelpunkt sei Anfangspunkt eines Systems von Polarcoordinaten (r, φ), dessen Axe mit den geradlinigen Begrenzungsstücken die Winkel $-\frac{1}{2}\alpha\pi$ und $+\frac{1}{2}\alpha\pi$ bildet.

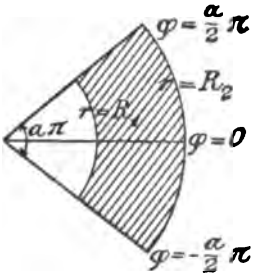
Setzt man

$$u_n = r^n V_n,$$

wobei V_n eine Function von φ allein bedeutet, und verlangt, daß

u eine Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta\Delta u = 0$$



sei, so muß V_n der Gleichung

$$\frac{d^4V_n}{d\varphi^4} + (n^2 + (n-2)^2)\frac{d^2V_n}{d\varphi^2} + n^2(n-2)^2V_n \equiv$$

$$\frac{d^4V_n}{d\varphi^4} + (2(n-1)^2 + 2)\frac{d^2V_n}{d\varphi^2} + \{(n-1)^4 - 2(n-1)^2 + 1\}V_n = 0$$

genügen. Stellt man nun noch außerdem die Forderung, daß V_n im Allgemeinen von Null verschieden ist, für $\varphi = \pm\frac{1}{2}\alpha\pi$ aber die Bedingungen

$$V_n = \frac{\partial V_n}{\partial \varphi} = 0$$

erfüllt, so wird n auf eine discrete Mannigfaltigkeit von Werten beschränkt, und V_n ist bis auf einen constanten Factor bestimmt. Aus dem Ohm'schen Princip, angewandt auf einen unter dem Einfluß gewisser Energie vernichtender Kräfte schwingenden, an beiden Enden eingeklemmten Stab, ist zu schließen, daß sich eine beliebige Lösung u der Differentialgleichung

$$\Delta\Delta u = 0,$$

welche für $\varphi = \pm\frac{1}{2}\alpha\pi$ nebst der Ableitung nach der Normalen verschwindet, in die Reihe

$$u = r\sum_n (a_n r^{n-1} + a_n' r^{-n+1})V_n$$

entwickeln läßt. Die Coefficienten bestimmen sich aus den Randwerten

$$u_{r=R_1},\ \frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{1}{r}u\right)_{r=R_1},$$

$$u_{r=R_2},\ \frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{1}{r}u\right)_{r=R_2}$$

vermittels des Integralsatzes

$$\int_{-\frac{1}{2}a\pi}^{+\frac{1}{2}a\pi}\left[\{(n-1)^2+(n_1-1)^2-2\}V_nV_{n_1}-2\frac{\partial V_n}{\partial\varphi}\frac{\partial V_{n_1}}{\partial\varphi}\right]d\varphi = 0,$$

$$(n \gtrless n_1)$$

$$2\int_{-\frac{1}{2}a\pi}^{+\frac{1}{2}a\pi}\left[\{(n-1)^2-1\}V_n^2-\left(\frac{\partial V_n}{\partial\varphi}\right)^2\right]d\varphi = \gamma^n,$$

wobei γ_n eine von Null verschiedene Größe ist. Nun läßt sich $\frac{u}{r}$ stets als Summe zweier Functionen darstellen, von denen unter der Voraussetzung $R_1R_2=1$ die eine in Bezug auf den Einheitskreis symmetrisch, die andere antisymmetrisch ist. Für beide Functionen geschieht die Coefficientenbestimmung in gleicher Weise. Es ist daher genügend, wenn die Coefficientenbestimmung nur für Functionen der ersten Art durchgeführt wird. Diese Functionen besitzen die Entwickelung

$$u = r\sum_n a_n(r^{n-1}+r^{-n+1})V_n,$$

und man erhält

$$a_n = \frac{1}{\gamma_n(R_1^{n-1}+R_1^{-n+1})}\int_{-\frac{1}{2}a\pi}^{+\frac{1}{2}a\pi}\left[\frac{d^2\left(\frac{1}{r}u\right)}{dlr^2}+((n-1)^2-2)\frac{u}{R_1}+2\frac{d^2u}{R_1d\varphi^2}\right]_{r=R_1}V_n d\varphi.$$

Setzt man diesen Wert in die Entwickelung für $\frac{u}{r}$ ein, so ergiebt sich durch Differentiation

$$R_1\left(\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}u\right)\right)_{r=R_1} =$$

$$\int_{-\frac{1}{2}a\pi}^{+\frac{1}{2}a\pi}d\psi\sum_n(n-1)\frac{R_1^{n-1}-R_1^{-n+1}}{\gamma_n(R_1^{n-1}+R_1^{-n+1})}\left(((n-1)^2-2)\frac{u(R_1,\psi)}{R_1}+\frac{2}{R_1}\frac{d^2u(R_1,\psi)}{d\psi^2}\right)V_n(\varphi)V_n(\psi)$$

$$+\int_{-\frac{1}{2}a\pi}^{+\frac{1}{2}a\pi}d\psi\left(\frac{d^2\left(\frac{1}{r}u(r,\psi)\right)}{dlr^2}\right)_{r=R_1}\sum_n\frac{(n-1)}{\gamma_n}\frac{R_1^{n-1}-R_1^{-n+1}}{R_1^{n-1}+R_1^{-n+1}}V_n(\varphi)V_n(\psi).$$

Um aus dieser Gleichung

$$\left(\frac{d^2\left(\frac{1}{r}u\right)}{dlr^2}\right)_{r=R_1}$$

durch $u_{r=R_1}$ und $\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}u\right)_{r=R_1}$ ausgedrückt zu erhalten, setzen wir

$$R_1\left(\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}u\right)\right)_{r=R_1}$$

$$-\int_{-\frac{1}{2}\alpha\pi}^{+\frac{1}{2}\alpha\pi} d\psi \sum_n \frac{n-1}{\gamma_n}\frac{R_1^{n-1}-R_1^{-n+1}}{R_1^{n-1}+R_1^{-n+1}}\left(((n-1)^2-2)\frac{u(R_1,\psi)}{R_1}+\frac{2}{R_1}\left(\frac{d^2u(R_1,\psi)}{d\psi^2}\right)\right)V_n(\varphi)V_n(\psi)$$

$$= a_0\cos\frac{\varphi}{\alpha}+b_0\sin\frac{2\varphi}{\alpha}+c_0\cos\frac{3\varphi}{\alpha}+d_0\sin\frac{4\varphi}{\alpha}+\cdots,$$

$$\sum_n \frac{n-1}{\gamma_n}\frac{R_1^{n-1}-R_1^{-n+1}}{R_1^{n-1}+R_1^{-n+1}}V_n(\varphi)V_n(\psi) = \cos\frac{\varphi}{\alpha}\left(a_1\cos\frac{\psi}{\alpha}+a_2\sin\frac{2\psi}{\alpha}+a_3\cos\frac{3\psi}{\alpha}+\cdots\right)$$
$$+\sin\frac{2\varphi}{\alpha}\left(b_1\cos\frac{\psi}{\alpha}+b_2\sin\frac{2\psi}{\alpha}+b_3\cos\frac{3\psi}{\alpha}+\cdots\right)$$
$$+\cos\frac{3\varphi}{\alpha}\left(c_1\cos\frac{\psi}{\alpha}+c_2\sin\frac{2\psi}{\alpha}+c_3\cos\frac{3\psi}{\alpha}+\cdots\right)$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\int_{-\frac{1}{2}\alpha\pi}^{+\frac{1}{2}\alpha\pi}\left(\frac{d^2\left(\frac{1}{r}u(r,\psi)\right)}{dlr^2}\right)_{r=R_1}\sin i\frac{\frac{1}{2}i\alpha\pi-\psi}{\alpha}\,d\psi = \alpha_i \qquad (i=1,2,3,\cdots)$$

und gewinnen die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_0-a_1\alpha_1+a_2\alpha_2-a_3\alpha_3+\cdots &= 0,\\ b_0-b_1\alpha_1+b_2\alpha_2-b_3\alpha_3+\cdots &= 0,\\ c_0-c_1\alpha_1+c_2\alpha_2-c_3\alpha_3+\cdots &= 0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \end{aligned}$$

Aus denselben folgt bei Benutzung der Jacobi'schen Determinantenbezeichnung

$$\alpha_1 = \frac{a_0}{a_1}+\frac{(a_0b_1)(a_2)}{(a_1b_2)(a_1)}+\frac{(a_0b_1c_2)(a_2b_2)}{(a_1b_2c_2)(a_1b_2)}+\cdots,$$

$$\alpha_2 = \frac{(a_0b_1)}{(a_1b_2)}+\frac{(a_0b_1c_2)(a_1b_2)}{(a_1b_2c_2)(a_1b_2)}+\frac{(a_0b_1c_2d_2)(a_1b_2c_4)}{(a_1b_2c_2d_4)(a_1b_2c_2)}+\cdots,$$

$$\alpha_3 = \frac{(a_0b_1c_2)}{(a_1b_2c_2)}+\frac{(a_0b_1c_2d_2)(a_1b_2c_4)}{(a_1b_2c_2d_4)(a_1b_2c_2)}+\frac{(a_0b_1c_2d_2e_4)(a_1b_2c_4d_5)}{(a_1b_2c_2d_4e_5)(a_1b_2c_2d_4)}+\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Hat man die Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ berechnet, so findet man $\left(\frac{d^2\left(\frac{1}{r}u\right)}{dlr^2}\right)_{r=R_1}$

aus der Formel

$$\left(\frac{d^2\left(\frac{1}{r}u\right)}{dlr^2}\right)_{r=R_1} = \frac{2}{\alpha\pi}\sum_i \alpha_i \sin i\frac{\frac{1}{2}i\alpha\pi-\varphi}{\alpha}.$$

Durch das Vorhergehende ist die Bestimmung einer stetigen Function ermöglicht, welche der Differentialgleichung

$$\Delta\Delta u = 0$$

genügt, für $\varphi = \pm\frac{1}{2}\alpha\pi$ nebst ihrer Ableitung nach der Normalen verschwindet und für $r = R_1, R_2$ sowohl selbst als auch bei Differentiation bezüglich der Normalen gegebene Werte annimmt.

Hierdurch ist aber der Weg gebahnt zur Herstellung der zweiten Green'schen Function für das Kreisbogenrechteck. Man bilde nämlich die zweite Green'sche Function für den Winkelraum von der Oeffnung $\alpha\pi$ und construiere auf die soeben auseinandergesetzte Weise eine stetige Function, welche der partiellen Differentialgleichung $\Delta\Delta = 0$ genügt und zu dieser Green'schen Function addiert eine Function erzeugt, die nebst ihrer Ableitung nach der Normalen auf den Begrenzungen des Kreisbogenrechtecks verschwindet. Diese letztere Function ist dann die zweite Green'sche Function für das Kreisbogenrechteck. Durch die Kenntnis derselben ist aber die Lösung der Randwertaufgabe vermittels Quadraturen ermöglicht.

Göttingen, August 1890.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

August, September und Oktober 1890.

(Fortsetzung.)

Monographie der baltischen Bernsteinbäume v. H. Conwentz. Hrsg. v. d. Naturforschenden Gesellschaft zu Danzig. Danzig 1890.

Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Leipzig 1890.

a. Berichte üb. d. Verhandlungen. Mathem.-phys. Classe. 1890. I.

b. Abhandlungen der mathem.-phys. Classe. Bd. XVI. No. 2. (W. Pfeffer: I. Ueber die Aufnahme u. Ausgabe ungelöster Körper. II. Zur Kenntniss der Plasmahaut und der Vacuolen. . . .)

Catalog der Astronomischen Gesellschaft. 4. Stück. Zone + 55° bis + 65°. Beobachtet auf den Sternwarten Helsingfors u. Gotha. — 14. Stück. Zone + 1° bis + 5°. Beobachtet auf der Sternwarte Albany. Leipzig 1890.

Jahrbuch der k. k. Geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1890. XL. Bd. 1. u. 2. Heft. Wien 1890.

Sitzungsberichte der Kgl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Mathem.-naturwiss. Classe. 1890. I. Prag 1890.

Magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag i. J. 1889. 50. Jahrg. Ebd. 1890.

Mittheilungen des Naturwiss. Vereines f. Steiermark. Jahrg. 1889 (d. g. Reihe 26. Heft.) Graz 1890.

Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau. Juli 1890. (2 Exempl.) Krakau 1890.

Jahres-Verwaltungs-Bericht der Akadem. Lesehalle an d. k. k. Franz-Josefs-Universität in Czernowitz. XXIX. u. XXX. Semester. Czernowitz 1890.

Ungarische Revue. IX. Jahrg. 1889. 4—10. Heft; X. Jahrg. 1890. 1—4. 7. 8. Heft. Budapest 1889/90.

Vierteljahrsschrift der Naturforsch. Gesellschaft in Zürich. 35. Jahrg. 1. Heft. Zürich 1890.

Royal Society of London.
a. List of the fellows of the Society. Nov. 30. 1889.
b. Philosophical transactions f. the year 1889. Vol. 180 A. B. London 1890.

Memoirs of the R. Astronomical Society. Vol. XLIX. Part. II. 1887—1889. Ebd. 1890.

Proceedings of the scientific meetings of the Zoological Society of London f. the year 1890. Part II. March et April. London (1890).

Proceedings of the London Mathematical Society. (Vol. XXXI.) No. 381—387. (London).

Linnean Society of London.
a. List of the Linn. Soc. Jan. 1890. London 1890.
b. Transactions. 2. Ser. Zoology. Vol. V. Part 4. Ebd. 1890.
c. Proceedings May 1890. From Nov. 1887 to June 1888. Ebd. 1890.
d. Journal. Botany. Vol. XXV. No. 171. 172. Vol. XXVI. No. 174. Vol. XXVII. No. 181. 182. Ebd. 1889/90.
e. Journal. Zoology. Vol. XX. No. 122. 123. Vol. XXI. No. 133—135. Vol. XXIII. No. 141—144. Ebd. 1889/90.

Journal of the R. Microscop. Society. 1890. Part 4. (2. Exempl.) Part 5. London et Edinburgh.

Proceedings and transactions of the Liverpool Biological Society. Vol. IV. Session 1889/90. Liverpool 1890.

Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Liverpool. Vol. XLI. XLII. XLIII. 1886—1889. Ebd. 1887—1889.

Royal Society of Edinburgh.
a. Transactions. Vol. XXXIII. Part III. Vol. XXXV. Part I—IV. Ebd. 1888/90.
b. Proceedings. Vol. XV. (1887—88.) Vol. XVI. (1888—89.)

Scientific proceedings of the R. Dublin Society. Vol. VI. (N. S.) Part 7—9. Dublin 1889/90.

Nature. Vol. 42. No. 1083—1095. London 1890.

Records of the Geological Survey of India. Vol. XXIII. Part III. 1890. Calcutta.

Transactions of the R. Society of South Australia. Vol. XIII. Part I. Adelaide 1890.

Transactions of the R. Society of Victoria. Vol. I. Part II. Melbourne 1889.

Maiden, J. H.: Wattles and wattle-barks ... (Department of public instruction. Technical education Series No. 6.) Sidney 1890.

Kgl. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.
a. Jaarboek voor 1889. Amsterdam. s. a.
b. Verhandelingen. (Afd. Natuurkunde.) Deel XXVII. Ebd. 1890.
c. Verslagen en mededeelingen. Afd. Naturkunde. Derde Reeks. Deel 6. 7. Ebd. 1890.

d. Verslagen en mededeelingen. Afd. Letterkunde. Derde Reeks. Deel 6. Ebd. 1889.
e. Amor. Carmen elegiacum Rudolphi van Oppenraij ... in certamine Hoeufftiano praemio aureo ornatum. Ebd. 1890.

Tijdschrift voor nederlandsche Taal- en Letterkunde. 9. Deel. (N. Reeks. 1. Deel.) 3. Afl. Leiden 1890.

Verhandelingen rakende den natuurlijken en geopenbaarden Godsdienst uitg. door Teylers godsgeleerd Genootschap. N. Ser. 12. Deel. Haarlem 1890.

Bijdragen tot de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 5. Volgreeks. 5. Deel. 4. Afl. 'sGravenhage 1880.

Flora Batava v. J. Kops en F. W. van Eeden. 289 en 290. Aflev. Leiden. s. a.

Acta Universitatis Lundensis. — Lunds Universitets Års-Skrift. Tom. XXV. 1888/89. Theologi. — Medicin. — Philosophi, Språkvetenskap och Historia. — Mathematik och Naturvetenskap. Lund 1888/89.

Sveriges offentliga Bibliothek. Stockholm, Upsala, Lund, Göteborg. Accessions-Katalog utg. af E. W. Dahlgren. 4. 1889. Stockholm 1890.

Bugge, S.: Etruskisch und Armenisch. Sprachvergleichende Forschungen. 1. Reihe. Universitätsprogr. f. d. 1. Halbjahr 1890. Christiania.

Mémoires de l'Académie Impér. des sciences de St. Pétersbourg. VII. Sér. Tome XXXVII. No. 8—10. St. Petersbourg 1890.

Annalen des physikalischen Central-Observatoriums hrsg. von H. Wild. Jahrg. 1889. Theil 1. Ebd. 1890.

Fritsche, H.: On chronology and the construction of the calendar with special regard to the Chinese computation of time compared with the European. Ebd. 1886.

Bulletin de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. Année 1890. No. 1. Moscou 1890.

Witterungs-Beobachtungen (des meteorolog. Observatoriums in Dorpat) vom Jahre 1881, 1882, 1883.

Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles 1890.
a. Bulletin. 60. Année, 3. Série, Tome 20. No. 7. 8.
b. Classe des lettres. Programme de concours pour 1891.

Annales de la Société géologique de Belgique. Tome XVII. 2. Livr. Liége 1890.

Atti del Museo civico di storia naturale di Trieste. VIII. (N. Ser. vol. II.) Trieste 1890.

R. Accademia dei Lincei.
a. Atti. Anno CCLXXXV. 1888. Serie quarta. Memorie della classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. V. Roma 1888.
b. Atti. Anno CCLXXXVII. 1890. Serie quarta. Rendiconti. Vol. VI. 1° semestre, fasc. 11. 12. 2° semestre, fasc. 1—4. Roma 1890.

Atti della Società Toscana di scienze naturali. Processi verbali. Vol. VII. 4. maggio 1890.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. XXV. Disp. 13ª. 14ª. 1889/90. Torino.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tomo IV. Anno 1890. Fasc. V. (Palermo.)

Atti e rendiconti della Accademia medico-chirurgica di Perugia. Vol. II. Fasc. II. Perugia 1890.

(Fortsetzung folgt.)

Inhalt von No. 1.

W. Newst, über das Henry'sche Gesetz. — *Franz Meyer*, über Discriminanten und Resultante von Singularitätengleichungen. — *O. Veneke*, zur Integration der Gleichung $\Delta\Delta u = 0$ für ebene Bereiche. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Stuppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

25. März. **№ 2.** 1891.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 7. März.

Voigt legt vor: „Beiträge zur Hydrodynamik. II. Reihe."

Klein legt von Herrn Prof. Franz Meyer an der Bergakademie in Clausthal vor: „Ueber Realitätseigenschaften von Raumcurven."

Schering legt von Herrn Dr. Heun in Berlin vor: „Die Schwingungsdauer des Gaussschen Bifilarpendels."

Beiträge zur Hydrodynamik. I.

Von

W. Voigt.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 7. Februar 1891.)

1. Pulsirende Kugeln oder Cylinder in einer unendlichen incompressibeln Flüssigkeit.

Die Bewegung einer unendlichen incompressibeln Flüssigkeit, welche dem Geschwindigkeitspotentiale

$$\varphi = \frac{A}{r}\cos\frac{2\pi t}{T}, \text{ worin } r^2 = (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2, \quad 1)$$

entspricht, läßt sich bekanntlich durch eine pulsirende Kugel begrenzen. Denn man erhält aus φ zunächst

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{A}{r^2}\cos\frac{2\pi t}{T}, \quad 2)$$

und hieraus

$$r^3 = r_0^3 - \frac{3TA}{2\pi} \sin\frac{2\pi t}{T},$$

worin r_0 den Werth von r zur Zeit $t = 0$ bezeichnet. Ist hierin TA klein neben r_0^3, so giebt dies auch

$$3) \qquad r = r_0 - \frac{TA}{2\pi r_0^2} \sin\frac{2\pi t}{T};$$

man kann also die obige Bewegung als hervorgebracht ansehen durch die abwechselnde Dilatation und Compression einer Kugel, deren Mittelpunkt in x', y', z' verharrt und deren Radius ϱ nach dem Gesetz

$$3') \qquad \varrho = R - a \sin\frac{2\pi t}{T}$$

variirt, welche Bewegung wir als „Pulsation" bezeichnen.

Es findet nun der merkwürdige Umstand statt, daß eine Summe von $(n+1)$ Gliedern der obigen Form (1), auf $(n+1)$ verschiedene Punkte $p_h(x_h, y_h, z_h)$ bezogen, ein Geschwindigkeitspotential ergiebt, welches eine Bewegung darstellt, die sich durch $(n+1)$ isochron pulsirende Kugeln von bestimmter Größenordnung begrenzen läßt; aber diese Kugeln haben ihre, übrigens ruhenden, Mittelpunkte nicht an den Stellen x_h, y_h, z_h sondern an anderen Orten.

Dieser Umstand ermöglicht eine sehr einfache Bestimmung der durch ein System pulsirender Kugeln erregten Bewegung der Flüssigkeit und speciell der in Folge dieser Bewegung eintretenden Wechselwirkung zwischen den einzelnen Kugeln, welche zuerst auf einem viel umständlicheren Wege von Bjerknes[1]) untersucht worden ist.

Für diese letztere Anwendung ist es bequem, in der Bezeichnung einen der $(n+1)$ Punkten $p_h(x_h, y_h, z_h)$, etwa $p_0(x_0, y_0, z_0)$, von den andern auszusondern, die übrigen in eine Summe, in Bezug auf h von 1 bis n zu nehmen, zusammenzufassen.

Wir machen demgemäß den Ansatz

$$4) \qquad \varphi = \left(\frac{A}{r} + \sum \frac{A_h}{r_h}\right) \cos\frac{2\pi t}{T},$$

wo nun ist

$$r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2,$$
$$r_h^2 = (x-x_h)^2 + (y-y_h)^2 + (z-z_h)^2.$$

1) Bjerknes, Gött. Nachr. 1876, 245; s. auch Basset, Hydrodynamik, Cambridge 1888, I, p. 248.

Zu dem Punkt p_0 wählen wir einen Nachbarpunkt p_0', der um die verfügbare Strecke δ in einer verfügbaren Richtung von p_0 entfernt liegt. Die Entfernung von p_0' nach $p(x, y, z)$ sei mit ϱ bezeichnet, der Winkel zwischen ϱ und δ — beide Strecken von p_0' hinweg positiv gerechnet — mit ψ; dann ist

$$r^2 = \varrho^2 + \delta^2 - 2\varrho\delta\cos\psi.$$

Wird ferner die Entfernung von p_0' nach p_λ mit E_λ, der Winkel zwischen E_λ und ϱ mit ψ_λ bezeichnet, so ist

$$r_\lambda^2 = E_\lambda^2 + \varrho^2 - 2E_\lambda\varrho\cos\psi_\lambda.$$

Wir wenden nun die Formel (4) an auf ein Bereich in der Nähe des Punktes p_0', welches dadurch definirt ist, daß ϱ klein neben E_λ, aber noch groß gegen δ sein soll, beides von einer sogleich zu bestimmenden Ordnung. Dann kann man φ entwickeln und schreiben

$$\varphi = \left[A\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{\delta\cos\psi}{\varrho^2} \pm ..\right) + \sum A_\lambda\left(\frac{1}{E_\lambda} + \frac{\varrho\cos\psi_\lambda}{E_\lambda^2} \pm ..\right)\right]\cos\frac{2\pi t}{T}. \quad 5)$$

Die Geschwindigkeit in der Richtung von ϱ folgt hieraus

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} = \left[-A\left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{2\delta\cos\psi}{\varrho^3} \pm ..\right) + \sum A_\lambda\left(\frac{\cos\psi_\lambda}{E_\lambda^2} \pm ..\right)\right]\cos\frac{2\pi t}{T}. \quad 6)$$

Man kann für einen Werth $\bar\varrho$ von ϱ diese Geschwindigkeit bis auf Glieder von der Ordnung $\bar\varrho^3/E_\lambda^3$ und $\delta^3/\bar\varrho^3$ von der Richtung von ϱ unabhängig machen, wenn man über die Richtung und Größe von δ so verfügt, daß

$$\frac{2A\delta\cos\psi}{\bar\varrho^3} = \sum A_\lambda\frac{\cos\psi_\lambda}{E_\lambda^2}$$

wird. Bezeichnet man die Richtungscosinus von $\bar\varrho$ mit α, β, γ, die von E_λ mit $\alpha_\lambda, \beta_\lambda, \gamma_\lambda$, die Projectionen von δ mit ξ, η, ζ, so zerfällt die letzte Gleichung, da beiderseits die Factoren von α, β, γ für sich gleich sein müssen, in die drei:

$$\frac{2A\xi}{\bar\varrho^3} = \sum\frac{A_\lambda\alpha_\lambda}{E_\lambda^2}, \quad \frac{2A\eta}{\bar\varrho^3} = \sum\frac{A_\lambda\beta_\lambda}{E_\lambda^2}, \quad \frac{2A\zeta}{\bar\varrho^3} = \sum\frac{A_\lambda\gamma_\lambda}{E_\lambda^2}, \quad 7)$$

und es wird zugleich, falls man $\bar\varrho^3$ neben E_λ^3 vernachlässigen kann,

$$\frac{d\bar\varrho}{dt} = -\frac{A}{\bar\varrho^2}\cos\frac{2\pi t}{T}.$$

Diese Formel verglichen mit (2) zeigt, daß man die durch (4) gegebene Bewegung in der Nähe von p_0 begrenzen kann durch eine Kugel um den festen Punkt p_0' von einem Radius $\bar{\varrho}$ gegeben durch

$$\bar{\varrho}^2 = R^2 - \frac{3TA}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{T},$$

falls nur A so klein ist, daß innerhalb der festgesetzten Annäherung in den Gleichungen (7) $\bar{\varrho}$ als constant anzusehen ist. Dies findet jedenfalls statt, wenn $3TA/2\pi R^2$ von der Ordnung von δ/R ist, und in diesem Falle ist zugleich

$$8) \qquad \bar{r} = R - a \sin \frac{2\pi t}{T},$$

worin $a = AT/2\pi R^2$ die Amplitude der Pulsation bezeichnet.

Da nun alle Punkte p_λ dem Punkte p_0 völlig gleichwerthig sind, so ist die obige Entwickelung für alle anwendbar, und man kann zu jedem p_λ einen Nachbarpunkt p_λ' angeben, um den sich eine Kugel von wechselndem Radius

$$8') \qquad \varrho_\lambda = R_\lambda - a_\lambda \sin \frac{2\pi t}{T},$$

construiren läßt, welche die Flüssigkeit in jenem Bereich begrenzt, wobei wieder die Amplitude der Pulsation $a_\lambda = A_\lambda T/2\pi R_\lambda^2$ ist.

Den Ort der p_λ' bestimmen dabei Formeln, welche den drei (7) analog sind; in ihnen kann man den Entfernungen E_λ, welche zunächst den Abstand der Punkte p_λ von p_0' bezeichneten, innerhalb der früheren Genauigkeitsgrenze die Bedeutung der Abstände der p_λ von p_0 selbst beilegen, sodaß nunmehr auf den rechten Seiten der Gleichungen (7) nur direct gegebene Größen stehen.

Um die Kräfte zu bestimmen, welche die Kugel um p_0' seitens aller übrigen erleidet, hat man von der Formel für den Druck $\bar{p}$ gegen dieselbe, nämlich

$$9) \qquad \bar{p} = \varepsilon \left(C - \frac{\overline{\partial \varphi}}{\partial t} - \frac{\overline{V^2}}{2} \right)$$

auszugehen und zu bilden:

$$X = \int \bar{p} \cos(n_i, x)\, do, \quad Y = \int \bar{p} \cos(n_i, y)\, do, \quad Z = \int \bar{p} \cos(n_i, z)\, do$$
$$= -\int \bar{p} \alpha\, do, \qquad = -\int \bar{p} \beta\, do, \qquad = -\int \bar{p} \gamma\, do.$$

Dabei ist

$$V^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2,$$

und nach (5) in der Nähe der Kugel um p_0', deren Centrum jetzt zum Coordinatenanfang gewählt werden mag,

$$\varphi = \Big[A\Big(\frac{1}{\varrho} + \frac{\xi x+\eta y+\zeta z}{\varrho^3}\Big) + \sum A_\lambda \Big(\frac{1}{E_\lambda} + \frac{x\alpha_\lambda + y\beta_\lambda + z\gamma_\lambda}{E_\lambda^2}\Big)\Big] \cos\frac{2\pi t}{T}; \quad 11)$$

hieraus folgt

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \Big[A\Big(-\frac{(x-\xi)}{\varrho^3} - \frac{3x(\xi x+\eta y+\zeta z)}{\varrho^5}\Big) + \sum \frac{A_\lambda \alpha_\lambda}{E_\lambda^2}\Big] \cos\frac{2\pi t}{T},$$

und bei Beschränkung auf die festgesetzte Annäherung

$$\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big)^2 = \Big[\frac{A^2x^2}{\varrho^6} - \frac{2A^2x}{\varrho^3}\Big(\frac{\xi}{\varrho^3} - \frac{3x(\xi x+\eta y+\zeta z)}{\varrho^5}\Big) - \frac{2Ax}{\varrho^3}\sum\frac{A_\lambda\alpha_\lambda}{E_\lambda^2}\Big]\cos^2\frac{2\pi t}{T},$$

so daß schließlich wird

$$V^2 = \Big[\frac{A^2}{\varrho^4} + \frac{4A^2}{\varrho^6}(\xi x+\eta y+\zeta z) - \frac{2A}{\varrho^3}\sum\frac{A_\lambda(\alpha_\lambda x+\beta_\lambda y+\gamma_\lambda z)}{E_\lambda^2}\Big]\cos^2\frac{2\pi t}{T}. \quad 12)$$

Ferner ist

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{2\pi}{T}\Big[A\Big(\frac{1}{\varrho} + \frac{\xi x+\eta y+\zeta z}{\varrho^3}\Big) + \sum A_\lambda\Big(\frac{1}{E_\lambda} + \frac{x\alpha_\lambda+y\beta_\lambda+z\gamma_\lambda}{E_\lambda^2}\Big)\Big]\sin\frac{2\pi t}{T}. \quad 12')$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Integrale für X, Y, Z ein, so erhält man für $\varrho = \bar\varrho$, da $\int\alpha^2 do = \int\beta^2 do = \int\gamma^2 do = 4\pi\bar\varrho^2/3$ ist,

$$X = -\Big\{\frac{2\pi}{T}\Big(A\xi + \bar\varrho^3\sum\frac{A_\lambda\alpha_\lambda}{E_\lambda^2}\Big)\sin\frac{2\pi t}{T} - \Big(\frac{2A^2\xi}{\bar\varrho^3} - A\sum\frac{A_\lambda\alpha_\lambda}{E_\lambda^2}\Big)\cos^2\frac{2\pi t}{T}\Big\}\frac{4\pi\varepsilon}{3}, \quad 13)$$

und ebenso die übrigen.

Nun setzen wir

$$\bar\varrho = R - a\sin\frac{2\pi t}{T},$$

entwickeln X nach Potenzen von a und bilden den Mittelwerth $\mathfrak{X}$ des Resultates für die Zeit T einer Periode; dabei verschwindet nach (7) Alles, was von dem letzten Glied herrührt, und es bleibt schließlich in der früher benutzten Annäherung:

$$\mathfrak{X} = \frac{4\pi^2\varepsilon R^2 a}{T}\sum\frac{A_\lambda\alpha_\lambda}{E_\lambda^2}.$$

Hierin benutzen wir endlich, daß die Amplitude a_λ der Pulsation für die Kugel um p_λ' gegeben ist durch $A_\lambda = 2\pi R_\lambda^2 a_\lambda/T$, und er-

halten so

$$14) \qquad \Xi = \frac{8\pi^2 \varepsilon R^3 a}{T^2} \sum \frac{R_k^3 a_k \alpha_k}{E_k^2}, \quad \text{ebenso } H \text{ und } Z.$$

Diese Formeln sagen aus, daß zwischen je zwei isochron pulsirenden Kugeln eine Kraft parallel der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte wirkt, proportional mit den Quadraten der Radien, proportional mit den Amplituden, indirect proportional dem Quadrat der Pulsationsdauer und dem Quadrat der Entfernung der Centra von einander. Die Kraft ist eine anziehende zwischen Kugeln, die mit gleicher Phase, eine abstoßende zwischen solchen, die mit um $T/2$ verschiedener Phase schwingen; denn im ersteren Falle haben die A_k oder a_k für beide gleiches, im letzteren entgegengesetztes Vorzeichen.

Daß Herr Riecke[1]) scheinbar andere Resultate erhalten hat, rührt davon her, daß die von ihm betrachteten bewegten Kugeln außer einer Aenderung ihrer Radien auch eine Verschiebung ihrer Mittelpunkte erfuhren, die Bewegung also nicht eine reine Pulsation war.

Die vorstehende Betrachtung läßt sich leicht auf den Fall ausdehnen, daß die gegebenen Kugeln nicht mit gleicher Phase pulsiren, wenn nur die Pulsationsdauer allen gemeinsam bleibt.

Setzt man nämlich

$$15) \qquad \varphi = \frac{A}{r} \cos \frac{2\pi(t-t_0)}{T} + \sum \frac{A_k}{r_k} \cos \frac{2\pi(t-t_k)}{T},$$

was identisch ist mit

$$\varphi = \left(\frac{A'}{r} + \sum \frac{A_k'}{r}\right) \cos \frac{2\pi t}{T} + \left(\frac{A''}{r} + \sum \frac{A_k''}{r_k}\right) \sin \frac{2\pi t}{T},$$

falls

$$A_k \cos \frac{2\pi t_k}{T} = A_k', \quad A_k \sin \frac{2\pi t_k}{T} = A_k''$$

gesetzt wird, so lassen sich die beiden Theile für sich genau so behandeln, wie oben der Ansatz (4). Allerdings lassen sich die Gleichungen (7) nicht für beide Theile durch dieselben Werthe ξ, η, ζ befriedigen, aber da sich ξ/ϱ, η/ϱ, ζ/ϱ selbst von der Ordnung ϱ^2/E_k^2 ergeben, bleibt die dadurch entstehende Ungenauigkeit innerhalb des Bereiches der oben vernachlässigten Größen.

Bei der Bestimmung der Kräfte X, Y, Z ist zu beachten, daß in dem Werth (9) des Druckes p der ganze Ausdruck V^2 auch jetzt keinen Antheil zu den Resultaten liefert, hingegen in $\partial\varphi/\partial t$ die

1) E. Riecke, Gött. Nachr. 1888, No. 13 p. 347.

mit A_k' und A_k'' resp. a_k' und a_k'' proportionalen Glieder sich einfach summiren. Da nun

$$a'a_k' + a''a_k'' = aa_k \cos\frac{2\pi(t_k - t_0)}{T}$$

ist, so gewinnt man für die Einwirkungen, welche die Kugel vom Radius R von allen übrigen erfährt, sogleich die allgemeinen Werthe:

$$\begin{aligned} \Xi &= \frac{8\pi^2 \varepsilon R^3 a}{T} \sum \frac{R_k^3 a_k \alpha_k}{E_k^2} \cos\frac{2\pi(t_k - t_0)}{T}, \\ H &= \frac{8\pi^2 \varepsilon R^3 a}{T} \sum \frac{R_k^3 a_k \beta_k}{E_k^2} \cos\frac{2\pi(t_k - t_0)}{T}, \\ Z &= \frac{8\pi^2 \varepsilon R^3 a}{T} \sum \frac{R_k^3 a_k \gamma_k}{E_k^2} \cos\frac{2\pi(t_k - t_0)}{T}. \end{aligned} \qquad 16)$$

Zu den Ausdrücken (14) treten also unter den bez. Summen die Cosinus der Phasendifferenzen; die a_k sind in (16) sämmtlich als absolute Größen zu betrachten. —

Genau in derselben Weise führt sich die Bestimmung der Bewegung durch, welche in einer unendlichen incompressibeln Flüssigkeit durch ein System isochron pulsirender Cylinder mit parallelen Axen erregt wird.

Die Lösung des Problemes wird, wenn nur ein Cylinder vorhanden ist, geliefert durch

$$\varphi = Al(e)\cos\frac{2\pi t}{T}, \text{ worin } e^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 \text{ ist;} \qquad 17)$$

daraus folgt

$$\frac{de}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial e} = \frac{A}{e}\cos\frac{2\pi t}{T}, \qquad 18)$$

und daher

$$e^2 = e_0^2 + \frac{AT}{\pi}\sin\frac{2\pi t}{T},$$

oder angenähert bei kleinem A

$$e = e_0 + \frac{AT}{2\pi e_0}\sin\frac{2\pi t}{T}. \qquad 18')$$

Für $(n+1)$ isochron pulsirende Cylinder ist der Ansatz zu machen

$$\varphi = (Al(e) + \sum A_k l(e_k))\cos\frac{2\pi t}{T}, \qquad 19)$$

worin $e^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$, $e_k^2 = (x-x_k)^2 + (y-y_k)^2$ ist. Zu dem Punkt $p_0(x_0, y_0)$ werde wieder ein Nachbarpunkt $p_0'((x_0-\xi), (y_0-\eta))$ im Abstand δ gewählt und die Entfernung von p_0' nach $p(x, y)$ mit

ϱ, die nach $p_\lambda(x_\lambda, y_\lambda)$ mit E_λ bezeichnet; die Winkel von ϱ und E_λ mit δ — alle drei Richtungen von p_0' hinweg positiv gerechnet — seien wieder ψ und ψ_λ, es gelte also

$$e^2 = \varrho^2 + \delta^2 - 2\varrho\delta\cos\psi, \quad e_\lambda^2 = E_\lambda^2 + \varrho^2 - 2E_\lambda\varrho\cos\psi_\lambda.$$

Für Entfernungen ϱ, welche klein gegen die E_λ, aber groß gegen δ sind, läßt sich φ schreiben

$$20)\quad \varphi = \left[A\left(l(\varrho) - \frac{2\delta\cos\psi}{\varrho} \pm ..\right) + \sum A_\lambda\left(l(E_\lambda) - \frac{\varrho\cos\psi_\lambda}{E_\lambda} \pm ...\right)\right]\cos\frac{2\pi t}{T},$$

und daraus bilden

$$21)\quad \frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} = \left[A\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{2\delta\cos\psi}{\varrho^2} \pm ..\right) - \sum A_\lambda\left(\frac{\cos\psi_\lambda}{E_\lambda} \pm ...\right)\right]\cos\frac{2\pi t}{T}.$$

$d\varrho/dt$ wird für einen bestimmten Werth $\bar\varrho$ von ϱ bis auf Glieder von der Ordnung ϱ^2/E_λ^2 und δ^2/ϱ^2 von der Richtung unabhängig, wenn

$$\frac{2A\delta\cos\psi}{\bar\varrho^2} = \sum\frac{A_\lambda\cos\psi_\lambda}{E_\lambda}$$

ist, d. h., falls α, β wieder die Richtungscosinus von ϱ, und $\alpha_\lambda, \beta_\lambda$ diejenigen von E_λ sind, wenn zur Bestimmung der Richtung und Größe von δ die Gleichungen gelten:

$$22)\quad \frac{2A\xi}{\bar\varrho^2} = \sum\frac{A_\lambda\alpha_\lambda}{E_\lambda}, \quad \frac{2A\eta}{\bar\varrho^2} = \sum\frac{A_\lambda\beta_\lambda}{E_\lambda}.$$

Zugleich wird, wenn man $\bar\varrho^2$ neben E_λ^2 vernachlässigen kann,

$$\frac{d\bar\varrho}{dt} = \frac{A}{\bar\varrho}\cos\frac{2\pi t}{T},$$

woraus zu folgern ist:

$$23)\quad \bar\varrho = R + \frac{AT}{2\pi R}\sin\frac{2\pi t}{T};$$

damit die Gleichungen (22) bei variabelem $\bar\varrho$ innerhalb der gestellten Genauigkeitsgrenze erfüllt sind, muß $AT/2\pi R^2$ von derselben Größenordnung sein wie δ/R. Die Flüssigkeit ist also in der Umgebung von p_0 durch einen Cylinder vom Radius $\bar\varrho$ um p_0' zu begrenzen; dasselbe gilt für die Umgebung eines jeden andern Punktes p_λ, und es wird für die bezüglichen Cylinder allgemein

$$\bar\varrho_\lambda = R_\lambda + a_\lambda\sin\frac{2\pi t}{T}$$

sein, wobei $a_\lambda = A_\lambda T/2\pi R_\lambda$ ist.

Zur Bestimmung der Druckcomponenten, welche die Längeneinheit des Cylinders um p_0' erfährt, sind die Gleichungen (9) und (10) zu benutzen. Dabei ist zu setzen, falls man den Coordinatenanfang nach p_0' legt:

$$\varphi = \left[A\left(l\varrho - \frac{2(x\xi+y\eta)}{\varrho^2}\right) + \sum A_\lambda\left(lE_\lambda - \frac{x\alpha_\lambda + y\beta_\lambda}{E_\lambda}\right)\right]\cos\frac{2\pi t}{T},$$

woraus folgt

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \left[A\left(\frac{x-2\xi}{\varrho^2} + \frac{4x(x\xi+y\eta)}{\varrho^4}\right) - \sum\frac{A_\lambda\alpha_\lambda}{E_\lambda}\right]\cos\frac{2\pi t}{T},$$

also

$$V^2 = \left[\frac{A^2}{\varrho^2} + \frac{4A^2(x\xi+y\eta)}{\varrho^4} - \frac{2A}{\varrho^2}\sum\frac{A_\lambda(\alpha_\lambda x+\beta_\lambda y)}{E_\lambda}\right]\cos^2\frac{2\pi t}{T}; \quad 24)$$

ebenso ergiebt sich

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{2\pi}{T}\left[A\left(l\varrho - \frac{2(x\xi+y\eta)}{\varrho^2}\right) + \sum A_\lambda\left(lE_\lambda - \frac{x\alpha_\lambda+y\beta_\lambda}{E_\lambda}\right)\right]\sin\frac{2\pi t}{T}. \quad 24')$$

Hieraus folgt, da $\int\alpha^2 ds = \int\beta^2 ds = \pi\varrho$ ist,

$$X = \frac{2\pi^2\varepsilon}{T}\left[2A\xi + \bar{\varrho}^2\sum\frac{A_\lambda\alpha_\lambda}{E_\lambda}\right]\sin\frac{2\pi t}{T} + \pi\varepsilon\left[\frac{2A^2\xi}{\bar{\varrho}^2} - A\sum\frac{A_\lambda\alpha_\lambda}{E_\lambda}\right]\cos^2\frac{2\pi t}{T}. \quad 25)$$

Darin ist zu setzen

$$\bar{\varrho} = R + a\sin\frac{2\pi t}{T},$$

X nach Potenzen von a zu entwickelen und der Mittelwerth über die Dauer einer Periode zu bilden. Man erhält so

$$\Xi = \frac{2\pi^2\varepsilon Ra}{T}\sum\frac{A_\lambda\alpha_\lambda}{E_\lambda},$$

oder wenn man berücksichtigt, daß $A_\lambda = 2\pi R_\lambda a_\lambda/T$ ist

$$\Xi = \frac{4\pi^2\varepsilon Ra}{T^2}\sum\frac{R_\lambda a_\lambda\alpha_\lambda}{E_\lambda}, \quad 26)$$

ebenso H und Z; das Resultat ist dem in den Formeln (16) gegebenen vollkommen analog, nur ist die Oberfläche der Kugeln mit der Oberfläche der Länge Eins der Cylinder vertauscht, und tritt die Attraction indirect proportional der Entfernung an Stelle derjenigen, welche das Newton'sche Gesetz befolgt.

Die Ausdehnung dieser Resultate auf Cylinder, die in verschiedener Phase pulsiren, geschieht ebenso, wie oben bei Kugeln gezeigt ist. Für φ ist der Ansatz zu machen

$$27)\quad \varphi = (A'le + \sum A'_\lambda le_\lambda)\cos\frac{2\pi t}{T} + (A''le + \sum A''_\lambda le_\lambda)\sin\frac{2\pi t}{T},$$

worin

$$A_\lambda \cos\frac{2\pi t_\lambda}{T} = A'_\lambda, \quad A_\lambda \sin\frac{2\pi t_\lambda}{T} = A''_\lambda$$

gesetzt ist; beide Theile von φ lassen sich behandeln wie der Ansatz (17), und das Resultat für die mittleren Kräfte, welche der Cylinder vom Radius R seitens aller übrigen erleidet, lautet

$$28)\qquad \Xi = \frac{4\pi^2 \varepsilon Ra}{T^2}\sum\frac{R_\lambda a_\lambda \alpha_\lambda}{E_\lambda}\cos\frac{2\pi(t_\lambda - t_0)}{T},$$

ebenso für die H- und Z-Componente.

Ganz ähnlich wie vorstehend die Pulsation, läßt sich auch die Oscillation von Kugeln oder Cylindern in einer unendlichen incompressibeln Flüssigkeit behandeln; die oben benutzte Methode bietet hier aber nicht so bedeutende Vortheile gegenüber der von Kirchhoff[1]) bei diesem Problem angewandten, als daß sich ihre Auseinandersetzung lohnte.

2. Stehende Wellen in einem Strome als Beispiel für die Kirchhoff'sche Theorie der Flüssigkeitsstrahlen.

Nach Kirchhoff[2]) erhält man bekanntlich für incompressible Flüssigkeiten, die der Einwirkung äußerer Kräfte nicht unterliegen, ebene Potentialbewegungen, welche durch freie Oberflächen begrenzt werden können, in folgender Weise.

Sei gesetzt $z = x + iy$, und sei $w = \varphi + i\psi$, worin φ das Geschwindigkeitspotential, ψ die Strömungsfunction bezeichnet, eine Function von z, dann hat

$$1)\qquad \frac{dz}{dw} = \zeta = \xi + i\eta$$

die Eigenschaft, daß

$$2)\quad \xi = \frac{u}{V^2},\ \eta = \frac{v}{V^2},\ \text{also}\ \frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tg}(V, x),\ \xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{V^2}$$

1) Kirchhoff, Mechanik, Leipzig 1876, p. 228.
2) Kirchhoff, Mechanik, p. 290.

ist. Wird nun eine Relation

$$\omega = f(\zeta) \text{ oder } \zeta = F(\omega)$$

aufgestellt, welche eine der Abscissenaxe in der ω-Ebene parallele Gerade $\psi = C$ in der ζ-Ebene als ein Stück eines Kreises $\xi^2 + \eta^2 = \varrho^2 = c^2$ um den Coordinatenanfang abbildet, so ist die durch

$$s = \int \zeta d\omega = \int F(\omega) d\omega \qquad 3)$$

gegebene Function φ von x und y das Geschwindigkeitspotential einer Bewegung, die längs der Strom-Curve $\psi = C$ eine freie Grenze haben kann; denn längs dieser Curve ist V constant und dies ist, wenn Kräfte auf die Flüssigkeit nicht wirken, die bekannte Bedingung dafür, daß in ihr der Druck constant ist.

Soll die Flüssigkeit strömen und dabei von einer wellenartig periodisch sich hebenden und senkenden Oberfläche begrenzt sein, deren Berge und Thäler wir der Bequemlichkeit halber in je einer Horizontalen liegend denken wollen, so muß die Beziehung $\zeta = F(\omega)$ einen Bogen des Kreises $\varrho = c$ um den Anfangspunkt der ζ-Ebene, welcher symmetrisch zur ξ-Axe liegt, in der Weise auf eine Curve $\psi = C$ der ω-Ebene abbilden, daß dem unendlich oft wiederholten Umlaufen des Kreisbogens die Durchmessung der ganzen Curve $\psi = C$ von $\varphi = -\infty$ bis $\varphi = +\infty$ entspricht. Dieser Kreisbogen bildet dann in der ζ-Ebene die eine Grenze der Flüssigkeit; eine zweite kann in der s-Ebene nur von einer andern Stromcurve $\psi = C'$ gebildet werden, und diese muß sich nothwendig in der ζ-Ebene als eine geschlossene Curve darstellen, welche den Kreisbogen völlig umschließt.

Bedenkt man die Beziehungen, welche durch die Gleichungen (2) zwischen den Coordinaten eines Punktes der ζ-Ebene und der Größe und Richtung der Geschwindigkeit an der dem Punkt ζ entsprechenden Stelle der s-Ebene gegeben sind, so erkennt man leicht Folgendes.

Sollen innerhalb der Flüssigkeit keine Quellen und Senken liegen, in denen die Geschwindigkeit unendlich wird, d. h. soll in der ζ-Ebene das von der zweiten Curve umschlossene Gebiet den Punkt $\zeta = 0$ nicht enthalten, so muß in der s-Ebene die zweite Grenze selbst eine wellenartige Gestalt haben; und zwar muß ihre stärkste Steigung stets steiler sein als diejenige der freien Oberfläche. Die Wellen kommen dann dadurch zu Stande, daß der Strom über einen unebenen Boden hinfließt, und der auf die freie Oberfläche wirkende Druck die Flüssigkeit verhindert, jenen Boden

ganz zu verlassen. Von dieser Art sind die Wellchen, die in fließendem Wasser durch Unebenheiten des Grundes entstehen und die weder Ort noch Höhe mit der Zeit wechseln, vorausgesetzt nur, daß ihre Höhe so gering ist, daß in der strengen Bedingung für die freie Oberfläche

$$\frac{V^2}{2} + gy + \frac{p}{\varepsilon} = \text{Const.}$$

die Aenderung des Potentiales der Schwere gy längs der freien Oberfläche neben dem Quadrat der Geschwindigkeit V vernachlässigt werden kann.

Dürfen innerhalb oder an der Grenze der Flüssigkeit Quellen und Senken liegen, so kann die zweite (untere) Grenze der Flüssigkeit auch eine horizontale Ebene sein. In diesem Falle stellt sie sich in der ζ-Ebene als ein Stück der ξ-Axe dar, z. B. als deren ganze negative Hälfte.

Ein Beispiel für eine Wellenbewegung der besprochenen Art liefert die specielle Form der Beziehung zwischen ω und ζ:

$$4) \qquad 2ia \sin \omega b = \frac{c-\zeta}{c+\zeta} \quad \text{oder} \quad \zeta = c\frac{1-2ia\sin\omega b}{1+2ia\sin\omega b}.$$

Setzt man

$$2i\sin\omega b = e^{i\omega b} - e^{-i\omega b} = -\cos\varphi b(e^{+\psi b} - e^{-\psi b}) + i\sin\varphi b(e^{+\psi b} + e^{-\psi b})$$

abgekürzt $$= m + in,$$

so wird

$$5) \qquad \xi = c\frac{1-a^2(m^2+n^2)}{(1+am)^2+a^2n^2}, \quad \eta = -\frac{2anc}{(1+am)^2+a^2n^2}$$

oder

$$6) \qquad ma = \frac{c^2-\xi^2-\eta^2}{(c+\xi)^2+\eta^2}, \quad na = -\frac{2c\eta}{(c+\xi)^2+\eta^2}.$$

Dem speciellen Werth $\psi = 0$ entspricht $m = 0$ und daher

$$\xi^2 + \eta^2 = c^2;$$

$\psi = 0$ giebt also eine Stromcurve, längs deren man die Flüssigkeit an einen Luftraum von constantem Druck grenzen lassen kann, denn ihr Bild in der ζ-Ebene ist ein Kreis um den Coordinatenanfang vom Radius c.

Aber von diesem Kreis ergiebt nur ein gewisser Bogen das Bild der Stromcurve $\psi = 0$. Denn während φ von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst, pendelt n zwischen -2 und $+2$, und demgemäß bleibt ξ innerhalb des Intervalles zwischen

$$\xi_1 = c\frac{1-4a^2}{1+4a^2} \text{ und } \xi_2 = c,$$

dagegen η innerhalb desjenigen zwischen

$$\eta_1 = -\frac{4ac}{1+4a^2} \text{ und } \eta_2 = +\frac{4ac}{1+4a^2},$$

wo sich ξ_1 und η_1 resp. η_2 einerseits, $\xi_2 = c$ und $\eta = 0$ andererseits entsprechen.

$\xi_1 = 0$ bezeichnet eine verticale Geschwindigkeit; soll diese ausgeschlossen sein, so muß

$$4a^2 < 1 \text{ oder } -1 < 2a < +1$$

sein. Wenn a diese Grenzwerthe erreicht, wird $\eta_1 = \pm c$.

Jeder andere Werth C von ψ als $\psi = 0$ entspricht einer Stromcurve, längs deren man die Flüssigkeit nur durch eine feste Wand begrenzen kann.

Aus (4) folgt nun auch

$$z = \int \zeta d\omega = c\left[\frac{2i}{kb} l\left(\frac{1+k+2ae^{i\omega b}}{1-k+2ae^{i\omega b}}\right) - \omega\right], \qquad 7)$$

falls man kurz

$$\sqrt{1+4a^2} = k$$

setzt. Die Zerlegung in den reellen und den imaginären Theil giebt

$$\begin{aligned} x &= -c\left[\frac{2}{kb}\operatorname{arctg}\left(\frac{k\sin\varphi b}{\cos\varphi b - a(e^{+\psi b} - e^{-\psi b})}\right) + \varphi\right], \\ y &= +c\left[\frac{1}{kb} l\frac{(1+k+2ae^{-\psi b}\cos\varphi b)^2 + 4a^2e^{-2\psi b}\sin^2\varphi b}{(1-k+2ae^{-\psi b}\cos\varphi b)^2 + 4a^2e^{-2\psi b}\sin^2\varphi b} - \psi\right]. \end{aligned} \qquad 8)$$

Da ξ und η, wie auch x und y, die Unabhängige φ nur in $\cos(\varphi b)$ oder $\sin(\varphi b)$ enthalten, so sind alle diese Größen um $\varphi = 2\pi/b$ periodisch. Wir brauchen daher nur das Intervall

$$0 \leqq \varphi b < 2\pi$$

zu betrachten.

Für $\varphi = 0$ ist $\eta = 0$, also die Geschwindigkeit in jeder Stromcurve horizontal, das gleiche gilt für $\varphi = \pi$. Der Unterschied der bezüglichen Y-Coordinaten ist die ganze Höhe der betreffenden Wellenlinie. Er läßt sich sehr einfach ausdrücken. Man erhält nämlich sogleich

$$y_1 - y_2 = \frac{c}{kb} l\left[\left(\frac{1+k+2ae^{-\psi b}}{1-k+2ae^{-\psi b}}\right)^2 \left(\frac{1-k-2ae^{-\psi b}}{1+k-2ae^{-\psi b}}\right)^2\right],$$

und dies ist

$$9) \qquad = \frac{2c}{kb} l\left(\frac{1-(k+2ae^{-\psi b})^2}{1-(k-2ae^{-\psi b})^2}\right).$$

Wegen der Bedeutung von k schreibt sich dies auch

$$9') \qquad = \frac{2c}{kb} l\left(\frac{1-(k+2ae^{+\psi b})^2}{1-(k-2ae^{+\psi b})^2}\right),$$

und dies zeigt, daß positive und negative Werthe von ψ dieselbe Wellenhöhe ergeben. Dem entspricht, daß $y_1 - y_2$ für $\psi = 0$, d. h. für die Stromcurve, welche die freie Oberfläche bildet, seinen größten Werth annimmt; man erhält nämlich hierfür

$$10) \quad \bar{y}_1 - \bar{y}_2 = H = \frac{2c}{kb} l \frac{1-(k+2a)^2}{1-(k-2a)^2} = \frac{2c}{kb} l \frac{4a+\sqrt{1+4a^2}}{4a-\sqrt{1+4a^2}}.$$

Da nun zugleich für $\psi = 0$ die größten Steigungen der Stromcurven geringer sind als für alle anderen Werthe von ψ, so ergiebt sich, daß die periodischen Unebenheiten des Bodens, welche wir als Ursache der oben behandelten Wellenbewegung betrachteten, geringere Höhen, aber zugleich schärfere Krümmungen haben müssen, als die Wellenberge an der freien Oberfläche.

Soll innerhalb der Flüssigkeit die Geschwindigkeit nirgends unendlich werden, so darf ξ daselbst nicht verschwinden; dies giebt einen Grenzwerth für ψ an; nach (5) muß nämlich gelten

$$\frac{1}{a^2} > (e^{+\psi b} - e^{-\psi b}).$$

Für die freie Oberfläche, für welche $\psi = 0$ ist, folgt aus (8)

$$\bar{x} = -c\left[\frac{2}{kb} \operatorname{arctg}(k \operatorname{tg} \varphi b) + \varphi\right],$$

$$11) \qquad \bar{y} = \frac{c}{kb} l \frac{(k+1)(k+2a\cos\varphi b)}{(k-1)(k-2a\cos\varphi b)};$$

letzteres schreibt sich, wenn man $l(k+1) - l(k-1)$ mit in die Integrationsconstante zieht, einfacher

$$\bar{y} = \frac{c}{kb} l\left(\frac{k+2a\cos\varphi b}{k-2a\cos\varphi b}\right). - \qquad 11')$$

Auf Fälle, wo äußere Kräfte wirksam sind, ist die Kirchhoff'sche Methode bisher noch nicht angewandt; in der That verliert sie hier auch den größten Theil ihrer Vorzüge, da in der Grenzbedingung für die freie Oberfläche

$$\bar{V}^2 + 2\bar{\Phi} = \text{Const.} \qquad 12)$$

das Potential Φ der wirkenden Kraft sich nicht allgemein durch ξ und η ausdrücken läßt. Wirkt allein die Schwerkraft, und wird die $+Y$-Axe vertical nach oben gelegt, so lautet die Bedingung (12)

$$\bar{V}^2 = C - 2g\bar{y}, \qquad 12')$$

also unter Benutzung der Formeln (2) und (3)

$$\frac{1}{\xi^2+\eta^2} = C - \frac{2g}{i} J(\int \zeta\, d\omega), \qquad 13)$$

wo $J(\chi)$ den imaginären Theile von χ bezeichnet; $\zeta = F(\omega)$ liefert nunmehr allein in dem Falle eine Bewegung einer schweren Flüssigkeit, welche eine freie Grenze gestattet, wenn für irgend einen Werth von C die Gleichung $\psi = C$, in ξ und η ausgedrückt, dieselben Curven liefert, wie (13). Es giebt keine Methode, solche Beziehungen $\zeta = F(\omega)$ aufzufinden, und man ist ausschließlich auf Versuche angewiesen.

Die Gleichung (13) wird für die Behandlung etwas bequemer, wenn innerhalb der freien Oberfläche $\bar{y}$ so wenig variirt, daß $2g$ mal dieser Aenderung klein neben $\bar{V}^2$ ist. Legt man den Anfangspunkt für y ungefähr in die Mitte zwischen dem höchsten und tiefsten Punkt der Oberfläche und bezeichnet die dort stattfindende Geschwindigkeit mit V_0, so lautet (12')

$$\bar{V}^2 = \bar{V}_0^2 - 2g\bar{y}.$$

Läßt sich nun $(2g\bar{y})^2$ neben $\bar{V}_0^4$ vernachlässigen, so folgt hieraus auch

$$\frac{1}{\bar{V}^2} = \frac{1}{\bar{V}_0^2}\left(1 + \frac{2g\bar{y}}{\bar{V}_0^2}\right),$$

was wir abkürzen in

$$\frac{1}{\bar{V}^2} = m^2 + n^2\bar{y}; \qquad 14)$$

bei Einführung von ξ und η giebt dies

$$14') \qquad \xi^2+\eta^2 = m^2+\frac{n^2}{i}J(\int\zeta\, d\omega).$$

Jetzt gelingt es leichter, eine Function $\zeta = F(\omega)$ zu finden, welche der gestellten Bedingung genügt, daß $\psi(\xi,\eta) = C$ dieselben Curven in der ζ-Ebene bestimmt, wie die Gleichung (14).

Setzt man nämlich

$$15) \qquad \zeta = a - be^{-ic\omega},$$

worin a, b, c reelle Constanten sind, so wird

$$\xi - a = -be^{c\psi}\cos c\varphi, \quad \eta = +be^{c\psi}\sin c\varphi$$

und

$$16) \qquad (\xi-a)^2+\eta^2 = b^2 e^{2c\psi};$$

die Strömungscurven $\psi = C$ stellen sich also in der ζ-Ebene als Kreise um den Punkt $\xi = a$, $\eta = 0$ dar. Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit für diejenige Stromcurve, welche die freie Grenze bildet, $\psi = 0$ setzen. Dann muß jedenfalls $a > b$ sein, damit der Punkt $\zeta = 0$ nicht in das Bereich der Flüssigkeit fällt, welches Werthen ψ zwischen 0 und $-\infty$ entspricht; $\psi = -\infty$ giebt den Punkt $\xi = a$, $\eta = 0$ selbst, demgemäß eine Stromcurve, welche die Gestalt einer horizontalen Geraden besitzt, längs deren die Flüssigkeit mit der constanten Geschwindigkeit $1/a$ hinströmt.

Für s erhält man nach (3)

$$17) \qquad s = a\omega + \frac{i}{c}(\zeta - a),$$

wo die Integrationsconstante gleich Null gesetzt ist, da auf diese Weise, wie später hervortreten wird, der Anfangspunkt für $\bar{y}$ seine günstigste Lage erhält. Hieraus folgt allgemein

$$17') \qquad x = a\varphi - \frac{\eta}{c}, \quad y = a\psi + \frac{\xi - a}{c},$$

und die Oberflächenbedingung lautet in Rücksicht auf die Annahme $\psi = 0$ nach (14')

$$\xi^2+\eta^2 = m^2 + n^2\frac{\xi-a}{c};$$

damit dieselbe mit der aus (16) folgenden Formel

$$(\xi-a)^2+\eta^2 = b^2$$

übereinstimmt, ist nur erforderlich, daß zwischen den drei verfügbaren Constanten a, b, c und den Constanten m^2 und n^2 der Gleichung (14') die beiden Relationen

$$2ac = n^2, \quad b^2 + a^2 = m^2 \qquad 18)$$

bestehen; eine Constante, etwa c, bleibt also verfügbar, um verschiedene Wellenbewegungen darzustellen.

a, b, c können hiernach beliebiges Vorzeichen haben, nur muß jedenfalls ac positiv sein.

Die Gleichungen der Stromcurven werden nach (17′)

$$x = a\varphi - \frac{b}{c} e^{c\psi} \sin c\varphi, \quad y = a\psi - \frac{b}{c} e^{c\psi} \cos c\varphi,$$

und die Gleichungen der freien Oberfläche

$$x = a\varphi - \frac{b}{c} \sin c\varphi, \quad y = -\frac{b}{c} \cos c\varphi;$$

$y = 0$ entspricht also in der That der Mitte zwischen der höchsten und der tiefsten Stelle der freien Oberfläche.

Das sind, falls a, b, und c positiv sind, die Gleichungen von Trochoiden, wie solche schon bei einem andern Problem für die freie Oberfläche gefunden sind[1]). Es ist aber wohl zu beachten, daß in jenem Falle die Flüssigkeitstheilchen geschlossene Bahnen beschreiben und die Wellenhäupter mit der Zeit fortschreiten, hier aber die Wellen stille stehen und die Flüssigkeitstheilchen in's Unendliche fortschreiten. Demgemäß stehen die Trochoiden hier auch umgekehrt wie dort; hier nämlich rollt der erzeugende Kreis oberhalb, dort unterhalb der horizontalen Bahngeraden.

Auf den Fall, daß a, b, c positiv sind, lassen sich alle anderen Fälle zurückführen, indem man statt φ eine andere Variable, z. B. $\pi - \varphi$ oder $\pi + \varphi$ einführt; es genügt also, ihn allein in Betracht zu ziehen.

Der Radius R des rollenden Kreises und der Abstand r des erzeugenden Punktes von seinem Centrum sind gegeben durch

$$R = \frac{a}{c}, \quad r = \frac{b}{c} e^{c\psi};$$

der erstere ist also bei derselben Bewegung, d. h. demselben c für alle Stromcurven constant, der letztere nimmt mit abnehmendem ψ gleichfalls ab und verschwindet für $\psi = -\infty$, d. h. für $y = -\infty$; man kann also die Flüssigkeit in der Tiefe $y = -\infty$ durch eine horizontale Ebene begrenzt denken.

Die Geschwindigkeitscomponenten u und v werden nach (2) resp.

---

1) Kirchhoff, Mechanik p. 361.

$$u = \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}, \quad v = \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}$$

d. h.

$$u = \frac{a - b\,e^{c\psi}\cos c\varphi}{N} \quad v = \frac{b\,e^{c\psi}\sin c\varphi}{N},$$

wo

$$N = a^2 + b^2 e^{2c\psi} - 2ab\,e^{c\psi}\cos c\varphi.$$

Speciell in der Verticalen, wo $\bar{y}$ seinen größten oder kleinsten Werth hat, also $c\varphi = h\pi$ ist, gilt

$$u = \frac{1}{a \pm b\,e^{c\psi}}, \quad v = 0;$$

wird eine solche mit der Tiefe wechselnde horizontale Geschwindigkeit der Flüssigkeit in einem Querschnitt gegeben, so muß sie weiterhin unter der Wirkung der Schwere in denjenigen Wellen sich fortbewegen, deren Gesetze oben entwickelt sind.

Damit die Wellenlinie, welche die freie Oberfläche bildet, keine Schleifen oder Spitzen enthält, in denen die Geschwindigkeit unendlich wird, muß $b/a = \beta$ ein ächter Bruch, also nach (18) $c^2 = n^4(1+\beta^2)/4m^2$ sein.

8. Potential-Bewegungen einer schweren Flüssigkeit mit freier Oberfläche, behandelt durch successive Annäherung.

Die Bedingungsgleichung für die freie Oberfläche einer incompressibeln in stationärer Bewegung befindlichen Flüssigkeit

$$1) \qquad \frac{\bar{V}^2}{2} + \bar{\Phi} + \frac{\bar{p}}{\varepsilon} = C$$

bietet bekanntlich für die Behandlung sehr bedeutende Schwierigkeiten. Ich werde zeigen, daß in den Fällen, wo diese Fläche nur wenig von der Gleichgewichtsoberfläche abweicht, welche die Flüssigkeit unter der Wirkung desselben Potentiales und desselben äußeren Druckes besitzen würde, sich eine Lösung des Bewegungsproblemes mitunter vortheilhaft durch die Methode der successiven Annäherung gewinnen läßt.

Der Grundgedanke des einzuschlagenden Verfahrens ist der folgende.

Man suche ein Geschwindigkeitspotential φ_1, welches den sonst gestellten Bedingungen entspricht und gestattet, die Flüssigkeit längs ihrer Gleichgewichtsoberfläche durch eine starre Wand zu

begrenzen. Diese Function giebt dann auch eine erste Annäherung für das eigentliche Problem, denn bei hinreichend kleiner Geschwindigkeit in der Oberfläche ist dann die Grenzbedingung (1) erfüllt. Das Einsetzen des aus φ_1 folgenden Werthes der Geschwindigkeit V_1 in jene Formel liefert für die Gleichung der freien Oberfläche eine zweite Annäherung, nämlich

$$\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)^2\right]+\Phi+\frac{p}{\varepsilon}=C. \qquad 2)$$

Die hierdurch gegebene Oberfläche wird nun bei der Bestimmung der zweiten Annäherung $\varphi_1+\varphi_2$ für das Geschwindigkeitspotential als eine feste Grenze der Flüssigkeit betrachtet; es wird nämlich eine Function φ_2 aufgesucht, welche zu φ_1 hinzugefügt ein System von Stromcurven ergiebt, von denen eine Schaar die durch (2) gegebene freie Oberfläche erfüllt. Die Benutzung dieses corrigirten Werthes $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$ in der Grenzbedingung (1) giebt weiter die Gleichung der freien Oberfläche in der dritten Annäherung:

$$\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial(\varphi_1+\varphi_2)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial(\varphi_1+\varphi_2)}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial(\varphi_1+\varphi_2)}{\partial z}\right)^2\right]+\Phi+\frac{p}{\varepsilon}=C. \qquad 2')$$

Ebenso kann man weiter verfahren.

Auf diese Weise ist es in sehr vielen Fällen ohne Schwierigkeit möglich, die Gleichung der freien Oberfläche in zweiter Annäherung zu finden; aber auch der Werth des Geschwindigkeitspotentiales in zweiter und das Gesetz der freien Oberfläche in dritter Annäherung ist in einigen Fällen zu gewinnen möglich.

Ich betrachte im Folgenden als wirkende Kraft ausschließlich die Schwere, welche parallel der $+Z$-Axe wirken mag, und gebe zunächst die Lösung einiger ebener Probleme.

Bei ebenen Bewegungen gehört zu jedem Geschwindigkeitspotential φ eine Strömungsfunction σ, welche die Eigenschaft hat, daß $\sigma=$ Const das System aller Stromcurven angiebt. Zwischen beiden Functionen besteht, falls die Bewegung in der XZ-Ebene stattfindet, der Zusammenhang

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=+\frac{\partial\sigma}{\partial z},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\frac{\partial\sigma}{\partial x}. \qquad 3)$$

Es sei eine schwere Flüssigkeit von unendlicher Tiefe gegeben, im Ruhezustand durch die Ebene $z=0$ begrenzt; in derselben werde in der Tiefe $z=a$ unter der Oberfläche eine Quelle angebracht.

Setzt man dann

$$e^2 = (z-a)^2+x^2,$$
$$e_-^2 = (z+a)^2+x^2,$$

so ist

4) $$\varphi_1 = ml(e\cdot e_-)$$

bekanntlich die erste Annäherung für φ. Aus ihr folgen die Werthe der Geschwindigkeiten

$$u_1 = mx\left(\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e_-^2}\right),\quad w_1 = m\left(\frac{z-a}{e^2}+\frac{z+a}{e_-^2}\right),$$

sowie der Werth der Strömungsfunction

$$\sigma_1 = m\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{z-a}+\operatorname{arctg}\frac{x}{z+a}\right)$$

oder kurz

5) $$\sigma_1 = m(\vartheta+\vartheta_-),$$

falls mit ϑ und ϑ_- die Winkel von e und e_- gegen die Z-Axe bezeichnet werden.

Die freie Oberfläche ist in erster Näherung die XY-Ebene, in dieser ist

$$\bar{u}_1 = \frac{2mx}{E^2},\quad \bar{w}_1 = 0,\quad \bar{V}_1^2 = \bar{u}_1^2,$$

falls $E^2 = a^2+x^2$ ist; die freie Oberfläche wird also in zweiter Annäherung gegeben sein durch

6) $$\frac{2m^2x^2}{E^4} = gz.$$

Sie fällt also an den Stellen $x = 0$ und $x = \pm\infty$ in das ursprüngliche Niveau und ist im übrigen etwas darunter gesenkt, am stärksten, nämlich um $m^2/2a^2g$, an den Stellen $x = \pm a$.

Bildet man aus (6)

$$\frac{z}{a} = \frac{2m^2}{gaE^2}\cdot\left(\frac{x}{E}\right)^2$$

und beachtet, daß x/E stets ein ächter Bruch ist, so erkennt man, daß $2m^2/gaE^2$ von der Ordnung des Verhältnisses der Abweichung der Oberfläche von der Ebene zu der Tiefe der Quelle unter der Oberfläche ist.

Um zu dem Werthe des Geschwindigkeitspotentiales $\varphi = \varphi_1+\varphi_2$ in zweiter Annäherung überzugehen, beachte man, daß für φ_2 nur

die logarithmischen Potentiale von Massen außerhalb der Flüssigkeit gewählt werden können, um nicht in Widerspruch mit der Annahme nur einer Quelle innerhalb der Flüssigkeit zu kommen; nach Symmetrie wird man diese supponirten Massen allein auf der negativen Z-Axe anbringen können. Ihre nähere Bestimmung hat so zu erfolgen, daß die ergänzte Strömungsfunction

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$$

für den Werth $\sigma = m\pi$ die Gleichung (6) der freien Oberfläche ergiebt. Man geht demgemäß am besten direct auf die Bestimmung von σ_2 aus.

Hierzu bemerken wir erstens, daß der Werth von σ_1 bis auf Glieder zweiter Ordnung des Verhältnisses z/a exclusive lautet

$$\sigma_1 = m\left(\pi + \frac{2zx}{E^2}\right), \qquad 7)$$

und zweitens, daß Glieder von der Form $(\sigma_2) = \frac{\partial^\lambda \vartheta_-}{\partial z^\lambda}$, wo wieder $\vartheta_- = \operatorname{arctg}\frac{x}{z+a}$ ist, die Strömungsfunctionen geben zu den Geschwindigkeitspotentialen

$$(\varphi_2) = \frac{\partial^\lambda}{\partial z^\lambda} l e_-,$$

welche gewissen vielfachen Quellpaaren auf der $-Z$-Axe entsprechen.

Nun ist aber

$$\frac{\partial^2 \vartheta_-}{\partial z^2} = \frac{2x(z+a)}{e_-^4}, \quad \frac{\partial^3 \vartheta_-}{\partial z^3} = 2x\left(\frac{4x^2}{e_-^6} - \frac{3}{e_-^4}\right);$$

also wird

$$A\left(\frac{\partial^3 \vartheta_-}{\partial z^3} + \frac{3}{a}\frac{\partial^2 \vartheta_-}{\partial z^2}\right) = 2Ax\left(\frac{3z}{ae_-^4} + \frac{4x^2}{e_-^6}\right)$$

ein Ansatz sein, welcher der Bedingung für σ_2 genügt. Wählt man speciell

$$A = -m^2/2g$$

so ist das erste Glied des letzteren Ausdruckes $-3m^2 xz/g\,a\,e_-^4$ nach dem oben Gesagten nahe der freien Oberfläche von der Ordnung von mz^2/a^2, also bei der benutzten Annäherung zu vernachlässigen. In der Nähe der freien Oberfläche reducirt sich daher σ auf

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = m\left[\pi + \frac{2x}{E^2}\left(z - \frac{2x^2 m^2}{gE^4}\right)\right] \qquad 8)$$

und dies giebt für $\sigma = mx$

$$s = \frac{2x^3m^2}{gE^4},$$

wie verlangt.

Hiernach ist das Geschwindigkeitspotential in zweiter Annäherung

$$9) \qquad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = m\left[l(e\cdot e_-) - \frac{m^2}{2g}\left(\frac{\partial^2 l e_-}{\partial s^2} + \frac{3}{a}\frac{\partial^2 l e_-}{\partial s^2}\right)\right],$$

ihm entspricht der Werth der Strömungsfunction

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = m\left[\vartheta + \vartheta_- - \frac{m^2}{2g}\left(\frac{\partial^2 \vartheta_-}{\partial s^2} + \frac{3}{a}\frac{\partial^2 \vartheta_-}{\partial s^2}\right)\right].$$

Die Differentialquotienten nach s sind hierin beliebig mit denen nach a zu vertauschen.

Um endlich die Gleichung der freien Oberfläche in dritter Annäherung zu bestimmen, hat man für die Gleichung (2′) nur $u = u_1 + u_2$ zu berechnen, da $w = w_1 + w_2$ von erster Ordnung, w^2 also in V^3 neben u^2 zu vernachlässigen ist. Die Berechnung ergiebt

$$u = \frac{2mx}{E^2}\left[1 + \frac{3m^2}{2gaE^2}\left(1 + \frac{8a^4}{E^4}\right)\right],$$

und hieraus folgt die gesuchte Gleichung der Oberfläche

$$10) \qquad \frac{2m^2x^2}{E^4}\left[1 + \frac{3m^2}{gaE^2}\left(1 + \frac{8a^4}{E^4}\right)\right] = gz. -$$

Ist mehr als eine Quelle in der Flüssigkeit vorhanden, so erhält man die entsprechenden φ_1 und φ_2 durch einfache Superposition der für die einzelnen geltenden Werthe.

Diese Ueberlegung gestattet, aus den vorstehenden einfachen Formeln die Lösungen einer ganzen Zahl complicirterer Probleme abzuleiten.

Ein $\pm$ Quellpaar, dessen Verbindungslinie der X-Axe parallel ist, an einem beliebigen Punkte der $+Z$-Axe angebracht, dazu sein Spiegelbild in Bezug auf die X-Axe, ferner eine Quelle in $x = -\infty$, eine Senke in $x = +\infty$ geben zusammen eine Bewegung, die sich außer durch die X-Axe durch eine geschlossene Curve, die in gewisser Annäherung kreisförmig ist, begrenzen läßt. Man kann also setzen

$$11) \qquad \varphi_1 = m\alpha\frac{\partial}{\partial x} l(e\,e_-) + Ux,$$

wo wieder $e_+^2 = (z-a)^2+x^2$, $e_-^2 = (z+a)^2+x^2$ ist, um die erste Näherung für das Geschwindigkeitspotential zu haben, wenn ein unendlich tiefer Strom mit der Geschwindigkeit U über einen festen Cylinder wegströmt. Der Querschnitt des letzteren ist ein Kreis vom Radius R um den Punkt $x = 0$, $z = a$, falls R^2 neben $(2a)^2$ vernachlässigt werden kann und

$$m\alpha\left(\frac{1}{R^2}-\frac{1}{4a^2}\right) = U$$

gesetzt wird. Die Gleichung der freien Oberfläche ist hier in zweiter Annäherung, falls wieder $E^2 = a^2+x^2$,

$$\left[\frac{2m\alpha(a^2-x^2)}{E^4}+U\right]^2 = 2gz+U^2, \qquad 11')$$

wo die Constante U^2 rechts zugefügt ist, damit das Niveau im Unendlichen in die XY-Ebene fällt.

Wird statt eines Quellpaares bei $z = a$ eine unendliche Reihe einander gleicher in gleichen Abständen b längs der Geraden $z = a$ und $z = -a$ angebracht, so ergiebt sich

$$\varphi_1 = m\alpha\frac{\partial}{\partial x} l \prod_{-\infty}^{+\infty}(e_h e_{-h}) + Ux, \qquad 12)$$

worin

$$e_h^2 = (z-a)^2+(x-hb)^2, \quad e_{-h}^2 = (z+a)^2+(x-hb)^2$$

gesetzt ist. Das unendliche Product läßt sich nach bekannter Methode umformen und liefert schließlich

$$\varphi_1 = m\alpha\left[\frac{\partial}{\partial x} l\left(\cos\frac{2\pi i(z-a)}{b}-\cos\frac{2\pi x}{b}\right)+\frac{\partial}{\partial x} l\left(\cos\frac{2\pi i(z+a)}{b}-\cos\frac{2\pi x}{b}\right)\right]+Ux,$$

$$= \frac{2\pi m\alpha}{b}\sin\frac{2\pi x}{b}\left[\frac{1}{\cos\frac{2\pi i(z-a)}{b}-\cos\frac{2\pi x}{b}}+\frac{1}{\cos\frac{2\pi i(z+a)}{b}-\cos\frac{2\pi x}{b}}\right]+Ux \qquad 12')$$

und

$$\sigma_1 = \frac{2\pi m\alpha i}{b}\left[\frac{\sin\frac{2\pi i(z-a)}{b}}{\cos\frac{2\pi i(z-a)}{b}-\cos\frac{2\pi x}{b}}+\frac{\sin\frac{2\pi i(z+a)}{b}}{\cos\frac{2\pi i(z+a)}{b}-\cos\frac{2\pi x}{b}}\right]+Uz.$$

Hieraus folgt die Gleichung der freien Oberfläche in zweiter Annäherung

$$\left[\frac{8\pi^2 m\alpha}{b^2}\,\frac{\cos\frac{2\pi x}{b}\cos\frac{2\pi ia}{b}-1}{\left(\cos\frac{2\pi ia}{b}-\cos\frac{2\pi x}{b}\right)^2}+U\right]^2 = 2gz+\left[U-\frac{8\pi^2 m\alpha}{b^2\cos^2\frac{2\pi ia}{b}}\right]^2. \qquad 12'')$$

Die Bewegung ist nach unten zu begrenzen durch eine wellenförmige Stromcurve, welche zwischen $z = 0$ und $z = a$ liegt, und man kann das Resultat betrachten als die Darstellung von stehenden Wellen, die in einer strömenden schweren Flüssigkeit entstehen in Folge von periodischen Unebenheiten des Grundes. Die Bewegung ist aber durchaus verschieden von der im vorigen Abschnitte bei Nichtberücksichtigung der Schwere erhaltenen; z. B. liegen hier die Wellenberge an der freien Oberfläche über den Wellenthälern des Grundes und umgekehrt, während dort Berg über Berg, Thal über Thal liegt.

Die weitere Annäherung ist nach den Formeln (9) bis (10) sogleich hinzuschreiben, aber sehr complicirt.

Ist die Flüssigkeit in der Tiefe $z = a$ durch eine horizontale starre Ebene begrenzt, in welcher sich eine Quelle befindet, indem z. B. die Flüssigkeit durch einen Spalt von außen zuströmt, so erhält man φ_1 durch ein System einfacher gleicher Quellen, die sich in gleichen Abständen $2a$ auf der Z-Axe befinden, so daß wird

$$13) \qquad \varphi_1 = ml \prod_{-\infty}^{+\infty} e_h$$

worin $e_h^2 = (z + (2h+1)a)^2 + x^2$ ist. Dies formt sich um in

$$13') \qquad \varphi_1 = ml\left(\cos\frac{\pi z}{a} + \cos\frac{i\pi x}{a}\right),$$

woraus, da

$$u_1 = \frac{-m\frac{i\pi}{a}\sin\frac{i\pi x}{a}}{\cos\frac{\pi z}{a} + \cos\frac{i\pi x}{a}} \text{ ist},$$

für die Gleichung der freien Oberfläche in zweiter Näherung folgt

$$13'') \quad \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(i\,\mathrm{tg}\frac{i\pi x}{a}\right)^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{e^{\frac{\pi z}{a}} - e^{-\frac{\pi z}{a}}}{e^{\frac{\pi z}{a}} + e^{-\frac{\pi z}{a}}}\right) = 2gz.$$

Jetzt ist das Niveau im Unendlichen nicht mehr gleich dem in der Z-Axe, sondern um $m^2\pi^2/2ga^2$ tiefer, da dort die Geschwindigkeit nicht verschwindet.

Die weiteren Annäherungen sind ebenfalls nach der oben erörterten Methode zu bilden. —

Die Methode der successiven Annäherung ist ebenso bequem,

wie auf ebene Flüssigkeitsbewegungen, auch auf solche, welche den Character eines Rotationskörpers besitzen, anwendbar.

Zwischen dem Geschwindigkeitspotential φ und der Strömungsfunction σ bestehen hier, falls man die Z-Axe zur Rotationsaxe wählt und den Abstand eines Punktes von ihr mit e bezeichnet, die Beziehungen

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = e\frac{\partial \varphi}{\partial e}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial e} = -e\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{14}$$

Sei nun zunächst wieder die schwere Flüssigkeit unendlich tief und in ihr im Punkte $z = a$ eine Quelle vorhanden, so ist die erste Näherung für φ

$$\varphi_1 = -m\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_-}\right) \tag{15}$$

falls $r^2 = (z-a)^2 + e^2$, $r_-^2 = (z+a)^2 + e^2$ ist. Hieraus folgt

$$\sigma_1 = m\left(\frac{z-a}{r} + \frac{z+a}{r_-}\right), \tag{15'}$$

und die Geschwindigkeiten s und w normal und parallel zur Z-Axe ergeben sich

$$s_1 = me\left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r_-^3}\right), \quad w_1 = m\left(\frac{z-a}{r^3} + \frac{z+a}{r_-^3}\right). \tag{16}$$

Daraus folgt die Gleichung der freien Oberfläche in zweiter Näherung, falls $a^2 + e^2 = E^2$ gesetzt wird,

$$\frac{2m^2e^2}{E^6} = gz; \tag{17}$$

aus ihr ergiebt sich, daß für Punkte der freien Oberfläche z/a von der Ordnung von $2m^2/gaE^4$ ist.

Um zur zweiten Annäherung für φ und σ fortzuschreiten, beachte man, daß bis auf Größen der Ordnung von $(z/a)^2$ exclusive

$$\sigma_1 = \frac{2me^2z}{E^3} \tag{18}$$

ist, sowie daß Glieder von der Form

$$(\sigma_2) = \frac{\partial^\lambda \frac{z+a}{r_-}}{\partial z^\lambda}$$

die Strömungsfunctionen ergeben, welche Geschwindigkeitspotentialen

$$(\varphi_3) = -\frac{\partial^4 \frac{1}{r_-}}{\partial z^4}$$

entsprechen.

Nun ist

$$\frac{\partial^2\left(\frac{z+a}{r_-}\right)}{\partial z^2} = -\frac{3e^2(z+a)}{r_-^5}, \quad \frac{\partial^3\left(\frac{z+a}{r_-}\right)}{\partial z^3} = -3e^2\left(\frac{1}{r_-^5} - \frac{5(z+a)^2}{r_-^7}\right),$$

$$\frac{\partial^4\left(\frac{z+a}{r_-}\right)}{\partial z^4} = 15e^2(z+a)\left(\frac{3}{r_-^7} - \frac{7(z+a)^2}{r_-^9}\right),$$

also wird

$$A\left(\frac{\partial^4\left(\frac{z+a}{r_-}\right)}{\partial z^4} + \frac{4}{a}\frac{\partial^3\left(\frac{z+a}{r_-}\right)}{\partial z^3} - \frac{4}{a^2}\frac{\partial^2\left(\frac{z+a}{r_-}\right)}{\partial z^2}\right)$$

$$= 3Ae^2\left[\frac{4z}{a^2 r_-^5} + \frac{20z(a+z)}{a r_-^7} + \frac{35e^2(a+z)}{r_-^9}\right]$$

ein Ansatz sein, der den Bedingungen für σ_3 entspricht. Wählt man noch

$$A = -\frac{4m^3}{105ag},$$

so sind die in z multiplicirten Glieder des obigen Ausdrucks in der Nähe der freien Oberfläche zweiter Ordnung und demgemäß zu vernachlässigen. Das noch Uebrige aber ergiebt in der Nähe der freien Oberfläche

19) $$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2^* = \frac{2me^2}{E^2}\left(z - \frac{2m^2e^2}{gE^6}\right),$$

sodaß für $\sigma = 0$ folgt

$$\frac{2m^2e^2}{E^6} = gz,$$

wie verlangt ist.

Die gefundenen zweiten Näherungswerthe sind also

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \qquad 20)$$

$$-m\left[\frac{1}{r}+\frac{1}{r_-}-\frac{4m^2}{105ag}\left(\frac{\partial^4\frac{1}{r_-}}{\partial z^4}+\frac{4}{a}\frac{\partial^3\frac{1}{r_-}}{\partial z^3}-\frac{4}{a^2}\frac{\partial^2\frac{1}{r_-}}{\partial z^2}\right)\right],$$

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 =$$

$$+m\left[\frac{z-a}{r}+\frac{z+a}{r_-}-\frac{4m^2}{105ag}\left(\frac{\partial^4\left(\frac{z+a}{r_-}\right)}{\partial z^4}+\frac{4}{a}\frac{\partial^3\left(\frac{z+a}{r_-}\right)}{\partial z^3}-\frac{4}{a^2}\frac{\partial^2\left(\frac{z+a}{r}\right)}{\partial z^2}\right)\right],$$

worin die Differentialquotienten nach z auch mit solchen nach a zu vertauschen sind.

Aus ihnen folgt schließlich die Gleichung der freien Oberfläche in dritter Näherung wie oben.

Man hat nämlich

$$s = \frac{2me}{E^2}\left[1+\frac{2m^2e^2}{gE^6}\left(2-\frac{9e^2}{E^2}\right)\right],$$

während w von erster Ordnung in Bezug auf z/a bleibt. Demgemäß wird die Gleichung der freien Oberfläche in dritter Annäherung

$$\frac{2m^2e^2}{E^6}\left[1+\frac{4m^2e^2}{gE^6}\left(2-\frac{9e^2}{E^2}\right)\right] = gz. \qquad 21)$$

Sind mehrere Quellen vorhanden, so ist die einfache Superposition der Lösungen nur dann auch in zweiter Annäherung gestattet, wenn dabei die Bewegung der Flüssigkeit den Charakter eines Rotationskörpers behält, also die Quellen sämmtlich auf der Z-Axe liegen.

Besitzt die Flüssigkeit die endliche Tiefe a, und befindet sich im Boden eine kreisförmige Oeffnung um die Z-Axe vom Radius R, durch welche Flüssigkeit etwa aus einem Rohre zuströmt nach dem Gesetz

$$w = -\frac{S}{2\pi R\sqrt{R^2-e^2}}, \qquad 22)$$

worin S das ganze in der Zeiteinheit eintretende Volumen bezeichnet, dann bestimmt sich leicht [1])

$$\varphi_1 = \frac{-S}{2\pi R}\int_0^\infty \frac{e^{\zeta z}+e^{-\zeta z}}{e^{\zeta a}-e^{-\zeta a}} J^0(\zeta e)\sin(\zeta R)\frac{d\zeta}{\zeta}, \qquad 23)$$

1) Vergl. H. Weber, Crelle's Jour. 75, 76 1872.

wo J^h wie gewöhnlich die Bessel'sche Function h^{te}r Ordnung bezeichnet. Denn diese Function ist eine Lösung der Hauptgleichung $\Delta\varphi_1 = 0$ und ergiebt für $z = \pm a$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = \frac{\mp S}{2\pi R}\int_0^\infty J^0(\zeta e)\sin(\zeta R)\,d\zeta,$$

und dies Integral ist gleich Null, falls $e > R$ ist, und ist gleich

$$\mp S/2\pi R\sqrt{R^2-e^2},$$

falls $e < R$, erfüllt also für $z = +a$ die obige Bedingung (22).

Aus ihm folgt, da

$$\frac{\partial J^0 x}{\partial x} = -J^1 x$$

ist,

$$u_1 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial e} = +\frac{S}{2\pi R}\int_0^\infty \frac{e^{\zeta z}+e^{-\zeta z}}{e^{\zeta a}-e^{-\zeta a}} J^1(\zeta e)\sin(\zeta R)\,d\zeta$$

und hieraus durch Einsetzen in die Gleichung (2) für $z = 0$

$$24)\qquad \frac{S^2}{2\pi^2 R^2}\left[\int_0^\infty \frac{J^1(\zeta e)\sin(\zeta R)\,d\zeta}{e^{\zeta a}-e^{-\zeta a}}\right]^2 = gz.$$

Ist R verschwindend klein, so giebt dies

$$25)\qquad \frac{S^2}{2\pi^2}\left[\int_0^\infty \frac{J^1(\zeta e)\,\zeta\,d\zeta}{e^{\zeta a}-e^{-\zeta a}}\right]^2 = gz.$$

In diesem letzteren Fall kann man bekanntlich das Integral auch durch eine unendliche Reihe ausdrücken, denn für φ_1 gilt hier der Ansatz

$$\varphi_1 = -m\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{(z-(2h+1)a)^2+e^2}}$$

bei welchem die supponirten Massen m sich durch das einströmende Quantum S ausdrücken, sodaß $m = S/2\pi$ ist. —

Wir haben oben ausschließlich stationäre Bewegungen betrachtet; die Methode ist aber, wenngleich weniger einfach, auch auf nichtstationäre anwendbar, wenn nur $\partial\varphi/\partial t$ eine bestimmte Kleinheit besitzt. Probleme, welche in der erörterten Weise sich behandeln lassen, bietet die Pulsation oder die verticale Fortschreitung einer Kugel in einem unendlichen Teiche.

II. Reihe.

Vorgelegt am 7. März 1891.

4. Stationäre combinirte Bewegungen, welche nur von zwei Coordinaten abhängen, innerhalb einer incompressibeln Flüssigkeit unter der Wirkung äusserer Kräfte, welche ein Potential haben.

Faßt man in die Bezeichnung Ω zusammen das Aggregat

$$\Omega = \Phi + \frac{p}{\varepsilon} + \tfrac{1}{2} V^2, \qquad 1)$$

worin Φ das äußere Potential und V die Lineargeschwindigkeit der Flüssigkeit ist, so lassen sich die Euler'schen Gleichungen für eine stationäre Bewegung schreiben [1])

$$\begin{aligned} 2(v\zeta - w\eta) &= +\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ 2(w\xi - u\zeta) &= +\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ 2(u\eta - v\xi) &= +\frac{\partial \Omega}{\partial z}. \end{aligned} \qquad 2)$$

Aus ihnen folgt

$$\begin{aligned} u\frac{\partial \Omega}{\partial x} + v\frac{\partial \Omega}{\partial y} + w\frac{\partial \Omega}{\partial z} &= 0, \\ \xi\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \eta\frac{\partial \Omega}{\partial y} + \zeta\frac{\partial \Omega}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \Omega}{\partial n} &= 2V\tau \sin(V,\tau); \end{aligned} \qquad 3)$$

in der letzten Gleichung bezeichnet τ die resultirende Rotationsgeschwindigkeit, (V,τ) den Winkel der Wirbelaxe gegen die Richtung von V. und $\partial\Omega/\partial n$ den Differentialquotienten von Ω nach der Richtung der Normalen auf der durch die Stelle x, y, z gehenden Fläche Ω = Const.

Diese Fläche Ω = Const. hat hiernach die Eigenschaft, daß in ihr sowohl die Wirbel- als die Stromlinien liegen, welche durch den Punkt x, y, z hindurchgehen, und daß zwischen zwei Nach-

1) Lamb-Reiff, Hydrodynamik. Freiburg 1884 p. 482.

berflächen $\Omega = C$ und $\Omega = C + \delta C$ die Normale δn eine solche Länge besitzt, daß

$$V\tau\, \delta n \sin(V, \tau)$$

constant ist.

Zwei specielle Fälle von Bewegungen, welche mit diesen Bedingungen verträglich sind, hat Stokes[1]) angegeben. Ich werde im Folgenden sämmtliche stationäre Flüssigkeitsbewegungen ableiten, welche aus Wirbel- und Potentialbewegungen combinirt und nur von zwei Coordinaten abhängig sind.

a) Ebene combinirte Bewegungen lassen sich durch eine einzige Function ω darstellen, so daß

$$4) \qquad u = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \Delta \omega = -2\tau$$

ist, falls τ die resultirende Wirbelgeschwindigkeit bezeichnet. Die Bewegung ist nämlich dann eine combinirte, wenn ω einen additiven Theil ω_1 enthält, welcher der Gleichung $\Delta \omega_1 = 0$ genügt; dieser giebt für sich eine Potentialbewegung. $\omega = \text{Const.}$ giebt allgemein das System der Stromcurven.

Die Gleichungen (1) nehmen hier die Form an

$$5) \qquad 2\tau \frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad 2\tau \frac{\partial \omega}{\partial y} = -\frac{\partial \Omega}{\partial y},$$

woraus folgt, daß τ und Ω Functionen von ω allein, also längs jeder Stromcurve constant sein müssen; ein Resultat, das, soweit es τ betrifft, auch aus den bekannten von Helmholtz'schen Sätzen über Wirbelbewegungen folgt.

Enthält ω nur τ, so ist, falls man kurz

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \omega', \quad \frac{d^2\omega}{d\tau^2} = \omega''$$

setzt,

$$6) \qquad u = \omega' \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad v = -\omega' \frac{\partial \tau}{\partial x}, \quad V^2 = \omega'^2 E\tau,$$

falls

$$E\tau = \left(\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial y}\right)^2$$

ist, und die Hauptgleichung (4) für ω lautet:

$$7) \qquad \Delta \omega + 2\tau = \omega'' E\tau + \omega' \Delta \tau + 2\tau = 0.$$

Soll sich aus derselben ω als Function von τ allein bestimmen, so muß auch $E\tau$ und $\Delta\tau$ nur von τ allein abhängen. $\omega'^2 E\tau$ ist aber

1) Stokes, Math. and Phys. Papers, Cambridge 1880, I p. 1.

gleich V^2 und ω' nach Annahme nur von τ abhängig. Sonach sagt unser Resultat aus, daß eine ebene combinirte stationäre Bewegung unter der Wirkung von Kräften, welche ein Potential haben, nur in der Weise stattfinden kann, daß längs jeder Stromcurve sowohl Wirbel- als Lineargeschwindigkeit constant ist. Benachbarte Stromcurven haben demzufolge in ihrem ganzen Verlauf auch gleichen Abstand von einander.

Um die allgemeinste Bewegung, für welche ω und demgemäß $E\tau$ und $\Delta\tau$ nur von τ abhängen, wirklich zu bestimmen, ist aber die Form (7) der Hauptgleichung für ω nicht bequem, sondern es empfiehlt sich dazu, die Ausgangsformel

$$\Delta\omega + 2\tau = 0$$

von den Coordinaten x, y auf ein anderes orthogonales System τ und σ zu transformiren.

Definirt man zwei Größen P und Q dadurch, daß die Linienelemente dt und ds, welche normal zu den Curven $\tau =$ Const. und $\sigma =$ Const. bis zu den betr. Nachbarcurven errichtet werden können, die Längen haben

$$dt = Pd\tau, \quad ds = Qd\sigma, \tag{8}$$

so führt obige Gleichung bei der Transformation bekanntlich auf

$$\frac{1}{PQ}\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{Q}{P}\frac{\partial\omega}{\partial\tau}\right)+\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{P}{Q}\frac{\partial\omega}{\partial\sigma}\right)\right]+2\tau = 0. \tag{9}$$

Soll nun ω nur von τ abhängen, so gilt Gleiches von P und Q, und hieraus folgt, daß nicht nur die Linienelemente dt, welche auf den σ-Curven durch zwei Nachbarcurven τ abgegrenzt werden, längs derselben τ-Curven constant sind, sondern daß auch die σ-Curven, welche gleichen Zuwachsen $d\sigma$ des Parameters entsprechen, auf einer und derselben τ-Curve lauter gleiche Abschnitte bezeichnen. Letzteres läßt sich auch so aussprechen, daß ein System σ-Curven, welches eine bestimmte τ-Curve in gleich lange Elemente ds zerlegt, auch auf allen andern τ-Curven gleiche Stücke ds_1 abgrenzen muß.

Dies genügt zur vollständigen Bestimmung der Natur beider Curvensysteme.

Denn ist ϱ der Krümmungsradius an einer beliebigen Stelle einer bestimmten τ-Curve, ds ein auf ihr abgegrenztes Linienelement, und sind dt und dt_1 die Normalenelemente in seinen Endpunkten bis zur Nachbarcurve, so grenzen dieselben auf der Nachbarcurve ein Element ds_1 ab, für welches nun

10) $$ds_1/ds = (\varrho \pm dt)/\varrho$$

ist. Nach den obigen Resultaten soll nun sowohl dt als ds_1/ds längs derselben τ-Curven den gleichen Werth haben, dies ergiebt aber, daß daselbst ϱ constant sein muß. Hieraus folgt das Resultat:

Die allgemeinsten mit den gestellten Bedingungen verträglichen ebenen Bewegungen sind Strömungen in concentrischen Kreisen oder parallelen Geraden, wobei das Gesetz, nach welchem die Geschwindigkeit von einer Stromcurve zur andern variirt, willkürlich bleibt.

Die σ-Curven sind hiernach von einem Punkt ausgehende oder parallele Gerade. —

Noch ist in Betracht zu ziehen, daß nach (5) wie ω, so auch Ω nur von τ oder, was jetzt dasselbe ist, von ω abhängen soll; da nun für V Gleiches gilt, so muß nach (1) auch $(\Phi + p/\varepsilon)$ nur ω enthalten. Besitzt die Flüssigkeit eine freie Grenze, so wird diese von einer Stromcurve gebildet und ist in ihr p constant. Man erkennt sonach, daß auch Φ in der freien Grenze constant sein muß.

Eine Art Ausnahmestellung innerhalb der obigen allgemeinen Betrachtung nimmt der von Stokes angegebene specielle Fall ein, in welchem τ in der ganzen Flüssigkeit constant ist; dann ist auch nicht nothwendig die Geschwindigkeit längs jeder Stromcurve constant. Ein Ansatz für ω ist hier

11) $$\omega = \omega_1 + ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

wo $\Delta\omega_1 = 0$ ist; hier ist dann

$$\Delta\omega = 2(a+c) = -2\tau.$$

b) Combinirte Bewegungen, welche in Ebenen durch eine Axe und zwar rings um dieselbe in gleicher Weise stattfinden, lassen sich gleichfalls durch eine einzige Function ω darstellen.

Ist die Z-Axe die ausgezeichnete Richtung, und bezeichnet man mit e den normalen Abstand eines Punktes von ihr, mit s die Geschwindigkeit parallel zu e, so kann man setzen

12) $$s = +\frac{1}{e}\frac{\partial\omega}{\partial z}, \quad w = -\frac{1}{e}\frac{\partial\omega}{\partial e}, \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial z^2} + e\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{1}{e}\frac{\partial\omega}{\partial e}\right) + 2\tau e = 0,$$

falls wieder τ die resultirende Wirbelgeschwindigkeit bezeichnet.

Die Bewegung ist eine reine Potentialbewegung, wenn $\tau = 0$ ist, sie ist eine combinirte, wenn ω ein additives Glied enthält, welches für sich allein die letzte Gleichung (12) bei verschwindendem τ erfüllt.

ω = Const. giebt wiederum die Schaar der Stromcurven.

Die Eulerschen Gleichungen (2) nehmen hier die Form an

$$\frac{2\tau}{e}\frac{\partial\omega}{\partial e} = -\frac{\partial\Omega}{\partial e}, \quad \frac{2\tau}{e}\frac{\partial\omega}{\partial z} = -\frac{\partial\Omega}{\partial z}, \tag{13}$$

woraus folgt, daß $\tau/e = \vartheta$ und Ω die Coordinaten e und z nur in der Verbindung ω enthalten, also längs der Stromcurven ω = Const. auch constant sein müssen. Soweit dies Resultat die Wirbelgeschwindigkeit τ betrifft, folgt es ebenfalls aus den bekannten Helmholtz'schen Sätzen über diese Größe.

Enthält ϑ nur ω, so enthält auch ω nur ϑ und man erhält, wenn man wieder abkürzt $d\omega/d\tau = \omega'$, $d^2\omega/d\tau^2 = \omega''$:

$$s = +\frac{\omega'}{e}\frac{\partial\vartheta}{\partial z}, \quad w = -\frac{\omega'}{e}\frac{\partial\vartheta}{\partial e}, \text{ also } V^2 = \frac{\omega'^2}{e^2}E\vartheta, \tag{14}$$

während die Hauptgleichung für ω lautet

$$\frac{\omega''}{e^2}E\vartheta + \frac{\omega'}{e^3}\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2} + e\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{1}{e}\frac{\partial\vartheta}{\partial e}\right)\right) + 2\vartheta = 0. \tag{15}$$

Soll dieselbe ω als Function von ϑ allein bestimmen, so muß sowohl der Factor von ω'', als der von ω' nur von ϑ abhängen, also längs einer Stromcurve constant sein. Ersterer unterscheidet sich daselbst nur durch eine Constante von V^2, folglich muß bei der betrachteten Bewegung wiederum die Geschwindigkeit längs jeder Stromcurve einen constanten Werth besitzen.

Die möglichen Bewegungen genauer zu erkennen, wenden wir das oben benutzte Verfahren an und transformiren die Hauptgleichung für ω auf ein orthogonales Coordinatensystem ϑ, σ. Diese Transformation läßt sich auch für diese Gleichung, welche nicht etwa mit der Formel $\Delta\omega + 2\vartheta = 0$ übereinstimmt, nach der bekannten Jacobi'schen Methode für jene Gleichung ausführen und liefert, falls analog mit (8) jetzt

$$dt = Pd\vartheta, \quad ds = Qd\sigma \tag{16}$$

gesetzt wird:

$$\frac{1}{ePQ}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{Q}{eP}\frac{\partial\omega}{\partial\vartheta}\right) + \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{P}{eQ}\frac{\partial\omega}{\partial\sigma}\right)\right] + 2\vartheta = 0. \tag{17}$$

Soll ω nur von ϑ abhängen, so muß Gleiches von ePQ und eP/Q, d. h. also von eP und Q selbst gelten.

Hieraus folgt, daß die Normalenelemente dt zwischen zwei

benachbarten τ-Curven mit e indirect proportional sein müssen — in Uebereinstimmung mit dem Inhalt der letzten Formel (3) —, und außerdem, daß ein System σ-Curven, deren Parameter sich um den constanten Betrag $d\sigma$ unterscheiden, auf einer und derselben τ-Curve gleiche Längen abgrenzen; oder anders ausgedrückt, daß ein System σ-Curven, welches auf einer τ-Curve gleiche Längen ds abschneidet, auf jeder anderen τ-Curve auch gleiche Längen ds_1 abgrenzt.

Hierdurch bestimmt sich wiederum das System der τ- und σ-Curven; denn die an Formel (10) angeknüpften Folgerungen führen hier zu dem Resultat, daß längs derselben τ-Curve der Krümmungsradius ϱ mit e indirect proportional sein muß. Diese Bedingung ist dieselbe, welche die capillare Oberfläche einfacher Krümmung für eine schwere Flüssigkeit bestimmt, wenn man gegen e die Erhebung oder Senkung eines Oberflächenpunktes gegen das unendliche Niveau versteht; die bei jenem Problem möglichen Begrenzungscurven werden also in unserm Problem Stromcurven darstellen können, falls es möglich ist, mit ihnen irgend ein von $z = -\infty$ bis $z = +\infty$ reichendes oder ein im Endlichen liegendes ringförmiges Bereich zwischen zwei derartigen Curven den gestellten Bedingungen gemäß zu erfüllen; denn es soll nicht nur eine einzelne, sondern jede Stromcurve die gefundene Eigenschaft besitzen. Die einfache Betrachtung der bekannten capillaren Grenzcurven zeigt aber, daß dies nur in den beiden Fällen möglich ist, daß die Stromcurven zur Z-Axe parallele Gerade oder in unendlicher Entfernung von der Z-Axe befindliche concentrische Kreise sind; letzterer Fall gehört aber im Grunde zu dem vorigen und nicht zu diesem Problem.

Wir haben also das Resultat gewonnen:

Stationäre combinirte Bewegungen, welche in Meridianebenen und rings um die Axe gleichmäßig verlaufen, sind unter der Wirkung von Kräften, welche ein Potential haben, nur so möglich, daß die Stromcurven der Axe parallele Gerade sind.

Bezüglich des Potentiales der äußern Kräfte gilt dasselbe, was S. 68 schon erörtert ist.

Eine Ausnahme bildet hier, wie früher, der von Stokes angegebene specielle Fall, daß $\tau/e = \vartheta$ innerhalb der ganzen Flüssigkeit, also ganz von selbst auch längs der Stromcurven constant ist. Hier sind die Schlüsse von S. 69 nicht anzustellen, die Geschwindigkeit ist also auch nicht längs der Stromcurven constant.

Für ω kann man in diesem Fall z. B. setzen

$$\omega = \omega_1 + e^3 (ae^2 + bez + cz^2),$$

worin ω_1 eine beliebige Potentialbewegung darstellt.

Das speciellere Problem gestattet also eine viel allgemeinere Lösung als das allgemeine.

5. Eine aus Potential- und Wirbelbewegung combinirte, nicht stationäre Strömung innerhalb einer ruhenden ellipsoidischen Schaale.

Vollkommen durchführbare Probleme nichtstationärer Flüssigkeitsbewegungen derjenigen Art, welche ich als „combinirte" bezeichnet habe, sind überaus selten. Die von Herrn Kirchhoff[1]) und später von den Herrn Gröbli[2]) und Greenhill[3]) behandelten Bewegungen einzelner Wirbelfäden und eines elliptischen Wirbelcylinders gehören nicht direct hierher, weil sie in einem Theil des Raumes nur Wirbel-, in dem andern nur Potentialbewegungen voraussetzen; überdies sind sie speciell ebene Probleme.

Zu den combinirten Bewegungen gehört unter anderen der Fall des gravitirenden flüssigen Ellipsoides, wie er zuerst von Dirichlet, dann von Riemann u. A. behandelt ist; aber die Schwierigkeit dieses Problemes gestattet seine Durchführung nur in einzelnen speciellen Fällen und die in diesen erhaltenen Resultate sind nicht besonders anschaulich. Ueberdies liefert es kein Beispiel zu dem methodischen Weg der Durchführung solcher Probleme, wie er z. B. von Kirchhoff[4]) auseinander gesetzt ist.

Aus diesen Ursachen dürfte das folgende einfache und elegante Problem vielleicht einiges Interesse verdienen.

Es sei eine ellipsoidische Schaale, deren Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ist, mit einer incompressibeln Flüssigkeit gefüllt

1) Kirchhoff, Mechanik. Leipzig 1876 p. 257 u. f.
2) Gröbli, Specielle Probleme etc. Zürich 1877.
3) Greenhill, Quaterly Journ. of Math. 1877.
4) Kirchhoff l. c. p. 253.

und derselben eine Anfangsgeschwindigkeit derartig ertheilt, daß die Componenten u, v, w lineäre Functionen der Coordinaten sind. Nach Wahrscheinlichkeit haben, wenn äußere Kräfte entweder garnicht wirken, oder nur solche vorhanden sind, die ein Potential besitzen, dann die Componenten zu jeder Zeit die genannte Form.

Wir setzen

$$2) \qquad \begin{aligned} u &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ v &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ w &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{aligned}$$

wo die a_{hk} die Zeit allein enthalten und nach der Incompressibilitätsbedingung

$$3) \qquad a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$$

sein muß.

Soll diese Bewegung durch das feste Ellipsoid (1) begrenzt werden, so muß

$$4) \qquad \frac{xu}{a^2} + \frac{yv}{b^2} + \frac{zw}{c^2} = 0$$

sein, d. h. für Werthe x, y, z, welche der Formel (1) genügen,

$$a_{11}\frac{x^2}{a^2} + a_{22}\frac{y^2}{b^2} + a_{33}\frac{z^2}{c^2} = 0$$

und

$$\frac{a_{23}}{b^2} + \frac{a_{32}}{c^2} = \frac{a_{31}}{c^2} + \frac{a_{13}}{a^2} = \frac{a_{12}}{a^2} + \frac{a_{21}}{b^2} = 0$$

sein. Erstere Bedingung führt mit (3) auf

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0,$$

und somit wird die Bedingung (4) jetzt allerorts erfüllt und findet die Strömung durchaus längs der Ellipsoide statt, welche zu (1) ähnlich sind.

Die letzteren Formeln, mit den Definitionen der Wirbelcomponenten

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

oder

$$2\xi = a_{32} - a_{23}, \quad 2\eta = a_{13} - a_{31}, \quad 2\zeta = a_{21} - a_{12}$$

combinirt, gestatten die übrigen a_{kk} durch ξ, η, ζ auszudrücken, so daß sich findet

$$\begin{aligned} a_{33} &= \frac{2c^2\xi}{b^2+c^2}, \quad a_{12} = \frac{2a^2\eta}{c^2+a^2}, \quad a_{21} = \frac{2b^2\zeta}{a^2+b^2}, \\ a_{22} &= \frac{-2b^2\xi}{b^2+c^2}, \quad a_{31} = \frac{-2c^2\eta}{c^2+a^2}, \quad a_{13} = \frac{-2a^2\zeta}{a^2+b^2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Nun gelten, wenn die Flüssigkeit unter der Wirkung von Kräften steht, welche ein Potential besitzen, bekanntlich die Formeln [1])

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \xi\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial u}{\partial y} + \zeta\frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \xi\frac{\partial v}{\partial x} + \eta\frac{\partial v}{\partial y} + \zeta\frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{d\zeta}{dt} &= \xi\frac{\partial w}{\partial x} + \eta\frac{\partial w}{\partial y} + \zeta\frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \tag{6}$$

Dieselben geben in unserm Falle, wo die ξ, η, ζ nur von der Zeit abhängen, die vollständigen Differentialgleichungen für diese Größen, welche unter Rücksicht auf die obigen Werthe (5) lauten:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= 2\eta\zeta a^2\left(\frac{1}{c^2+a^2} - \frac{1}{a^2+b^2}\right) = \eta\zeta\frac{2a^2(b^2-c^2)}{(c^2+a^2)(a^2+b^2)} \\ \frac{d\eta}{dt} &= 2\zeta\xi b^2\left(\frac{1}{a^2+b^2} - \frac{1}{b^2+c^2}\right) = \zeta\xi\frac{2b^2(c^2-a^2)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)} \\ \frac{d\zeta}{dt} &= 2\xi\eta c^2\left(\frac{1}{b^2+c^2} - \frac{1}{c^2+a^2}\right) = \xi\eta\frac{2c^2(a^2-b^2)}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Dieses System hat eine große Aehnlichkeit mit demjenigen, welches die Rotation eines starren Körpers um einen festen Punkt ohne Einwirkung äußerer Kräfte bestimmt, und gestattet auch eine ähnliche Behandlung.

Zwei Integrale erhält man, indem man die drei Gleichungen (7) resp. mit den Factoren

$$a^2\xi, \quad b^2\eta, \quad c^2\zeta$$

und

$$\frac{b^2c^2\xi}{b^2+c^2}, \quad \frac{c^2a^2\eta}{c^2+a^2}, \quad \frac{a^2b^2\zeta}{a^2+b^2}$$

zusammenfaßt, dieselben lauten

1) Helmholtz, Crelle's Journ. 55, 34, 1858; ges. Abh. I, p. 111, Leipzig 1882.

8) $$a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2 = k_1,$$

9) $$\frac{b^2c^2\xi^2}{b^2+c^2} + \frac{c^2a^2\eta^2}{c^2+a^2} + \frac{a^2b^2\zeta^2}{a^2+b^2} = k_2,$$

falls k_1 und k_2 Integrationsconstanten bezeichnen.

Multiplicirt man die letzte Gleichung mit

$$(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)/a^2b^2c^2,$$

zieht die erstere davon ab und dividirt das Resultat durch

$$(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2),$$

so resultirt

10) $$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = k_3,$$

wo k_3 für das rechts auftretende constante Glied gesetzt ist.

Nun lassen sich ξ, η, ζ deuten als die Coordinaten des Endpunktes eines Vectors, der in jedem Moment vom Coordinatenanfang aus parallel der Wirbelaxe in einer Länge gleich der resultirenden Wirbelgeschwindigkeit τ construirt ist; wir nennen ihn weiterhin kurz den Vector τ.

Die Gleichungen (8), (9) und (10) sagen nun aus, daß dieser Endpunkt bei der Bewegung der Flüssigkeit auf der Schnittcurve zweier dieser drei Ellipsoide, die sich hiernach sämmtlich in derselben Curve schneiden, verharren muß. Das letztere Ellipsoid ist der durch (1) gegebenen Begrenzung der Flüssigkeit ähnlich.

Bezüglich der Integrationsconstanten k_2 und k_3, welche sich durch den Anfangszustand bestimmen, läßt sich sagen, daß falls

$$a \gtrless b \gtrless c$$

ist, auch

11) $$(a^2+b^2) \gtrless \frac{k_3}{k_2} \gtrless (b^2+c^2)$$

sein muß. Die Halbaxenquadrate der Ellipsoide (9) und (10) sind resp.

$$a_2^2 = k_2\frac{(b^2+c^2)}{b^2c^2}, \quad b_2^2 = k_2\frac{(c^2+a^2)}{c^2a^2}, \quad c_2^2 = k_2\frac{(a^2+b^2)}{a^2b^2},$$

$$a_3^2 = a^2k_3, \quad b_3^2 = b^2k_3, \quad c_3^2 = c^2k_3.$$

Aus der Ungleichung (11) folgt sogleich, daß die beiden Ellipsoide einander stets schneiden, denn wenn $a_3^2 < a_2^2$ ist, so folgt umgekehrt $c_3^2 > c_2^2$.

Sind die a- oder c-Axen für beide nahe gleich, so hat die Schnittcurve elliptische Gestalt und die Wirbelaxe bleibt immer in der Nähe der bezüglichen Ellipsoidaxe; sind die b-Axen nahe gleich, so hat die Schnittcurve in der Nähe derselben den Charakter einer Hyperbel, die Wirbelaxe entfernt sich also um endliche Winkel von ihr, auch wenn sie ihr zu irgend einer Zeit unendlich nahe war. Dies stimmt vollständig mit den Sätzen über die Stabilität resp. Labilität der Rotation eines starren Körpers um die Axe größten, kleinsten oder mittleren Trägheitsmomentes überein.

Die vollständige Lösung des Problemes geschieht durch elliptische Functionen. Setzt man $am(\lambda t + \mu)$ kurz gleich ψ und

$$\xi = A\cos\psi, \quad \eta = B\sin\psi, \quad \zeta = C\Delta\psi \qquad 12)$$

und bezeichnet man den Modul mit $\varkappa$, so liefern die Gleichungen (7) folgende drei Relationen zwischen fünf von den sechs willkürlichen Constanten A, B, C, $\varkappa$, λ, μ:

$$\frac{A\lambda}{BC} = \frac{2a^2(c^4-b^4)}{N}, \quad \frac{B\lambda}{CA} = \frac{2b^2(c^4-a^4)}{N}, \quad \varkappa^2\frac{C\lambda}{AB} = \frac{2c^2(b^4-a^4)}{N}, \qquad 13)$$

worin $N = (b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)$ bedeutet. Aus ihnen lassen sich drei der sechs Constanten durch die übrigen ausdrücken, diese hinwiederum bestimmen sich durch den Anfangszustand.

Wir wollen B^2, λ^2, $\varkappa^2$ durch die übrigen geben und erhalten, indem wir das Verhältniß der ersten und zweiten, sowie der ersten und dritten Formel und das Product der ersten und zweiten bilden:

$$B^2 = A^2\frac{b^2(c^4-a^4)}{a^2(c^4-b^4)}, \quad \varkappa^2 = \frac{A^2}{C^2}\frac{c^2(b^4-a^4)}{a^2(c^4-b^4)},$$
$$\lambda^2 = \frac{4C^2a^2b^2}{N^2}(c^4-a^4)(c^4-b^4). \qquad 14)$$

Was die Bestimmung der noch verfügbaren drei Constanten A, B und μ durch den Anfangszustand anbetrifft, so liegen die Verhältnisse hier einfacher, als bei dem Problem der Rotation eines starren Körpers, weil zwischen den Geschwindigkeiten u, v, w und den Wirbelcomponenten nach (2) und (5) lineäre Beziehungen bestehen, welche, wenn die Anfangsgeschwindigkeiten u_0, v_0, w_0 gegeben sind, ohne Schwierigkeiten die Anfangswerthe ξ_0, η_0, ζ_0 anzugeben gestatten, und umgekehrt.

Rechnen wir die Zeit von dem Moment an, wo $\psi = am(\lambda t + \mu)$ gleich Null ist, oder setzen wir, was dasselbe ist, $\mu = 0$, so ergeben die Ansätze (12)

$$\xi_0 = A, \quad \xi_0 = C,$$

also A und C vollständig bestimmt. Das Vorzeichen von B bestimmt sich durch die erste Gleichung (13), wenn dasjenige von λ festgesetzt ist. Eine Umkehrung des Zeichens von λ hat Gleiches für B zur Folge, daher ist eines der beiden völlig willkürlich zu wählen. —

Sind die Wirbelcomponenten ξ, η, ζ, wie vorstehend gezeigt, durch elliptische Functionen der Zeit ausgedrückt, so folgen daraus sogleich die vollständigen Werthe der Geschwindigkeiten:

$$15) \qquad \begin{aligned} u &= 2a^2\left(\frac{\eta z}{c^2+a^2} - \frac{\zeta y}{a^2+b^2}\right), \\ v &= 2b^2\left(\frac{\zeta x}{a^2+b^2} - \frac{\xi z}{b^2+c^2}\right), \\ w &= 2c^2\left(\frac{\xi y}{b^2+c^2} - \frac{\eta x}{c^2+a^2}\right). \end{aligned}$$

Wendet man diese Ausdrücke auf die Zeit $t = 0$ an, so erhält man unter Berücksichtigung des oben Entwickelten

$$u_0 = -\frac{2a^2Cy}{a^2+b^2}, \quad v_0 = 2b^2\left(\frac{Cx}{a^2+b^2} - \frac{Az}{b^2+c^2}\right), \quad w_0 = +\frac{2c^2Ay}{b^2+c^2};$$

diese Formeln zeigen, wie die Constanten A und C mit den Anfangsgeschwindigkeiten zusammenhängen und geben von dem Anfangszustand selbst eine anschauliche Vorstellung. Die XZ-Ebene dreht sich z. B. im ersten Moment wie eine starre Platte um die Gerade

$$\frac{Cx}{a^2+b^2} = \frac{Az}{b^2+c^2}$$

mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_1 = 2b^2\sqrt{\frac{A^2}{(b^2+c^2)^2} + \frac{C^2}{(b^2+a^2)^2}},$$

die Y-Axe um die Gerade

$$\frac{a^2Cx}{a^2+b^2} = \frac{c^2Az}{b^2+c^2}$$

mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_2 = 2\sqrt{\frac{c^4A^2}{(b^2+c^2)^2} + \frac{a^4C^2}{(a^2+b^2)^2}}.$$

Die Gleichungen der Strom- oder Geschwindigkeitscurven werden erhalten, indem man in (15)

$$u = V dx/ds, \quad v = V dy/ds, \quad w = V dz/ds$$

setzt und die Gleichungen (15) bei constanten t nach s integrirt; ds bezeichnet dabei das Linienelement der Curven und V die resultirende Geschwindigkeit.

Integrable Combinationen erhält man aus (15), wenn man die drei Gleichungen resp. mit den Factoren

$$\frac{x}{a^2}, \quad \frac{y}{b^2}, \quad \frac{z}{c^2} \text{ und } \frac{b^2c^2\xi}{b^2+c^2}, \quad \frac{c^2a^2\eta}{c^2+a^2}, \quad \frac{a^2b^2\zeta}{a^2+b^2}$$

zusammenfaßt. Sie liefern die Integrale

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = m, \tag{16}$$

$$\frac{x\xi b^2c^2}{b^2+c^2}+\frac{y\eta c^2a^2}{c^2+a^2}+\frac{z\zeta a^2b^2}{a^2+b^2} = m_1, \tag{17}$$

worin m und m_1 die Integrationsconstanten bezeichnen. Das erste ergiebt eine Schaar zu der Begrenzungsfläche (1) ähnlicher Ellipsoide, was nach S. 72 vorauszusehen war, das zweite eine Schaar Ebenen, welche parallel sind zu der Tangentenebene, die sich an das zweite Ellipsoid (9) im Endpunkt des Vectors τ, d. h. an der Stelle wo dasselbe von der augenblicklichen Wirbelaxe geschnitten wird, construiren läßt.

Dies ergiebt den anschaulichen Satz:

Die Strom- oder Geschwindigkeitscurven sind in jedem Moment gegeben durch die elliptischen Schnittlinien der Schaar zu dem begrenzenden ähnlichen Ellipsoide mit der Schaar Ebenen, welche parallel sind der Tangentenebene an dem zweiten Hülfsellipsoid in dem Punkte, wo dasselbe von der momentanen Wirbelaxe geschnitten wird.

Aber diese Ellipsen sind keineswegs zugleich die Bahncurven der einzelnen Flüssigkeitstheilchen, da ja die Bewegung nicht stationär ist.

Diese, sowie die Bewegung der Flüssigkeitstheilchen in ihrer Bahn zu erhalten, muß man in (15)

$$u = dx/dt, \quad v = dy/dt, \quad w = dz/dt$$

setzen und durch Integration x, y, z als Functionen von t bestimmen;

bildet man aus diesen Beziehungen durch Elimination von t zwei von der Zeit unabhängige Gleichungen zwischen x, y, z, so geben diese die Gleichungen der Bahn.

Wiederum sind zwei Integrale sehr leicht zu bestimmen. Denn die Factoren x/a^2, y/b^2, z/c^2 geben aus (15) eine auch nach t integrable Combination und damit das Integral

$$18) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = m,$$

welches nur aussagt, daß, wie jede Stromcurve in jedem Moment, so auch jedes einzelne Flüssigkeitstheilchen während seines ganzen Laufs auf einem zu dem begrenzenden ähnlichen Ellipsoid bleibt. Faßt man hingegen die Gleichungen (7) mit den Factoren x/a^2, y/b^2, z/c^2 und die Gleichungen (15) mit den Factoren ξ/a^2, η/b^2, ζ/c^2 zusammen, so erhält man eine zweite integrable Combination, welche liefert

$$19) \qquad \frac{x\xi}{a^2}+\frac{y\eta}{b^2}+\frac{z\zeta}{c^2} = n;$$

n ist dabei die Integrationsconstante.

Die Gleichung giebt unendlich viele Ebenen, welche parallel sind der Tangentialebene, die sich in dem betreffenden Zeitpunkt an dem dritten Ellipsoid (10) im Endpunkt des Vectors τ ziehen läßt und sich mit diesem bewegt.

Ein gegebener Werth der Integrationsconstanten m und n bestimmt eine Reihe Flüssigkeitstheilchen, die zu irgend einer Zeit die Schnittellipse zweier bestimmter Flächen (18) und (19) erfüllen; die letzten Formeln zeigen, daß dieser Flüssigkeitsfaden zu jedem Zeitmoment die Gestalt der Schnittcurve dieser selben beiden Flächen besitzt, also mit der Ebene (19) auf dem Ellipsoid (18) herumwandert, dabei zwar immer eine elliptische Gestalt behält, aber seine Form von Moment zu Moment ändert.

Man kann mit Hülfe der bisher gefundenen Resultate sich schon eine recht deutliche Vorstellung von dem Verlauf der Bahnen auf einem der Ellipsoide (18) verschaffen. Construirt man nämlich auf demselben für gleiche und kleine Zeitintervalle alle Lagen σ_1, σ_2... der Schnittcurve desselben mit der Ebene (19), so geben diese die successiven Positionen eines und desselben Flüssigkeitsfadens. Legt man ferner durch den Mittelpunkt des Ellipsoides für jeden der gewählten Zeitpunkte die ihm entsprechende Ebene (17), so liegt ihr parallel die Geschwindigkeit, welche in dem betrachteten Moment alle Theile jenes Flüssigkeitsfadens ha-

ben. Man kann also leicht Linienelemente ds zwischen den Curven σ_1, σ_2... construiren in der Richtung der Bewegung, welche die benachbarten Flüssigkeitstheilchen besitzen, und so einen zusammenhängenden Zug von Elementen ds gewinnen, der die Bahncurve eines Theilchens angiebt.

Unter diesen Bahnen ist eine bestimmte Schaar von besonderer Einfachheit und sogleich angebbar.

Für die Gleichungen (15) ist nämlich

$$x = q\xi, \quad y = q\eta, \quad z = q\zeta \tag{20}$$

ein particuläres Integral, denn durch Substitution dieser Werthe geht das System (15) in (7) über; dieser Umstand ist ein Ausdruck des bekannten Helmholtz'schen Satzes, daß die Wirbellinien immer von denselben Theilchen gebildet werden, jene Coordinaten x, y, z entsprechen nämlich Flüssigkeitstheilchen auf dem Vector τ. Hieraus folgt, daß die Schnittcurve der Ellipsoide (9) und (10) und die ihr auf den ähnlichen Ellipsoiden (18) entsprechenden specielle Bahncurven sind.

Was nun endlich die Darstellung der Coordinaten x, y, z eines jeden Flüssigkeitstheilchens als Functionen der Zeit allein anbetrifft, so ist ein particuläres Integral der Gleichungen (15), nämlich das Werthsystem (20)

$$x_1 = q\xi, \quad y_1 = q\eta, \quad z_1 = q\zeta,$$

bereits oben benutzt worden. Wie man aus diesen die allgemeinen Ausdrücke für x, y, z ableiten kann, hat Herr Dr. Venske in einer dieser Arbeit sich anschließenden Notiz gezeigt. Die allgemeinen Resultate, die sich durch elliptische Integrale ausdrücken, sind wenig übersichtlich.

Wir wollen uns daher eingehender nur mit dem speciellen Fall beschäftigen, daß das Ellipsoid (1) ein Rotationsellipsoid um die Z-Axe, also $a = b$ ist. Hier läßt sich die vollständige Integration der Gleichungen (15) nach t ohne Schwierigkeit ausführen.

Zunächst giebt die dritte der Gleichungen (7) $d\zeta/dt = 0$, woraus wir $\zeta = \nu$ schließen, falls ν eine Constante bezeichnet, und die ersten beiden nehmen die Form an:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\lambda\eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = +\lambda\xi, \tag{22}$$

worin kurz $\nu\frac{c^2-a^2}{c^2+a^2} = \lambda$ gesetzt ist.

Hieraus folgt bei geeigneter Verfügung über den Anfangspunkt der Zeit t

$$23) \qquad \xi = \mu \cos \lambda t, \quad \eta = \mu \sin \lambda t;$$

die Wirbelaxe wandert also mit gleichförmiger Geschwindigkeit in einem Kreiskegel von der Oeffnung ϑ, wo $\operatorname{tg} \vartheta = \nu/\mu$ ist, um die Z-Axe; die Umlaufsdauer ist

$$24) \qquad T = \pm 2\pi/\lambda = \pm 2\pi (c^2 + a^2)/\nu (c^2 - a^2),$$

also um so kleiner, je mehr das Ellipsoid von der Kugel abweicht.

Für die Geschwindigkeiten erhält man nach (15) die Werthe:

$$25) \qquad \begin{aligned} u &= -\nu y + \frac{\nu - \lambda}{\nu} \mu \varepsilon \sin \lambda t, \\ v &= +\nu x - \frac{\nu - \lambda}{\nu} \mu \varepsilon \cos \lambda t, \\ w &= \frac{\nu + \lambda}{\nu} \mu (y \cos \lambda t - x \sin \lambda t). \end{aligned}$$

Eine particuläre Lösung dieser Gleichungen für x, y, ε als Functionen der Zeit ist bereits oben angegeben, nämlich

$$26) \quad x_1 = q_1 \xi = q_1 \mu \cos \lambda t, \quad y_1 = q_1 \eta = q_1 \mu \sin \lambda t, \quad \varepsilon_1 = q_1 \xi = q_1 \nu.$$

Eine weitere mit zwei Constanten findet man leicht direct, indem man

$$26') \qquad \varepsilon_2 = q_2 \cos (\sigma t + \delta)$$

setzt; dann werden die obigen Gleichungen befriedigt durch

$$26'') \qquad \begin{aligned} x_2 &= +\frac{\mu(\nu - \lambda)}{2\nu} q_2 \left[\frac{\cos((\sigma - \lambda)t + \delta)}{\nu + (\sigma - \lambda)} + \frac{\cos((\sigma + \lambda)t + \delta)}{\nu - (\sigma + \lambda)} \right], \\ y_2 &= -\frac{\mu(\nu - \lambda)}{2\nu} q_2 \left[\frac{\sin((\sigma - \lambda)t + \delta)}{\nu + (\sigma - \lambda)} - \frac{\sin((\sigma + \lambda)t + \delta)}{\nu - (\sigma + \lambda)} \right], \end{aligned}$$

falls $\sigma = \sqrt{(\nu - \lambda)^2 + (\nu^2 - \lambda^2)\frac{\mu^2}{\nu^2}} = \frac{2a}{c^2 + a^2} \sqrt{a^2 \nu^2 + c^2 \mu^2}$ ist.

Die Wurzel kann positiv genommen werden; das negative

Zeichen würde sachlich dieselben Lösungen ergeben. Da nun die gefundenen particulären Lösungen zusammen drei willkürliche Constanten enthalten, und die Gleichungen (15) in Bezug auf x, y, z lineär sind, so geben

$$x = x_1 + x_2, \quad y = y_1 + y_2, \quad z = z_1 + z_2$$

die vollständigen Werthe der Coordinaten.

Sie lassen sich auch schreiben:

$$x = q_1\mu\cos\lambda t - \frac{q_2 a}{\mu c^2}\Big[a\nu\cos(\sigma t+\delta)\cos\lambda t - \sqrt{a^2\nu^2+c^2\mu^2}\sin(\sigma t+\delta)\sin\lambda t\Big],$$

$$y = q_1\mu\sin\lambda t - \frac{q_2 a}{\mu c^2}\Big[a\nu\cos(\sigma t+\delta)\sin\lambda t + \sqrt{a^2\nu^2+c^2\mu^2}\sin(\sigma t+\delta)\cos\lambda t\Big],$$

$$z = q_1\nu + q_2\cos(\sigma t+\delta). \qquad 27$$

Führt man ein Coordinatensystem X_1, Y_1, Z_1 ein, welches sich mit derselben Winkelgeschwindigkeit, wie die Wirbelaxe, um die Z-Axe dreht, setzt man also

$$x_1 = x\cos\lambda t + y\sin\lambda t, \quad y_1 = -x\sin\lambda t + y\cos\lambda t, \quad z_1 = z,$$

so ergiebt sich

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1\mu - \frac{q_2\nu a^2}{\mu c^2}\cos(\sigma t+\delta), \\ y_1 &= -\frac{q_2 a}{\mu c^2}\sqrt{a^2\nu^2+c^2\mu^2}\sin(\sigma t+\delta), \\ z_1 &= q_1\nu + q_2\cos(\sigma t+\delta). \end{aligned} \qquad 28)$$

Hieraus folgen für die Bahn des Flüssigkeitstheilchens die Gleichungen

$$(x_1 - q_1\mu)\frac{\mu}{a^2} + (z_1 - q_1\nu)\frac{\nu}{c^2} = 0 \qquad 29)$$

und falls man

$$\begin{aligned} \frac{(x_1-q_1\mu)\nu a^2 - (z_1-q_1\nu)\mu c^2}{\sqrt{\nu^2 a^4+\mu^2 c^4}} &= x' \text{ setzt}, \\ \frac{x'^2}{a^4\nu^2+c^4\mu^2} + \frac{y_1^2}{a^2(a^2\nu^2+c^2\mu^2)} &= \frac{q_2^2}{\mu^2 c^4}. \end{aligned} \qquad 30)$$

Diese Formeln, deren erste sachlich mit (19) übereinstimmt,

geben folgende Resultate, von denen ein Theil im allgemeinen Fall eines dreiaxigen Ellipsoides schon oben abgeleitet ist.

Die einzelnen Flüssigkeitstheilchen bewegen sich in Ellipsen, welche senkrecht zu einer Meridianebene durch die Z-Axe stehen, die ihrerseits mit derselben Winkelgeschwindigkeit λ, wie die Wirbelaxe, um die Z-Axe rotirt. Die Ebene dieser Bahnellipse ist die Tangentenebene an dem Ellipsoid (10) im Endpunkt der Wirbelaxe τ und demgemäß um einen constanten Winkel Θ gegen die Z-Axe geneigt, der sich bestimmt aus

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{\nu a^2}{\mu c^2},$$

also für alle Theilchen den gleichen Werth hat; sie befindet sich vom Centrum des die Flüssigkeit begrenzenden Ellipsoides in dem Abstand

$$d = q_1 \frac{a^2\nu^2 + c^2\mu^2}{\sqrt{a^4\nu^2 + c^4\mu^2}},$$

der allein von der ersten Integrationsconstante q_1 abhängt.

Die Halbaxenquadrate A^2 und B^2 der Ellipse sind

$$A^2 = \frac{q_2^2(a^4\nu^2 + c^4\mu^2)}{\mu^2 c^4}, \quad B^2 = \frac{q_2^2 a^2(a^2\nu^2 + c^2\mu^2)}{\mu^2 c^4},$$

sie enthalten also nur die zweite Constante q_2; erstere Axe liegt in der Meridianebene, letztere normal dazu; ihr Verhältniß ist für alle Theilchen von gleicher Größe.

Diese rotirende Bahnellipse wird umlaufen in der Zeit

$$T' = \frac{2\pi}{\sigma} = \frac{\pi(a^2 + c^2)}{a\sqrt{a^2\nu^2 + c^2\mu^2}},$$

welche für alle Theilchen die gleiche Größe hat, aber von der Umlaufsdauer der Wirbelaxe verschieden ist. Die Bahnen der Flüssigkeitstheilchen sind also keine geschlossenen Curven. —

Für den Druck p, welcher innerhalb der bewegten Flüssigkeit stattfindet, ergeben die Euler'schen Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial\left(\Phi+\frac{p}{\varepsilon}\right)}{\partial x}$$

u. s. f., falls wir das Potential Φ, welches sich von p/ε nicht sondert, der Einfachheit halber gleich Null setzen, unter Benutzung der Werthe (5) und der Differentialgleichungen (7), die Beziehungen

$$4a^2b^2c^2\left[x\left(\frac{\xi^2}{c^2(a^2+b^2)^2}+\frac{\eta^2}{b^2(c^2+a^2)^2}\right)-\frac{2\xi(\eta y+\zeta z)}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)}\right]=+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial x}\quad 31)$$

u. s. f. Aus ihnen folgt durch Integration:

$$p=C+4a^2b^2c^2\varepsilon\left\{\frac{x^2}{2}\left(\frac{\xi^2}{c^2(a^2+b^2)^2}+\frac{\eta^2}{b^2(c^2+a^2)^2}\right)+\frac{y^2}{2}\left(\frac{\xi^2}{a^2(b^2+c^2)^2}+\frac{\zeta^2}{c^2(a^2+b^2)^2}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{z^2}{2}\left(\frac{\eta^2}{b^2(c^2+a^2)^2}+\frac{\xi^2}{a^2(b^2+c^2)^2}\right)-\frac{2(\eta\zeta yz+\zeta\xi zx+\xi\eta xy)}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)}\right\}.\quad 32)$$

Um hieraus die Kraftcomponenten und Drehungsmomente zu berechnen, welche die Schaale erfährt, beachte man, daß

$$X=\int p\cos(n_a,x)\,do,\quad L=\int p(y\cos(n_a,z)-z\cos(n_a,y))\,do$$

ist, und ähnlich die anderen.

Hieraus ist zu gewinnen

$$X=\int\frac{\partial p}{\partial x}dk,\quad L=\int\left(y\frac{\partial p}{\partial z}-z\frac{\partial p}{\partial y}\right)dk,$$

wo dk das Raumelement der Flüssigkeit bezeichnet. Da nun für das Ellipsoid (1)

$$\int x^2dk=\frac{4\pi}{15}a^3bc,\quad\int y^2dk=\frac{4\pi}{15}ab^3c,\quad\int z^2dk=\frac{4\pi}{15}abc^3$$

ist, so resultirt sogleich:

$$X=Y=Z=0,$$
$$L=P\eta\zeta(c^2-b^2),\quad M=P\zeta\xi(a^2-c^2),\quad N=P\xi\eta(b^2-a^2),\quad 33)$$

worin

$$\frac{32\pi a^3b^3c^3\varepsilon}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)}=P$$

gesetzt ist.

Die ellipsoidische Schaale erfährt also seitens der bewegten Flüssigkeit ein Drehungsmoment um eine Axe, deren Richtungscosinus α, β, γ gegeben sind durch

$$34) \qquad \alpha : \beta : \gamma = \eta\zeta(c^2-b^2) : \zeta\xi(a^2-c^2) : \xi\eta(b^2-a^2),$$

von einer Größe

$$35) \qquad D = P\tau d \sin(\tau, d);$$

hierin ist τ die momentane Wirbelgeschwindigkeit, d die Länge des Lothes vom Centrum der Schaale auf die Tangentenebene, welche am ersten Ellipsoid (8) im Endpunkt der augenblicklichen Wirbelaxe construirt werden kann, (τ, d) der Winkel zwischen diesem Loth und der Wirbelaxe. Auch die Axe, um welche das resultirende Moment wirkt, hat eine Beziehung zu diesem Ellipsoid. Da nämlich nach (34) gilt

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0 \text{ und}$$

$$36) \qquad \alpha a^2\xi + \beta b^2\eta + \gamma c^2\zeta = 0,$$

so steht die Axe des resultirenden Momentes stets normal zur Ebene durch die momentane Wirbelaxe τ und das Loth d.

Es haben also alle drei Ellipsoide (8), (9), (10) bei diesem Problem eine gewisse geometrische Bedeutung.

Ihre gemeinsame Schnittcurve giebt den Verlauf der resultirenden Wirbelgeschwindigkeit mit der Zeit an, das Ellipsoid (9) kommt bei der Bestimmung der Strömungs- oder Geschwindigkeitscurven, (10) bei der Bestimmung der Bahnen der einzelnen Flüssigkeitstheilchen, endlich (8) bei der Bestimmung der Einwirkung in Betracht, welche die ellipsoidische Schaale seitens der Flüssigkeit erfährt.

Göttingen, Anfang März 1891.

Zusatz.

Integration eines speciellen Systems linearer, homogener Differentialgleichungen mit doppeltperiodischen Functionen als Coefficienten.

Von

O. Venske.

Bei einer Untersuchung über nicht stationäre Wirbelbewegungen einer idealen Flüssigkeit wurde Herr Prof. W. Voigt auf das folgende System simultaner Differentialgleichungen geführt:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= 2a^2\left(\frac{\eta z}{a^2+c^2} - \frac{y\zeta}{a^2+b^2}\right),\\
\frac{dy}{dt} &= 2b^2\left(\frac{\zeta x}{b^2+a^2} - \frac{z\xi}{b^2+c^2}\right),\\
\frac{dz}{dt} &= 2c^2\left(\frac{\xi y}{c^2+b^2} - \frac{x\eta}{c^2+a^2}\right).
\end{aligned} \tag{A}$$

In demselben bedeuten a, b, c Constanten, und ξ, η, ζ elliptische Functionen von t, welche den folgenden Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi}{dt} &= \frac{2a^2(b^2-c^2)}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}\eta\zeta,\\
\frac{d\eta}{dt} &= \frac{2b^2(c^2-a^2)}{(b^2+c^2)(b^2+a^2)}\zeta\xi,\\
\frac{d\zeta}{dt} &= \frac{2c^2(a^2-b^2)}{(c^2+a^2)(c^2+b^2)}\xi\eta.
\end{aligned} \tag{B}$$

Von Herrn Prof. W. Voigt aufgefordert habe ich mich mit der Integration des Systems (A) beschäftigt. Die Resultate, zu denen ich gelangte, teile ich im Folgenden mit.

Da das System (A) in das System (B) übergeht, wenn man ξ, η, ζ anstatt x, y, z setzt, ist

$$x = \xi,\quad y = \eta,\quad z = \zeta$$

ein particuläres Integral des Systems (A).

Ich werde nun zeigen, wie man aus einem particulären Integrale unendlich viele andere von demselben und von einander linear unabhängige particuläre Integrale gewinnen kann.

x_1, y_1, z_1 sei ein particuläres Integral des Systems (A), welches für einen bestimmten Wert t_0 der unabhängig Variablen t der Gleichung genügt

$$\text{(a)} \qquad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1 .$$

Es existieren jedenfalls unendlich viele Systeme particulärer Integrale x_2, y_2, z_2 und x_3, y_3, z_3 von der Art, daß für denselben Wert t_0 von t die Gleichungen bestehen

$$\text{(b)} \qquad \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{z_2^2}{c^2} = 1,$$

$$\text{(c)} \qquad \frac{x_3^2}{a^2} + \frac{y_3^2}{b^2} + \frac{z_3^2}{c^2} = 1,$$

$$\text{(b)} \qquad \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} + \frac{z_1 z_2}{c^2} = 0,$$

$$\text{(e)} \qquad \frac{x_2 x_3}{a^2} + \frac{y_2 y_3}{b^2} + \frac{z_2 z_3}{c^2} = 0,$$

$$\text{(f)} \qquad \frac{x_3 x_1}{a^2} + \frac{y_3 y_1}{b^2} + \frac{z_3 z_1}{c^2} = 0 .$$

Die linken Seiten der Gleichungen (a), $\cdots$, (f) sind aber Constanten, wie ich sogleich beweisen werde.

Der Voraussetzung nach bestehen die Relationen

$$\frac{dx_i}{dt} = 2a^2\left(\frac{\eta z_i}{a^2+c^2} - \frac{y_i \zeta}{a^2+b^2}\right),$$

$$\frac{dy_i}{dt} = 2b^2\left(\frac{\zeta x_i}{b^2+a^2} - \frac{z_i \xi}{b^2+c^2}\right),$$

$$\frac{dz_i}{dt} = 2c^2\left(\frac{\xi y_i}{c^2+b^2} - \frac{x_i \eta}{c^2+a^2}\right),$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

Multipliciert man dieselben der Reihe nach mit

$$\frac{x_k}{a^2}, \quad \frac{y_k}{b^2}, \quad \frac{z_k}{c^2} \qquad (k = 1, 2, 3)$$

und addirt dann, so erhält man

$$\frac{x_k}{a^2}\frac{dx_i}{dt} + \frac{y_k}{b^2}\frac{dy_i}{dt} + \frac{z_k}{c^2}\frac{dz_i}{dt} = -\frac{x_i}{a^2}\frac{dx_k}{dt} - \frac{y_i}{b^2}\frac{dy_k}{dt} - \frac{z_i}{c^2}\frac{dz_k}{dt}$$

und hieraus

$$d\left(\frac{x_i x_k}{a^2}+\frac{y_i y_k}{b^2}+\frac{z_i z_k}{c^2}\right)=0.$$

Die aufgestellte Behauptung ist also erwiesen, und damit ist dargethan, daß $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3$ für jeden Wert des Argumentes t den Gleichungen (a), ···, (f) genügen.

Aus diesen Gleichungen folgt, wenn ε eine zweite Einheitswurzel bedeutet,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\varepsilon a}{bc}(y_2 z_3 - y_3 z_2), \\ x_2 &= \frac{\varepsilon a}{bc}(y_3 z_1 - y_1 z_3), \qquad \text{(g)} \\ x_3 &= \frac{\varepsilon a}{bc}(y_1 z_2 - y_2 z_1), \end{aligned}$$

$$|x_i,\ y_i,\ z_i| = \varepsilon \cdot abc. \qquad (i = 1, 2, 3) \quad \text{(h)}$$

Multipliciert man die Gleichungen (g) der Reihe nach mit x_1, x_2, x_3, addiert sie und benutzt die Gleichung (h), so erhält man

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2. \qquad \text{(i)}$$

Eine Relation, welche von den bisher zwischen $x_1, \cdots, z_3$ aufgestellten Relationen unabhängig ist, ergiebt sich durch geeignete Umformung des Ausdruckes

$$dl(x_2 + i x_3) = \frac{x_2 dx_2 + x_3 dx_3 + i(x_2 dx_3 - x_3 dx_2)}{x_2^2 + x_3^2}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung geht bei Benutzung von (i) und der Beziehungen

$$\frac{dx_2}{dt} = 2a^2\left(\frac{\eta z_2}{a^2+c^2} - \frac{\zeta y_2}{a^2+b^2}\right), \quad \frac{dx_3}{dt} = 2a^2\left(\frac{\eta z_3}{a^2+c^2} - \frac{\zeta y_3}{a^2+b^2}\right),$$

$$y_1 = \frac{\varepsilon b}{ac}(z_2 x_3 - z_3 x_2), \quad z_1 = \frac{\varepsilon c}{ab}(x_2 y_3 - x_3 y_2)$$

über in

$$\frac{1}{a^2 - x_1^2}\left(-x_1 \frac{dx_1}{dt} - 2i\varepsilon a^2 bc\left(\frac{\eta y_1}{b^2(a^2+c^2)} + \frac{\zeta z_1}{c^2(a^2+b^2)}\right)\right) dt.$$

Also hat man

$$(f)\quad x_2 + ix_3 = e^{\int\left(-x_1\frac{dx_1}{dt} - 2ia^2bc\left(\frac{\eta y_1}{b^2(c^2+a^2)} + \frac{\zeta z_1}{c^2(a^2+b^2)}\right)\right)\frac{dt}{a^2-x_1^2}}.$$

Durch die sechs Gleichungen (b), ···, (f), (f) ist man in den Stand gesetzt, aus einem particulären Integrale zwei weitere von demselben und von einander linear unabhängige Integrale des Systems (A) herzuleiten. Da ich nun oben ein particuläres Integral dieses Systems angegeben habe, bietet das Vorhergehende die vollständigen Mittel zur Berechnung des allgemeinen Integrales desselben dar.

Göttingen, März 1891.

Ueber Realitätseigenschaften von Raumcurven.

Von

Franz Meyer in Clausthal.

Vorgelegt von F. Klein.

Unter einer „Raumcurve" sei der Ort von Punkten verstanden, deren rechtwinklige Coordinaten x, y, z als analytische Functionen eines Parameters gegeben seien.

Handelt es sich nur um die Umgebung[1]) einer irgendwie singulären Stelle der Curve, so läßt sich die letztere ersetzen durch eine rationale Raumcurve, die daselbst die nämliche Singularität besitzt und deren Ordnung zudem so niedrig angenommen werden darf, als es überhaupt die fragliche Singularität gestattet.

Die gemeinte Ersetzung ist auch dann noch erlaubt, wenn man sich die Coefficienten der ursprünglichen Functionen solchen Variationen unterworfen denkt, daß die Curve in benachbarte Curven übergeht, für welche sich die erwähnte Singularität in einfachere „aufgelöst" hat. Man hat dann nur die entsprechenden Variationen an den Coefficienten der rationalen Hülfscurve anzubringen.

Im Folgenden werden nur derartige benachbarte oder „penultimate" Zustände gewisser Singularitäten in Betracht kommen, welche dadurch entstehen mögen, daß zwei einfachere Singularitä-

---

1) Vgl. die nähere Ausführung ähnlicher Ueberlegungen für ebene Curven bei Brill „Ueber Singularitäten ebener Curven und eine neue Curvenspecies" Math. Annalen Bd. XVI § 2.

ten gleicher Art zusammenrücken; insbesondere soll festgestellt werden, wieweit die Realität resp. Nichtrealität coincidirender singulärer Curvenelemente beim Passiren des bez. Vorkommnisses bestehen bleibt, oder aber aufgehoben wird.

Um einen abgegrenzten Bezirk solcher Erscheinungen zu umfassen, verstehen wir unter „gewöhnlichen Singularitäten" einer „Raumcurve" C solche, die stets in endlicher Anzahl vorhanden sind und der Forderung entspringen, daß von den Schnittpunkten einer Ebene resp. Geraden mit C eine genügende Anzahl von Malen mehrere consecutiv werden.

Bezeichnet man getrennte Schnittpunkte mit verschiedenen griechischen (kleinen) Buchstaben, die Anzahl an einer Stelle α zusammengerückter durch einen Exponenten, endlich die auf eine Gerade sich beziehenden Punktgruppen mittelst einer Klammer, so hat man genau fünf derartiger Vorkommnisse zu verzeichnen, nemlich Ebenen α^4, $\alpha^2\beta^2$, $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ und Gerade $(\alpha^2\beta)$, $(\alpha\beta\gamma\delta)$.

Indem wir uns auf solche „Verdichtungen" beschränken, für deren Zustandekommen das Erfülltsein einer einzigen Bedingung zwischen den Coefficienten der Curve hinreicht, haben wir die Coincidenzen zwischen zwei gleichberechtigten Elementen α entweder einer und derselben, oder aber zweier verschiedener Singularitäten des nämlichen Typus in's Auge zu fassen.

Dabei kommen uns die Zerlegungen zu Statten, die unlängst [1]) für die Discriminanten (und Resultanten) der zu rationalen Raumcurven R_n^3 gehörigen Singularitätenformen $[\alpha^4]$, $[\alpha^2\beta^2]$, $[\alpha^2\beta^2\gamma^2]$, $[(\alpha^2\beta)]$, $[\alpha\beta\gamma\delta]$ mitgetheilt sind, im Verein mit den Betrachtungen, die damals über die Gestalt der Anfangsglieder jener fünf Formen gemacht wurden.

Die Discriminanten zerfielen in Elementarfactoren, welche bezüglich der vierreihigen Coefficientendeterminanten „δ" irreducibel waren. Solcher Elementarfactoren gab es 14, nemlich:

$$[\alpha^3],\ [(\alpha^3)],\ [\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)],\ [\alpha^4\beta^2],\ [\alpha^3\beta^2\gamma^2],\ [(\alpha^3\beta\gamma)],\ [((\alpha\beta))];\ [\alpha^3\beta^3],$$
$$[\alpha^3\beta^3\gamma^2, (\alpha\beta\gamma)],\ [\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2],\ [\alpha^3\beta^2\gamma^2, \alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2],\ [(\alpha\beta\gamma\delta)^2],\ [(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)],$$
$$[(\alpha\beta\gamma\delta), (\alpha\beta_1\gamma_1\delta_1)],$$

von denen die ersten sieben zugleich als Theiler von Resultanten auftraten.

Jede dieser 14 Invarianten haben wir vermöge geeigneter Variationen der Coefficienten durch Null hindurchgehen zu lassen,

---

1) Vgl. diese Nachrichten 1890 Nr. 15 und 1891 Nr. 1, in letzterer Note insbesondere die Tabelle B.

und uns dann im Einzelnen über die Realität der ein- und austretenden Elemente Rechenschaft zu geben.

Einen derartigen „Durchgang" bewerkstelligt man am Einfachsten so, daß man die Größen δ durch lineare Combinationen $\delta + \varkappa\delta'$ ersetzt, wo $\varkappa$ ein neuer variabler Parameter sei. Verschwindet nun irgend eine unserer Invarianten etwa für $\varkappa = \varkappa_1$, so ist das Verhalten der Curve für Werthe von $\varkappa$ zu prüfen, welche $\varkappa_1$ zu beiden Seiten benachbart sind.

Vollzieht man jetzt die gleiche Substitution $\delta + \varkappa\delta'$ an Stelle von δ in den fünf Singularitätenformen selbst, so werden dieselben zu ganzen, rationalen (und reducibeln) Functionen zweier Variabeln α und $\varkappa$. Als solche seien sie bezeichnet durch:

$$[\alpha^4] = S_1(\alpha, \varkappa) = S_1, \quad [\alpha^3\beta^3] = S_2, \quad [(\alpha^3\beta)] = S_3, \quad [\alpha^2\beta^2\gamma^2] = S_4,$$
$$[(\alpha\beta\gamma\delta)] = S_5.$$

Deutet man nunmehr α und $\varkappa$ als Cartesische Coordinaten in einer Hülfsebene, so gelangt man zu einer sehr nützlichen Abbildung der Discriminantenzerlegungen, die einen Theil der zu erforschenden Verhältnisse ohne Weiteres übersehen läßt.

Die Gleichungen $S = 0$ stellen nämlich in der $[\alpha, \varkappa]$-Ebene algebraische Curven dar, deren zur α-Axe parallele (eigentliche und uneigentliche) Tangenten vollständig durch Nullsetzen der (bez. α gebildeten) Discriminanten D der Formen S geliefert werden.

Greift man daher jedesmal eine reelle Wurzel $\varkappa_1$ einer der 14 Gleichungen heraus, welche durch das Verschwinden der oben zusammengestellten Elementarfactoren entstehen, so finden die Zerlegungen der fünf Discriminanten D (cf. Tabelle B l. c.) folgenden Ausdruck:

1. $[\alpha^4]$; die Curven S_1 und S_2 berühren sich einfach (und die gemeinsame Tangente ist $\varkappa = \varkappa_1$).

2. $[(\alpha^3)]$; S_1 und S_3 berühren sich in gleicher Weise einfach, während S_2 daselbst einen gewöhnlichen $2(n-4)$-fachen Punkt besitzt.

3. $[\alpha^3\beta^3, (\alpha^3\beta)]$; S_2 und S_3 berühren sich einfach.

4. $[\alpha^4\beta^4]$; S_2 und S_4 haben eine einfache Berührung, während S_1 unter endlicher Neigung gegen S_2 und S_4 den Berührungspunkt einfach passirt.

5. $[\alpha^3\beta^2\gamma^2]$; im Punkte $(\alpha, \varkappa_1)$ wird die Gerade $\varkappa = \varkappa_1$ von S_4 einfach berührt, während S_2 daselbst einen gewöhnlichen[1]) Dop-

1) Die Tangenten der hier vorkommenden vielfachen Punkte sind stets gegen die betr. Gerade $\varkappa = \varkappa_1$ unter endlichem (auch von einem Rechten verschiedenen)

pelpunkt aufweist. Hingegen sind die beiden Stellen $(\beta, \varkappa_1)$ und $\gamma, \varkappa_1)$ gewöhnliche Rückkehrpunkte für S_4, deren Tangenten nicht die α-Richtung haben.

6. $[((\alpha\beta))]$; die Gerade $\varkappa = \varkappa_1$ ist Doppeltangente von S_5. In den Berührungspunkten $(\alpha, \varkappa_1)$ und $(\beta, \varkappa_1)$ hat S_5 je einen gewöhnlichen $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$-fachen Punkt.

7. $[(\alpha^2\beta\gamma)]$; $(\alpha, \varkappa_1)$ verhält sich ganz wie bei (5), nur daß an die Stelle von S_4, S_2 beziehungsweise jetzt S_5, S_3 treten.

Für die zweite Reihe der noch übrigen 7 Elementarfactoren ist immer nur jeweils eine einzige Curve S in Betracht zu ziehen. Es kommt:

8. $[\alpha^2\beta^2]$; $\varkappa = \varkappa_1$ verbindet zwei einfache Rückkehrpunkte von S_3, deren Tangente gegen jene Gerade geneigt sind.

9. $[\alpha^2\beta^2\gamma^2, (\alpha\beta\gamma)]$; $(\alpha, \varkappa_1)$, $(\beta, \varkappa_1)$, $(\gamma, \varkappa_1)$ sind drei einfache Berührstellen für S_4.

10. $[(\alpha\beta\gamma\delta)^2]$; in gleicher Weise zeigt S_8 vier einfache Berührungen.

11. $[\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2]$; auf derselben Geraden $\varkappa = \varkappa_1$ existiren vier gewöhnliche dreifache Punkte von S_4.

12. $[(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)]$; desgleichen besitzt S_5 fünf gewöhnliche vierfache Punkte.

13. $[\alpha^2\beta^2\gamma^2, \alpha^2\beta_1^2\gamma_1^2]$; $(\alpha, \varkappa_1)$ ist ein gewöhnlicher Doppelpunkt von S_4.

14. $(\alpha\beta\gamma\delta), (\alpha\beta_1\gamma_1\delta_1)]$; $(\alpha, \varkappa_1)$ ist ein ebensolcher von S_8.

Was nun die mehrmaligen Berührungen (Verzweigungen) ein- und derselben Curve S angeht, so ist unschwer abzuleiten, daß dieselben (soweit sie überhaupt reell ausfallen), mit Ausnahme der Fälle (6) und (8), stets auf der nämlichen Seite der bez. Tangenten $\varkappa = \varkappa_1$ stattfinden. Dies gilt also für die Berührung nebst den beiden Spitzen von S_4 bei (5), sowie für die bei (9), (10) eintretenden drei, resp. vier Berührungen.

Schwieriger ist indessen die Beantwortung der wichtigen Frage, wie sich einmal in den eben ausgeschlossenen Fällen (6), (8) die einzelne Curve S_3 resp. S_2, andererseits bei (1), (2), (3), (4) zwei verschiedene Curven S hinsichtlich ihrer Berührung verhalten, ob nemlich die letztere auf verschiedenen Seiten der gemeinsamen Tangente erfolgt, oder aber auf derselben Seite, oder endlich, ob bald das Eine, bald das Andere möglich ist.

Winkel geneigt, und mit Ausnahme der einfachen Spitzen alle verschieden von einander. Die Modificationen, welche eintreten, wenn ein resp. zwei Paare der singulären Argumente $\alpha, \beta, \ldots$ imaginär werden, lassen sich leicht angeben.

Es läßt sich nun darthun, daß wirklich alle drei Möglichkeiten vertreten sind. Bei $[\alpha^5]$ berühren sich S_1 und S_2 auf derselben Seite, desgleichen S_2 und S_4 bei $[\alpha^4\beta^2]$; bei $[(\alpha^3)]$ findet die Berührung von S_1 und S_3 stets auf verschiedenen Seiten statt; dagegen dürfen sich im Falle $[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)]$ S_2 und S_3 jenachdem auf derselben oder auch auf verschiedenen Seiten berühren, und das Entsprechende gilt für die beiden Berührungspunkte resp. Spitzen von S_2 resp. S_3 auf der bezüglichen Geraden $x = x_1$ in den Fällen $[((\alpha\beta))]$, $[\alpha^2\beta^3]$.

Um darauf näher einzugehen, legen wir, wie es erlaubt ist, jeweils eiae rationale Raumcurve R_n^3 von möglichst niedriger Ordnung n zu Grunde.

Für $n = 4$ sind $[(\alpha^3)]$ und $[((\alpha\beta))]$ zu untersuchen.

Von Singularitäten existiren hier nur α^4 und $(\alpha^2\beta)$ Sei die Form $[\alpha^4]$ als eine allgemeine binäre biquadratische Form

$$\varphi = \varphi_\alpha^4 = \varphi_0 + 4\varphi_1\alpha + 6\varphi_2\alpha^2 + 4\varphi_3\alpha^3 + \varphi_4\alpha^4$$

gegeben, so wird $[(\alpha^2\beta)]$ zur Hesse'schen Covariante H von φ, $[(\alpha^3)]$ zur Discriminante $D(\varphi)$ von φ, endlich $[((\alpha\beta))]$ zur Invariante j von φ.

In Uebereinstimmung mit der Zerlegungsformel für $[(\alpha^2\beta)]$ hat man, wie bekannt, für die Discriminante $D(H)$ von H:

$$D(H) = j^3 D(\varphi).$$

Bei nicht verschwindendem j bedingt also die Gleichheit zweier Wurzeln von φ das Nämliche für H u. umg.

Legt man der im Moment des Verschwindens von $D(\varphi)$ entstehenden gemeinsamen Doppelwurzel von φ und H den Werth Null bei, so wird ein penultimater Zustand durch

$$\varphi_0 = \varepsilon\varphi_0', \quad \varphi_1 = \varepsilon\varphi_1'$$

bezeichnet, wo die φ' mit der beliebig kleinen Größe ε nicht zugleich verschwinden.

Dann sind, in erlaubter Annäherung, die beiden, in die Stelle Null hineinrückenden Wurzelpaare von φ und H bestimmt durch die quadratischen Gleichungen:

$$\varphi_0 + 4\varphi_1\alpha + 6\varphi_2\alpha^2 = 0,$$
$$(\varphi_0\varphi_2 - \varphi_1^2) + 2\alpha(\varphi_0\varphi_3 - \varphi_1\varphi_2) + \alpha^2(\varphi_0\varphi_4 + 2\varphi_1\varphi_3 - 3\varphi_2^2) = 0.$$

Die Discriminanten derselben nehmen, unter Vernachlässigung höherer Potenzen von ε, die Formen an:

$$D_\varepsilon(\varphi) = 6\varepsilon\varphi_0'\varphi_2, \quad D_\varepsilon(H) = -3\varepsilon\varphi_0'\varphi_2\cdot\varphi_2^2,$$

sind also, falls ε klein genug (positiv oder negativ) gewählt ist, stets von entgegengesetztem Vorzeichen.

Geht demnach das eine der beiden Wurzelpaare vom Reellen durch Null in's Imaginäre über, so befolgt das andere die umgekehrte Richtung.

Wir kommen zum zweiten Falle für $n = 4$, in dem man j die Null passiren läßt (während $D(\varphi)$ jetzt als endlich vorausgesetzt wird). Da die Coefficienten φ_1 und φ_3 jederzeit als verschwindend angesehen werden dürfen, so braucht man nur

$$\varphi_2 = \varepsilon\varphi_2'$$

anzusetzen, um Zustände kurz vor resp. nach Eintreten des reellen Doppelpunktes $((0, \infty))$ anzugeben.

Die Form $[(\alpha^3\beta)] = H(\varphi)$ vereinfacht sich für $\varphi_1 = \varphi_3 = 0$ zu:

$$[(\alpha^3\beta)] = \varphi_3\varphi_4\alpha^4 + (\varphi_0\varphi_4 - 3\varphi_2^2)\alpha^3 + \varphi_0\varphi_3.$$

Die vier Wurzeln der Gleichung $[(\alpha^3\beta)] = 0$ sind dann:

$$\pm\sqrt{\frac{(3\varphi_2^2 - \varphi_0\varphi_4) \pm \sqrt{(\varphi_0\varphi_4)^2 - \varphi_2^2(10\varphi_0\varphi_4 - 9\varphi_2^2)}}{2\varphi_3\varphi_4}},$$

somit, wenn man die innere Quadratwurzel nach dem binomischen Satze entwickelt und höhere Potenzen von ε unterdrückt,

$$\pm\sqrt{\frac{-\varphi_3}{\varphi_4}} = \pm\sqrt{\frac{-\varepsilon\varphi_2'}{\varphi_4}}; \quad \pm\sqrt{\frac{-\varphi_0}{\varphi_3}} = \pm\sqrt{\frac{-\varphi_0}{\varepsilon\varphi_2'}}.$$

Diese Wurzeln von $[(\alpha^3\beta)] = 0$ bieten bei einem Durchgange von ε durch Null eine Alternative von zwei Möglichkeiten; je nachdem nämlich φ_0 und φ_4 von entgegengesetztem oder von gleichem Vorzeichen sind, gehen beide Wurzelpaare gleichzeitig vom Reellen in's Imaginäre über (resp. vice versa), oder aber die beiden Paare zeigen entgegengesetzte Bewegung.

Bezüglich eines Doppelpunktes mit (conjugirt) imaginären Argumenten braucht wohl kaum bemerkt zu werden, daß dann die vier coincidirenden Trefftangenten $(\alpha^3\beta)$ vor- wie nachher imaginär sind.

Im Wesentlichen ebenso, wie $[((\alpha\beta))]$, muß sich $[\alpha^3\beta^3]$ (als das dualistische Vorkommniß) verhalten.

Wir gehen daher gleich über zum Studium von $[\alpha^5]$ und $[\alpha^3\beta^2, (\alpha^3\beta)]$ auf Curven R_5^3.

Die zugehörige Fundamentalinvolution wird durch das Büschel von zwei Formen φ_α^5, ψ_α^5 dargestellt. Die Singularitätenform $[\alpha^4]$,

als Functionaldeterminante von φ und ψ, beginnt mit den Gliedern:

$$[\alpha^4] = \pi_{01} + 4\alpha\pi_{02} + 2\alpha^2(3\pi_{03} + 5\pi_{12}) + \cdots$$

wo zur Abkürzung steht:

$$\begin{vmatrix} \varphi_i & \psi_i \\ \varphi_k & \psi_k \end{vmatrix} = \pi_{ik}.$$

Andererseits ergiebt sich die Singularitätenform $[\alpha^3\beta^3]$ durch Elimination von β aus $\varphi_{\alpha^3,\beta^3} = 0$, $\psi_{\alpha^3,\beta^3} = 0$; die Anfangsglieder sind:

$$[\alpha^3\beta^3] = (4\pi_{01}\pi_{12} - \pi_{02}^2) + 4\alpha\{2\pi_{01}\pi_{13} + \pi_{02}(\pi_{12} - \pi_{03})\}$$
$$+ 2\alpha^2\{8\pi_{02}\pi_{13} + 2\pi_{12}(\pi_{03} + 3\pi_{12}) + 2\pi_{01}(\pi_{14} + 3\pi_{23}) - \pi_{02}(\pi_{04} + 4\pi_{13}) - 2(\pi_{03} + \pi_{12})^2\} + \cdots$$

Das Criterium für Eintreten der Coincidenz $[\alpha^5]$ ist ausgedrückt durch das Verschwinden der Resultante von φ und ψ, also im canonischen Falle $\alpha = 0$ durch das Verschwinden aller

$$\pi_{0k} (k = 1, 2, \ldots 5).$$

Demgemäß machen wir wiederum die π_{0k} mit einer beliebig kleinen Größe ε proportional:

$$\pi_{0k} = \varepsilon\pi'_{0k},$$

und vergleichen die Discriminanten der Formen $[\alpha^4]$ und $[\alpha^3\beta^3]$.

In erster Annäherung kommt:

$$D_\varepsilon[\alpha^4] = 10\varepsilon.\pi'_{01}\pi_{12}, \quad D_\varepsilon[\alpha^3\beta^3] = 4.8.\varepsilon\pi'_{01}\pi_{12}.\pi_{12}^2,$$

beide Discriminanten haben also in der Nähe von $\varepsilon = 0$ dasselbe Vorzeichen.

Es kommt die Coincidenz $[\alpha^3\beta^3, (\alpha^2\beta)]$ an die Reihe. Da die Ermittelung der Anfangsglieder der Form $[\alpha^2\beta]$ mit Weitläuftigkeiten verbunden ist, gehen wir indirect vor, indem wir für die Argumente α, β der Trefftangente $(\alpha^2\beta)$ von vornherein die canonischen Werthe $\alpha = 0$, $\beta = \infty$ festsetzen, und nun eine (und damit zugleich eine zweite) Schmiegungsberührebene $\alpha^3\beta^3$ allmählich in die Lage $\alpha = 0$, $\beta = \infty$ hineinrücken lassen.

Die Tangente der R_5^3 an der Stelle 0 trifft die Curve an der Stelle ∞ unter den Bedingungen:

$$\pi_{12} = 0, \quad \pi_{13} = 0, \quad \pi_{23} = 0,$$

wodurch sich die Entwickelung der Form $[\alpha^3\beta^3]$ zur folgenden vereinfacht:

$$[\alpha^3\beta^3] = -\pi_{02}^2 - 4\alpha\pi_{02}\pi_{03} + 2\alpha^2(2\pi_{01}\pi_{14} - 2\pi_{03}^2 - \pi_{02}\pi_{04}) + \cdots$$

Soll jetzt das Vorkommniß $[\alpha^3\beta, (\alpha^3\beta)]$ für $\alpha = 0$, $\beta = \infty$ eintreten, so haben außerdem noch alle übrigen π_{2k} ($\varkappa = 0, 4, 5$) zu verschwinden.

Der bezügliche penultimate Zustand der Curve läßt sich wieder characterisiren durch

$$\pi_{2k} = \varepsilon\pi'_{2k} \quad (\varkappa = 0, 4, 5).$$

Entwickelt man nunmehr die Discriminante von $[\alpha^3\beta^3]$ nach aufsteigenden Potenzen von ε, so lautet das erste Glied:

$$D_\varepsilon[\alpha^3\beta^3] = \varepsilon^2 \cdot \pi_{02}'^2 \cdot 4\pi_{01}\pi_{14}.$$

Da aber hier das Product $\pi_{01}\pi_{14}$ ebensowohl positiver, wie negativer Werthe fähig ist, so hat die Realität (resp. Imaginarität) eines der beiden coincidirenden Paare $\alpha^3\beta^3$, $(\alpha^3\beta)$ durchaus keinen Einfluß auf die Realität des anderen Paares.

Es erübrigt noch die Besprechung der Erscheinung $[\alpha^4\beta^2]$, bei der zwei Ebenen $\alpha^3\beta^3$ und zugleich zwei Berührungspunkte einer Ebene $\alpha^3\beta^2\gamma^3$ consecutiv werden. Die kleinste zulässige Ordnung der R_n^3 ist $n = 6$. Die betreffende Involution setzt sich aus drei Formen φ_α^6, ψ_α^6, χ_α^6 zusammen, deren Coefficientendeterminanten $|\varphi_i\psi_k\chi_l|$ mit δ_{ikl} bezeichnet seien.

Die Berechnung der ersten Glieder von der Singularitätenform $[\alpha^3\beta^2\gamma^3]$ stößt auf ungemeine Schwierigkeiten; man ist wiederum genöthigt, wie beim letzten Male zu verfahren, und anzunehmen, daß eine Ebene bereits an den Stellen $\alpha = 0$, $\beta = \infty$ und dann noch an einer weiteren γ die Curve berühre; man hat auszudrücken, daß γ sich der Stelle 0 beliebig nähere.

Nun berührt eine Ebene die Curve R in 0, ∞, γ, sobald:

$$\varphi_2 + 2\varphi_3\gamma + \varphi_4\gamma^2 = 0, \quad \psi_2 + 2\psi_3\gamma + \psi_4\gamma^2 = 0, \quad \chi_2 + 2\chi_3\gamma + \chi_4\gamma^2 = 0.$$

Andererseits müßten, wenn γ wirklich den Werth Null annehmen sollte, die Coefficienten φ_2, ψ_2, χ_2 einzeln verschwinden. Im Grenzfalle darf man also ansetzen:

$$\varphi_2 = \varepsilon\varphi'_2, \quad \psi_2 = \varepsilon\psi'_2, \quad \chi_2 = \varepsilon\chi'_2, \quad \delta_{24k} = \varepsilon\delta'_{24k},$$

wo die φ'_2, ψ'_2, χ'_2 und (vorderhand auch) die δ'_{24k} mit ε nicht verschwindende Größen sind.

Combinirt man die beiderlei Ansätze, so erkennt man, daß die Größen γ und ε von derselben Ordnung der Kleinheit sind:

$$\gamma = \varkappa\varepsilon \quad (\varkappa \text{ endlich}),$$

und es resultiren nach leichter Rechnung die Relationen

$$\delta_{123} = -\frac{\varepsilon^3 \varkappa}{2}\,\delta'_{134}, \quad \delta_{134} = -\frac{1}{2\varkappa}\,\delta'_{134},$$

sodaß die δ_{123} diejenigen unter den Größen δ_{ikl} sind, welche sogar mit der zweiten Potenz von ε proportional werden.

Auf diese Hülfsmittel gestützt, gelingt die Entscheidung über das Vorzeichen der Discriminante der Form $[\alpha^3\beta^2]$ für kleine Werthe von ε. Die Form $[\alpha^3\beta^3]$ ist selbst eine Discriminante, nemlich diejenige der Gleichung dritten Grades für die Restpunkte, welche die Ebene α^3 aus der R_6 noch ausschneidet.

Führt man die Bildung aus, indem man sich auf die drei ersten Coefficienten beschränkt, die letzteren nach steigenden Potenzen von ε entwickelt und sich wiederum mit der jeweils niedrigsten Potenz begnügt, so hat man:

$$\begin{aligned}[\alpha^3\beta^3] = &+ 4.3.\varepsilon^3\,\delta'_{134}\,\delta^3_{013}\,\frac{\varkappa}{2} + \cdots \\ &- 4.9.\varepsilon\,\delta'_{134}\,\delta^3_{013}\,\alpha + \cdots \\ &+ 4.18\,\delta'_{134}\,\delta^3_{013}\,\frac{1}{2\varkappa}\,\alpha^3 + \cdots\end{aligned}$$

und in Folge dessen für genügend kleine ε:

$$D_\varepsilon[\alpha^3\beta^3] = +27\,\varepsilon^3\,\delta^6_{013}\,\delta'^2_{134}$$

i. e. unbedingt positiv. Mithin ist das Ebenenpaar $\alpha^3\beta^3$, welches beim Eintreten von $[\alpha^4\beta^2]$ benachbart wird, stets zugleich mit dem Paare von coincidirenden Berührungspunkten einer Tritangentialebene reell (resp. imaginär).

Hiermit ist eine vollständige Einsicht in die Lage der fünf Singularitätencurven S längs ihrer Tangenten $\varkappa = \varkappa_1$ und im Besondern hinsichtlich der gegenseitigen Berührung zweier verschiedener Curven S gewonnen.

Das ist aber nur das Bild für die Thatsache, daß wir jetzt sämmtliche Möglichkeiten erschöpfen können, die sich bezüglich einer Realitätsveränderung unserer fünferlei singulären Curvenelemente darbieten.

Indem wir alle Uebergänge bei Seite lassen, bei denen die betheiligten reellen (imaginären) Elemente reell (imaginär) bleiben, beachten wir in erster Linie die isolirte Stellung, welche die vierfachen Sehnen $(\alpha\beta\gamma\delta)$ einnehmen.

Vermöge der Coincidenz $(\alpha^3\beta\gamma)$ geht eine solche Gerade mit vier reellen Treffpunkten über in eine solche mit nur zwei reellen,

oder auch eine letztere über in eine solche mit keinem reellen Treffpunkt (resp. vice versa), ohne daß irgend ein Ersatz seitens der andern Singularitäten stattfindet.

Ebenso verhält es sich mit der Erscheinung $[(\alpha\beta\gamma\delta)^3]$, wo zwei reelle Gerade, die zugleich irgend einer der eben erwähnten Arten angehören, vom Reellen in's Imaginäre übergehen (oder auch umgekehrt).

Ein theilweise ähnliches, theilweise aber auch anderes Verhalten zeigen die Tritangentialebenen $\alpha^2\beta^2\gamma^2$.

Beim Eintreten von $[\alpha^2\beta^2\gamma^2]$ oder von $[\alpha^3\beta^2\gamma^2, (\alpha\beta\gamma)]$ rücken wiederum zwei reelle Ebenen $\alpha^2\beta^2\gamma^2$, sei es mit drei oder auch nur einem reellen Berührungspunkt, zusammen, um imaginär zu werden (resp. umg.), gleichfalls ohne Compensation.

Dagegen wird beim Passiren von $[\alpha^4\beta^2]$ der Uebergang von einem Paar reeller (imaginärer) Berührungspunkte einer Ebene $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ in's Imaginäre (Reelle) begleitet von einem durchaus gleichverlaufenden eines Paares von Ebenen $\alpha^2\beta^2$.

Dieselbe Begleiterscheinung bemerkt man beim Ueberschreiten von $[\alpha^5]$, wo sich ein Paar von Ebenen $\alpha^2\beta^2$ mit einem Paare von Ebenen α^4 in paralleler Bewegung befindet.

Bei $[\alpha^3\beta^2, (\alpha^2\beta)]$ fand zwischen dem Paar von Ebenen $\alpha^2\beta^2$ und demjenigen von Geraden $(\alpha^2\beta)$ keine Realitätsabhängigkeit statt d. h. während etwa ein reelles Paar dort gewonnen wird, kann hier ein sslches ebensogut gewonnen wie verloren werden.

Eine entsprechende Zweideutigkeit kommt den Vorgängen $[\alpha^2\beta^2]$ und $[((\alpha\beta))]$ zu, an denen sich jedesmal zwei Paare von Ebenen $\alpha^2\beta^2$ resp. Geraden $(\alpha^2\beta)$ betheiligen. Entweder geht die Realität beider Paare zugleich verloren (oder wird gewonnen); es kann aber auch ein reelles Paar von einem imaginären begleitet sein, die dann nach dem Durchgange durch das bez. Vorkommniß nur ihre Rolle vertauscht haben.

Endlich hat die Coincidenz $[(\alpha^3)]$ wieder etwas ihr Eigenthümliches, hier gesellt sich ein reelles (imaginäres) Paar von Ebenen α^4 zu einem imaginären (reellen) Paar von Geraden $(\alpha^2\beta)$, um nach dem Durchgange je in den entgegengesetzten Zustand zu gerathen.

Um den Kern dieser Ergebnisse kurz in Zeichen zu fixiren, sei die Anzahl der reellen Ebenen α^4 einer Raumcurve C mit w' bezeichnet, der reellen Ebenen $\alpha^2\beta^2$ mit t', der reellen Geraden $(\alpha^2\beta)$ mit d', sowie endlich die Anzahl der reellen Ebenen $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ mit nur einem einzigen reellen Berührungspunkt mit T'''.

„Dann bleibt bei beliebigen Deformationen der Curve C das Aggregat[1])

$$w' + d' - t' - 2T'''$$

entweder ganz unverändert — wie z. B. stets beim Passiren der Coincidenzen $[\alpha^5]$, $[(\alpha^3)]$, $[\alpha^4\beta^2]$ — oder es erfährt eine Zu- (resp. Ab-)nahme um ganze Vielfache von Vier, während es immer Fälle giebt, in denen einzelne Bestandtheile des Aggregates nur um Zwei sich ändern."

Ein einfaches Beispiel liefert die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species R_4^2. Hier treten nur (vier) Ebenen α^4 und (vier) Gerade $(\alpha^3\beta)$ auf, sodaß sich unser Aggregat auf $w' + d'$ reducirt. Auf Grund des letzten Satzes bieten sich zwei Möglichkeiten; entweder könnte $w' + d' = 0, 4, 8$ sein, oder aber $= 2, 6$. Vermöge der oben erörterten Realitätseigenschaften der Form $[\alpha^4]$ und ihrer Hesse'schen: $[(\alpha^2\beta)]$, sowie vermöge der bekannten Bedeutung, welche das Verschwinden der Invariante j für die erstere Form besitzt, läßt sich die Entscheidung dahin abgeben, daß die zweite Möglichkeit $w' + d' = 2, 6$ überhaupt nie eintritt, und bei der ersten allein die beiden Fälle $w' + d' = 0, 4$ existiren. Des Näheren wird man, abgesehen von Uebergangscurven mit zusammengesetzten Singularitäten, auf vier verschiedene Typen von R_4^2 geführt.

Geht man nämlich von einer Curve mit isolirtem Doppelpunkt $((\alpha\beta))$ aus, und löst denselben auf, so hat man den ersten Typus $w' = 4$, $d' = 0$. Um den letzteren zu verlassen, muß man sich nothwendig der Brücke einer stationären Tangente (α^3) bedienen, dann kommt $w' = 2$, $d' = 2$.

In diesem Zustande kann wohl ein Doppelpunkt mit reellen Tangenten passirt werden, ohne indessen den Typus als solchen umzugestalten. Will man zu einer neuen Art von R_4^2 gelangen,

---

1) Wegen des Ansatzes sehe man nach bei Brill l. c. § 7.

Besitzt die Curve auch noch die zu α^4 und $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ dualistischen Singularitäten, so sind die bez. Realitätsanzahlen von w' resp. $2T'''$ abzuziehen.

Will man nur die Aenderungen modulo 4 hervorheben, so werden selbstredend die Vorzeichen bedeutungslos.

Die Entwickelungen des Textes stützen sich zwar zunächst auf solche Deformationen der Curve, die von nur einem willkürlichen Parameter abhängen: indessen ist leicht zu sehen, daß auch Durchgänge durch complicirtere Coincidenzen zulässig sind, da man immer Nachbarwege einschlagen kann, welche jene vermeiden.

so muß man abermals durch (α^3) hindurch, und es wird drittens $w' = 0$, $d' = 4$. Um endlich von hier aus zum letzten Typus zu gelangen, ist als Uebergangsmittel ein Doppelpunkt mit reellen Tangenten erforderlich, dann entsteht $w' = 0$, $d' = 0$ mit der Summe $w' + d' = 0$, während in den drei zuvor angegebenen Fällen gleichmäßig $w' + d' = 4$ war.

Zum Schlusse möge ein Vergleich zwischen der bekannten, von H. Klein[1]) herrührenden Relation zwischen Realitätsanzahlen von Singularitäten ebener Curven und dem hier mitgetheilten entsprechenden Ergebniß für Raumcurven gezogen werden.

Da macht sich sofort ein auffälliger Unterschied bemerkbar.

Während nämlich die Klein'sche Formel im Wesentlichen aussagt, daß ein gewisses Aggregat von Realitätsanzahlen nur noch von der Ordnung und Klasse der ebenen Curve abhängt, und somit irgend welchen Deformationen der Curve gegenüber invariant bleibt, wenn nur Ordnung und Classe die alten geblieben sind, können wir für die bez. Realitätsanzahlen von Raumcurven nur eine Congruenz mod. 4 constatiren, wenn eben etwas hinsichtlich beliebiger Deformationen Allgemeingültiges behauptet werden soll.

Die Quelle des betonten Unterschiedes zwischen Ebene und Raum ist offenbar darin zu suchen, daß die räumliche Ausdehnung der Begriffe: Wendetangente „α^3“, Doppeltangente „$\alpha^2\beta^2$“ und Doppelpunkt „$(\alpha\beta)$“ für Curven je in doppelter Richtung vor sich gehen kann — α^3 spaltet sich in α^4 und $\alpha^2\beta^2$, $\alpha^2\beta^2$ in $\alpha^2\beta^2$ und $\alpha^2\beta^2\gamma$, endlich $(\alpha\beta)$ in $(\alpha^2\beta)$ und $(\alpha\beta\gamma\delta)$ — und daß infolge dessen die Zwischenstufe des „Isolirten“, wie sie bei $\alpha^2\beta^2$ und $(\alpha\beta)$ in der Ebene vorhanden ist, im Raume bei $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ und $(\alpha\beta\gamma\delta)$ zwar zwar noch ganz analog existirt, bei $\alpha^3\beta^3$ und $(\alpha^2\beta)$ aber nicht mehr.

Beispielsweise kann also bei einer Selbstberührung „$[\alpha^2\beta^2, (\alpha\beta)]$“ in der Ebene ein Paar von reellen, eigentlichen Doppelpunkten ebensowohl in Begleitung eines Paares von eben solchen Doppeltangenten, wie eines Paares von imaginären Doppeltangenten coincidiren — völlig in derselben Weise, wie im Raume bei $[\alpha^3\beta^3, (\alpha^2\beta)]$ ein Paar $\alpha^3\beta^3$ und ein Paar $(\alpha^2\beta)$ — dagegen ist ein Paar von isolirten Doppelpunkten bei der Selbstberührung stets mit einem Paare von isolirten Doppeltangenten verknüpft, welche dann beide zugleich in's Imaginäre übergehen, und dazu fehlt die Parallele im Raume. Daher kann in der Ebene immer noch ein Ausgleich

1) Math. Annalen Bd. X.

zwischen den Anzahlen der isolirten Gebilde beiderlei Art stattfinden, während ein solcher im Raume unmöglich wird.

Hingegen tritt die Analogie hinsichtlich der Coincidenzen $[\alpha^4]$ und $[(\alpha^2)]$ (Undulation und Spitze) dort, und der Coincidenzen $[\alpha^5]$, $[\alpha^4\beta^2]$ und $[(\alpha^3)]$ hier besonders deutlich hervor.

Clausthal, den 21. Februar 1891.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

August, September und Oktober 1890.

(Fortsetzung.)

Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa. Scienze fisiche e matematiche. Vol. VI. (della serie vol. XII.) Pisa 1889.

Le opere di Galileo Galilei. Ediz. nazionale sotto gli auspicii di S. M. il Re d'Italia. Vol. I. (2 Exempl. No. 147. 161.) Firenze 1890.

Bollettino delle publicazioni italiane. (Bibliot. naz. di Firenze.) 1890. No. 110—115. Firenze 1890. — Indice alfabetico delle opere 1889. A-Sai.

Bollettino delle opere moderne straniere. Bibliot. naz. centr. Vittorio Emanuele di Roma.) Vol. IV. No. 6. Nov./Dic. 1889. Nebst Titelblatt. Vol. V. No. 1. Gennaio 1890. Roma 1890.

Annuaire de l'Observatoire municipal de Montsouris pour l'an 1890. Paris.

United States Geological Survey.
a. Eighth annual report. 1886—87. Part 1. 2. Washington 1889.
b. Bulletin. No. 54—57. Ebd. 1889/90.
c. Monographs. Vol. XV. Part 1. 2. Vol. XVI. Ebd. 1889.

Annual report of the board of regents of the Smithsonian Institution for the year ending June 30, 1886. Part 2. — . . . for the year ending June 30, 1887. Part. 1. 2. Washington 1889.

Annual report of the chief signal officer. War Department. 1889. Part 1. 2 (Appendix 15). Washington 1890.

U. S. Naval Observatory.
a. Observations made during the year 1884. Washington 1889.
b. Report of the superintendent for the year ending June 30, 1889. Ebd. 1889.

Bulletin of the Museum of comparative zoology at Harvard College. Whole Series. Vol. XVI. No. 9. Vol. XX. No. 2. Cambridge U. S. A. 1890.

(Fortsetzung folgt.)

Inhalt von Nr. 2.

W. Voigt, Beiträge zur Hydrodynamik. I. II. — *O. Venske*, Integration eines speciellen Systems linearer, homogener Differentialgleichungen mit doppelt-periodischen Functionen als Coefficienten. — *Franz Meyer*, über Realitätseigenschaften von Raumcurven. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

20. Mai. **№ 3.** 1891.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 7. März.

F. Kielhorn legt vor: „Die Colebrooke'schen Pâṇini-Handschriften der Königlichen Bibliothek zu Göttingen."

Riecke legt eine Abhandlung des Herrn Dr. Gustav Tammann in Dorpat vor: „Ueber die Stromleitung durch Niederschlagsmembranen."

Die Colebrooke'schen Pâṇini-Handschriften der Königlichen Bibliothek zu Göttingen.

Von

F. Kielhorn.

Die Göttinger Bibliothek hat die Ehre eine kleine Sammlung Colebrooke'scher Handschriften ihr eigen nennen zu dürfen. Durch welches tragische Geschick sie in den Besitz dieses Schatzes gekommen ist, zeigt ein in den Akten der Bibliothek befindlicher Brief[1]), dem ich folgende Stellen entnehme: —

„Mein vor 15 Jahren verstorbener ältester Sohn, der Professor Rosen in London, ordnete im Jahre 1837 auf Bitte des allmählig ganz erblindenden T. Colebrooke die Sammlung und den sorgfäl-

1) Der Schreiber des Briefes, Vater des zu früh verstorbenen Orientalisten F. A. Rosen, studierte in Göttingen zuerst Philologie 1793—98 (Dr. phil. 1798), dann seit 1802 Jurisprudenz (Dr. juris 1803), und war bis 1816 Docent in der juristischen Facultät.

tigen Wiederabdruck der, hauptsächlich in den Asiatick researches, zerstreueten, sich auf indische Sprache und Literatur beziehenden Aufsätze (Essays) desselben an, welche denn auch im Todesjahre Beider (1837) bekanntlich erschienen sind. Bei dieser Gelegenheit und in Anerkennung der Mühe, welche mein Sohn von diesem Geschäfte hatte, schenkte Colebrooke ihm einige Handschriften von Sanskritwerken, die reich mit seinen beigeschriebenen Anmerkungen grammaticalischen und lexicalischen Inhalts versehen sind, in denen man Vorarbeiten zu den Werken des berühmten Sanskritisten erkennen kann.

Diese Mspte befinden sich seit dem Tode meines Sohnes in meinem Besitze. Herr Prof. Lassen in Bonn hatte vor 13 Jahren die grosse Güte, für mich ein Verzeichniss dieser und anderer zum literarischen Nachlasse des Verstorbenen gehörigen Handschriften anzufertigen. Eine von diesen enthält

> A grammar of the Sanscrit language from the text of Pânini and the commentaries of Ramachandra, Bhattoji Dîkshita etc. — (Devanagari-Schrift). — Herr Pr. Lassen hat dabei bemerkt „es ist Pânini mit Colebrooke's handschriftlicher Uebersetzung und wahrscheinlich die vorbereitende Arbeit zu seiner Grammatik".

Die Colebrooke'schen Anmerkungen scheinen aus den letzten neunziger Jahren des vorigen Jahrhunderts herzurühren und werden allerdings nicht mehr im Stande seyn, dem in den letzten 50 Jahren so weit geförderten Sanskritstudium noch irgend bedeutend zu statten zu kommen; allein die Handschriften haben sicher noch immer hohen Werth als autographische Denkmale jenes würdigen Gelehrten, und sie verdienen aus dem Privatbesitze eines Dilettanten, wo sie später manchen Gefahren ausgesetzt sind, in eine öffentliche Bibliothek überzugehen.

Ich biete sie dem Bücherschatze der noch immer dankbar von mir verehrten Georgia Augusta als Geschenk an.

. . . . . .

Bei dieser Schenkung mache ich eine einzige Bedingung. Es ist folgende. — Nach dem Tode meines unvergesslichen Sohns übersandten mir seine Londoner Freunde, unter andern rührenden Beweisen ihrer Theilnahme an meinem Verluste auch eine von Rd. Westmacott gearbeitete Marmorbüste des Verstorbenen. Dass ich diese Büste so lange ich lebe bewahren werde versteht sich von selbst. Ich werde aber anordnen, dass dieselbe nach meinem nicht mehr fernen Ableben ebenfalls an die Universitätsbibliothek in Göttingen übersandt werde. — Nun bitte ich mir nur von der vor-

gesetzten Behörde dieser Bibliothek ein schriftliches Versprechen aus, dass die Büste, wenn Ihr dieselbe übersandt worden, in einem der Bibliotheksäle aufgestellt werden solle. — Das Bild eines zu früh dahingerafften Mannes, der sich nicht bloß durch Gelehrsamkeit, sondern auch durch unermüdete Dienstfertigkeit gegen andere Gelehrte die Achtung und Liebe seiner Zeitgenossen erworben, und dessen Namen auch in Göttingen nicht vergessen ist, wird diesen Sälen nicht zur Unzier gereichen.

Detmold den 25sten Sept. 1852.

Dr. Ballhorn-Rosen,
F. Lipp. Canzler."

Die in diesem Briefe erwähnten Handschriften, neun Folio-Bände, wurden der Bibliothek im October und December des Jahres 1852 übersandt, zusammen mit einem Exemplare des 7ten Bandes der *Asiatic Researches*, das ebenfalls aus Colebrooke's Bibliothek stammt und manche Bemerkungen von seiner Hand enthält, und einem Exemplare seiner *Essays*. Die Büste Friedrich August Rosen's ziert seit Februar 1856 den großen historischen Saal der Bibliothek.

Es ist nicht meine Absicht, eine Beschreibung sämmtlicher Handschriften zu liefern, die so in den Besitz der Bibliothek übergegangen sind; und ich brauche dies um so weniger zu thun, als ein Verzeichniß aller unsrer Sanskṛit-Handschriften[1]) in Professor Wilhelm Meyer's Kataloge der Göttinger Handschriften seine Stelle finden wird. Aber ich halte es für meine Pflicht, hier wenigstens auf die darunter befindlichen Handschriften der Grammatik des Pâṇini aufmerksam zu machen; denn wegen der reichen Bemerkungen Colebrooke's, die sie enthalten, besitzen diese Handschriften noch immer einen grossen Werth. Colebrooke's Versuche die Grammatik des Pâṇini in eine europäische Sprache zu übertragen, mit denen wir hier bekannt werden, zeigen, daß er sich schon gegen das Ende des vergangenen Jahrhunderts wie kein andrer Europäer vor oder nach ihm mit der Technik der indischen Grammatik vertraut gemacht hatte. Und die Probe einer Uebersetzung des Pâṇini mit erklärendem Commentare in englischer Sprache, die eine dieser Handschriften im Anhange enthält, verräth überall, durch wie umfassende und tiefgehende Studien im Bereiche der grammatischen Literatur er sich für das von ihm beabsichtigte Werk vorbereitet hatte. Es ist darum nicht zu verwundern, daß Colebrooke's Uebersetzungen mancher schwierigen

1) Bearbeitet von einem meiner Schüler, Herrn H. Lüders.

Regel, die sich in den Handschriften zerstreut finden, bis heute kaum erreicht, viel weniger übertroffen sind; und daß das, was er uns bietet, fast immer geeignet ist uns das Verständniß einer Regel zu erleichtern oder den richtigen Ausdruck für ihre Uebersetzung finden zu lassen, auch wo wir ihm nicht ganz beistimmen können.

Diese Handschriften des Pâṇini sind in den Katalogen der Bibliothek als Cod. MS. Orient. 207, 208, und 209 bezeichnet. Alle drei sind von Eingebornen in Devanâgarî Schrift auf starkem europäischen Papiere großen Formats (etwa 48 Centimeter hoch und 29—32 Centimeter breit) nach Art europäischer Bücher geschrieben.

Das Papier von 208 und 209, um die weniger wichtigen Handschriften vorweg zu nehmen, enthält Wasserzeichen der Jahre 1801 und 1802. In beiden ist es auf beiden Seiten beschrieben, und jede Seite enthält zwei Columnen mit leeren Zwischenräumen, die von Colebrooke für eigne Bemerkungen bestimmt waren und für solche benutzt sind.

No. 208, aus 62 Blättern bestehend, enthält nach Colebrooke's Aufschrift „Pâṇini's Sûtras or Rules of Grammar"; in Wirklichkeit aber in schwarzer Schrift den Text der Sûtras, und in rother Schrift Zusatzregeln oder sonstige Bemerkungen (Vârttikas, Kârikâs etc.) aus der Kâśikâ-Vṛitti. Manche Regeln sind von Colebrooke kurz übersetzt; öfter hat er den Paragraphen seiner Grammatik angegeben, in dem sich die Uebersetzung findet oder wo der betreffende Gegenstand behandelt wird. Außerdem hat er vielen Regeln oder Bemerkungen des Sanskṛit Textes gewisse Zeichen (arbitrary marks, — eine Hand, einen Stern, einen Dolch, u. a.) vorgesetzt, durch welche er, wie er selbst angibt, andeuten wollte, unter welche der folgenden Rubriken eine Regel oder Bemerkung fällt: —

1. A rule premised (d. i. eine Adhikâra-regel).
2. A maxim (d. i. eine Paribhâshâ).
3. An exposition (d. i. eine Saṁjñâ-regel).
4. A rule peculiar to the Veda.
5. An emendatory rule or Vârttika.
6. A remark (Ishṭi) extracted from the Bhâshya.
7. A metrical rule or Kârikâ.
8. A memorial verse.
9. A list from the Gaṇapâṭha.

Colebrooke's in dieser Handschrift enthaltene Uebersetzungen einiger wichtigen Regeln hoffe ich an andrer Stelle nutzbar zu

machen. Hier möchte ich nur noch bemerken, daß zwischen Blatt 1 und 2 dieser Handschrift ein Blatt mit dem Wasserzeichen des Jahres 1801 eingeheftet ist, auf dem Colebrooke die „Grammarians named in the Preface of the Gaṅaratna Mahódadhi, as explained by Bardhamána (Pupil of Góvinda Súri)" verzeichnet hat.

No. 209, aus 107 Blättern bestehend, wird am Anfange und am Schlusse vom Schreiber als Pâṇinisûtrabhâshyavârttika bezeichnet, und enthält in der That die Sûtras des Pâṇini mit Vârttikas und andern Auszügen aus dem Mahâbhâshya. Es unterliegt keinem Zweifel, daß wir in dieser Handschrift den ersten Versuch vor uns haben, der Grammatik des Pâṇini die Form zu geben, die sie später in der Calcuttaer Ausgabe der *Ashṭâdhyâyî* erhalten hat. Colebrooke's handschriftliche Bemerkungen sind nicht zahlreich. Doch kann ich auf zwei Punkte aufmerksam machen, welche beweisen wie weit er auch in dem Verständniß und der richtigen Erkenntniß der Natur des Mahâbhâshya seiner Zeit voraus war. Ein formeller Punkt besteht darin daß er, bei Regeln die er studiert hat, die Worte *kartavya* und *vaktavya*, wo sie der Schreiber oder Paṇḍit an das Ende eines Vârttika gesetzt hatte, als nicht zum Texte des Vârttika gehörig gestrichen hat. Und bedeutsamer noch ist der zweite Punkt, daß nämlich Colebrooke schon hier das Mahâbhâshya als einen Commentar zu den Vârttikas bezeichnet, und — wiederum durch arbitrary marks — dann und wann angedeutet hat, daß gewisse Vârttikas von Patañjali adoptiert, andere verbessert, und noch andre vermittelst einer künstlichen Erklärung der Regeln des Pâṇini zurückgewiesen werden.

Wichtiger ist die dritte Handschrift, No. 207 unsrer Kataloge, die von Colebrooke selbst als „A Grammar of the Sanscrit Language; from the text of Páṅini, and the commentaries[1]) of Rámа-chandra, Bhattóji-díchshita, and others" bezeichnet wird. Diese Handschrift enthält zunächst auf 73 Blättern, die das Wasserzeichen des Jahres 1794 tragen, den Text der *Ashṭâdhyâyî*, so geschrieben daß rechts vom Texte reichlicher Raum für handschriftliche Bemerkungen blieb. Da dieser Raum indessen nicht genügte, wurden später noch 81 Blätter[2]),

1) Unter diesen Commentaren sind ohne Zweifel die *Prakriyâ-kaumudî* und die *Siddhânta-kaumudî* zu verstehn, die besten Werke, die sich Colebrooke für den Anfang hätte wählen können.

2) Außerdem liegen in der Handschrift einige lose Blätter mit Uebersetzungen einzelner Regeln; und ein Briefkouvert mit dem Wasserzeichen 1797, das von Colebrooke an J. H. Harington Esq., und von diesem an H. Colebrooke Esq. zurück adressiert ist. John Herbert Harington, Civilbeamter im Dienste der East

mit dem Wasserzeichen des Jahres 1796, zwischen den Blättern des Textes eingefügt. Der neben dem Texte gelassene Raum und die so eingeschobenen Blätter enthalten Colebrooke's Uebersetzung von etwa drei Vierteln sämmtlicher Regeln der Grammatik des Pâṇini. Nahezu vollständig übersetzt ist Alles, was sich auf die Technik der indischen Grammatik, auf die Lautlehre, die Declination und Conjugation, die Bildung der Femininstämme, die Bedeutung der Suffixe und die Syntax bezieht; und in den Abschnitten, die von der Composition der Nomina, den kṛit und taddhita Suffixen handeln, sind wenigstens die Regeln allgemeinern Inhalts erklärt und die sich aus den Regeln ergebenden Resultate bisweilen durch tabellarische Uebersichten erläutert worden. Nicht übersetzt sind im Wesentlichen nur die Regeln über die Accente und die Sprache des Veda. Ich hege keinen Zweifel, daß der Anfang mit dieser Uebersetzung gemacht wurde, als Colebrooke zum ersten Male den Pâṇini mit seinen Paṇḍits studierte. Aber es ist sicher, daß er später, als er die Commentare selbst verstehn gelernt hatte, aber schon ehe er seine Sanskṛit Grammatik veröffentlichte, das zuerst Niedergeschriebene immer wieder zu verbessern gesucht hat. Ich könnte mehr als eine schwierige Regel anführen, von der uns die Handschrift drei oder vier Versuche einer Uebersetzung bietet, die aber alle von der in Colebrooke's Grammatik gedruckten Uebersetzung derselben Regel noch übertroffen werden.

Ich bin überzeugt, daß Colebrooke in den letzten Jahren des verflossenen Jahrhunderts die Absicht gehabt hat, den Text der Grammatik des Pâṇini mit einer englischen Uebersetzung und einem Commentare in englischer Sprache herauszugeben, und daß er sich erst später, durch äußere Umstände veranlaßt, entschloß, das von ihm gesammelte Material in seiner (leider nie vollendeten) Sanskṛit Grammatik zusammenzustellen und die Herausgabe des Textes des Pâṇini den Calcuttaer Paṇḍits zu überlassen. Auf jeden Fall enthält unsre Handschrift in einem Anhange auf 11 Blättern Colebrooke's Reinschrift einer Uebersetzung des größten Theiles des ersten Adhyâya von Pâṇini's Werke, und seinen Commentar zu einer beträchtlichen Anzahl von Regeln. Die hier übersetzten Regeln sind P. I, 1, 1—58 und 60—75; 2, 1—52 und 64—73; 3, 1—43; und 4, 1—12; commentiert sind I, 1—20, 27—37, 42—49,

India Company seit 1780, und zuletzt Member of the Supreme Council and President of the Board of Trade, „was also for some years honorary professor of the laws and regulations of the British government in India in the college of Fort William . . . and afterwards president of the council of the college" (*Dict. of Engl. Biogr.*)

und 51; 2, 27—29, und 64—73; und 3, 1—43. Außerdem ist bei vielen Regeln auf dem Rande bemerkt, wo sie oder die in ihnen gelehrten Termini zur Anwendung kommen. Vieles von dem, was unsre Handschrift bietet, hat Colebrooke in seiner Grammatik selbst veröffentlicht. Trotzdem dürfte die Handschrift auch jetzt noch dem, der die Grammatik des Pâṇini ins Englische übersetzen wollte, sehr werthvolle Dienste zu leisten im Stande sein. Zum Beweise hierfür gebe ich die Uebersetzung des ersten Pâda der *Ashṭâdhyâyî*, wie sie Colebrooke in seinen Handschriften selbst gegeben hat. Ich folge im Allgemeinen der erwähnten Reinschrift, gestatte mir aber einzelne Ausdrücke oder Wendungen aus andern Stellen der Handschriften aufzunehmen. Colebrooke's Anmerkungen zu veröffentlichen ist hier nicht der Ort.

Pâṇini Adhyâya I, Pâda 1.

1. *Â*, *ai* and *au* are named *vṛiddhi*;
2. and *a*, *e* and *o* are called *guṇa*.
3. When the substitution of such a letter is enjoined under these denominations, without specifying the letter which gives place thereto, such *guṇa* and *vṛiddhi* element shall be substituted for an *ik* vowel only.
4. The substitution of a *guṇa* or *vṛiddhi* letter, for an *ik* vowel, does not take effect in right of an *ârdhadhâtuka* suffix on account of which some part of the verb is expunged;
5. nor in right of an affix, which does really or fictitiously contain a mute *k* or *ṅ*;
6. nor does it take place in the verbs *dîdhîṅ* 'to shine', or 'to play', and *vevîṅ* 'to move, to pervade, to conceive, to desire, to throw', or 'to eat'; nor in the prefix *iṭ*.
7. Consonants, not separated by intervening vowels, are termed conjunct.
8. An element prolated by the nose and mouth is nasal.
9. Letters, articulated near the same organ of speech and with the same aperture for the voice, are homogeneous;
10. but a vowel and a consonant are not so.
11. *Î*, *û* and *e*, terminating a word in the dual number, are named *pragṛihya* (and are consequently unalterable, even though a vowel follow in connected orthography).
12. So are the same vowels following *m* in the inflections of the pronoun *adas* 'this';
13. and so is *śe* (which is employed in the Veda, in the inflections of the personal pronouns).

14. A particle consisting of a single vowel, except (*â* deduced from) *âṅ*, is likewise named *pragṛihya*;
15. and so is *o*, being the final of a particle.
16. In the vocative case a final *o* is likewise so named, according to Śâkalya, when *iti* follows, unless it be in a passage of holy writ.
17. So likewise (*u* deduced from) *uṅ* is named *pragṛihya*, according to the same author, when that particle follows;
18. and so is the nasal vowel ũ, which may be substituted for *uṅ* before the same term, according to the same authority.
19. *Î* and *û*, terminating a word that bears the sense of the seventh case, are likewise named *pragṛihya*.
20. The verbs *dâ* and *dhâ*, and such as assume those forms, except *dâp* 'to cut' and *daip* 'to cleanse', are called *ghu*; (*viz. ḍudâñ* and *dâṇ* 'to give'; *do* 'to cut'; *deṅ* 'to protect'; *ḍudhâñ* 'to hold, to nourish'; and *dheṭ* 'to drink'.)
21. A single letter is liable to the same inflections as if it were initial or final.
22. *Tarap* and *tamap* (terminations denoting the comparative and superlative degrees) are named *gha*.
23. The words *bahu* 'many' and *gaṇa* 'a set' or 'class' [1]), and terms ending in the suffixes *vatu* and *ḍati* are called numerals.
24. A numeral ending in *sh* or *n* [2]) is named *shaṭ*;
25. and so is one, the termination whereof is deduced from the suffix *ḍati*.
26. *Kta* and *ktavatu* (suffixes with which are formed the participles of the past tense) are called *nishṭhâ*.
27. *Sarva* and certain other words, whether single or terminating a compound, are termed pronouns.
28. They may at pleasure be, or not be, so named in a Bahuvrîhi compound formed of terms signifying regions of space.
29. They are not so named in any other Bahuvrîhi compound;
30. nor in a compound, which, if resolved, would exhibit its other term in the third case; [nor in a phrase equivalent to such a compound;]
31. nor in a Dvandva compound.
32. However, they may at pleasure be, or not be inflected as pro-

---

1) An andrer Stelle: „*bahu* and *gaṇa*, unless they signify greatness or assemblage".

2) Oder „a numeral originally ending in *sh* or *n*"; oder „numerals which in their elementary form end in *sh* or *n*". — Siehe P. I, 1, 24, Vârtt. 1.

nouns, in a Dvandva compound, with *jas*, the termination of the first case in the plural number.

33. *Prathama* 'first', *charama* 'last', derivatives ending in *taya* (deduced from the suffix *tayap*), *alpa* 'little', *ardha* 'half', *katipaya* 'few', and *nema* 'half', may at pleasure be, or not be, inflected as pronouns in the plural number of the first case. [*Ubhaya* 'both', derived from *ayach* substituted for *tayap*, must be inflected like a pronoun in this case and number. Ordinals ending in *tîya* may be inflected as pronouns with the suffixes distinguished by a mute *ṅ*].
34. So may *pûrva* 'east' or 'prior', *para* 'subsequent', *avara* 'west' or 'posterior', *dakshiṇa* 'south' or 'right', *uttara* 'north' or 'subsequent', *apara* 'other' or 'inferior', and *adhara* 'west' or 'inferior', denoting relative situation, unless they be used as appellatives.
35. So may *sva* 'own', unless it be used as an appellative and signify 'kinsman' or 'wealth';
36. and so may *antara* provided it signify 'external' or 'lower garment'.
37. *Svar* and certain other words are indeclinable; and so are particles.
38. So are words ending in a taddhita suffix, to which all the signs of cases cannot be subjoined;
39. and so are words terminated by a kṛit suffix ending in *m* or in a diphthong;
40. or terminated by the suffixes *ktvâ*, *tosun*, or *kasun*.
41. An adverbial compound too is indeclinable.
42. *Śi* (which is substituted for *jas* and *śas* in the inflections of neuter nouns) is called *sarvanâmasthâna*;
43. and so are *su*, *au*, *jas*, *am* and *auṭ*, except in the neuter gender. (The exception does not contradict the preceding rule.)
44. *Vibhâshâ* denotes prohibition together with option. (It signifies "not, optionally however".)
45. An *ik* vowel, which has been, or is to be, substituted for a semivowel (*yaṇ*) [1]), is called *saṁprasâraṇa*.

---

1) Bei einer etwas andern Fassung der Regel fügt Colebrooke hinzu „and the substitution of such a vowel for a semivowel"; and hat die Anmerkung „the rule admits of two interpretations, and must in fact be taken in both senses, as here translated". Er will offenbar sagen, daß *saṁprasâraṇa* nicht nur den für den Halbvocal substituierten Vocal bezeichnet, sondern auch gleichbedeutend ist mit dem Satze „*ik* tritt an die Stelle von *yaṇ*". Vgl. die Vârttikas zu der Regel.

46. That which is distinguished by a mute *ṭ*, is initial; by a mute *k*, is final;
47. and by a mute *m*, is subjoined to the last vowel, (whether this be, or be not, followed by a consonant).
48. When a short vowel must be substituted for a diphthong, only the *ik* element becomes short (but the other element is rejected) [1]).
49. In rules of grammar, the sixth case imports "instead of".
50. When an element is to be substituted for another, the most similar to the original one must be chosen out of those which are offered.
51. When an *aṇ* vowel is substituted for *ṛi*, *r* must be subjoined to it. [In like manner *l* is subjoined to such a vowel substituted for *ḷi*.]
52. What is thus (49) directed to be substituted for a term so exhibited in the sixth case, shall be put in the place of the last letter thereof;
53. and so shall a substitute containing a mute *ṅ* (even though it consist of several efficient letters, 55).
54. A variation of a subsequent term on account of a preceding one affects its initial letter only.
55. A substitute consisting of two or more efficient letters, (without a mute *ṅ*, 53,) or distinguished by a mute *ś*, shall be put in the place of the whole term so (49) exhibited in the sixth case.
56. The substitute is equal to the original, except in regard to operations depending on the particular letters of the original.
57. That, which is substituted for a vowel on account of a subsequent term, is equal to the original so far as the preceding element is concerned;
58. except in regard to operations on the termination of an inflected word; in regard to the duplication of elements; in regard to the preceding element in the instance of *vara*; in regard to the expunging of *y*; in regard to the tone of vowels; in regard to the substitution of a homogeneous element; in regard to the substitution of *anusvâra*; in regard to the lengthening of a vowel; in regard to the substitution of a *jaś* consonant; and in regard to the substitution of a *char* consonant.

---

1) An andrer Stelle: „when a short vowel must be substituted for a diphthong, it shall be an *ik* vowel".

59. . . . . .[1])

60. The expunging, obliterating, effacing, or omitting of an element, so that it shall be unheard and unpronounced, is called *lopa* or substitution of a blank.

61. *Luk*, *ślu* and *lup* are names for the expunging of suffixes with such consequent operations, as are denoted by these terms respectively[2]).

62. When the whole of a suffix is expunged, operations, depending on such a suffix, do nevertheless take place;

63. unless the term, by which the suffix is directed to be expunged, contains the syllable *lu*; for, in that case, the radical body[3]) remains unaffected.

64. The last vowel, together with a subsequent consonant (if any there be), is called *ṭi*, the last syllable.

65. The element, which precedes the last letter, is called penultimate.

66. When that, on account of which something is directed to be done, is exhibited in the seventh case, the consequent operation affects a preceding term only.

67. When it is exhibited in the fifth case, the operation affects a subsequent term only.

68. In grammar, the particular form only of a word (abstracted from its sense) is meant; excepting the technical denominations of words, for they, not the word which designates them, are thereby meant.

69. A vowel or a semivowel (*aṇ*), or a consonant to which a mute *u* is annexed, implies the homogeneous elements as well as the particular letter, which is expressed; excepting suffixes.

70. Preceded or followed by the letter *t*, an element implies the homogeneous sounds of the same length as well as the particular one which is expressed.

71. The first term of any set, together with a final mute letter, is a designation of all the intermediate elements as well as of that initial term itself.

---

1) Diese Regel ist nirgends vollständig übersetzt.

2) An andrer Stelle: „the expunging of a suffix with such further consequences as are severally denoted by the terms *luk*, *ślu*, and *lup*, is designated by these terms respectively".

3) Später hat Colebrooke *aṅga* mit „inflective root" übersetzt. Vgl. seine Grammatik, S. 14: „*Luk*, *ślu* and *lup* are also names for the expunging of affixes; and, when a blank is substituted under one of these denominations, the inflective root remains unaffected by the expunged affix".

72. That, by which, as a limitation[1]), a grammatical operation is directed, implies the whole term whereof it is the final.
73. A word, whereof the first vowel is *vṛiddhi*, is named *vṛiddha*;
74. and so are *tyad* and certain other pronouns;
75. and so is a word, whereof the first vowel is *e* or *o*, provided it be the name of an eastern country.

1) An andrer Stelle „as a restrictive term", oder „as an epithet".

Ueber die Stromleitung durch Niederschlagsmembranen.

Von

Gustav Tammann.

Vor kurzem hat Ostwald[1]) ein System aus Kupfersulfat und Ferrocyankaliumlösung, getrennt durch die semipermeable Membran von Ferrocyankupfer, electrolysirt und ist bei der Deutung dieses Versuches zur Ansicht gelangt, daß die semipermeabeln Niederschlagsmembranen die Electricität metallisch leiten. Zur selben Zeit hatte ich gefunden, daß die semipermeabele Membran einen außerordentlich geringen Widerstand dem Durchgange von Wechselströmen bietet[2]). Schon damals hatte ich mir vorgenommen, die Art der Electricitätsleitung durch semipermeable Membranen näher zu untersuchen, und speciell die von Ostwald aufgestellten Ansichten, die ich erst nach Abfassung meiner Mittheilung erfuhr, näher zu prüfen. Inzwischen sind von Oberbeck[3]) die electromotorischen Kräfte, deren Sitz die Niederschlagsmembranen sind, gemessen, es hat sich dabei herausgestellt, daß ihr Betrag von der Eigenschaft der Semipermeabilität wenig beeinflußt wird, ja bei nicht membranartigen Niederschlägen wurden zuweilen größere electromotorische Kräfte constatirt, als bei Systemen mit Niederschlagsmembranen, die nach Ostwald besonders große electromotorische Kräfte ergeben sollten. Die Frage nach der Art der Electricitätsleitung durch die Niederschlagsmembranen ist von

1) W. Ostwald, Zeitschrift f. physik. Chem. 6. p. 71. 1890.
2) G. Tammann, Zeitschrift f. physik. Chem. 6. p. 236. 1890.
3) A. Oberbeck, Wied. Ann. 42. p. 193. 1891.

Oberbeck nicht näher berührt worden; es scheint, daß er sich der Ansicht, die Niederschlagsmembranen seien Isolatoren, hinneigt. Wir sind über die Vorgänge bei der Electrolyse durch Niederschlagsmembranen, besonders was die quantitative Seite des Phänomens betrifft, so mangelhaft orientirt, daß die Frage nach Art und Weise der Stromleitung durch Niederschlagsmembranen nicht ohne neue Versuche zu entscheiden ist.

Sind die sogenannten semipermeabeln Membranen wirklich undurchlässig für die Membranogen-Jonen, so bleibt für diese Membranen nur die Wahl zwischen electrolytischer oder metallischer Leitung, sind dieselben aber ausnahmlos für, wenn auch nur geringe, Mengen anderer Stoffe und besonders für ihre Membranogene permeabel, so könnte man ihre gute Leitfähigkeit auch der Wechselwirkung der Jonen in den Membranporen, wie bei den permeabeln Membranen, erklären. Ich werde im Folgenden auf diese Hauptfrage, giebt es Niederschlagsmembranen, die für die Jonen ihrer Membranogene absolut undurchlässig sind? ein wenig näher eingehn, die Gesamtheit aller meiner diesen Punkt betreffenden Beobachtungen mir auf ein anderes Mal versparend. In vielen Fällen kann es keinem Zweifel unterliegen, daß die vorliegende Niederschlagsmembran für die Jonen ihrer Membranogene permeabel ist. Beispiele für diesen Fall sind außerordentlich zahlreich.

Lösungen von Alkalien, Carbonaten, Silicaten, Phosphaten und Sulfiden geben mit Salzen schwerer Metalle Membranen, die zuerst, gleich nach der Aufeinanderschichtung der Lösungen, dünn sind, sich aber bald augenscheinlich verdicken, so daß kein Zweifel darüber bleibt, daß sich in den Poren der Membran die Fällung fortdauernd vollzieht. Ich habe früher die Bilder, die solche Systeme, betrachtet durch den Schlierenapparat geben, beschrieben[1]). Diese Bilder sind nur im Sinne einer sich beständig vollziehenden Reaction zwischen den Membranogenen zu deuten. Die von Ostwald[2]) als semipermeabel angesprochene Membran aus Kupfersulfid, gebildet beim Aufeinanderschichten der Lösungen von Natriumsulfid und Kupfersulfat, verdickt sich ungemein rasch, ist also sicher nicht semipermeabel. Auch geronnenes Eiweiß, von dem Ostwald annimmt, daß es mit Kupfersulfatlösung eine für Kupferionen undurchdringliche Membran bildet, wird von Kupfersulfatlösung schnell und vollständig imprägnirt. Von diesen Membranen unter-

1) G. Tammann, Wied. Ann. 34. p. 299. 1888.
2) W. Ostwald l. c.

scheiden sich die Ferrocyankupfer, Ferrocyanzink und Ferrocyanquecksilbermembran schon ihrem Aussehn nach; dieselben sind außerordentlich dünn und dehnbar, sie verdicken sich während der ersten 5—10 Minuten lang nicht sichtbar. In concentrirten Lösungen ihrer Membranogene ist die dünne Ferrocyankupfermembran außerordentlich unbeständig, in verdünnten, 0.1 normal und verdünnteren, hält sie sich zuweilen monatelang. Die Verdickung der Ferrocyankupfermembran unterscheidet sich wesentlich von der aller anderen Niederschlagsmembranen; während die anderen sich gleichmäßig auf ihrer ganzen Fläche und etwa proportional der Zeit verdicken, bilden sich auf der Ferrocyankupfermembran warzenartige Auswüchse. Die Fällung geht von einzelnen Punkten der Membran aus, um dann, wenn sie einmal eingetreten ist, bald das ganze Probirglas zu füllen. Die Ferrocyankupfermembran ist also unter Umständen für die Jonen ihrer Membranogene impermeabel, befindet sich aber in einem labilen Zustande, der durch unbekannte Umstände leicht gestört wird. Die Ferrocyankupfermembran ist in der That für eine ganze Reihe von Salzen impermeabel; man kann von vielen Stoffen auch mit sehr empfindlichen analytischen Hülfsmitteln nicht Spuren derselben nachweisen, auch nachdem diesen mehrere Stunden lang Gelegenheit geboten war, die Membran zu durchdringen. Die Permeabilität der verschiedenen Niederschlagsmembranen für fremde Stoffe gedenke ich in einer anderen Mittheilung ausführlicher zu behandeln, und die Ansichten von Ostwald über diesen Punkt näher zu prüfen.

Drei verschiedene Arten des Electricitätstransportes wären durch eine Niederschlagsmembran denkbar. Erstens die Jonen der Lösung wandern durch die Poren der Membran. Auch für die Ferrocyankupfermembran, wäre nach dem beschriebenen Verhalten derselben dieser Fall nicht sofort von der Hand zu weisen. Zweitens die Niederschlagsmembranen leiten metallisch; und drittens dieselben leiten electrolytisch.

Untersuchen wir zur Entscheidung der Frage die Electrolyse eines Systems aus Kupfersulfatlösung und darüber geschichteter Ferrocyankaliumlösung, in die Kupferlösung tauche die Anode und in die Ferrocyankaliumlösung die Kathode:

Kathode | $4\,K;\ 4\,Cy, Fe\,Cy_2$ | $2\,Cu;\ 4\,Cy, Fe\,Cy_2$ | $2\,Cu\,SO_4$ | Anode.

Bei der Stromleitung gehn 2 Kupfer-Jonen an die Membran, ihnen entgegen kommt das Ferrocyan-Jon. Wenn die Membran metallisch leitet, so müssen sich auf ihr einerseits 2 Atome me-

tallisches Kupfer und andererseits ein Ferrocyan abscheiden; letzteres geht unter Entwicklung von 2 respective 1.5 Sauerstoff-Atomen in Ferrocyan oder Ferrocyanwasserstoffsäure über. Das Kalium wandert zur Kathode und das Jon SO_4 zur Anode. Bei oberflächlicher Betrachtung scheint die Electrolyse, wenn an der Membran die Stromdichte groß ist, in der That so zu verlaufen.

In einem Probirglase (2 cm Durchmesser) wurde über eine Kupfersulfatlösung (1 Gramm-Molekel im Liter) eine Ferrocyankaliumlösung (0.37 G.-M.) geschichtet und mittelst, 1.5 cm von einander abstehender, Kupferelectroden der Strom von 4 Leclanché-elementen durchgeschickt. Es verdickte sich die Ferrocyankupfermembran stark und zwar sehr viel schneller, als wenn kein Strom durchgeschickt wurde. Unter der starken Fällung von Ferrocyankupfer fand sich eine cohärente Schicht von Kupfer, die nach der Anode hin blank und metallisch, nach der Kathode hin theils in Kupferoxyd verwandelt war. Vom Kupferoxyd aus entwickelte sich reichlich Sauerstoff, die Ferrocyankaliumlösung enthielt Ferricyankalium und reagirte alkalisch. An der Anode wurde Kupfer gelöst und an der Kathode Wasserstoff entwickelt.

Es scheidet sich metallisches Kupfer auf der Membran aus, gleichzeitig bildet sich aber viel Ferrocyankupfer. Leitet die Membran metallisch so ist nicht einzusehn, wozu sich noch eine reichliche Menge Ferrocyankupfer bildet. Wäre es nicht möglich, daß die Kupferabscheidung nur ein secundäres Phänomen ist?

Schaltet man in den Stromkreis der soeben benutzten Zersetzungszelle ein Silbervoltameter, so wurden in diesem während 24 Stunden 2.266 gr Silber abgeschieden, auf und in der Membran wurden nur 0.314 gr metallischen Kupfers gefunden, während 0.664 gr Kupfer der ausgeschiedenen Silbermenge entsprechen würden. Um das Kupfer vom Ferrocyankupfer zu trennen wurde das Gemenge mit Natronlauge, verdünnter Weinsäure und stark alkalischer Lösung von weinsaurem Natron behandelt. Schwarzes Kupferoxyd hat sich in diesem Falle bei geringerer Stromdichte gar nicht gebildet. Ein zweiter Versuch wurde in der Anordnung von Ostwald ausgeführt; ein mit Pergamentpapier überbundenes mit Ferrocyankaliumlösung gefülltes U-förmiges Rohr (1.5 cm Durchmesser) tauchte in zwei Gefäße mit Kupfersulfatlösung, in 24 Stunden hatten sich bei geringerer Stromdichte als im vorigen Versuch an der Kathode 0.211 gr Kupfer abgeschieden auf der Anoden-Pergamentmembran wurden nur 6 mg metallischen Kupfers gefunden.

Sorgt man für noch geringere Stromdichten an der Ferrocyankupfermembran, so ist auf dieser, auch nachdem 4 grm Silber im Silbervoltameter abgeschieden sind, keine Spur von metallischem Kupfer zu entdecken. Füllt man eine Platinschale, 9 cm Durchmesser, mit Kupfersulfat-Lösung (0.1 Gr.-M.) und legt auf diese Lösung ein die Schale allseitig überragendes Stück Pergamentpapier, auf welches man Ferrocyankaliumlösung (0.04 Gr.-M.) bringt, so scheiden 2 Lelauché-Elemente in 3 Tagen keine Spur von metallischem Kupfer auf dem Pergamentpapier ab und in der Ferrocyankaliumlösung ist kein Ferricyankalium nachzuweisen. In der Ferrocyankaliumlösung sind nur Spuren von SO_4-Jonen und in der Kupfersulfatlösung nur Spuren von Kaliumionen enthalten.

Die Metallabscheidung auf der Niederschlagsmembran hängt wohl von der Fähigkeit des Stoffes an der Kathode, unter Abgabe von negativer Electricität in ein anderes Jon überzugehn, ab. Folgende Systeme: Kathode | Schwefelnatrium | Schwefelkupfer | Kupfersulfat | Anode und Kathode | Ferrocyankalium | Ferrocyanzink | Zinksulfat | Anode gaben auf der Membran Metallabscheidungen, während Systeme: Kathode | Kalilauge | Kupferoxydhydrat | Kupfersulfat | Anode [1]) und Kathode | Kohlensaures Kali | Kupfercarbonat | Kupfersulfat | Anode, keine Metallabscheidung gaben. Die Ausscheidung von Kupfer auf der Ferrocyankupfermembran hat mit der Semipermeabilität der Membran nichts zu thun. Auf der Schwefelkupferausscheidung scheidet sich ja auch Kupfer aus und doch ist die Schwefelkupferausscheidung sowohl für Schwefelnatrium als auch für Kupfersulfat in hohem Grade durchlässig.

Durch Annahme metallischer Leitfähigkeit der Ferrocyankupfermembran wird die Electrolyse unseres Systems schwerlich erklärt. Betrachtet man die Niederschlagsmembran als Isolator und sucht den Electricitätsaustausch in den Poren der Membran, so müßten sich diese bald verstopfen und der Strom müßte sehr bedeutend geschwächt werden, ja nach einiger Zeit nothwendig vollkommen

---

1) Systeme aus Kalilauge und Kupfersulfat leiten nur so lange den Strom, als das ausgeschiedene blaue Kupferoxydhydrat sein Wasser nicht verloren hat; ist eine Schicht der Membran in schwarzes Kupferoxyd übergegangen, so geht durch diese Membran fast gar kein Strom, nur Systeme, deren Lösungen verdünnter als etwa $\frac{1}{4}$ normal sind, kann man längere Zeit electrolysiren. Bei concentrirteren Lösungen wächst der Widerstand so, daß der Strom schnell auf $\frac{1}{500}$ seines Werthes geschwächt wird.

aufhören. Aus den Beobachtungen von Overbeck[1]) ist ersichtlich, daß der Widerstand bei Membranen aus Ferrocyankupfer und Ferrocyanzink sehr erheblich wächst, derselbe wird aber nie so groß, daß der Strom auf mehr als $\frac{1}{8}$ seiner anfänglichen Intensität geschwächt wird; um die Stromschwächung hervorzurufen genügen die Concentrationsänderungen der Lösung um die Membran. Wir werden sehn, daß die Schichten an der Membran sich beständig verdünnen müssen. Außerdem konnte an der Ferrocyankupfermembran Nichts beobachtet werden, was zu Gunsten einer Abscheidung von Ferrocyankupfer in den Poren der Membran sprach. Wäre es nicht wahrscheinlich, daß in diesem Falle die Membran ein besonders festes Gefüge annehmen würde?

Die Ferrocyankupfermembran leite also den Strom electrolytisch. Die Kupferjonen dringen in die Ferrocyankupfermasse der Niederschlagsmembran ein und treiben auf der anderen Seite der Membran Kupferjonen heraus, die sich mit den ihnen begegnenden Ferrocyanjonen zu Ferrocyankupfer vereinigen. Die Kalium- und SO_4-Jonen wandern zu den Electroden und das Resultat ist, daß an der Membran beständig Schichten von reinem Wasser, in welches die Jonen beider Salze hineindiffundiren, gebildet werden.

Schickt man durch unser System den Strom in umgekehrter Richtung, also: Anode | 4 K; 4 Cy, Fe Cy_2 | 2 Cu; 4 Cy, Fe Cy_2 | 2 Cu SO_4 | Kathode, so müßte, wenn die Membran sich wie eine Metallplatte verhielte, auf der zur Anode gewandten Seite der Membran Wasserstoff entwickelt werden und Kalilauge sich bilden, während auf der anderen Seite sich Sauerstoff entwickeln und Schwefelsäure entstehn würde. Nach Ostwald[2]) ist die metallisch leitende Membran aber für Kaliumjonen durchlässig. Warum die Kaliumjonen ihre Electricität nicht der metallisch leitenden Membran abgeben, ist von Ostwald nicht näher erörtert. Dieselben sollen jedenfalls unberaubt ihrer Electricität durch die Poren der Membran in der Kupfersulfatlösung gelangen, in der ihnen die SO_4-Jonen, die die Membran nicht durchdringen können, begegnen. So schwer auch dieser Ansicht beizustimmen ist, so hätte dieselbe doch etwas für sich, wenn in der Kupferlösung die der auf der Kathode abgeschiedenen Kupfermenge aequivalente Kaliummenge gefunden würde. Zwar dringt aus einer Lösung, die Kalium- und SO_4-Jonen enthält, ein geringer Theil derselben

1) A. Oberbech l. c.
2) W. Ostwald l. c.

durch die Ferrocyankupfermembran, aber bei unseren Versuchsbedingungen kann es sich, wie ich mich überzeugt habe, nur um wenige Milligramm Kaliumsulfat, die aus der Kupferlösung in die Ferrocyankaliumlösung hinüber diffundiren, handeln. Trotzdem müßte die der Summe der SO_4 Menge (in der Ferrocyankaliumlösung) und der Kaliummenge (in der Kupfersulfatlösung) aequivalente Menge von Kaliumsulfat der an der Kathode abgeschiedenen Kupfermenge entsprechen. Die Analyse ergiebt aber in der Kupfersulfatlösung nur etwa $\frac{1}{4}$ der erwarteten Menge von Kaliumsulfat und in der Ferrocyankaliumlösung ist nicht mehr als $\frac{1}{8}$ derselben vorhanden.

In eine Platinschale (9 cm Durchmesser) wurden 300 cbcm Kupfersulfatlösung (0.1 G.-M.) gebracht, die Lösung mit Pergamentpapier bedeckt und Ferrocyankaliumlösung auf das Papier geschichtet. Es hatten sich nach 24 Stunden auf der Platinschale 0.849 gr Kupfer abgeschieden. In der Kupfersulfatlösung wurden, nach Ausfällung des Kupfers mit Schwefelwasserstoff, 0.671 grm Kaliumsulfat gefunden, während die dem ausgeschiedenen Kupfer aequivalente Kaliumsulfatmenge 2.342 gr betragen würde. Aus der braunschwarz gefärbten Ferrocyankaliumlösung wurde das Jon SO_4 mit Baryumchlorid gefüllt, der ausgewaschene Niederschlag mit Kali und Salpeter geschmolzen und aus der Lösung der Schmelze die Schwefelsäure nochmals aus sauerer Lösung mit Chlorbaryum gefällt. Es wurden so erhalten 0.544 gr Baryumsulfat, entsprechend 0.406 Kaliumsulfat.

Nimmt man auch an, daß die in der Ferrocyankaliumlösung gefundene Menge von SO_4-Jonen mit Kaliumjonen zusammen durch die Membran zurück in die Ferrocyankaliumlösung getreten ist, so könnten im Ganzen doch nur 0.671 gr + 0.406 gr = 1.077 gr Kaliumsulfat in der Kupfersulfatlösung gebildet sein, während nach Ostwald 2.342 gr Kaliumsulfat in der Kupferlösung vorgefunden werden müßten.

Bemerkenswerth ist der Umstand, daß die Ferrocyankupfermembran bei dieser Richtung des Stromes viel dünner ist und bleibt, als wenn unter demselben Umständen kein Strom durch die Membran geht.

Jener und dieser Befund können in einfacher Weise erklärt werden, wenn man der Niederschlagsmembran electrolytisches Leitvermögen zuschreibt. Verfolgen wir den Strom von der Anode aus. Das Ferrocyan scheidet sich an der Anode ab, dieselbe sei aus Platin, und zersetzt das Wasser, indem sich Ferrocyanwasserstoffsäure und Sauerstoff bilden. Dabei treten complicirte Oxydations-

wirkungen ein, die hier nicht weiter interessiren. Die 4 Kaliumjonen wandern von der Anode zur Membran und treten in diese an Stelle zweier Kupferjonen ein, letztere wandern durch die Membran und die Kupfersulfatlösung zur Kathode. Von der Kathode aus wandern die SO_4-Jonen und treten in die Membran an Stelle der Ferrocyanjonen, die durch die Ferrocyankaliumlösung zur Anode wandern. Das Resultat dieses Processes ist eine beständige Auflösung der Ferrocyankupfermembran und Bildung von Kupfersulfat und Ferrocyankalium an der Membran. Natürlich verschwindet die Membran nicht, sondern bildet sich beständig aus den Membranogenen neu, was ja mit ihrer Feinheit unter diesen Versuchsbedingungen übereinstimmt. Bei dieser Neubildung der Membran gelangt ein Theil der Kaliumjonen in die Kupferlösung und ein Theil der SO_4-Jonen in die Ferrocyankaliumlösung. Würden die Kalium und SO_4-Jonen in den Poren der Membran zusammentreffen, so müßten, da beide Jonen gleiche Ueberführungszahlen haben, auf beiden Seiten der Membran aequivalente Mengen von Kalium und SO_4 gefunden werden. Die Summe der jenen aequivalenten Kaliumsulfatmengen müßte der ausgeschiedenen Kupfermenge entsprechen. Ferner ist, wenn der Membran ein Isolator wäre, kein Grund dafür vorhanden, daß die Membran an Substanz verliert.

Von Interesse erschien noch der Fall, in dem sich neben der Membran ein Salz bildet, das die Membran auch nicht in Spuren zu durchdringen vermag. Folgendes System: Anode | Ferrocyanmagnesium | Ferrocyankupfer | Kupfersulfat | Kathode, genügt jener Bedingung. Nach Ostwalds Ansichten wäre bei der Electrolyse dieses Systems eine Abscheidung von Magnesium oder Magnesia auf der Membran zu erwarten. Eine solche fand auch bei größeren Stromdichten nicht statt. Folgender Versuch spricht wie die vorigen für electrolytische Leitung der Membran. Die Versuchsanordnung war die früher beschriebene. Auf der Kathode wurden 1.897 gr metallisches Kupfer abgeschieden, in der Kupfersulfatlösung wurden 0.377 gr Magnesiumsulfat (der Kupfermenge aequivalent wären 3.63 Mg SO_4) gefunden und aus der Ferrocyanmagnesiumlösung wurden 2.124 gr Baryumsulfat erhalten. Der Kupfermenge aequivalent wären 7.03 gr Baryumsulfat und der in die Kupfersulfatlösung übergetretenen Menge Magnesium wären 0.731 gr Barymsulfat aequivalent. Es sind also bei der bestän-

1) G. Tammann, Zeitschrift f. physikal. Chem. 6. p. 236. 1890.

digen Neubildung der Membran, wenn ein Atom Magnesium in die Kupfersulfatlösung trat, 3 Atome SO_4 in die Ferrocyanmagnesiumlösung getreten. Systeme mit Niederschlagsmembranen entwickeln beim Durchgang des Stromes wohl ausnahmslos einen unipolaren Widerstand.

Wie früher gezeigt besitzen Niederschlagsmembranen, die sich nicht merkbar verdicken, für Wechselströme keinen Widerstand[1]). Anders verhalten sich aber solche Systeme gegen längere Zeit constant wirkende, besonders gegen starke Ströme; bei der Wirkung dieser bildet sich bei einer bestimmten Richtung des Stromes schnell ein starker Widerstand aus. Die oben auseinandergesetzten Verhältnisse bei der Stromleitung unserer Systeme lassen diese Erscheinung vollständig verstehn.

Nach Oberbeck[1]) sind die electromotorischen Kräfte der Polarisationsströme von Systemen mit Niederschlagsmembranen nie größer als ein Volt. Die Stromstärke aber nahm bei Oberbecks Systemen in 5 Minuten auf $\frac{1}{8}$ bis $\frac{1}{10}$ ihres Betrages ab. Also wuchs der Widerstand aufs 7 bis 9 fache, da die electromotorische Kraft der Batterie 9 Volt betrug. Wie ich mich mehrfach bei oben beschriebener Versuchsanordnung, Uebereinanderschichtung der Lösungen in einer Röhre mit Electroden, überzeugt habe, entwickelt sich der große Widerstand nur dann, wenn die Jonen, die eine Membran oder nur einen Niederschlag bilden, sich gegen einander, die beiden anderen Jonen sich aber auseinander bewegen. Dadurch entsteht an der Membran oder im Niederschlage eine sehr verdünnte Lösung, in deren Bildung wohl die Hauptursache des großen Widerstandes zu suchen ist. Wendet man den Strom, so wandern die membranbildenden Jonen auseinander, die anderen Jonen aber zur Membran, so daß die Membran oder der Niederschlag jetzt von concentrirteren Schichten umgeben sein wird.

Bei der Electrolyse eines Systems aus Kupfersulfatlösung (1 G.-M.) und Ferrocyankaliumlösung (0.37 G.-M.) mit 4 Leclauché Elementen fiel, wenn die membranbildenden Jonen gegen einander wanderten, die Stromstärke in 2 Minuten auf den 10. Theil ihres anfänglichen Werthes; rückten die membranbildenden Jonen aber auseinander, so änderte sich die Stromstärke nur wenig. Natürlich hängt das Phänomen wesentlich von der Stromdichte an der Membran ab, ist dieselbe gering, so können sich die durch den Strom hervorgerufenen Concentrationsunterschiede sofort wieder durch Diffusion ausgleichen, und der unipolare Widerstand wird

1) A. Oberbeck l. c.

nicht auftreten. Der unipolare Widerstand verschwand bei einer Stromstärke von 10 Milli-Ampère in einem System von Kupfersulfat (0.05 G.-M.) und Ferrocyankaliumlösung (0.02 G.-M.). Für das Auftreten des unipolaren Widerstandes ist es gleichgültig, ob eine permeabele oder semipermeable Membran oder endlich nur ein Niederschlag gebildet wird.

Obige Untersuchung der Electrolyse eines Systems aus Kupfersulfat und Ferrocyankaliumlösung hat gelehrt, daß nur durch Annahme electrolytischer Leitfähigkeit der Membran die beobachteten Erscheinungen genügend erklärt werden. Die electrolytische Zersetzbarkeit der Membran hat im Lichte Hittorf'scher Anschauungen Nichts befremdendes. Sind doch alle Stoffe, die unter den Begriff Salz rubriciren, Electrolyte.

Dorpat im März 1891.

Ueber einen neuen Apparat zur Bestimmung der inneren Wärmeleitungsfähigkeit schlecht leitender Körper in absolutem Maße.

Von

O. Venske.

Bei den Schwierigkeiten, mit welchen noch heutzutage die Ermittelung genauer Werte der Wärmeleitungsfähigkeit in absolutem Maße verbunden ist, dürfte ein kurzer Bericht über einen neuen Apparat nicht ohne Interesse sein, welcher auf Veranlassung von Herrn Prof. W. Voigt construiert ist und die Bestimmung dieser Constante für schlecht leitende Substanzen in einfacher Weise ermöglicht.

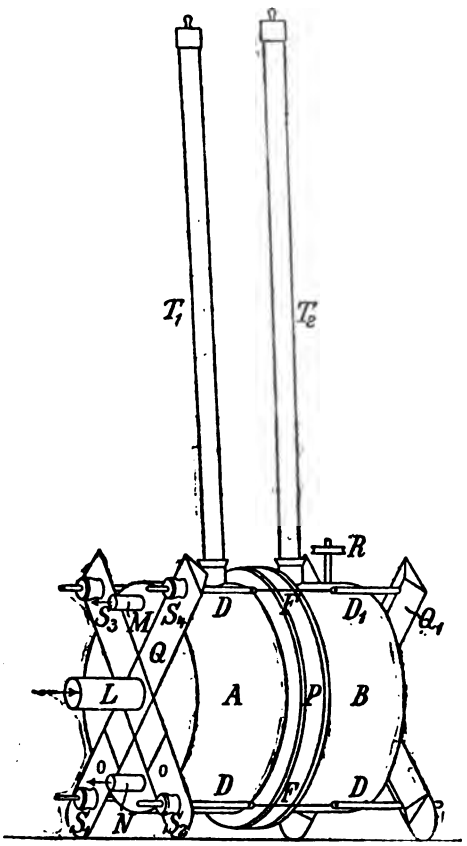
Die Messungsmethode des Herrn Prof. W. Voigt gründet sich auf die Bestimmung der Wärmemenge, welche in der Zeiteinheit aus einer Wassermasse von der Temperatur ϑ_2 in eine andere von ihr durch eine planparallele Wand der zu untersuchenden Substanz getrennte Wassermasse von der Temperatur ϑ_1 übergeht. Führt man folgende Bezeichnung ein:

calorimetrische Wärmeleitungsfähigkeit der Wand k,
äußere Wärmeleitungsfähigkeit der Wand gegen die Wassermasse von der Temperatur ϑ_1 bezw. ϑ_2 h_1 bez. h_2,
Dicke der Wand δ,

Stärke der Wärmeströmung berechnet für den Querschnitt 1 Q, so besteht, falls ϑ_1 und ϑ_2 sich so langsam mit der Zeit ändern, daß der Zustand in der Platte sich nur sehr wenig von dem stationären unterscheidet, der bei constanten Temperaturen der beiden Bäder eintreten würde, bekanntlich die Gleichung

$$\frac{1}{Q}(\vartheta_2 - \vartheta_1) = \frac{\delta}{k} + \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}.$$

Bestimmt man experimentell die Werte, welche die linke Seite dieser Gleichung für verschiedene Wanddicken annimmt, so gewinnt man folglich Gleichungen, aus denen sich die Unbekannten k und $1/h_1 + 1/h_2$ berechnen lassen. Diese Bestimmungen können bequem und genau mit dem oben erwähnten Apparate ausgeführt werden.



A und B sind zwei mit ihren Mündungen einander zugekehrte cylinderförmige Gefäße, welche je eine Höhe von 5 cm und einen

Durchmesser von 10 cm haben. Dieselben befinden sich zwischen zwei Holzkreuzen Q, Q_1, welche durch die Drähte D, D_1 und die Seidenschnüre F mit einander verbunden sind. Die äußeren Enden der Drahtstücke D sind mit Schraubengewinden und Muttern S_1, S_2, S_3, S_4 ausgestattet. Durch Anziehen der letzteren werden die mit Gummi gefütterten Gefäßränder wasserdicht gegen eine dazwischengeschaltete kreisförmige Platte P aus der zu untersuchenden Substanz gepreßt. A und B sind mit zwei Stutzen versehen, welche dem Rande möglichst nahe liegen und zur Aufnahme zweier in zehntel Grade geteilter Thermometer, T_1 bezw. T_2, dienen. In dem rechten Gefäß befindet sich ein Rührer in Form einer Turbine, die durch das Rädchen R von außen bewegt wird; in die Wand des linken sind drei Röhren L, M, N eingelötet. Die Röhre L tritt in das Innere des Apparates und trägt an ihrem Ende eine dem Thermometer T_1 möglichst nahe stehende kreisförmige Scheibe von circa 8 cm Durchmesser, welche dazu bestimmt ist, einen eintretenden Flüssigkeitsstrahl dicht an der Platte P hinzuleiten.

Die Benutzungsweise des Apparates ist so einfach, daß wenige Angaben zur Klarlegung genügen werden. Durch einen Vorversuch hat man die äußere Wärmeleitungsfähigkeit der Gefäßwände gegen Luft zu bestimmen. Man verfährt hierbei so, daß man die Platte P entfernt, die unmittelbar an einander gepreßten Gefäße A und B mit warmem Wasser füllt und, während man den Rührer arbeiten läßt, die Abkühlung bestimmt. Da die beiden Hälften des Apparates sehr nahe gleiche Oberflächen besitzen, so ist die bei dem Vorversuch gefundene Wärmeabgabe an die Umgebung das Doppelte von derjenigen, die bei der Berechnung der eigentlichen Messungen in Betracht kommt. Nachdem dies geschehen, können die definitiven Beobachtungen angestellt werden. Man schaltet zwischen A und B eine Platte P der zu untersuchenden Substanz und läßt in das linke Gefäß Leitungswasser durch L ein, durch M, N ausströmen. Hat das Thermometer T_1 einen constanten Stand angenommen, so füllt man B mit warmem Wasser, setzt die Rührvorrichtung in Bewegung und bestimmt, während die Abkühlung vor sich geht, in geeigneten Zeitabschnitten die Lufttemperatur, die Temperatur ϑ_1 des Kühlwassers und die Temperatur ϑ_2 des warmen Wassers.

Von Herrn Prof. W. Voigt aufgefordert habe ich untersucht, wie man im Einzelnen verfahren muß, wenn man die Beobachtungen nach der oben aufgestellten einfachen Formel berechnen will. Es hat sich mir Folgendes ergeben. Die Grundvoraussetzung der

bezeichneten Formel, daß in der Platte P die Isothermen zur Begrenzung parallele Ebenen sind, ist dann und nur dann erfüllt, wenn der Plattenrand durch Ueberkleben mit Stanniol gegen Wärmeverlust durch Strahlung geschützt wird, und die Stärke des Kühlwasserstromes sowie die des Rührens eine beträchtliche ist. Ferner fand ich, daß die Größen h_1 und h_2 nicht nur von der Temperatur, sondern auch von den beiden letztgenannten Factoren abhängen. Auf Grund dieser Erfahrungen achtete ich bei den Beobachtungen, welche ich mit einander combinierte, darauf, daß die Strömungsgeschwindigkeit des Kühlwassers, sowie die Umdrehungsgeschwindigkeit des Rührers stets gleich stark war, und zwar wurde bei denselben ein Querschnitt der Röhre L in einer Secunde von 47 cm³ Wasser durchflossen, während der Rührer in derselben Zeit 40 Touren machte. Um mich von der Veränderlichkeit der äußeren Wärmeleitungsfähigkeiten h_1, h_2 mit der Temperatur zu befreien, berechnete ich aus meinen Messungen, welche ich an sieben verschieden dicken Spiegelglasplatten anstellte, die Größe

$$\frac{1}{Q}(\vartheta_2 - \vartheta_1)$$

für dieselbe bestimmte Stärke des Wärmestromes Q, nämlich für

$$Q = 0{,}0654 \left[\frac{\text{gr. Tem.}}{\text{sec. cm.}^2}\right].$$

Die Resultate, zu welchen ich gelangte, sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

δ [cm.]	$\frac{1}{Q}(\vartheta_2 - \vartheta_1)\left[\frac{\text{sec. cm.}^2}{\text{gr.}}\right]$	
	beobachtet	berechnet
0,271	155	155
0,287	163	163
0,368	196	194
0,548	269	268
0,647	306	308
0,972	439	439
1,170	521	520.

Aus den Werten der zweiten Columne findet man bei Benutzung der Formel

$$\frac{1}{Q}(\vartheta_2 - \vartheta_1) = \frac{\delta}{k} + \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}$$

für die innere Wärmeleitungsfähigkeit k und die Summe der beiden reciproken äußeren Wärmeleitungsfähigkeiten $\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}$ die Werte

$$k = 0{,}00247 \left[\frac{\text{gr.}}{\text{sec. cm.}}\right],$$

$$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2} = 46{,}0 \left[\frac{\text{sec. cm.}^2}{\text{gr.}}\right].$$

Mit diesen beiden Werten ist die dritte Columne berechnet.

Wie aus der guten Uebereinstimmung der Werte der 2ten und 3ten Columne hervorgeht, kann man bei Anwendung eines geeigneten Verfahrens die angestellten Beobachtungen nach der einfachen Formel für linearen Wärmefluß in der Platte berechnen. Mit Hülfe des beschriebenen Apparates läßt sich also die absolute Wärmeleitungsfähigkeit wenigstens schlecht leitender Körper in einfacher Weise ermitteln.

Universität.

Petsche-Stiftung.

Als Aufgabe zur Erlangung des Preises der Petschestiftung, soweit er diesmal von der Theologischen Fakultät zu verleihen war, (167 M.), hat die Fakultät die folgende gestellt: „Welche Stellung zur Lehre der Kirche hat Priscillian nach seinen neuerdings veröffentlichten Schriften eingenommen?“ — Es ist eine Bearbeitung derselben mit dem Motto: „Ich habs gewagt“ rechtzeitig eingegangen. Der Verfasser dieser Abhandlung hat das Thema nicht ganz dem Sinne desselben entsprechend aufgefaßt und es bei der Untersuchung im einzelnen an der rechten wissenschaftlichen Schärfe in der Bestimmung der zu untersuchenden Begriffe fehlen lassen, auch ist die Darstellungsweise in sprachlicher Hinsicht nicht ohne Mängel. Der Arbeit konnte darum der Preis nicht zuerkannt werden.

Da der Verfasser indessen auf dem von ihm eingeschlagenen Wege das Verhältnis Priscillians zur katholischen Kirche wenigstens in der Hauptsache richtig dargestellt hat, so war von der Fakultät beschlossen, ihm einen Teil des ausgesetzten Preises (120 M.) zu bewilligen, wenn er sich bei dem Dekane meldete. Diese Meldung ist inzwischen erfolgt, und hat ergeben, daß der

Cand. theol. und Stud. hist. H. Rüther aus Nordleda die Arbeit verfaßt hat.

Goettingen, den 1. März 1891.

Der Dekan der Theologischen Fakultät
Dr. K. Knoke.

Für das Jahr 1894 stellt die philosophische Fakultät folgende neue

Beneke'sche philosophische Preisaufgabe:

Der bedeutenden Rolle, die die Sprache der kaiserlichen Kanzlei in der Entstehungsgeschichte der neuhochdeutschen Schriftsprache gespielt hat, entspricht es nicht, daß uns eine zusammenhängende und umfassende philologische Untersuchung jener Sprache bisher noch völlig fehlt. Wir wünschen eine Geschichte der deutschen kaiserlichen Kanzleisprache von ihren Anfängen bis auf Maximilian, die in angemessenen, zeitlich begrenzten Abschnitten das Constante und das Schwankende in den Laut- und Flexionsverhältnissen, sowie möglichst auch in Wortbildung und Wortwahl zur Anschauung bringt und mundartlich erläutert; eine Beschränkung auf das Lautliche würde nicht genügen; Benutzung ungedruckten Materials wird nicht verlangt. Aeußere Verhältnisse, wie der wechselnde Sitz der Kanzlei, Heimat und litterarische Beziehungen der Kaiser und Kanzleivorstände, die Herkunft der Schreiber, der Einfluß wichtiger Reichstage, die etwaige Rücksicht auf die Mundart der Adressaten und ähnliches sind eingehend zu berücksichtigen und darzulegen. Auch das Verhältnis der kaiserlichen Kanzleisprache zu den Anfängen einer oberdeutschen *Κοινή* im 14. und 15. Jahrhundert darf nicht außer Acht bleiben: namentlich wird zu untersuchen sein, ob die Sprache der Nürnberger Kanzlei auf die der kaiserlichen eingewirkt habe, oder umgekehrt.

Erwünscht, wenn auch nicht unerläßlich, ist es endlich, daß an der Sprache der Urkunden und der ältesten Drucke einiger außerbairischen literarischen Centren Süddeutschlands die Bedeutung der kaiserlichen Kanzlei für die Milderung der mundartlichen Gegensätze im 15ten Jahrhundert geprüft werde: neben Nürnberg käme etwa Augsburg, für das Vorarbeiten vorliegen, und Straßburg in Betracht.

Bewerbungsschriften sind in deutscher Sprache abzufassen und bis zum 31. August 1893 mit einem Spruche auf dem Titelblatte an uns einzusenden zusammen mit einem versiegelten Briefe, welcher auf der Außenseite den Spruch der Abhandlung, innen Namen, Stand und Wohnort des Verfassers anzeigt. In anderer Weise darf der Name des Verfassers nicht angegeben sein.

Auf dem Titelblatte der Arbeit muß ferner die Adresse bezeichnet sein, an welches die Arbeit zurückzusenden ist, falls sie nicht preiswürdig befunden wird.

Der erste Preis beträgt 1700 Mk., der zweite 680 Mk.

Die Zuerkennung der Preise erfolgt am 11. März 1894, dem Geburtstage des Stifters, in öffentlicher Sitzung der philosophischen Fakultät zu Göttingen.

Die gekrönten Arbeiten bleiben unbeschränktes Eigenthum der Verfasser.

Die Preisaufgaben, für welche die Bewerbungsschriften bis zum 31. August 1891 und 31. August 1892 einzusenden sind, finden sich in den Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen im Jahrgang 1889 Seite 345 und 1890 Seite 151.

Göttingen d. 1. April 1890.

Die philosophische Fakultät.

Der Dekan

A. von Koenen.

Preisaufgaben der **Wedekindschen Preisstiftung** für Deutsche Geschichte.

Wiederholt aus Nr. 4 der Nachrichten vom Jahr 1887 S. 69 ff.

Der Verwaltungsrath der Wedekindschen Preisstiftung für Deutsche Geschichte macht hierdurch die Aufgaben bekannt, welche von ihm für den fünften Verwaltungszeitraum, vom 14. März 1886 bis zum 14. März 1896, nach den Ordnungen der Stiftung (§ 20) gestellt werden.

Für den ersten Preis

wiederholt der Verwaltungsrath die für den vorigen Verwaltungs-

zeitraum gestellte Aufgabe: er verlangt eine allen Anforderungen der Wissenschaft entsprechende Ausgabe der von dem Mainzer **Eberhard Windeck** verfaßten **Denkwürdigkeiten über Leben und Zeit Kaiser Sigismunds.**

Es gilt den völlig werthlosen und unbrauchbaren Abdruck bei Mencken durch eine nach Seite der Sprache wie des Inhalts gleich tüchtige Ausgabe zu ersetzen.

Nach den älteren Vorarbeiten von Dümgé, Mone, Aschbach, Droysen hat neuerdings v. Hagen in der Einleitung zu seiner Uebersetzung (Geschichtschreiber der deutschen Vorzeit, Lief. 79. Leipzig 1886) über das Verhältniß von dreien der wichtigsten Handschriften (Gotha, Cheltenham, Hannover) zu einander gehandelt und danach zwei von dem Verfasser selbst herrührende Redactionen unterschieden, auch die Annahme abgewiesen, daß die Handschrift zu Cheltenham ein Original sei. Für den Bearbeiter ist die Heranziehung der anderen bekannten und von v. Hagen S. VII, Anm. 2 aufgeführten Hdsch. schon deßhalb erforderlich, um die Richtigkeit der Aufstellung v. Hagen's zu prüfen und festzustellen, ob etwa noch mehr als zwei Ausgaben des Werkes vorliegen.

Von den drei im Archiv III, 429 verzeichneten Vaticanischen Hdsch. wird der Verwaltungsrath demnächst Beschreibungen anfertigen lassen, welche ihre Classificirung ermöglichen. Diese Beschreibungen sollen dem Bearbeiter durch Vermittelung der Verwaltung der Kgl. Universitätsbibliothek zur Verfügung stehen. Von der Heranziehung dieser drei Hdsch. zur Textconstitution glaubt der Verwaltungsrath im übrigen den Bearbeiter befreien zu sollen[1]).

Bei der Bearbeitung des Textes wird es vor allem darauf ankommen, daß die von dem Verfasser herrührenden Unterschiede der verschiedenen Redactionen klar und übersichtlich zur Erscheinung kommen, davon auch äußerlich dasjenige geschieden und gekennzeichnet werde, was etwa fremder Ueberarbeitung seinen Ursprung verdankt. Die originalen Rubriken und Capitelüberschriften sind in die Ausgabe aufzunehmen.

Die Urkunden und Aktenstücke aller Art, welche dem Werke zahlreich eingefügt sind, erfordern genaue Untersuchung in Bezug auf Herkunft, Wiedergabe und anderweitige Benutzung. Sind von denselben abweichende Texte oder die Originale bekannt, so ist darauf in den Anmerkungen hinzuweisen, geeigneten Falls der

1) Vgl. den Bericht über diese Hss. in den Nachrichten 1888 S. 11 ff.

abweichende Text zum Abdruck in der Anmerkung zu bringen. Desgleichen ist wenigstens annäherungsweise der Versuch zu machen für die rein erzählenden Theile Ursprung oder Quelle beizubringen, namentlich in Bezug auf An- und Abwesenheit des Verfassers. Es darf dem Text an Erläuterung in sprachlicher und sachlicher Hinsicht nicht fehlen.

Die Einleitung soll sowohl die bei der Untersuchung und Herstellung des Textes befolgte Methode klarlegen, als auch eine eingehende Erörterung über die Lebensschicksale des Verfassers, die Beziehungen zu seiner Vaterstadt, seine Reisen, sein Verhältniß zum Kaiser und anderen namhaften Zeitgenossen, seine übrigen Werke in Prosa und Dichtung geben.

Die sprachliche Behandlung des Textes hat sich, falls nicht etwa eine Originalhandschrift auftauchen sollte, nach den von Weizsäcker im I. Bande der Reichstagsakten für die Vereinfachung der Schreibung spätmittelalterlicher deutscher Texte aufgestellten Grundsätzen zu richten.

Der Ausgabe ist ein Wortverzeichniß, entsprechend demjenigen des 1. Bandes der Mainzer Chroniken (Städtechroniken Bd. XVII), sowie ein ungetrenntes Verzeichniß der Personen- und Ortsnamen beizufügen.

Von der Cheltenhamer Handschrift befindet sich eine genaue Abschrift auf der Kgl. Universitätsbibliothek, welche bereitwilligst von der Bibliotheksverwaltung zur Benutzung ausgeliehen wird.

Für den zweiten Preis

schreibt der Verwaltungsrath

eine Geschichte des Herzogthums Schwaben vom Beginn des 10. bis in die zweite Hälfte des 13. Jahrhunderts

aus.

Nach einem einleitenden Rückblicke auf die karolingische Zeit ist der Schwerpunkt der Arbeit in die Verfassungsgeschichte des bezeichneten Zeitraums zu legen, da die politische Geschichte Schwabens zur Genüge behandelt worden ist. Das schwäbische Herzogthum ist in seiner Entwicklung bis zur Auflösung zu verfolgen, sein Verhältnis zu der königlichen Gewalt einerseits, wie zu den Bisthümern, Grafschaften, Herrschaften und Städten andererseits darzulegen. Nach der gründlichen und erschöpfenden Untersuchung des Einzelnen erwartet der Verwaltungsrath eine zusammenfassende Darstellung der Ergebnisse der Untersuchung. Neben den Nachrichten der Geschichtschreiber hat der Bearbeiter

dem reichen Urkundenmaterial eingehendste Aufmerksamkeit zu widmen und es nach allen Richtungen für den bezeichneten Zweck auszubeuten. Als Beilage der Arbeit wünscht der Verwaltungsrath Regesten der Urkunden, an welchen die Herzöge von Schwaben in irgend einer Eigenschaft betheiligt sind oder in welchen sie Erwähnung finden.

In Beziehung auf die Bewerbung um diese Preise, die Ertheilung des dritten Preises und die Rechte der Preisgewinnenden wird aus den Ordnungen der Stiftung Folgendes wiederholt:

1. **Ueber die zwei ersten Preise.** Die Arbeiten können in deutscher oder lateinischer Sprache abgefaßt sein.

Jeder dieser Preise beträgt 1000 Thaler in Gold (3300 Reichsmark) und muß jedesmal ganz, oder kann gar nicht zuerkannt werden.

2. **Ueber den dritten Preis.** Für den dritten Preis wird keine bestimmte Aufgabe ausgeschrieben, sondern die Wahl des Stoffes bleibt den Bewerbern nach Maßgabe der folgenden Bestimmungen überlassen.

Vorzugsweise verlangt der Stifter für denselben ein deutsch geschriebenes Geschichtsbuch, für welches sorgfältige und geprüfte Zusammenstellung der Thatsachen zur ersten, und Kunst der Darstellung zur zweiten Hauptbedingung gemacht wird. Es ist aber damit nicht bloß eine gut geschriebene historische Abhandlung, sondern ein umfassendes historisches Werk gemeint. Speciallandesgeschichten sind nicht ausgeschlossen, doch werden vorzugsweise nur diejenigen der größten (15) deutschen Staaten berücksichtigt.

Zur Erlangung des Preises sind die zu diesem Zwecke handschriftlich eingeschickten Arbeiten und die von dem Einsendungstage des vorigen Verwaltungszeitraums bis zu demselben Tage des laufenden Zeitraums (dem 14. März des neunten Jahres) gedruckt erschienenen Werke dieser Art gleichmäßig berechtigt. Dabei findet indessen der Unterschied statt, daß die ersteren, sofern sie in das Eigenthum der Stiftung übergehen, den vollen Preis von 1000 Thalern in Gold, die bereits gedruckten aber, welche Eigenthum des Verfassers bleiben, oder über welche als sein Eigenthum er bereits verfügt hat, die Hälfte des Preises mit 500 Thalern Gold empfangen.

Wenn keine preiswürdigen Schriften der bezeichneten Art vor-

handen sind, so darf der dritte Preis angewendet werden, um die Verfasser solcher Schriften zu belohnen, welche durch Entdeckung und zweckmäßige Bearbeitung unbekannter oder unbenutzter historischer Quellen, Denkmäler und Urkundensammlungen sich um die deutsche Geschichte verdient gemacht haben. Solchen Schriften darf aber nur die Hälfte des Preises zuerkannt werden.

Es steht Jedem frei, für diesen zweiten Fall Werke der bezeichneten Art auch handschriftlich einzusenden. Mit denselben sind aber ebenfalls alle gleichartigen Werke, welche vor dem Einsendungstage des laufenden Zeitraums gedruckt erschienen sind, für diesen Preis gleich berechtigt. Wird ein handschriftliches Werk gekrönt, so erhält dasselbe einen Preis von 500 Thalern in Gold; gedruckt erschienenen Schriften können nach dem Grade ihrer Bedeutung Preise von 250 Thlr. oder 500 Thlr. Gold zuerkannt werden.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich von selbst, daß der dritte Preis auch Mehreren zugleich zu Theil werden kann.

3. **Rechte der Erben der gekrönten Schriftsteller.** Sämmtliche Preise fallen, wenn die Verfasser der Preisschriften bereits gestorben sein sollten, deren Erben zu. Der dritte Preis kann auch gedruckten Schriften zuerkannt werden, deren Verfasser schon gestorben sind, und fällt alsdann den Erben derselben zu.

4. **Form der Preisschriften und ihrer Einsendung.** Bei den handschriftlichen Werken, welche sich um die beiden ersten Preise bewerben, müssen alle äußeren Zeichen vermieden werden, an welchen die Verfasser erkannt werden können. Wird ein Verfasser durch eigene Schuld erkannt, so ist seine Schrift zur Preisbewerbung nicht mehr zulässig. Daher wird ein jeder, der nicht gewiß sein kann, daß seine Handschrift den Preisrichtern unbekannt ist, wohlthun, sein Werk von fremder Hand abschreiben zu lassen. Jede Schrift ist mit einem Sinnspruche zu versehen, und es ist derselben ein versiegelter Zettel beizulegen, auf dessen Außenseite derselbe Sinnspruch sich findet, während inwendig Name, Stand und Wohnort des Verfassers angegeben sind.

Die handschriftlichen Werke, welche sich um den dritten Preis bewerben, können mit dem Namen des Verfassers versehen, oder ohne denselben eingesandt werden.

Alle diese Schriften müssen im Laufe des neunten Jahres, vor dem 14. März 1896, mit dem das zehnte Jahr beginnt, dem Direktor zugesendet sein, welcher auf Verlangen an die Vermittler der Uebersendung Empfangsbescheinigungen auszustellen hat.

5. **Ueber Zulässigkeit zur Preisbewerbung.** Die Mitglieder

der Königlichen Societät, welche nicht zum Preisgerichte gehören, dürfen sich wie jeder Andere um alle Preise bewerben. Dagegen leisten die Mitglieder des Preisgerichts auf jede Preisbewerbung Verzicht.

6. **Verkündigung der Preise.** An dem 14. März, mit welchem der neue Verwaltungszeitraum beginnt, werden in einer Sitzung der Societät die Berichte über die Preisarbeiten vorgetragen, die Zettel, welche zu den gekrönten Schriften gehören, eröffnet, und die Namen der Sieger verkündet, die übrigen Zettel aber verbrannt. Jene Berichte werden in den Nachrichten über die Königliche Societät, dem Beiblatte der Göttingischen gelehrten Anzeigen, abgedruckt. Die Verfasser der gekrönten Schriften oder deren Erben werden noch besonders durch den Direktor von den ihnen zugefallenen Preisen benachrichtigt, und können dieselben bei dem letzteren gegen Quittung sogleich in Empfang nehmen.

7. **Zurückforderung der nicht gekrönten Schriften.** Die Verfasser der nicht gekrönten Schriften können dieselben unter Angabe ihres Sinnspruches und Einsendung des etwa erhaltenen Empfangsscheines innerhalb eines halben Jahres zurückfordern oder zurückfordern lassen. Sofern sich innerhalb dieses halben Jahres kein Anstand ergiebt, werden dieselben am 14. October von dem Direktor den zur Empfangnahme bezeichneten Personen portofrei zugesendet. Nach Ablauf dieser Frist ist das Recht zur Zurückforderung erloschen.

8. **Druck der Preisschriften.** Die handschriftlichen Werke, welche den Preis erhalten haben, gehen in das Eigenthum der Stiftung für diejenige Zeit über, in welcher dasselbe den Verfassern und deren Erben gesetzlich zustehen würde. Der Verwaltungsrath wird dieselben einem Verleger gegen einen Ehrensold überlassen oder, wenn sich ein solcher nicht findet, auf Kosten der Stiftung drucken lassen, und in diesem letzteren Falle den Vertrieb einer zuverlässigen und thätigen Buchhandlung übertragen. Die Aufsicht über Verlag und Verkauf führt der Direktor.

Der Ertrag der ersten Auflage, welche ausschließlich der Freiexemplare höchstens 1000 Exemplare stark sein darf, fällt dem verfügbaren Capitale zu, da der Verfasser den erhaltenen Preis als sein Honorar zu betrachten hat. Wenn indessen jener Ertrag ungewöhnlich groß ist, d. h. wenn derselbe die Druckkosten um das Doppelte übersteigt, so wird die Königliche Societät auf den Vortrag des Verwaltungsrathes erwägen, ob dem Verfasser nicht eine außerordentliche Vergeltung zuzubilligen sei.

Findet die Königliche Societät fernere Auflagen erforderlich,

so wird sie den Verfasser oder, falls derselbe nicht mehr leben sollte, einen andern dazu geeigneten Gelehrten zur Bearbeitung derselben veranlassen. Der reine Ertrag der neuen Auflagen soll alsdann zu außerordentlichen Bewilligungen für den Verfasser, oder, falls derselbe verstorben ist, für dessen Erben, und den neuen Bearbeiter nach einem von der Königlichen Societät festzustellenden Verhältnisse bestimmt werden.

9. **Bemerkung auf dem Titel derselben.** Jede von der Stiftung gekrönte und herausgegebene Schrift wird auf dem Titel die Bemerkung haben:

> Von der Königlichen Societät der Wissenschaften in Göttingen mit einem Wedekindschen Preise gekrönt und herausgegeben.

10. **Freiexemplare.** Von den Preisschriften, welche die Stiftung herausgiebt, erhalten die Verfasser je zehn Freiexemplare.

Göttingen, den 14. März 1887.

Der Verwaltungsrath der Wedekindschen Preisstiftung.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

August, September und Oktober 1890.

(Fortsetzung.)

John Hopkins University:
a. American Journal of mathematics. Vol. XII. No. 3. 4. Baltimore 1890.
b. Studies in historical and political science. Eighth Series 1/2. 3. 4. Ebd. 1890.
Transactions of the Wagner Free Institute of science of Philadelphia. Vol. III. August 1890. Philadelphia.
The Charlemagne Tower Collection of American colonial laws. Ebd. 1890.
Proceedings of the Academy of natural sciences of Philadelphia. Part 1. Jan. —March 1890. Philadelphia 1890.
Proceedings of the American philosophical Society. Vol. XXVII. No. 131. Vol. XXVIII. No. 132. 133. Ebd. 1889. 90.
26th annual report of the Alumni Association ... for the year 1889—90. Ebd. 1890.
Proceedings of the American Academy of arts and sciences. New series. Vol. XVI. (Whole series vol. XXIV). From May 1888 to May 1889. Boston 1889.
Publications of the Washburn Observatory. Vol. VI. Part 1/2. Madison. Wis. 1890.
Annales de la Oficina meteorológica Argentina. Tomo VII. Buenos Aires 1889.
Annales de la Sociedad científica Argentina. Tomo XXX. 1890. Entr. 1, 2 u. Suppl., 3. Nebst: Indice general de las volúmenes I á XXIX. 1876—89. Ebd. 1890.
Actas de la Academia nacional de ciencias de la República Argentina en Cordoba. Tomo VI mit Atlas. Ebd. 1889.

Mittheilungen des Deutschen wissenschaftl. Vereins in Mexico. 1. Bd. 2. Heft. Mexico 1890.
Verhandlungen des Deutschen wissenschaftl. Vereins zu Santiago. 2. Bd. 2. Hft. Santiago 1890.
Mittheilungen der Deutschen Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokio. 44. Heft. (Bd. 5 Seite 149—189.) Yokohama (u. Berlin) (1890).
Acta historica res gestas Poloniae illustrantia ab anno 1507 usque ad annum 1795. Tom. XII. Cracoviae 1890.
Akademya umiejętności w Krakowie.
Sprawozdanie komisyi fizyjograficznej. Tom. 22—24. Kraków 1888. 89.
Pamiętnik a. Wydziały: Filologiczny i historyczno-filozoficzny. Tom. VII. Ebd. 1889.
b. Wydział Matematyczno-przyrodniczy. Tom. XVI. XVII. Ebd. 1889. 90.
Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń Akademii umiejętności.
a. Wydziału historyczno-filozoficznego. Tom. 22—24. Ebd. 1888. 89.
b. — matematyczno-przyrodniczego. Tom. 19. 20. Ebd. 1889. 90.
c. — filologicznego. Tom. 13. Ebd. 1889.
Rocznik zarządu Akademii umiejętności w Krakowie. Rok 1888. Ebd. 1889.
Starodawne prawa Polskiego pomniki. Tom. IX. X. Część I. Ebd. 1888. 89.
Scriptores rerum Polonicarum. Tom. XIII. XIV. Ebd. 1889.
Archiwum do dziejów literatury i oświaty w Polsce. Tom. VI. Ebd. 1890.
Zbiór wiadomości do antropologii Krakowej. Tom. XIII. Ebd. 1889.
Sprawozdania komisyi do badania historyi sztuki w Polsce. Tom. IV. Zeszyt 1. 2. 3. Ebd. 1889.
Atlas geologiczny Galicyi. Zeszyt 1. 2 nebst Karten. Ebd. 1887. 88.
Biblijoteka pisarzów Polskich. 8 Hefte. Ebd. 1889. 90.
Magyar tudományos Akademia:
Almanach 1890. Budapest 1890.
Évkönyv. (Jahrbuch). XVII. Köt. 7. Darab. Ebd. 1889.
Értesítö (Sitzungsberichte). (XIII.) 1889, 2—5. 1890. Füz. 1—5 (Jan.-Május). Ebd. 1889. 90.
Emlékbeszédek (Gedenkreden). V. Köt. 9. 10. Szám. VI. Köt. 1.—7. Szám. Ebd. 1889. 90.
Nyelvtudományi Értekezések (Sprachwissenschaftliche Abhandlungen). XIV. Köt. 11. 12. Szám. XV. Köt. 1.—5. Szam. Ebd. 1889. 90.
Sexti Pompei Festi de verborum significatu quae supersunt cum Pauli epitome ed. Aem. Thewrewk. Pars I. Ebd. 1889.
Simonyi Zsigmond: A magyar határozók. (Die Bestimmungsworte im Ungarischen). I, 2. Ebd. 1890.
Nyelvtudományi Közlemények. (Philolog. Mittheilungen). XXI. Köt. 3.—6. Füz. Ebd. 1889. 90.
Kúnos Ignacz: Oszmán-török népköltési gyüjtemény. (Sammlung osmano-türkischer Volksdichtungen). II. Köt. Ebd. 1889.
Abel Jenö: Magyarországi tanulók külföldön. (Studierende aus Ungarn im Auslande). I. Ebd. 1890.
Történettudományi Értekezések. (Historische Abhandlungen). XIV. Köt. 5.—9. Szám. Ebd. 1889. 90.
Társadalmi Értekezések. (Sozialwissenschaftl. Abhandlungen). X. Köt. 3. 5.—10. Szám. Ebd. 1889. 90.

(Fortsetzung folgt.)

Inhalt von Nr. 3.

F. Kielhorn, die Colebrookeschen Pânini-Handschriften der Königlichen Bibliothek zu Göttingen. — *Gustav Tammann*, über die Stromleitung durch Niederschlagsmembranen. — *O. Venske*, über einen neuen Apparat zur Bestimmung der inneren Wärmeleitungsfähigkeit schlecht leitender Körper in absolutem Masse. — Petsche-Stiftung. — Benekesche philosophische Preisaufgabe. — Preisaufgaben der Wedekindschen Preisstiftung für Deutsche Geschichte. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretär d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

3. Juni. **№ 4.** 1891.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 2. Mai.

Schwarz legt einen Aufsatz des Herrn Julius Petersen in Kopenhagen vor: „Ueber Normalformen mehrfach zusammenhängender Flächen."

Voigt legte einen Aufsatz des Herrn Dr. O. Venske vor: „Ueber einen neuen Apparat zur Bestimmung der inneren Wärmeleitungsfähigkeit schlecht leitender Körper in absolutem Maaße".

de Lagarde zeigt schriftlich an

1. für die Nachrichten:
   a. „Thevenot's caffarre."
   b. „Ueber das aramäische Evangeliar des Vatican."
   c. „Neue Ausgabe der διατάξεις τῶν ἀποστόλων und der drei Gestalten der Clementinen."
2. für die Abhandlungen (Band 38): „Septuagintastudien, 5. Stück."

Thevenots caffarre.

Von

Paul de Lagarde.

In meiner Uebersicht 89₃ 229—237 habe ich 1890 dargethan, daß כפרת dem arabischen غِطَاء entspricht. Es war gewis ein Beweis, wie wenig sachverständig die Lexikographen des jüdischen Canons und die über die Theologie des alten Testaments schreibenden Leute sind, daß sie diese Gleichung nicht gekannt haben.

ARitschl hob 1870 sein erstes größeres Werk mit dem Satze an

> Die christliche Lehre von der Rechtfertigung und Versöhnung bildet die concrete Mitte des theologischen Systems.

In der Vorrede hatte er versichert, schon als Student darüber klar geworden zu sein, daß er

> für seine theologische Bildung vor Allem des Verständnisses der christlichen Idee der Versöhnung bedürfe.

Er hat später

> mit der nothwendigen biblisch-theologischen Substruction die dogmatische Darstellung der bezeichneten Lehren

unternommen.

Die ihm gelieferte „Substruction" — trotz meiner Warnung hat er sich mit ihr begnügt — hatte selbst noch eine „Substruction" nöthig: denn כִּפֻּרִים ist kein Begriff des Mosaismus, sondern, weil Arabern und Juden gemeinsam, ein Begriff des Semitismus, der von der „Offenbarung" umgebildet worden sein kann (ob und wie das geschehen, bleibt zu untersuchen), der aber von vorne herein der „Offenbarung" nicht angehörte.

Dem für meine Arbeiten leider in Betracht kommenden Personale gegenüber ist nöthig, immer aufs Neue zu sagen, daß wie jedes Essen ein Verdauen zur Folge hat, so jede Aneignung eines Wortes eine Deutung dieses Wortes, jede Aneignung einer Anschauung eine Umbildung dieser Anschauung nach sich zieht. Ich verbitte mir die Verleumdung oder aber die Dummheit, welche glauben machen will, daß ich bei irgend einem Worte alter Zeit, wenn noch die neue Zeit es braucht, mit dem Worte ohne Weiteres in historischen Zeiten den ursprünglichen Begriff verbunden glaube.

Drei mal bin ich zu Ostern in Rom gewesen, und habe auf dem Pincio und auf der Salita di S. Onofrio den Iudasbaum blühen sehen. Der Baum heißt bei uns so, weil Iudas sich an ihm erhenkte, und er aus Scham über die Berührung des Verräthers über und über roth wurde. Ich wußte durch ChIosJagemann, daß er auf italiänisch albero di San Giuseppe genannt wird: näheres über diesen Namen zu erfahren begierig, fragte ich oft, aber nicht suggestiv, wie der dort blühende Baum heiße. Rothe Acacie oder Oleander, antworteten die „Gebildeten", denen die Tracht des in Rede stehenden Beschämten nicht anders vorkam als die der rothen Acacie oder des Oleander. Endlich jetzt nannte ihn mir am 26 April 1891 auf dem Gianicolo ein Gärtner Scielsine sine quastume: der Mann buchstabierte auf meine Bitte den Namen, der aus drei Worten bestehe. Da hat Cercis siliquastrum den albero di San Giuseppe verdrängt. Scielsine aus Cercide: κερκίς hat κερκίδος.

Da hat ein neuer fremder Name den alten heimischen Namen verdrängt: die Sache ist dieselbe geblieben. Wir Deutschen (mit Ausnahmen natürlich) erzählen die Sage noch, die den Baum mit Iudas in Beziehung setzt: kein mir in den Weg gelaufener Italiäner kannte auch nur den Namen albero di San Giuseppe, geschweige, daß er die dazu gehörige Sage gekannt hätte.

Am 5 Januar 1891 verlangte in meiner Gegenwart in der Goettinger Universitätsapotheke eine Arbeiterfrau gegen den Husten ihres Knaben Fuchslungensaft und Schneckensaft: sie erhielt Lakrizen und Eibisch.

Da haben also früher unbekannte Arzneien die Namen in alter Zeit geschätzter Arzneimittel zu führen lernen müssen. Wir haben da alte Worte für neue Dinge.

Dies ist als Ergänzung des in meiner Uebersicht ad vocem מְחִיר Vorgetragenen, aber auch für die Religionsgeschichte, zu brauchen, in der Aehnliches vorkommt. Vergleiche meine Beiträge zur baktrischen Lexikographie 28, wo nachgewiesen wird, daß ein und dasselbe Wort Regenwasser, Kuhharn, Seifenkraut bedeutet hat. Vergleiche auch was CdeHarlez JAP 1879 1 161 auseinandersetzt.

Ich habe im Register zu meiner Uebersicht 69 aus Thevenot angeführt, daß „caffarre" eine Uebergangsgebühr bezeichne, und habe das gleichbedeutende gáffar Seetzens für identisch mit Thevenots caffárre erklärt.

Letzteres ist falsch. Herr Professor Albert Socin wies mich unter dem 11 April 1891 auf Dozy unter غفر und auf Berggrens Guide français-arabe unter péage غفر ghâffar hin, womit Burckhardts Reisen in Syrien 553 غفر „Steuer" zu vergleichen seien. Er hätte noch aus FrCañes anführen können

> peage el tributo que se paga por pasar algun puente ó barca غفر:

wer den ġafar bezahlt, وفى: wer ihn auferlegt, وضع. Entsprechend Cañes unter pontage pontazgo. ECastle 2847 غفر = vectigal, ital. gabello [so]: über gabella die von HvKap-herr in der Zeitschrift für Geschichtswissenschaft 1891 $_{88}$ r citierten Stellen. Dies غفر erwähnt EWLane nicht: es gehört also der Volkssprache an, und ist gerade darum werthvoll: عامة ist mehr als لغة.

Daß غفر existiert, ist mithin sicher. Da das Zeitwort غفر *vergab* bedeutet, ist auch dies غفر für die Theologen von Wichtigkeit. Mir ist lieb, daß die nothwendige Berichtigung einer meiner Aussagen darauf hinweist, daß solche Dinge nur in großem Zusammenhange besprochen werden dürfen.

Thevenot (geboren 7. 6. 1633, † zu Miana, dreißig Stunden vor Tabrîz, 28. 11. 1667) behandelt kaffarre als Femininum: und sprach das Wort natürlich nach Analogie von bizarre. R double (lehrt die Académie française) se prononce comme si elle était simple: die drei Arten Ausnahmen, die diese Regel erleidet, treffen auf kaffarre nicht zu. Thevenot, ein sehr sorgsamer Mann, braucht ein Femininum caffarre wiederholentlich: wer französisch versteht, weiß, daß caffarre den Ton nur auf dem zweiten a gehabt haben kann. Bis auf Weiteres wird also kaffâre als Synonymum von ġafar zu gelten haben: doch werden die Theologen gut thun, vorläufig für sich als Gebühr für das Recht einen Fluß oder eine Brücke zu überschreiten nur ġafar zu verwenden. Was in der Uebersicht 229—237 steht, wird von der Beantwortung der Frage ob kaffârat neben ġafar vorkommt, oder aus ġafar nur verhört ist, nicht berührt. Der Interprète du Roi La Croix Paitis (oder de la Croix) bezeugt von Thevenot (es ist nicht ohne Werth dies hier zu wiederholen) vor dem zweiten Bande des Voyage de Levant

> Ces trois langues [Turquesque, Arabesque et Persienne] qu'il possedoit si bien, ... l'avoient rendu si profond dans toute cette erudition Orientale ....
>
> On ne doit pas se formaliser si l'on trouve quelque diversité de prononciation és mots Orientaux dans ce Livre, principalement lors qu'il est question de Voyelles ou des Consones Kha, hha, Kef et quelques autres: La différence des Païs fait qu'elles sont diversement prononcées; en des lieux l'on prononce Naméh, Bender et Bazerghian, et en d'autres Namah, Bendar, Bazerghion: les uns disent Kher et les autres Hher, les uns Gomron, les autres Komoron, et il en est ainsi de beaucoup d'autres; mais les lettres figuratives se rencontrent toûjours aux uns et aux autres mots.

Was doch wohl beweist, daß Thevenot auf den Klang der Worte aufmerkte.

Man wird übrigens nicht vergessen dürfen, daß Numeri 15_{30} eine Versöhnung für die בְּיָד רָמָה begangenen Sünden nicht kennt. Es muß allerdings erst untersucht werden, ob Leviticus die Sache ebenso ansieht wie Numeri, und ob die Gesammtanschauung, die Israeliten und Semiten von der Schuld hatten, das Numeri 15_{30} Ausgesprochene für ein Princip zu halten gestattet. Bis auf Weiteres wird aber behauptet werden dürfen, daß das Opfer sich nur auf בִּשְׁגָגָה begangene Verfehlungen beziehen durfte. Dann ist aber das Opfer nichts wesentlich Anderes als was das Recht Europas Recognitionsgebühr nennt. Wer zum Beispiel einen Wasserlauf

aus seinem Gebiete unter einer öffentlichen Straße durchleitet, zahlt eine solche Gebühr, meist geringen Betrages, nur zu dem Erweise, daß er durch seine Leitung nicht ein Recht ausübt, sondern eine widerrufbare Vergünstigung genießt: es ist so eine Form gefunden, unter der als Ein Recht verstattet wird was Das Recht verbietet. Empörung gegen den König Gott ist unverzeihlich: wer aus Irrrthum sündigt oder aus Leichtsinn, hat nur das dominium als dominium anzuerkennen, um straflos auszugehn. סְלַח־נָא = indulge: das Opfer des alten Testaments ist in der Kirche durch die indulgentiae vertreten: es wird nicht Sünde gesühnt, sondern die fällige Strafe der Sünde in Folge einer Satisfactio erlassen. Gesühnt wird durch das Anerkenntnis gefehlt zu haben nichts: Iohannes α 1₉. Das Opfer als כִּפֻּרֶת erkennt die Thatsache an, daß man durch die mittelst des Opfers zuzudeckende Handlung nicht hat die Rechtsordnung stören wollen: weiter thut es nichts. Die semitische Anschauung von der kaffârat = כִּפֻּרֶת faßt die sühnbare Sünde als etwas nicht Erhebliches, also nicht eigentlich als Sünde, und kennt auch nicht sühnbare Sünden. Daß die Kirche die Sache nicht ebenso ansieht, daß kein das Leben kennender Mensch sie so ansehen darf, liegt auf der Hand. Dogmatiker werden daher gut thun, ihre Urtheilsfähigkeit nicht entweder dadurch in übles Licht zu rücken, daß sie die christliche Anschauung für identisch mit der des alten Testaments und der Semiten halten, oder aber dadurch, daß sie objektive Unwerthe wie die Sünde durch eines, nur in Folge eines Werthurtheils geltenden, Menschen Tod beseitigen zu können meinen: es handelt sich nicht um „Zudecken", sondern um Vernichten der Schuld, vor Allem aber um Vernichtung der Sünde, aus der die Schuld immer von Neuem emporwächst. Deutsche Schriften 58. Mit dem von RALipsius in dem theologischen Jahresberichte für 1883 auf Seite 272 ff. über Ritschls Theologie Vorgetragenen bin ich einverstanden.

So leicht wird jetzt niemand der mitzureden befugt ist, semitisches Wesen aus indoceltischen Texten und Sprachen erklären: Creuzer und Bähr, die in meiner Studentenzeit noch Auctoritäten waren, sind beseitigt. Aber was der Linguist und der Historiker nicht darf, darf mit Vorsicht der Psychologe. So setze ich aus der Zeitschrift für deutsches Alterthum und deutsche Litteratur 35 262 her was mir während mein Aufsatz im Drucke ist, durch Edward Schröders Güte zugeht:

> Im gotischen ist gilstr zahlung abgabe, während die altertümlichere bedeutung opfer bei ahd. gelstar erhalten ist.

Das opfer wird als eine abgabe aufgefaßt, oder richtiger: es ist die älteste form der abgabe.

In den deutschen Schriften 379 385 unterscheide ich zwischen Steuern und Gebühren: Ulfilas Rom. 13 6 gilstr φόρος, Lucas 2 1 gilstrameleins ἀπογραφή. Jedermann verständlich gild φόρος Lucas 20 22, kaisaragild κῆνσος [ἐπικεφάλαιον?] Marcus 12 14. Vergelten, entgelten.

Ignoscere heißt „nicht kennen“: die romanischen Sprachen haben ignoscere durch pardonner und dessen Schwestern, also durch eine romanische Uebertragung des deutschen vergeben ersetzt, offenbar doch, weil sie eine andere Grundanschauung über die zu bezeichnende Sache hegten als die Römer: 1863 zu Proverb. 22 21 (Seite 73).

Das aramäische Evangeliar des Vatican.

Das aramäische Evangeliar des Vatican ist durch den Catalog der Bibliotheca vaticana 1 2 70–103 seit 1758 bekannt, durch Iac GeChrAdlers Aufsatz in meines Vorgängers IDMichaelis Bibliothek 19 126—131, durch desselben Gelehrten biblisch-kritische Reise nach Rom 118—127 und sein Buch novi testamenti versiones syriacae 135—202 in den Jahren 1782 1783 1789 bekannter geworden. Der Graf Francisco Miniscalchi-Erizzo hat es 1861 ganz gedruckt, und 1863 mit einem Glossare und anderen Zuthaten versehen, Herr Theodor Noeldeke hat 1868 ZDMG 22 443—527 über den in ihm gebrauchten Dialect in einem sehr fleißigen Aufsatze Auskunft gegeben.

Ein Evangeliar ist ein Buch, in dem die für die kirchliche Lesung bestimmten Abschnitte der Evangelien in der Reihenfolge der Festtage des Kirchenjahrs zusammengeschrieben oder aber -gedruckt sind. Es erhellt, daß man eine Stelle der Evangelien in einem solchen Buche nur findet, wenn man den Sonn- oder Feiertag kennt, an dem sie in den Kirchen gelesen wird. Ein Register kann das Finden erleichtern: immer sind von dem zur Benutzung eines Registers Gezwungenen zwei Stellen eines Evangeliars nachzuschlagen, nicht Eine, wann er es für die Zwecke der Grammatik, des Lexicons, der Kritik des Textes benutzen will.

Ich habe mir daher im Sommer 1877 eine Abschrift jenes Evangeliars gemacht, in der die Perikopen nach der Folge unserer Bibeln stehn. Hätte ich gewußt, daß ich je meine Abschrift mit dem Codex der Vaticana werde vergleichen können, so hätte ich mir viel Zeit und Mühe dadurch erspart, daß ich Miniscalchis nur auf der Einen Seite syrisch bedrucktes Werk zerschnitten und

die Perikopen in der mir meine Arbeiten erleichternden Folge aufgeklebt hätte.

Da ich nach EBertheaus Tode mich zum Semitisten umarbeiten mußte, habe ich meine Abschrift, nachdem ich sie mit dem Originale verglichen hätte, in meiner Bibliotheca Syriaca zu drucken beschlossen: denn der Dialekt, den das Buch zeigt, ist wichtig. Ich habe allerdings auch die Absicht, durch meine Arbeit die Urkunde für die Kritik des Evangelientextes nutzbar zu machen: denn wenn auch der Gunst der ersten Facultäten mich nicht erfreuend, fühle ich mich doch stets als Theologe.

Ich bin deshalb den October 1890 wie den März und April 1891 in Rom gewesen, und werde im October 1891, um die Vergleichung zu Ende zu führen, noch einmal nach Rom müssen.

Da die für die Benutzung meiner Arbeit in Betracht kommenden Personen theils schwer von Begriffen sind, theils absichtlich misverstehn, gebe ich ein Jahr vor der Zeit, in der mein Band erscheinen kann, eine kurze Notiz, um jene an das Verstehn des Buchs zu gewöhnen, diesen das Geltendmachen ihrer „Misverständnisse" zu verleiden.

Die Handschrift ist nach 194^4 = BS 276 vom Schreiber حسب طاقته (so gut wie sein Können es ihm gestattete) geschrieben worden. Schwiegersohn eines Oberen konnte ein Klosterbruder nicht sein, noch auch so leicht Sohn desselben: folglich wird man ihn wohl für das ihm aufgetragene (schwere) Geschäft wirklich tauglich gehalten haben: der Augenschein lehrt, daß der Abt sich in ihm nicht geirrt hatte, und dies festzustellen ist Pflicht. Daß der Mann die ihm zugemuthete Arbeit ungerne übernommen hat, und daß er bescheiden dachte, folgt mir daraus, daß er ausdrücklich sie als حسب طاقته ausgeführt bezeichnet.

Ich habe Grund zu der Annahme, daß der Schreiber nicht den Befehl bekommen hat, ein älteres Evangeliar abzuschreiben, sondern den, aus einem Evangelium ein Evangeliar selbst herzustellen: denn offenbare Fehler wiederholen sich in mehrfach vorkommenden, räumlich von einander getrennten Lesestücken: da der sorgfältige Arbeiter sich nicht mehrfach in gleicher Weise verschrieben haben wird, nehme ich an, daß die Fehler in seiner Vorlage standen, die zu ändern er nicht wagte.

Der Schreiber, der im Jahre 1341 der SeleucidenAera mit seinem Buche fertig wurde, arbeitete zum Glücke für mich mit einer honiggelben Tinte. Was er geschrieben hat, ist fast auf allen Blättern, und zwar zu verschiedenen Zeiten und von verschiedenen Händen, schwarz überfahren, geändert und um Vokal-

zeichen und Interpunctionen vermehrt worden: die honiggelbe Tinte scheint aber doch auch an vielen Stellen wo es nur auf das mit Ihr Geschriebene ankommt, durch.

Der erste Schreiber setzt Vocale nie, Interpunctionen selten. Er schreibt ܬ sehr häufig, nicht selten ܬ̈, den Doppelpunkt als Bezeichnung des Plurals nicht regelmäßig.

ܬ̈ kann ܟ mit Pluralpunkten sein: in den meisten Fällen bedeutet es χ: wenn die Zunft nicht eine so große Nichtachtung meiner Arbeiten in ihr Programm aufgenommen hätte, würden wenigstens die Lehrer der hebräischen Grammatik aus meiner Genesis 6 das Scholion des Baseler Codex kennen, das zu Χοῦς = כּוּשׁ anmerkt οὔτε χ οὔτε κ, ἀλλὰ μέσον τῶν δύο· στοιχεῖον δὲ ἐστὶν ἁρμόττον τῇ τῶν Ἑβραίων καὶ Σύρων γλώττῃ: gequetscht wird ך zu ts, ק über č zu ץ = ç. Der Dialekt des Evangeliars hatte wenigstens zu der Zeit, in der die Handschrift des Vatican punktiert wurde, eine (krankhafte) Neigung ܬ „weich“ zu sprechen (geschrieben wird dann ܬ), und ܬ̈ mag durch seinen Doppelpunkt (der Codex kennt auch ܟ) eine noch größere „Weichheit“ ausdrücken als durch ܟ. Das bleibt aber Alles noch zu untersuchen. ܫ ܫ̈ ܫ̈ scheinen sich nicht zu unterscheiden: ܫ sieht in der Hds. wie ܫ aus, da ܫ wie ein umgekehrtes ܫ aussieht.

Wenn die über das Buch gekommenen Späteren — die Tinte wie die Form der Schrift lehrt, daß ihrer mehrere waren, die nicht zu gleicher Zeit lebten — wenn diese Späteren nur die, übrigens unnöthige, Mühe sich auferlegt hätten, die honiggelbe Schrift des Ersten anzuschwärzen, so würden sie dem Vorwurfe geschmacklose Dummköpfe gewesen zu sein nicht entgehn können. Sie änderten aber auch, und nur der Umstand, daß sie ohne es zu wollen, für die Geschichte der Sprache Nutzbares geliefert haben, macht nothwendig sich um sie bekümmern.

Der Dialekt braucht die Artikelform der Nomina nur da wo im Griechischen der Artikel steht. Allerdings habe ich gelegentlich auch falsche Artikelformen herausgegeben, weil ich nicht sah, daß ein Aelteres unter dem jetzt vorhandenen Texte stak: ich bin aber überzeugt, daß diese Stellen zu emendieren sind. Vorläufig wollte ich nur was ich sah, vorlegen.

Der Dialekt braucht noch gerne Verbindungen der Nomina mit einem Genetive ohne ܕ, sagt also ܐܓܪܐ ܦܛܘܪܝܢ, nicht ܐܓܪܐ ܕܦܛܘܪܝܢ: er braucht ܕ vor Genetiven auch wo die Verbindungs-Form vorhergeht. Dieses Alles ist von C geändert worden: die erste Hand ist in diesen Fällen allen erkennbar.

Der Dialekt braucht die Participien da wo man im Schrift-

Syrischen ـه zuzusetzen hat, ohne ـه, das erst die Späteren, nicht gleichmäßig, nachgetragen haben. Die Fälle liegen alle klar.

Es war meine Pflicht, was die erste Hand bot, in meinen Text zu setzen, was die Correctoren (die zu scheiden ich nicht unternehmen durfte) aus der ersten Schrift gemacht haben, am Rande zu geben.

Wo die honiggelbe Tinte des Ersten auch nur mit einem Scheinchen hervorleuchtete, ermöglichte Sie das Richtige zu finden. Wo die Stiefelwichse der Späteren alles deckte, mußte ich mich bescheiden. Und ich habe mich beschieden, weil nach langer und wiederholter Beschäftigung mit der Handschrift es mich verboten däuchte zu recensieren, es mir vorläufig allein erlaubt schien, die Urkunde als Urkunde vorzulegen.

Mehr wird sich thun lassen, nachdem mein Text erschienen, und eine Concordanz über ihn ausgearbeitet sein wird.

In der BS sind natürlich die Zeilen gezählt: die Concordanz wird ihre Citate nicht nach Evangelien, sondern nach Seiten und Zeilen der BS geben, weil viele Perikopen mehrfach vorkommen, jede andere Zählung also Weiterungen verursachen müßte. Am Rande der BS sind die Columnen der Handschrift angezeigt: jede Columne ist ungefähr fünf Zeilen meines (Quart)Druckes lang. Mithin ist jedes Wort, das in der Concordanz steht, ohne Mühe in der Handschrift nachzuschlagen.

Eine endgültige Ausgabe des Textes zu liefern behalte ich mir vor.

Die Punctation zeigt gelegentlich ostSyrische Vokale, gelegentlich Punkte die ich noch nicht begreife: im Allgemeinen ist ihr Princip leicht zu durchschauen. Mein Leben ist von vorne herein mit dadurch verwüstet worden, daß jemand der gar nichts von der Sache verstand, über die er schrieb, obwohl ich ausdrücklich gesagt hatte, ich wolle als Varianten nur geben was critici usus foret, die Zunft mit einer Sammlung von Schreibefehlern der Einen von mir benutzten Handschrift erfreute: die Zunft druckte und glaubte diese Liste, und der GORR Schulze veranlaßte den Herrn von Raumer sie zu benutzen: jetzt AErman Jahresbericht für 1880 [ZDMG] 193, verglichen mit dem für 1879 [ZDMG] 179. Ich bin also gewarnt, und habe pedantisch treu wiedergeben wollen was die Handschrift bietet. Ich habe in meiner Ausgabe der Didascalia (aus dem deutschen Gelehrtenleben 76) v/vj über meine Wiedergabe der in dem pariser Codex vorliegenden Punctation geredet: die dort angebotene Liste hat nie jemand verlangt: Universitätsprofessoren und ein unverheiratheter Direktor eines Gymnasiums erbaten lieber

(wegen ihrer „Armuth“) von dem Schulamtscandidaten das ganze Buch als Geschenk, ohne jene Liste. In meiner Ausgabe der koptischen Uebersetzung des Pentateuch ix schrieb ich

> etwa zu notieren „ἐρε ist ohne Punkt, weil der Schwanz eines darüberstehenden ϣ (oder eines ähnlichen Kometen) gerade über ihm herabhängt“ oder „ⲛ̀ⲧⲉ ist ohne Punkt, weil ⲧ wie ein Schirm über ⲛ und ⲉ übersteht“, das hieße denn doch mit der Zeit leichtsinniger umgehn als man verantworten kann.

Statt aber die Leute, die so etwas notiert verlangen, mit dem ḍanab fîl zu liebkosen, habe ich versucht, die Punkte genau wie die Handschrift zu setzen: als alter Mann wird man milde, und mehr noch als früher geneigt, gefällig zu sein. Der Setzer hat Feile und Messer anwenden müssen, um den Größen des Tages zu genügen: nicht mit dem die strengen Anforderungen gewissenhafter Arbeiter befriedigenden Erfolge: die Punkte stehn noch immer gelegentlich ein zehntel Millimeter schief, und da Typen, unliebenswürdiger als die heut zu Tage typischen Menschen, nicht zur Annahme des Grundsatzes zu bewegen sind „hier steh' ich, ich kann auch anders“, so habe ich diesem Mangel beim besten Willen nicht abhelfen können. Es wird sogar leider vorgekommen sein, daß ich, obwohl manches fünfmal verglichen worden ist, sowohl beim Lesen des Codex wie beim Lesen der Druckbogen Punkte übersehen habe. Man vergleiche was in meinen Analectis xiv steht. Ich habe 1860 in der Vorrede zu den Geoponicis drucken heißen, wir seien was die syrische Philologie anlange, jetzt im Zeitalter der Aldinen und Iuntinen: die Einsicht findet sich nunmehr auch bei HWinckler, Bezolds Zeitschrift für Assyriologie 5 311. Ich bitte meine Ausgabe des aramäischen Evangeliars als eine Art Aldina anzusehen.

Diese meine Aldina folgt nun der Handschrift gelegentlich auch da, wo ein Anderer als ich ihr nicht gefolgt wäre.

Die Handschrift wechselt zwischen ܠܟܘܢ und ܠܟܘܢ. Beides kann erklärt werden. Da der Punkt über ܟ die „weiche“ Aussprache dieses Buchstaben anzeigt, ist ܠܟܘܢ = לָכֶם aus meiner Uebersicht 164₂ ₁₄ leicht begriffen: das *a* des Zielfalles in ܠ wirkte noch auf ܟ. Hingegen ܠܟܘܢ entspricht dem Gebrauche der Ost-Syrer, wie dem der WestSyrer, die den in dieser Handschrift vorliegenden Dialekt sprechen, und der durch Epiphanius (meine Mittheilungen 2 363) völlig sicheren Form ελιχων = עליכון der Elcesaiten.

Anders steht es mit ܠܗܘܢ und ܠܗܘܢ. Der Punkt in ܠܗܘܢ ist — mir — unerklärlich: ich habe gleichwohl ܠܗܘܢ, wo es in meiner Vorlage deutlich stand, erhalten, darum erhalten, weil ich meine

Leser mit dem Gedanken vertraut zu machen wünschte, daß die Handschrift nicht unfehlbar ist.

Ein Alter (vielleicht nicht oder nicht immer der erste Schreiber) braucht ⁘ ⁖ ⁘ als Interpunctionszeichen, aber die Neuern können diese drei Punktgruppen nicht leiden, und, wo sie sie nicht auskratzen, decken sie sie durch einen Zornausbruch ihrer plumpen Feder oder durch eine Vergrößerung des nächst liegenden Consonanten zu: eine Rasur, in welcher es Vertiefungen gibt, ist gelegentlich der einzige Beweis für das Dasein jener drei. Dabei läßt sich nicht immer ausmachen, ob ⁘ oder ⁘ oder ⁘ gemeint war: denn die Schrift dieser Schreiber steht nicht wie Druckschrift. Das Zeichen ⁝ scheint mir, da sein mittelster Punkt gelegentlich dicker ist als die anderen, oder eine Kleinigkeit ausweicht, nichts als eine durch den Raum veranlaßte Verderbnis von ⁖ oder ⁘. Wann : unter und über der Zeile vertheilt wird (= diducitur), ist es schwerlich Interpunction, sondern soll zu eng sich auf dem Halse stehende Wörter trennen.

Nicht selten (alle Fälle sind am Rande verzeichnet) hebt mit ⁘ oder ⁖ die Zeile an: Kenner des griechischen Lesens werden vielleicht aus diesem Umstande etwas schließen können.

Unser Genosse, Herr Theodor Noeldeke, der selbst einige Seiten aramäischer Texte herausgegeben hat, nannte es ZDMG **29** 89 einen „Luxus", alle „Punkte und Pünktchen der Handschriften" wiederzugeben. Dem Evangeliare des Vatican gegenüber stand auf jeden Fall die Sache anders, da aus dessen Punkten die noch unbekannte Aussprache eines Dialekts festgestellt werden muß. Zu meiner Sicherung gegen Leute wie die im zweiten Bande der Mittheilungen und sonst aufbewahrten setze ich her was Herr Noeldeke geschrieben hat.

ZDMG **27** 492: Ich habe unten in dem ersten Textstück die Punctation der Handschrift möglichst genau wiedergegeben; hoffentlich gerieth der Druck einigermaßen und wird nicht zuletzt alles durch das unglückliche Abspringen der Punkte verdorben.

ZDMG **29** 89: Mit den Ribbûi-Puncten wird grosse Verschwendung getrieben . . . . . Aber hier ist so wenig Consequenz wie bei den sonstigen Puncten, namentlich den Interpunctionszeichen. Ich halte es für ziemlich überflüssig, bei der Herausgabe grösserer Texte alle die für uns grösstentheils nur lästigen Puncte und Pünctchen wiederzugeben bei denen weder innere Consequenz noch Uebereinstimmung der verschiedenen Handschriften Statt zu finden pflegt. Bei so kleinen Stücken wie unseren hier kann man sich diesen Luxus eher erlauben. Allerdings ist es schon typographisch nicht ausführbar, die

Stellung der Puncte immer genau auszudrücken; auch will ich es nicht für unmöglich erklären, daß mir bei diesen Puncten trotz aller Achtsamkeit einzelne kleine Versehen begegnet sein sollten.

Ich war im October 1890 nahe daran, die Arbeit am Evangeliare aufzugeben, so schwierig fand ich sie, und ich habe mir nicht verhehlt, daß die unerfreuliche Hetzjagd, in der einem pflichttreuen Philologen und Historiker in Rom zu leben obliegt, die Güte gerade dieser Arbeit mehr als die anderer Studien beeinträchtigen könne. Da haben mich in ETezas Aufsatze cose armene (Atti del Istituto Veneto **7** 1) die Seiten 906—913 weiter zu arbeiten bestimmt: zufälliger Weise hatte mir Ignazio Guidi das Heft mitgetheilt. Allerdings ist den Agathangelus herauszugeben leichter als das aramäische Evangeliar des Vatican zu bearbeiten: jenes eine Rheinparthie um Pfingsten, dies eine Meerfahrt im Schneesturme wie ich sie am 10 und 11 Januar 1853 einmal 26 Stunden hindurch auszuhalten gehabt habe. Ich will aber Herrn Teza, den ich unlängst flüchtig auf der Straße gesehen, doch öffentlich für seinen Aufsatz danken, der in Deutschland freilich weder erscheinen noch, falls er erschienen wäre, beherzigt werden dürfte: die principes mediocritatis und die Fremden dulden bei uns nichts was mir helfen oder meine Arbeiten zur Geltung bringen könnte.

Die Liste der Perikopen habe ich vor meinem Texte zusammengestellt: jede Perikope trägt ihre Nummer, und diese Nummer ist vor der Perikope im Evangelientexte zwischen [] wiederholt: das Auffinden ist mithin ohne Mühe möglich, und eine Uebersicht über das Kirchenjahr unserer Aramäer erleichtert. Schade, daß diese verderbte Welt dabei um einen Heiligen gekommen ist: für „evangelia leguntur ieiunio sancto Banscira“ Miniscalchis 236 ist nämlich „evangelia quae leguntur in ieiunio sancto εἰς τὴν παννυχίδα“ zu lesen (Nilles **2** 237).

Das aramäische Evangeliar des Vatican gibt mir erwünschte Gelegenheit, einmal ein Glossar einer semitischen Sprache in der Gestalt herzustellen, die ich für die allein wissenschaftliche halte: mein Schüler ARahlfs hat in den von ihm angefertigten Register zu meiner Uebersicht, soweit es da thunlich war, meine Grundsätze schon befolgt: freilich nur intellegentibus. Vorab bitte ich Symmicta **1** 98$_{37}$ ff. Orientalia **2** 1 ff. nachzulesen.

PSmith hat die Vokabeln des Evangeliars in seinen Thesaurus aufgenommen. Haben die Grimm Berolinismen oder Allemannisches in ihrem Werke?

Die arabischen Wörterbücher, die wir benutzen, ruhen auf

den GlossenSammlungen und den Speculationen der arabischen Grammatiker. Das Vollkommenste was wir auf dem Gebiete besitzen, ist EWLanes Werk. Da an ein methodisches Studium der Quellen nicht zu denken ist — aus Handschriften kann man es nur zu eigenem Gebrauche vornehmen: die Vorlagen zu drucken ist der großen Kosten wegen unmöglich —, so muß man für das Arabische das thun was ich für das Persische zu thun vorgeschlagen habe (persische Studien 65, Mittheilungen 2 246 (352)): das von den einheimischen Lexikographen gebotene Material sauber geordnet als das Fachwerk benutzen, in das hinein man den Wortschatz der Classiker und der technischen Schriftsteller sammelt: den ersten, weil die Classiker eben Classiker, also Muster und Typen für Andere sind, weil sie den Durchschnitt der Sprache geben: den andern, weil nur Techniker die Sprache des Lebens bieten, da wer classisch schreibt und für Gebildete mit deren an fünf Fingern herzuzählendem Lebensinhalte arbeitet, die Sprache nicht erschöpft. Also die Uebersetzungen des Galen, Avicenna: die Botaniker usw. Als das Fachwerk, in das hinein man auch Bemerkungen der Neueren einträgt, nur nicht so desultorisch wie das Dozy gethan hat: und wenn man Nachlässe veröffentlicht, den Quatremères, Fleischers, Thorbeckes mittelst der Zeichen QΦΘ geschieden, in einem und demselben Bande.

Aber den Pedro de Alcala, das Leidener Vocabular, Schiaparellis Buch, den in Petersburg liegenden Diwan von Granada hat man — und zwar falls es angeht, zusammen — in einem Sonderbande vorzulegen.

Für die aramäischen Dialekte sind Sonderwörterbücher nöthig, knappe aber concordantielle Bücher: das Ziel muß ein aramäisches Wörterbuch sein, das was dem Edessenischen, Palaestinischen, Babylonischen usw. (Uebersicht 91r 95r 238) gemeinsam ist als Text, das den Dialekten Eigenthümliche eingerückt in kleiner Schrift bietet: die kleine Schrift wird mit der Zeit vielfach zu Textschrift werden müssen.

Geht man so vor, so wird der Eine Bruder lehren was der andere weil er es vergessen hat, nicht mehr lehren kann.

Ich habe seit vierzig und mehr Jahren den Verdacht gehegt, daß رچ زمن, die natürlich identisch sind, aus dem awestischen זרואן (Mittheilungen 2 38 ff.) entstanden seien: Eznik und Elišê schreiben (Blender wollen sich die ihnen nöthige Gelahrtheit durch die Register beschaffen) զրուան = ζṛουαν, haben mithin wie das Awesta (und Justi 128) keinen Vokal zwischen z und r: meine gesammelten Abhandlungen 149 20 ff. NeuPersisch (der von dem „großen“ Jules Mohl einst gekrönte Vullers hält زمان *Zeit* für arabisch, nur in der Be-

deutung *Tod* für érânisch) زمان, armenisch ժամ *Stunde*, ժամանակ = زمانه. Wegen des ժ gegen des Elišê զ ist ժամանակ arsacidisch: die Wurzel ϡ γερ- erscheint im Haikischen als ծեր. Herr SFränkel, CBezolds Zeitschrift für Assyriologie 3 52r, schrieb 1888

> Nicht selten erfolgte die Verwandlung eines ursprünglichen B in M unter dem Einflusse eines benachbarten N wie in זמן für zarvan ܙܒܢܐ.

Nur durch den Dialekt des Evangeliars wird erweisbar, daß ܙܒܢ (mit weichem B) aus dem awestischen זרואן entstanden ist: denn dies Buch schreibt ܙܒܢ, das bedeutet bei ihm, B ist nicht weich, sondern hart. ܙܒܢ mit hartem B, also etwa zabban, [für zanban] gesprochen, wurde zu zaban, danach zu zeвan.

In einem nach meinen Grundsätzen bearbeiteten arabischen Wörterbuche wäre das Stichwort زمان, und hinter diesem würden die Denominativa zamina zâmana azmana auftreten.

Warum זרואן in das Aramäische und Arabische aufgenommen worden ist, weiß ich nicht, noch weiß ich ܥܕ zu erklären, das im Evangeliare für *Zeit* durch mich gesichert »scheint« (ܥܕܢ C): schon jetzt vermag ich zwei für die Geschichte der Religion wichtige Vokabeln zu benutzen: ܩܒܠ = qiвal σκότος und ܢܒܐ προφήτης.

Das erste erweist, daß die „qibla“, die Himmelsgegend, nach der hin diese Aramäer beteten, der Westen war: denn es kann nur das arabische qibal *gegenüber* sein. Vergleiche Ezechiel 8 16, und erwäge daß die Praxis der Kirche den Altar zu „orientieren“, im Gegensatze zur Synagoge eingeführt ist, die nach Osten zu beten verboten hat.

ܢܒܐ (mit Artikel regelrecht ܢܒܝܐ) erweist, dass diese Aramäer ein einheimisches Wort für προφήτης hatten. Die Araber besaßen wie die Totenklagelieder erhärten, ein Zeitwort نبء *zeigte an*, aber ihr نبى ist, wie die entsprechende syrische Vokabel, Lehnwort, also für נָבִיא unverwendbar.

Ich möchte in Anknüpfung an eine oben ausgesprochene Klage hier noch einem Wunsche Ausdruck geben, dessen Erfüllung mich, da voraussichtlich Ich nur noch Einmal nach Rom zu gehn haben werde, persönlich nicht mehr interessiert, einem Wunsche, der vielen tüchtigen Männern aus der Seele gesprochen sein dürfte.

Ich habe in Folge meiner Beziehungen zu den ††Cardinälen Pitra und Hergenröther und meiner durch WWright vermittelten Bekanntschaft mit IohBollig S.I. in Rom Vergünstigungen genossen, für die ich in der Ankündigung 3 und in meiner pars prior iv v auch öffentlich gedankt habe. Daß ich, um den von mir und mei-

nen Landsleuten für Pater Bollig gehegten Empfindungen einen bleibenden Ausdruck zu leihen, in den Schriften der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen die von Bollig für den Druck vorbereiteten Schriften des Iohannes von Euchaita herausgegeben habe, dürfte bekannt sein. Monsignore Isidoro Carini, des Monsignore Stefano Ciccolini Nachfolger, hat mich ebenso verpflichtet, wie der wohlwollende Mann, der vor ihm in der Bibliothek thätig war, jetzt an einer andern Stelle seinem Fürsten und seiner Kirche dient, und mir bis heute freundlich gesinnt geblieben ist. Ich habe mich aber stets geschämt, würdige Gelehrte, die mir an Eifer der Wissenschaft zu dienen nicht nachstehn, nicht derselben Gunst wie ich genießen zu sehen: ich habe zweitens nie vergessen können, daß jede facilità widerruflich, und zwar von Tage zu Tage widerruflich, also eine ArbeitsEintheilung auch für den privilegiato im Vatican nicht möglich ist. Da wir Alle Zeit wie Geld zu Rathe zu halten haben, ist dieser Zustand auch den privilegiati nicht erwünscht. Man darf nicht außer Acht lassen, daß für so gut wie alle Gäste der Bibliotheca Vaticana die Woche, deren Donnerstage (und Sonntage) stets wegfallen, nur zwanzig Arbeitsstunden hat.

Kein mir bekannter Gelehrter, der schon öfter in Rom gearbeitet hat, kann dem heiligen Stuhle die Anerkennung versagen, daß das Wohlwollen gegen die der Bibliothek des Vatican in immer größeren Schaaren zuströmenden Gelehrten von Jahre zu Jahre zugenommen hat: „mehr Zeit“ und „Studio auch an den Donnerstagen“ wird freilich der Anerkennung stets unmittelbar folgen. Wir hoffen Alle, weil wir erfahren haben, daß man unsere früheren Hoffnungen zu errathen wußte.

Was die im Vatican arbeitenden Gelehrten anlangt, so dürften sie mit dem Papste natürlich nur durch eine Bittschrift verkehren, und in dieser nur persönliche Bitten vortragen, deren Erfüllung meines Erachtens nicht füglich in Aussicht stehn kann. Aber da die weitaus größeste Zahl dieser Gelehrten von den „historischen Commissionen“ Deutschlands, Oesterreichs, Frankreichs oder aber von Akademien beauftragt ist, so brauchen die Herren doch nur ihren Vorgesetzten die Sachlage zu schildern: für recht viel Geld werde wenig geleistet: was geleistet werde, könne in der Zuverlässigkeit und in dem Umfange, in dem es wirklich zu Stande kommt, nur in Folge ganz außerordentlicher, aufreibender Anspannung aller Kräfte zu Stande gebracht werden, die man um so mehr vermeiden müsse als die Kost in Rom ungenügend sei, und schon die zurückzulegenden Entfernungen große Anstrengungen erforderten. Ich vermuthe, daß die Regierungen sehr wohl befähigt, und eigentlich auch verpflichtet sind

mit dem heiligen Stuhle darüber zu verhandeln, daß die Arbeitszeit der Vaticana auf acht Stunden erhöht werde, daß man die Donnerstage in den ArbeitstagsStand erhebe, und außer den Sonntagen und den kirchlich gebotenen Festtagen vom ersten October bis zum letzten Juni ununterbrochen in der Bibliothek zu arbeiten gestatte. Die Diplomatie dürfte sich in der Wahl der für die Verhandlung zu benutzenden Ausdrücke weniger leicht vergreifen als unser einer, dem es freilich auf die Sache mehr ankommt, als einem ihm fremde gelehrte Interessen vertretenden Gesandten, der aber dafür die Kenntnis der in Betracht zu ziehenden Persönlichkeiten der päpstlichen Regierung, und Uebung im GeschäftsStyle nicht besitzt.

Daß ein durch Oberlicht, und nur durch dies, erleuchteter Kuppelsaal in ein cortile des Vatican einzubauen, daß die Sammlung gedruckter Bücher leicht zugänglich zu machen, daß sie auf den Gebieten der alten Philologie, der Romanistik, der Patristik, der Geschichte des Mittelalters auf dem Laufenden zu erhalten, daß gar manches Andere zu beschaffen sein wird, über das ich auf Befehl gerne Bericht erstatten werde, das versteht sich von selbst. Schon hier will ich versichern, daß ich an das allen Londonern bekannte Museum-head-ake sehr wohl denke, und an die, von mir sogar öffentlich ausgesprochene, Klage über die unter der (jetzt Niemanden mehr belästigenden) Kuppel der Laurentiana drückende Hitze ebenfalls: und ich will versichern, daß ich vorkommenden Falles nicht vergessen würde, auf eine genügende Ventilation des beantragten Kuppelsaales zu drängen.

Weiter versteht sich ganz von selbst, daß die verhandelnden Regierungen einen Theil der für die neuen Einrichtungen auflaufenden Kosten ebenso gewis werden übernehmen müssen, als die Fremden für den Zutritt zu den Kunstsammlungen des Vatican Gebühren zahlen. Die Regierungen sparen an Reisekosten und Diäten für die von ihnen Beauftragten, falls diese täglich mehr Zeit zur Verfügung haben als bisher, mehr als was sie etwa dem Vatican an Eintrittsgebühren für ihre Leute zu entrichten haben können.

Je mehr Regierungen sich zu dem von mir vorgeschlagenen Antrage vereinigen, desto mehr Aussicht hat er, angenommen zu werden, weil die Catholicität der Kirche durch ihn in der freundlichsten Form als eine Thatsache anerkannt werden würde, mit der auch die Welt zu rechnen gehabt hat.

Die zu erbittenden Erleichterungen sind aber durchaus auch im Interesse des heiligen Stuhls. Wer herrschen will, muß das Gute fördern: und wer irgend ein Gutes fördert, hat schließlich immer eine Stellung auch in der Welt. Die Vorsehung hat den Nach-

folgern Petri eine Handschriftensammlung ohne Gleichen zu eigen gegeben: ich glaube, die Sammlung so allgemein und so bequem wie möglich zugänglich zu machen, müsse der Kirche als eine Aufgabe erscheinen, weil das Ansehen der Kirche durch die gewährte Erleichterung erheblich wachsen wird. Legen die Orden — Jesuiten, Dominicaner, Benedictiner — Werth darauf, ihre besten Leute in die Verwaltung der geradezu einzigen Sammlungen des Vatican zu bringen, weil der Ruhm der Congregation durch ihre so zu sagen vor die Front gerufenen Angehörigen wächst, warum sollte die ganze Kirche nicht dasselbe Mittel anwenden wie ihre Orden, um sich als eine Macht zu erweisen? Oesterreichs Ruf ist in der gelehrten Welt an dem Tage ich kann nicht sagen um wie viel gestiegen, an dem WvHartel Oberbibliothekar in Wien wurde: die Kirche wird ein Missionswerk thun, wenn sie ihre Bibliothek mit einem Introite hic dii sunt so weit wie möglich öffnet. Sie macht jetzt durch ihre Krankenpflege Propaganda: sie kann auch durch ihre Bibliotheksverwaltung Propaganda machen. Die Wissenschaft ist unbeeinflußbar unabhängig, aber dankbar, und μεγαλοψυχία sogar dem principiellen Akatholiken gegenüber das beste Mittel, dem jetzt fühlbaren Mangel an Gemeinschaft zwischen Katholiken und Akatholiken seine Schärfe zu nehmen.

Als Theodor von Sickel 1881 die bekannte Urkunde Ottos des Großen, über die er 1883 in einer berühmten Schrift gehandelt hat, für authentisch erklärte, freute sich (Cardinal Hergenröther hat mir das an dem Tage an dem es geschah, erzählt), der Papst Leo der Dreizehnte so, daß er so ehrlichen Akatholiken das Archiv weit zu öffnen befahl. Keiner von denen, die in der Bibliothek arbeiten, steht den im Archive forschenden Gelehrten in der von ThSickel natürlich für selbstverständlich erachteten Eigenschaft der Ehrlichkeit nach: wie wäre es, wenn die oben genannten Behörden dies vor dem heiligen Vater geltend machten, der, wenn auch kein Gelehrter, doch ein gelehrter Mann (eines seiner lateinischen Gedichte steht in der Nationalzeitung vom 27 April 1878 Nummer 195) und obenein ein wohlwollender Herr ist wie wenige?

Die biblioteca Vittorio Emanuele ermöglicht in ihren Räumen die Benutzung aller in den Staatsbibliotheken Italiens aufbewahrten Handschriften: es wird zu erwägen sein, ob nicht die Vaticana die den Kirchenbibliotheken gehörenden Codices zugänglich machen kann. Mittelpunkt muß man sein, wenn man wirken will: die Vaticana kann ein Mittelpunkt werden. Der heilige Vater genießt in Italien Portofreiheit: Kosten erwüchsen mithin aus der von mir so eben vorgeschlagenen Einrichtung nicht.

Nachtrag. 30 Mai 1891.

Ueber das so vielen Abschnitten des Evangeliars voraufgehende ܒܗ ܡܫܪܘܬܐ hat sich meines Wissens nur Herr Noeldeke ZDMG 22 509 geäußert, und zwar nur durch eine Uebersetzung: „in *der* Zeit“.

Matth. 26_{44} ist ܒܗ̇ ܡܠܬܐ ὁ αὐτὸς λόγος: darum darf ܒܗ ܡܫܪܘܬܐ ἐν τῷ αὐτῷ καιρῷ übersetzt werden. Ist diese Uebersetzung richtig, so sollen die mir bis heute unverständlich gebliebenen Worte ܒܗ ܡܫܪܘܬܐ anzeigen, daß der auf sie folgende Abschnitt an demselben Sonn- oder Festtage gelesen werde wie der [im Evangeliare] nicht mitgetheilte [nicht aus einem Evangelium entnommene], der ihm vorhergeht. Dann aber ist das vom Verfasser des Evangeliars benutzte Evangelium nicht die unmittelbare Vorlage des Schreibers gewesen, dessen Arbeit uns erhalten ist. Der Schreiber muß dann die „Rubriken“ eines Lectionars gedankenlos kopiert haben: erst der Verfasser des Lectionars (Proben sind aus meinen Orientalia 1 zu beziehen) hat eine nicht überall vollständige Handschrift eines Evangeliums für seine Arbeit benutzt.

Ueber die Plurale der Bildung מַלְכַיָּא sagt SDLuzzatto § 23 nichts Näheres. Herr EKautzsch sieht § 52[c] in מַלְכַיָּא „die ursprüngliche Endung des status constructus ־ַי“ + des „determinierenden ā“ (vergleiche GHoffmann, ZDMG 32 759), faßt קַדְמָיָא als קַדְמָיַיָּא. Ueber ܫܡ̈ܝܐ und die irgendwie ihm Analogen Herr Noeldeke § 72, Herr Duval § 259. Kautzsch hatte ־ַי [ai, nicht ay] zu schreiben.

Die auf ̈ܐ endenden Plurale des Evangeliars setzt Herr Noeldeke ZDMG 22 477[r] den auf ־ַיָּא auslaufenden der Chaldäer des alten Testaments gleich. Er behauptet das: ich beweise es.

ܦ̈ܝܣܐ = πεῖσαι hat seine Pluralpunkte, weil seine andere Sylbe wie αι = ε klang. Für Ἰουδαία schreibt das Evangeliar Matth. 24_{16} = BS 304_{4} ܝܘ̈ܕܝܐ, Lucas 1_{5} = BS 327_{20} ܝܗ̈ܘܕܝܐ [Lucas 1_{65} = BS 328_{27} ܝܗܘܕܝܐ], Lucas 3_{1} = BS 332_{21} ܝܘ̈ܕܝܐ. Also noch C (denn diese Pluralpunkte hat C geschrieben) hat die Aussprache Ἰουδαία dadurch angedeutet, daß er zu den einen Singular wiedergebenden Consonanten Pluralpunkte setzte.

Folglich endete der Plural im Dialekte des Evangeliars auf *αια*.

Daß meine Abhandlungen 159_{7}, meine Symmicta 1 37_{24} benutzt werden könnten, ist natürlich allen, die mit den Condottieri rechnen, undenkbar. Φουρδαια Mittheilungen 2 380.

Als ich oben von ܥܕ sprach, habe ich *scheint* in » « gesetzt. Denn trotz des mitunter sicheren ܥܕ des Codex komme ich immer wieder auf die Vermuthung zurück, Zeit habe diesen Aramäern עַד geheißen, das von ܝܥܕ (zu dem auch מִיעַד gehört) hergeleitet,

das Masculinum zu dem hebräischen, von Wetzstein zu وعد gestellten עֵת = עִדָּה = ʿdat wäre. Die Zeitrechnung ist immer etwas Conventionelles, da man nach Sonne Mond oder Sternen messen, und von einem beliebigen Anfange an rechnen kann.

Neue Ausgabe Clementischer Schriften.

Wer weiß unter welchen Mühsalen ich die Didascalia, die relliquiae iuris ecclesiastici antiquissimae, die διατάξεις τῶν ἀποστόλων, die syrische Uebersetzung der Recognitiones Clementis und die Κλημέντια hinausgegeben habe, wird zugestehn, daß der Wunsch, die verbesserten Wiederholungen dieser Bücher selbst zu liefern, ein natürlicher ist.

Ich habe meine Rechte, die vielleicht nicht in vollem Umfange vor den Gerichten geltend zu machen sein, aber von jedem Gentleman als unantastbar anerkannt werden werden, stets vorbehalten: ich kann nicht gestatten, daß unter so vielen Schwierigkeiten und mit so vielen, nur durch große Entsagungen aufzubringenden Kosten gesammelte Materialien von dem ersten Besten ohne Weiteres angeeignet werden. Vorrede zum Ḥarîzî.

Im zweiten Bande der Bibliotheca Syriaca werden Recognitiones, Didascalia und andere Clementina 1893 neu erscheinen: eine die Urkunden scheidende Ausgabe der Constitutiones apostolorum soll (sie liegt seit vielen Jahren handschriftlich vor) im nächsten Winter unter die Presse kommen. Die recognitiones und Κλημέντια werden, erstere ohne die Handschriften von Verona und Vercelli, deren für JBLightfoot gemachte Vergleichungen in JARobinsons Händen sind, letztere ohne die Handschrift von Ierusalem, bearbeitet werden: es kommt mir nur darauf an zu zeigen, in welchem Verhältnisse der Grieche zum Syrer steht.

Sowie meine Kosten gedeckt sind, wird meine Texte zu neuen Ausgaben zu benutzen gestattet sein, aber nicht einen Augenblick früher. Mittheilungen **3** 254 **4** 138 = GGA **1890** 394r.

Beiläufig berichte ich, daß die syrische Urschrift von Ephraims Commentare zur Evangelienharmonie des Tatian gefunden sein soll. Daß ich hinter ihr her bin, versteht sich von selbst. Constitutiones vijr.

Die Schwingungsdauer des Gauss'schen Bifilarpendels.

Von

Karl Heun in Berlin.

Die mathematische Theorie des Bifilarpendels kann mit Benutzung von hyperelliptischen Functionen, die durch zehn Verzweigungspunkte characterisirt sind, vollständig ausgeführt werden. Wenn auch einer solchen Untersuchung keineswegs unüberwindliche Schwierigkeiten entgegenstehen, so wäre doch damit dem Rechner wenig gedient, denn die allgemeinen Gleichungen müßten für die Bedürfnisse der Anwendungen wesentlich vereinfacht werden. Man hat sich bisher mit der von Gauss gegebenen Gleichung für die Schwingungsdauer begnügt und in denjenigen Fällen, wo eine Berücksichtigung der Amplitude nothwendig würde, nur die Gleichgewichtslage beobachtet. Diese Beschränkung hat aber, wie Gauss[1]) zuerst hervorgehoben hat, für feine Kräftemessungen nicht unbeträchtliche Nachtheile. Ich theile deßhalb im Folgenden für die Schwingungsdauer des Bifilarpendels eine Formel mit, welche auch für die verhältnißmäßig kurzen Pendel, welche man jetzt häufig bei electrodynamischen Messungen verwendet, ausreichen wird. Insbesondere mache ich auf die Fehlerschätzung aufmerksam, die für genauere Berechnungen dieser Art geradezu unentbehrlich ist.

1.

Die Aufhängefäden seien parallel und von gleicher Länge, welche wir im Folgenden gleich Eins setzen. Der Abstand der Fäden in der Ruhelage sei gleich $2l$. In der durch die unteren Fadenenden gehenden horizontalen Geraden werden im Abstand des Trägheitsradius (k) des Pendelkörpers in gleicher Entfernung (k) von der Mitte zwei materielle Punkte angenommen, auf deren Bewegung die Schwingungen des wirklichen Pendels reducirbar sind. Der Anfangspunkt des rechtwinkligen Coordinatensystems werde in der Mitte zwischen den beiden materiellen Punkten gewählt. Die z-Axe gehe durch die verticale Schwerpunktsaxe des Pendels nach oben und die x-Axe durch die schweren Punkte. Jeder derselben bewegt sich dann auf einer doppelt gekrümmten Bahn, welche bestimmt ist durch die Gleichungen:

1) Gauss Werke, herausgegeben von Schering, Bd. V p. 100.

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= k^2 \\ 2l^2(k-x) &= kz(2-z) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \text{I)}$$

Ist g die Beschleunigung der Erdschwere ausgedrückt in Theilen der Fadenlänge, dann heißt die Differentialgleichung der Bewegung

$$\frac{s^2 + 4k^2(1-z)^2}{s^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2g(h-z) \ldots\ldots \text{II)}$$

Hierin ist zur Abkürzung gesetzt:

$$s^2 = 4l^2 z(2-z) - z^2(2-z)^2. \ldots\ldots (1)$$

h bedeutet die Integrationsconstante erster Ordnung, welche durch das Princip der lebendigen Kraft eingeführt ist.

Wird der kleinste Werth von x gleich $k\cos\alpha$ gesetzt, so bestimmt sich h als Function der „Amplitude" α aus der Gleichung

$$h(2-h) = 2l^2\left(1-\frac{x}{k}\right).$$

Man erhält hieraus

$$h = 1 - \sqrt{1 - 4l^2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha}. \ldots\ldots (2)$$

Dies ist die verticale Erhebung des Pendelkörpers, wenn die Amplitude der Elongation gleich α wird.

Aus der Gleich. II) folgt durch Integration für die Schwingungsdauer T die Gleichung

$$\sqrt{2g}\,.\,T = 2\int_0^h \frac{s^2 + 4k^2(1-z)^2}{s\sqrt{h-z}\sqrt{s^2 + 4k^2(1-z)^2}}\,dz \ldots \text{III)}$$

Die 10 Verzweigungspunkte dieses Integrals sind:

$$0,\ h,\ 1-\sqrt{1-4l^2},\ \ 1+\sqrt{1-4l^2},\ 2,\ \infty$$

$$1 \pm \sqrt{1 + 2(k^2-l^2) \mp 2\sqrt{(k^2-l^2)^2 + k^2}}.$$

Für die meisten Anwendungen besitzt nun die Potenzreihe $\mathfrak{P}(z)$ in der Entwicklung

$$\frac{\sqrt{s^2 + 4k^2(1-z)^2}}{s\sqrt{h-z}} = \frac{1}{\sqrt{z(h-z)[4l^2 - z(2-z)]}} \cdot \mathfrak{P}(z)$$

eine genügend starke Convergenz. Wir werden uns deßhalb im Folgenden auf diesen Fall beschränken und das ganze hyperelliptische Integral in dem Ausdruck für T nach der Gauss'schen

Quadraturmethode mit Benutzung eines einzigen zweckmäßig zu wählenden Argumentwerthes $\varepsilon = \varepsilon_1$ angenähert ausführen.

2.

Das nach der Gauss'schen Methode zur Quadratur vorgelegte Integral habe die Form

$$J = \int_\alpha^\beta \varphi(x) f(x)\, dx,$$

wo $\varphi(x)$ eine convergente Potenzreihe von der Form

$$\varphi(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \text{in inf.}$$

bedeutet. Die Function $f(x)$ besitzt die Verzweigungspunkte. Soll mit einem einzigen Argumentwerthe $x = x_1$ interpolirt werden, dann ist:

$$\varphi(x) = \varphi(x_1) + \lambda_1 (x - x_1) + \lambda_2 (x^2 - x_1^2) + \cdots + \text{in inf.}$$

Folglich

$$J = a_1 . \varphi(x_1) + \lambda_1 (a_2 - a_1 x_1) + \lambda_2 (a_3 - a_1 x_1^2) + \cdots + \text{in inf.}$$

Hierin ist zur Abkürzung gesetzt

$$a_r = \int_\alpha^\beta x^{r+1} f(x)\, dx.$$

Damit nun der Fehler bei der approximativen Darstellung

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x) f(x)\, dx = a_1 \varphi(x_1)$$

möglichst klein werde, muß man x_1 so wählen, daß es der Gleich.

$$a_2 - a_1 x_1 = 0$$

genügt. Dann erhält man für den Fehler „zweiter" Ordnung C_2 den Ausdruck

$$C_2 = \frac{a_1 a_3 - a_2 a_2}{a_1} \cdot \lambda_2 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (a)$$

3.

Durch die lineare Substitution

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon' h \zeta}{\varepsilon' - h + h\zeta} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

nimmt der Ausdruck für T die Legendre'sche Form an:

$$\sqrt{2g}\,.\,T = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon(\varepsilon'-h)}}\int_0^1 \varphi\left(\frac{\varepsilon' h\zeta}{\varepsilon'-h+h\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)(1-m^2\zeta)}},$$

worin $\varepsilon = 1-\sqrt{1-4l^2}$; $\varepsilon' = 1+\sqrt{1-4l^2}$ . . . . (4)

$$m^2 = \frac{h(\varepsilon'-\varepsilon)}{\varepsilon(\varepsilon'-h)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

und

$$\varphi(\varepsilon) = \sqrt{\frac{\varepsilon^2+4k^2(1-\varepsilon)^2}{2-\varepsilon}}$$

ist.

Wendet man nun das eben entwickelte Gauss'sche Quadraturprincip auf das vorstehende Integral an, dann erhält man nach einigen leicht erkennbaren Reductionen das Resultat:

$$T = (1+\theta)\pi\frac{k}{l}\sqrt{\frac{1}{g}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{IV)}$$

Die Größe θ ist bestimmt durch die Gleichung

$$1+\theta = \frac{2K}{\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\varepsilon'-h}}\cdot\Phi(\varepsilon_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{V)}$$

Ferner ist

$$\left.\begin{aligned}\Phi(\varepsilon) &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\varepsilon}{2}}}\cdot\sqrt{1-\frac{k^2-l^2}{k^2}\varepsilon(2-\varepsilon)-\frac{\varepsilon^2(2-\varepsilon)^2}{4k^2}}\\ \varepsilon_1 &= \frac{\varepsilon' h\zeta_1}{\varepsilon'-h+h\zeta_1};\quad \zeta_1 = \frac{1}{m^2}\left(1-\frac{E}{K}\right)\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad \text{VI)}$$

K *und* E sind die ganzen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung in der Legendre'schen Form für den Modul m.

Die Reihenentwicklung der Function $\Phi(\varepsilon)$ und die Berechnung der Integrale a_2 und a_3 giebt nach Gleich. a) für die Fehlerfunction[1]) den Ausdruck

$$C_2 = -\frac{2-3(k^2-l^2)}{2k^2}\left[\tfrac{1}{3}\frac{2\zeta_1-1}{m^2}+(\tfrac{2}{3}-\zeta_1)\zeta_1\right]\frac{KK}{\pi}\cdot h^2 \quad . \quad . \quad \text{A)}$$

Dies ist für positive Werthe von k^2-l^2 zugleich die „obere Fehlergrenze", wie die Betrachtung der Coefficienten λ_3, λ_4, etc. zeigt.

Für $\theta = 0$ geht die Gleichung IV) in die Gauss'sche Formel für unendlich kleine Schwingungen über. Die Function θ

1) Bei der Entwicklung von λ_2 konnten einige einflußlose Kürzungen angebracht werden, was jedoch bei den Hauptformeln V) und VI) unterblieb.

kann also nach einigen Vereinfachungen zur Fehlerschätzung bei der Verwendung dieser Formel dienen.

4.

Um die Genauigkeit der vorstehenden Formeln für die Bestimmung der Schwingungsdauer eines bifilaren Pendels von sehr ungünstigen Dimensionen anschaulich zu machen, habe ich die Rechnung für den Fall $l = \frac{1}{10}$ (die Länge der Fäden) $k = \frac{1}{8}$, $\alpha = 10^0$ durchgeführt, welche ich hier im Auszuge mittheile.

$$\begin{array}{llll}
\varepsilon & = 0{,}020\,204\,102\,86 & \varepsilon' & = 1{,}979\,795\,897\,14. \\
\lg(\varepsilon'-\varepsilon) & = 0{,}292\,165\,612\,1 & \lg h & = 6{,}181\,654\,971\,0 \\
\lg(\varepsilon'-h) & = 0{,}296\,587\,089\,6 & h & = 0{,}000\,151\,934\,0 \\
\lg m^2 & = 7{,}871\,793\,922\,7 & \lg K & = 0{,}196\,930\,742\,6 \\
\lg \frac{E}{K} & = 9{,}998\,379\,030\,7 & \frac{P}{K} & = 0{,}996\,274\,537\ 1 \\
\lg \zeta_1 & = 9{,}699\,386\,329\,3 & \zeta_1 & = 0{,}500\,479\,539\,8 \\
\lg \Phi(\varepsilon_1) & = 9{,}999\,977\,4 & \lg\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\varepsilon'-h}} & = 0{,}000\,032\,8 \\
\lg(1+\theta) & = 0{,}000\,824\,0 & \theta & = 0{,}000\,189\,9
\end{array}$$

$$\cdots \quad C_2 = -0{,}000\,000\,054\,8.$$

Es ist also in diesem Falle

$$T = 1{,}000\,189\,9 \,.\, \pi \frac{k}{l}\sqrt{\frac{1}{g}}.$$

Die Correction C_2 bleibt wegen der Kleinheit ohne Berücksichtigung.

In dem nur selten eintretenden Falle, wenn C_2 einen beträchtlichen Werth annimmt, kann man unter Anderem auch in der Weise eine erheblich schärfere Bestimmung von T als die oben ausgeführte erhalten, daß man in dem vorliegenden Beispiel die Verzweigungspunkte

$$0,\ h,\ \varepsilon,\ 1-\sqrt{1+2(k^2-l^2)+2\sqrt{(k^2-l^2)^2+k^2}},$$

$$1-\sqrt{1+2(k^2-l^2)-2\sqrt{(k^2-l^2)^2+k^2}}$$

bei der Quadratur berücksichtigt. Die Rechnung würde aber dann auf Rosenhain'sche Functionen führen.

Berlin, 8. Febr. 1891.

Inhalt von Nr. 4.

Paul de Lagarde, Thevenots caffarro. — Das aramäische Evangeliar des Vatican. — Neue Ausgabe der διατάξεις τῶν ἀποστόλων und der drei Gestalten der Clementinen. — *Karl Heun*, die Schwingungsdauer des Gauss'schen Bifilarpendels.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

9. Juli. **№ 5.** 1891.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 6. Juni.

Klein legt eine Arbeit des Herrn Schilling vor: Geometrische Bedeutung der Formeln der sphärischen Trigonometrie für den Fall complexer Argumente.

Riecke legt vor:

a. Eine eigene Arbeit: Zur Theorie der piëzoelektrischen und pyroelektrischen Erscheinungen.

b. Von Herrn Dr. G. Tammann: Ueber die Permeabilität von Niederschlagsmembranen.

c. Von den Herren Dr. G. Tammann und Dr. W. Nernst: Ueber die Maximaltension, mit welcher Wasserstoff aus Lösungen durch Metalle in Freiheit gesetzt wird.

Kielhorn legt zwei Aufsätze vor:

a. Die Vikrama-Aera.

b. Die Nîtimañjarî des Dyâ Dviveda.

de Lagarde legt vor:

a. eine Mittheilung über Arabes mitrati.

b. über Samech

und spricht

c. über den Inhalt des 5. Stückes seiner Septuagintastudien, die er in der Sitzung vom 2. Mai angekündigt hatte.

de Lagarde legt eine Mittheilung des Herrn Professor E. Nestle vor: Eine denkwürdige Sitzung der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften.

Weiland legt durch den beständigen Sekretär für den 37. Band der Abhandlungen die Abhandlung vor: Die Wiener Handschrift der Chronik des Matthias von Neuenburg.

Arabes mitrati.

Von

Paul de Lagarde.

In meinen Mittheilungen 1 61 habe ich die Vermuthung ausgesprochen, das arabische تاج = tâǧ aus tâg, das armenische թագ = *ϑαγ* in թագաւոր = *ϑαγαvor* *Kronenträger*, *König* verhalte sich zu dem assyrischen agû *Krone* (das 1881 noch für ursprünglich sumerisch galt) wie tapdû tamlû zu den entsprechenden Stämmen. Ich erwähnte, daß nach einer Mittheilung PHaupts bereits vor mir an einen Zusammenhang der Wörter تاج und agû gedacht worden war, ohne daß man ihn hätte erklären können. Jetzt Friedrich Delitzsch, assyrische Grammatik § 65 $_{32}$. Uebersicht 206 $_{25}$.

Schon 1857 hatte JOppert ZDMG **11** 135 die Yaunâ takabarâ der Grabinschrift Darius des ersten, indem er sich auf die medoscythische und assyrische Uebersetzung des Textes berief, *bezopfte Ionier* übersetzt, da im Vendidad taka für *Pferdeschweif* gebraucht werde. 1864 wird in FJustis Handbuch der Zendsprache 130[1] ein awestisches taka *Pferdeschweif* nicht verzeichnet, aber noch 1882 bietet in seiner Ausgabe des babylonischen Textes der Achaemenideninschriften 34 35 Zeile 18 CBezold nach Oppert

Iamanu šanutú ša magiduta ina ḳaḳḳadišunu našúu:
andere Ionier, welche Flechtwerk auf ihrem Kopfe tragen.

1881 lieferte FvSpiegel, die altpersischen Keilinschriften 219, unter Berufung auf Oppert takabara *Kronen oder Flechten tragend*, und FJusti hat GGA 1882 $_{483}$ ff. dazu keine Bemerkung gemacht, obwohl die Kürze des ersten a von takabara vielleicht einer Erklärung bedurfte.

Um vollständig zu sein, füge ich Stellen bei, die mir meine Erinnerung bot, und Estienne zu ergänzen gestattet hätte. Thucydides α 6 *'Αθηναῖοι χρυσῶν τεττίγων ἐνέρσει κρωβύλον ἀναδούμενοι τῶν ἐν τῇ κεφαλῇ τριχῶν* [wozu der Scholiast (bei Schöne[1]) 9) *κρωβύλος ἐστὶν εἶδος πλέγματος τῶν τριχῶν, ἀπὸ ἑκατέρων εἰς ὀξὺ ἀπολῆγον*]· *ἀφ' οὗ καὶ 'Ιώνων τοὺς πρεσβυτέρους κατὰ τὸ συγγενὲς ἐπὶ πολὺ αὔτη ἡ σκευὴ κατέσχεν.* Estienne hat die andere Hälfte dieses Satzes nicht ausgeschrieben, die Dindorf haben sie charakteristischer Weise nicht ergänzt, und JOppert wie FrSpiegel sagen von der ganzen Stelle und von der Sache nichts: vor Paul Güßfeldt gebildet

1) der einst in meinem Hause Thuc. ε 50 βίᾳ θύσωσι in βιασθῶσι änderte.

wie sie sind: was wird erst nach Paul Güßfeldt werden? Xenophon Anabasis ε 4 13 *εἶχον κράνη σκύτινα κρωβύλον ἔχοντα κατὰ μέσον ἐγγυτάτω τιαροειδῆ*, wo also der *κρωβύλος* nahezu Tiaraförmig heißt. Neben *κρωβύλος* hat Hesychius *κροβαλός*, das MSchmidt in der kleineren Ausgabe 927 allerdings an den Rand verwiesen hat. Ich suche in der ersten Sylbe dieser Vokabeln शिरस् *Kopf*, und vergleiche սաղաւարտ = *σαλαυαρτ Helm*, woraus ich schon 1848 ܨܘܠܝܐ erklärt hatte: wenn PSmith aus meinen gesammelten Abhandlungen 72 180 unter Beschweigung des սաղաւարտ berichtet, ich habe سربند verglichen, so verleumdet er. Sarabara capitum tegmina, Isidorus ιϑ 23: סַרְבָּל Daniels? gesammelte Abhandlungen 206 15 ff., armenische Studien § 1937.

Ueber das aus ջ entstandene ճ des Armenischen habe ich in den Mittheilungen 2 26 ff. gesprochen: ich darf es mit gleichem Rechte ğ wie č umschreiben.

Տաճիկ = Tağik der Armenier ist eine arsacidische Vokabel, das i derselben lang. NeuPersisch muß Տաճիկ تاجی oder تازی lauten. Eine Erklärung dieser Vokabeln ist nur dann richtig, wenn sie alle beide erklärt, da die Identität der Wörter nicht zu bezweifeln ist.

Տաճիկ *Ἄραψ* Maccab. β 12 10, der Isaias 13 20 15 7 9 Արաբացի heißt (armenische Studien § 231, wo nachgewiesen wird, daß der Akademiker FchMüller die Uncialen Յ = յ ж und Ց = ց ʒ nicht hat unterscheiden können). Das große Venediger Wörterbuch, das auch die Gleichung տաճիկ = تازی bietet, weist 2 842 [2] nach, daß տաճիկ Synonymum von Agarener, Saracene ist.

Տաճիկ übersetzt Ciakciak 1355 [3] außer durch *Arabo* auch durch *di veloci piedi, di rapido corso*. Er irrt: vermuthlich auf Grund der im großen Wörterbuche 2 842 [2] gegebenen Materialien. Die Scheidung zwischen haikischem, arsacidischem und sasanidischem Sprachgute, die ich für das Armenische 1866 in den gesammelten Abhandlungen 298 habe eintreten lassen, und die mir plaudente plebe doctâ in so bubenhafter Weise gestohlen worden ist, bewährt sich auch hier. Թաղել = *ϑαζεl*, ein vulgärarmenisches Wort, zeigt durch sein Թ = ϑ wie durch sein ղ für ճ, daß es einer anderen Periode der Sprache als տաճիկ = *ταčικ* angehört. Թաղել ist allerdings ein persisches تاختن *laufen*, aber weder der Lautbestand noch das Suffix իկ = ی gestattet, տաճիկ mit تاختن zusammenzubringen. Ein ձի տաճիկ ist ein arabisches Pferd.

Endlich տաճկինակ *Kantschuh*, angeblich auch *Bastonade*, ist das persische تازیانه *Geißel*, *Peitsche*, ein Wort, das der von JMohl einst angekrönte JoAuVullers mit تاختن und تازیدن, wie es scheint als

das laufen machende, zusammenbrachte, das aber leicht *Arabisch* bedeuten kann: die Semiten sind ja gegen unterworfene Völker nie sehr gütig gewesen.

Maccab. β 3$_5$ 4$_{4\,22}$ steht Tačkastan für *Φοινίκη*, armenische Studien § 2182.

Wie *Φοινίκη* vom Armenier so übersetzt werden konnte, muß erklärt werden.

Theodoret kennt in der von mir in meiner Uebersicht 91 ausgehobenen Stelle einen in *Φοινίκη* gesprochenen aramäischen Dialekt. Ich habe die über Derartiges nicht unterrichteten Leser meines Buches auf die Notitia dignitatum, Orient § 32, verwiesen. Das genügt für Menschen, die wissen, daß ein Citat gegeben wird, um nachgeschlagen zu werden. Hier berufe ich mich noch auf Partheys Hierocles § 51 52 und Leos in den Mittheilungen 2 176 von mir benutzte *τάξις τῆς προκαθεδρίας τῶν ἁγιωτάτων πατριαρχῶν*.

Es gab zwei *Φοινίκη*, die *παραλία* und die *λιβανησία*. Erstere lag da, wo jeder Schuljunge Phoenicien sucht, die andere enthielt die Städte Emesa, Laodicea (natürlich nicht die Küstenstadt, sondern das südlich von Emesa belegene: KFurrer ZDPV 8 31, Schürer ^{2}1 597), Damascus, Heliopolis = Baalbekk, Abila (*Ἀβελὰ τῆς Φοινίκης μεταξὺ Δαμασκοῦ καὶ Πανεάδος* Eusebius in meinen OS^2 243$_9$), Palmyra. Das *κλίμα Ἰαβρούδων* [Parthey falsch *Ἰαμβρούδων*] liegt um Yabrûd, SocinBenzinger 377, ohne daß die Angabe Leos 990, es habe zu *Φοινίκη* gehört, uns viel hülfe: wichtig ist das *κλίμα Μαγλούλων* (denn so muß man für *Μαγλούδων* Partheys lesen), da es beweist, daß *Φοινίκη* weit nördlich über Damascus hinausgriff (Fischer-Guthes Karte 36° 32′ O), da es den Syrern als ܡܓܠܘܠ bekannt ist, WWrights catalogue 1344, da es noch in später Zeit ξ zeigt.

Die notitia dignitatum kennt equites Saraceni indigenae als Garnison von Betproclis, und equites Saraceni als Garnison von Thelsee. Nur in großem Zusammenhange wird die Frage beantwortet werden können, wann Araber in der *Φοινίκη λιβανησία* so zahlreich wurden, daß man die Provinz Tačkastan *Araberland* nennen durfte.

Das zweite Buch der Maccabäer setzt voraus, daß *Φοινίκη* nicht *κοίλη Συρία* ist, zu der doch nicht wenige der oben aufgeführten Städte gezählt werden müssen. Für den Historiker bleibt hier also noch viel aufzuklären. Für die Armenier scheint *Φοινίκη Araberland* nur in einer Zeit haben heißen zu können, in der ihnen Mitren tragende Araber nur aus der *Φοινίκη λιβανησία* bekannt waren.

Plinius ς 162 Arabes mitrati degunt aut intonso crime. barba abraditur praeterquam in superiore labro: aliis et haec intonsa.

Das heißt, ein Theil der Araber trug den tâǧ, und hieß daher tâǧî, was im pahlawî taǧik lauten mußte.

Wie dieser tâǧ ausgesehen hat, weiß ich nicht. Der Titel des Wörterbuchs tâǧ alʿarûs *die Brautkrone* [EWLane, ZDMG 3 91 93] weist darauf hin, bei Hochzeiten sogar neuerer Zeit ein Bild des alten tâǧ aus der Zeit des Aelius Gallus zu suchen: denn Hochzeitsgebräuche erhalten sich. Allein EWLane, manners and customs of the modern Egyptians, sagt 1 210 nur Upon the head of the bride is placed a small pasteboard cap, or crown. Daß die griechische Kirche für die ihr angehörende Braut ebenfalls eine Krone braucht, soll angemerkt werden.

Die Araber gelten für ein kriegerisches Volk, haben aber nach Wetzsteins Zeugnis die Vorsicht stets für den besseren Theil der Tapferkeit erachtet: die mitra, die einige von ihnen täglich trugen, war gewis kein Helm. Wie der Helm ausgesehen haben kann, muß sich nach der Waffe entscheiden lassen, gegen die er zu schützen hatte, und nach der Art, in der diese Waffe geführt wurde. Ich weiß darüber nichts, wenn es sich um die Zeit des Aelius Gallus, überhaupt um die ältere Kaiserzeit handelt.

Denn die arabische Litteratur ist jung. Alle Welt weiß wann Muḥammad gelebt hat: und was an arabischen Schriften älter als Muḥammad wäre, wie viel und wie authentisch ist es? Ein Paar Notizen über die Helme der Araber gibt GWFreytag, Einleitung in das Studium der arabischen Sprache, 255. Später entlehnten die Araber κῶνος als قونس, meine Symmicta 1 59 $_{24}$ [1871], SFränkel, die aramäischen Fremdwörter im Arabischen 54 241 [1886] [1]).

Das persische تاجيك oder تازيك ist offenbar mit Ταζικ identisch: es bezeichnet Ureinwohner Erâns, solche die in Erân weder Araber noch Türken sind. EQuatremère hat zu Maqrîzîs histoire des sultans mamlouks 2^{2} 154 schon 1845 Ταζικ تازى und تازيك für identisch erklärt. Ich habe nie etwas Anderes in diesen Tâǧîk gesehen, als Leute, welche die altpersische Kopfbedeckung gegen den Fez und Turban der semitischen Eroberer beibehalten haben.

EQuatremère erklärt anders. Er leitet die Worte von طى ab (er schreibt طاى), dem Namen einer Gruppe arabischer Stämme, der den Syrern طيّا *Araber* geliefert habe. Wie »Leute, die weder Araber noch Türken sind« und in OstErân wohnen, von dem arabischen Stamme Θayy haben benannt werden können, wie aus طى je تازيك = تازى hat entstehn können, das dürfen wir den gelehrten

1) Herr Fränkel durfte 238 meine gesammelten Abhandlungen 24$_{29}$ und die armenischen Studien §524 für پ (in deutschen Eigennamen [auch *Gott* ist aus Eran entlehnt] Gund-), 239 meine Beiträge 75$_{10}$ ff. für عسكر = لشكر nicht anführen.

Mann nicht fragen, der nicht einmal an رازى = *Einwohner von Rai* [= راجى, ClHuart, JAP 1885 2 502] als Parallele zu seinem تازى طى gedacht hat. سكزى = *սագճիկ aus Sacastene gebürtig* heißt Rostom = *Uruçtataķma, Symmicta 1 120₂₄. Auch Ķâqânîs von Khanykow JAP 1864 2 155 nicht verstandenes₈ مرغزى gehört hierher: es ist soviel wie مروزى Yâqût 4 507₇ *Margianer* (die gewis sehr boshafte Aeußerung Ķâqânîs verstehe übrigens auch ich nicht). Ich vermuthe, daß زى = جى in راجى = رازى ungefähr dasselbe sei was زى in den Namen der awġânischen Stämme ist. Das زى der Kurden wechselt mit زا, da PLerch in den Mélanges asiatiques 2 631 berâzi *Neffe väterlicher*, xoarzi *Neffe mütterlicher Seite* schreibt, wo Justi 41² brâzâ brâza, 161¹ kvárzá bietet, und auf persisch برادرزاده und خواهرزاده deutet: bei Socin, Curdica 1 285 finde ich brâzîk *Nichte*.

Ich darf nicht wagen, die Gestalt der von den Arabern getragenen Mitren näher anzugeben: schon ARichs Wörterbuch des römischen Alterthums genügt zu erweisen, daß die Alten verschiedene mitrae kannten. Der den Darius begleitende Perser der Mosaik von Pompeii hat eine andere mitra als Paris und die Amazonen. Robert Sinker gibt in dem Dictionary of christian antiquities viel Material und die wichtigste Litteratur.

تغفور gesammelte Abhandlungen 84₈, تكفور Quatremères Maqrîzî 2 2₁₉₀.

Samech.

1

Der Name Samech findet sich als *Σάμεχ* dann und wann bei 𝔊, wo ein alphabetisch geordnetes Stück ihn zu nennen räth. Er findet sich in Folge davon auch bei christlichen Theologen, griechischer wie lateinischer Zunge. Samech mandatum humile, Hieronymus OS² 51₁₃. Samech firmamentum: quidam erectionem vel adiutorium sive fulturam putant, ebenda 79₂₉. Samech firmamentum, licet quidam erectionem vel adiutorium vel fulturam putant, ebenda 191₉. Samech enim auxilium nostro sermone vocatur, die alte Murbacher Hds. in meinem Psalterium Hieronymi xiv₁₅. Vergleiche Omont bibliothèque de l'école des chartes 1881₄₃₉, JBonnard revue des études juives 4 255, ADarmesteter ebenda 259. Isidorus Origines ζ. Hieronymus, Brief an Paula über Psalm ϱιη, Vallarsi¹ 1 144 ff., Ambrosius expositio in psalmum cxviij § 15, und die meist nur aus diesen zweien schöpfenden späteren Ausleger der Psalmen.

Zur Deutung צִי מַךְ mandatum humile[1]), G סָמַךְ *ἐστήριξεν* und

1) צו לצו Isaias 28₁₃ übersetzt Symmachus ἐντολὴ οὐκ ἐντολή, hat also in ל

dessen Zusammensetzungen, *ἐπέθηκεν, ἀντελάβετο, ἀπηρείσατο*: siehe Konrad Kirchers Concordanz. Ueber ܣܡܟ belehrt PSmith. Ein arabisches Aequivalent fehlt. *Σίγμα* müßte [§ 11] *סִמְכָה sein = dem archaischen (das Femininum noch durch ܐ ausdrückenden) ܣܡܟܬ.

2

Ich bin Historiker, meine Gegner sind Rationalisten. Unbequem für beide Theile ist, daß ich als Historiker durch einen Bericht über die Thaten meiner Vorgänger meine Versuche als erlaubt nachweisen muß.

Ueber ס reden HEwald[8] § 50 und FBöttcher 1 § 148 hin und her. IOlshausen schweigt. Herr BStade belehrt uns § 68

ס verhält sich zu ת wie ז zu ד, es entspricht unserem tonlosen *s*, ohne zu wissen, daß in naturâ rerum ד sich zu ז verhält, wie ת zu שׁ, und daß in der Lehre von den Dentalen, Assibilaten, Sibilanten ס gar keine Rolle spielt. Herr König Seite 35

ס ist der tonlose Sibilant, das anlautende *s* im Deutschen.

Man sollte meinen, daß die Herrschaften Moses, David, Isaias, Aggaeus, diese durch viele Jahre von einander getrennten und doch die Buchstaben gleich aussprechenden Männer, bei sich zu Tische gehabt haben, oder daß sie vorEdisonsche Phonographen besitzen, in denen das von jenen Hineingesprochene jeder Zeit erweckbar aufgespeichert liegt.

3

Die Erfinder der semitischen Schrift haben die Entdeckung gemacht, die Consonanten ihrer Rede seien aus dieser Rede als Consonanten ausscheidbar, die Griechen sind ihnen mit der anderen Entdeckung gefolgt, daß es Vokale *α ε η ι ο* gebe, und sie haben den Muth gefunden, *θέσει* die Consonantenzeichen der Semiten ע י ח ה א, für welche sie eine Verwendung in ihrer Consonantenschrift nicht hatten, zu Zeichen der Vokale zu machen.

Was nach der Ausscheidung der zu Vokalen erklärten ע י ח ה א im phoenicischen Alphabete übrig bleibt, entspricht von *β* bis *τ* der Reihe nach den Consonanten der Hellenen.

4

Bemerkungen sind hier nur zu ש ץ ס zu machen.

Ich setze die bekannten Stellen her, auf die es ankommt.

---

die Negation לא gesehen, wie ich Mittheilungen 3 257[r] in dem mit langem a gesprochenen ל des Namens ܠܥܙܪ Λάζαρος. Isaias 33_{21} derselbe Symmachus צי ἐντολή. Da von צוה II kein Nomen çav herzuleiten, und Isaias 33_{21} צי überliefert ist, muß Symmachus צי gelesen haben, das sich zu צוה verhält wie כי *Brandmal* zu כוה, wie צי *Steppe* zu צהה. Daß מך = ܡܟܝܟ ταπεινός sein kann, folgt aus Levit. 25_{39} 27_{8} und aus Aquilas מכתם ταπεινόφρων καὶ ἁπλοῦς Psalm 16_{1}.

Herodot berichtet α 139 von den Persern *τὰ οὐνόματά σφι ἐόντα ὁμοῖα τοῖσι σώμασι καὶ τῇ μεγαλοπρεπείῃ, τελευτῶσι πάντα ἐς τὠυτὸ γράμμα, τὸ Δωριέες μὲν σὰν καλέουσι, Ἴωνες δὲ σίγμα. ἐς τοῦτο διζήμενος εὑρήσεις τῶν Περσέων τὰ οὐνόματα, οὐ τὰ μέν, τὰ δ' οὔ, ἀλλὰ πάντα.*

Herr FrSpiegel hat 1867 in seiner Grammatik der altbaktrischen [wo gibt es NeuBaktrisch?] Sprache § 47 48 104 und 1881 in seinem Buche über die altpersischen Keilinschriften² 172 [1]) die Notiz Herodots nicht erwähnt. Herodots Angabe wird durch den Befund nicht bestätigt, soweit der Awesta und die Keilinschriften in Betracht kommen. Nur auf *u* oder *i* ausgehende Mannsnamen haben einen auf einen Sibilanten ausgehenden Nominativ. Das alte Testament aber zeigt, daß wenigstens auch der Name des Xerxes [2]) der von Herodot aufgestellten Regel folgte: denn zu כֹּרֶשׁ = Kuru-š und דָּרְיָוֶשׁ = Dârayâwu-š gesellt sich אֲחַשְׁוֵרוֹשׁ als Nominativ von kšayâršâ = շաւարշ armenische Studien § 1688 [persische Studien 76].

ܡܓܘܫܐ der Syrer kann *μάγος* sein, wie ܐܕܫܐ *εἶδος* ist, und ܦܘܫܐ *παῦσαι*: es kann aber auch aus der Beobachtung Herodots erklärt werden. ܚܣܪ aus *αἰσχρός*.

Aus Herodots Worten folgt, daß dorisches *σαν*, ionisches *σιγμα*, das Nominativzeichen der persischen Mannsnamen und das ש der Hebräer einen und denselben Laut hatten.

Athenaeus bespricht *ια* 30 die *γραμματικὰ ἐκπώματα*, und citiert dabei Verse des Tragikers Achaeus, in denen *σαν* als ein im Namen des Gottes *Διώνυσος* vorkommender Buchstabe erwähnt wird.

---

1) Eine Schmach für Deutschland ist es, daß Spiegel noch 1881 Seite 139 dem verstorbenen ChrLassen »die Entdeckung« zuschreiben kann, daß »die bei Niebuhr mit I bezeichnete Inschrift ein Völkerverzeichnis enthalte«. Nicht ChrLassen hat das entdeckt, sondern Eugène Burnouf. Dies aufs Neue hervorzuheben, ist gerade jetzt Pflicht, da EBurnoufs Briefe, von seiner Tochter gesammelt, so eben erschienen sind, und das Bild des edlen Mannes, der von einem in Deutschland wohnenden Norweger so ehrlos bestohlen worden ist, frisch vor die Seele rufen. Ich habe schwer dafür zu leiden gehabt, daß ich im Januar 1854 vor dem Hefte »zur Urgeschichte der Armenier«, nachdem AHoltzmann aus Lassens eigenhändigen Briefen an PvBohlen des Bonner Professors Büberei öffentlich erwiesen hatte, den Satz drucken hieß »Nur einen großen Diebstahl hat die Zunft ohne obligate sittliche Entrüstung gelassen«. Meine Symmicta 2 129 ff., Mittheilungen 2 314 ff.. Lassens an PvBohlen geschriebener Satz »Burnouf hat die Namen aller altpersischen Provinzen aus einer der großen Keilinschriften entziffert« geht eben auf Niebuhrs I, die bei Herrn von Spiegel auf Seite 49 abgedruckt steht.

2) Herodot ς 98 ist von mir in den gesammelten Abhandlungen 182 besprochen worden: ich wünschte wohl, daß ein Philologe sich ansähe was da steht: es ist mit dem 45 Gesagten, mit Purim 51 ff. 40ʳ und Agathangelus 136 ff. zusammen zu benutzen.

Die bei Achaeus sprechenden *Σάτυροι*

τὸ σὰν ἀντὶ τοῦ σίγμα δωρικῶς εἰρήκασιν. οἱ γὰρ μουσικοί, καθάπερ πολλάκις Ἀριστόξενός φησι, τὸ σίγμα λέγειν παρῃτοῦντο διὰ τὸ σκληρόστομον εἶναι καὶ ἀνεπιτήδειον αὐλῷ, τὸ δὲ ῥῶ διὰ τὸ εὔκολον πολλάκις παραλαμβάνουσι. καὶ τοὺς ἵππους τοὺς τὸ ϶[1]*) ἐγκεχαραγμένον ἔχοντας σαμφόρας καλοῦσιν,*

was aus des Aristophanes Wolken 122 belegt wird.

καὶ Πίνδαρος δὲ φησὶ

πρὶν μὲν εἷρπε σχοινοτένειά τ᾽ ἀοιδὰ
καὶ τὸ σὰν κίβδηλον ἀπὸ στομάτων.

Es darf aus Herodots Worten allerdings gefolgert werden, daß *σὰν* und *σίγμα* ihm als gleichlautend galten. Aus den von Athenaeus beigebrachten Zeugnissen des Aristoxenus ergibt sich aber das Gegentheil: diesem Sachverständigen ist *σαν* für die Musik bequemer als *σιγμα* erschienen. Distingue tempora [et regiones], et concordabit scriptura.

Später ist *σαν* der am WortEnde, *σιγμα* der in der Wortmitte stehende Sibilant. Philosophumena ϛ 49: vergleiche Epiphanius *λδ* 8, Irenaeus *α* 8_{11} = *α* 12_{1} = *α* 15_{1}.

5

צ ist wie שׁ und ס in die Alphabete Griechenlands und Italiens übergegangen: es ist hier nicht meine Aufgabe über צ zu sprechen, da eine Verweisung auf AKirchhoffs bekanntes Buch und auf WCorssens Werk über Aussprache, Vokalismus und Betonung der lateinischen Sprache^{2} 1 277 für mich ausreicht. Ich merke an, daß 𝔊 den Namen des צ *τσαδη*, Hieronymus (ich habe nur wenige Hdss. zur Verfügung gehabt) OS^{2} 79_{1} 191_{12} Sade schreibt, und füge zu den in den Mittheilungen 1 234 384 von mir veröffentlichten Gleichungen צֳרִי صرو [Uebersicht 179^{r} 2_{8}] *στύρ-αξ* und חֵץ *ὀϊστός* die neue [illegible] *ἄγρωστι-ς*. Ueber die צ und שׁ vertretenden griechischen Zeichen wird meinem Leserkreise genügen was mir selbst genügt hat, Boeckhs Staatshaushaltung der Athener, an den durch das Register der anderen Ausgabe unter *Σ* zu suchenden Stellen.

6

Wie sich *σίγμα* und *σαν*, ס und שׁ wirklich zu einander verhalten, wird zu erforschen sein: aber man kann ohne Maßstab nicht messen. Man kann dies Verhältnis untersuchen, indem man ס und שׁ haltende Wörter untersucht, die in nichtSemitischer Schrift — der aegyptischen, assyrischen, griechischen — aufgezeichnet sind,

1) Ich habe ϶ eingesetzt, ich hätte auch שׁ einsetzen können. Noch Kaibel druckt C.

und indem man zweitens innerhalb des Semitismus studiert, wie ס שׂ שׁ sich zu einander verhalten.

Aber was wissen wir von der Aussprache der aegyptischen, assyrischen, griechischen Buchstaben?

Ich stehe der Aegyptologie und Assyriologie als Laie, aber doch mit dem Bewußtsein gegenüber, daß der Stand unserer Kenntnisse noch nicht hoch genug ist, um für Untersuchungen wie die hier zu führende, weit genug sehen zu lassen. Die Eine Bemerkung, die GSteindorff in den von FDelitzsch und PHaupt herausgegebenen Beiträgen zur Assyriologie 1 344 über einen der verständlichsten Eigennamen פתרס = Patarisi = peterês *Südland* macht, wird zu meiner Entschuldigung ausreichen. Ich will aber noch hinzufügen, daß mir ein š in den Pronominibus šu ši šunu (Delitzsch § 56) gegen הוא הוא هم an und für sich, und darum unwahrscheinlich ist, weil das altAegyptische bei Adolf Erman, die Sprache des Papyrus Westcar 21, als Aequivalent des »šunu« sn zeigt: ich kann mich von dem Glauben nicht losmachen, daß das älteste Aegyptische mit dem Semitischen näher zusammenhängt, als jetzt angenommen wird. Ich halte es für sehr schädlich, daß man sich gewöhnt hat, das Assyrische uns nur in lateinischem Gewande vorzustellen: der Entscheidung des Lesers ist dadurch noch weit schlimmer als in den von mir in den Mittheilungen 1 157 zur Sprache gebrachten Fällen (շ und յ) vorgegriffen: die Originalgestalt des Assyrischen nach den großen Londoner Drucken zu ermitteln habe Ich keine Muße.

Հերիսայ = עֲרִיסָה neben ܐܪܣܢ Mittheilungen 3 208. շ = ܫ שׁ ש Mittheilungen 2 15 3 23 4 192 und sonst.

Ich habe früher, wann ich für שׁ š setzte, nie einen Vorbehalt gemacht, da ich die allgemeine Annahme, daß שׁ š bedeute, als Theologe zu untersuchen keine Veranlassung gehabt hatte. Jetzt mache ich einen Vorbehalt, weil ich nicht mehr für sicher halte, daß שׁ den Laut š = sch überall und von jeher gehabt hat.

Ich habe 1883 (jetzt Mittheilungen 1 152) aus des IFaber Stapulensis Psalterium (das 1509 erschien) die Notiz ausgezogen, daß die am Rheine vorkommenden Juden für שׁ š, die spanischen Juden s sagten. Herr DKaufmann »machte« den Herrn DHMüller, der natürlich von dem so eben Citierten nichts wissen darf, »aufmerksam« [derselbe Idiotismus wie im Dialekte von OberSitzko, Mittheilungen 2 179], daß die in Littauen wohnenden Juden שׁ wie s, שׂ wie š sprechen. Seit 1864 konnte man aus ZDMG 18 338 ff. [jetzt HLFleischer »kleinere« Schriften 3 436 ff.] wissen, daß die im Maġrib (dem Kaiserreiche Marokko) vorhandenen Juden, wann sie (was

oft geschieht) arabisch mit hebräischen Buchstaben schreiben, ס für ص und ش, ץ für س, ש̇ für س setzen. Fleischer macht die Bemerkung

Die Vertauschung des . . . ش mit س und des س mit ش

das ist elend unlogisch ausgedrückt

gehört speciell dem Jüdisch-Arabischen

so steht wirklich da

an, und es ist merkwürdig, daß zwischen den beiden . . . Buchstaben hier dasselbe Verhältniss wie im Althebräischen und Arabischen wiederkehrt.

Auch hier läßt die Logik grüßen.

Fleischer versichert die Sache »merkwürdig« zu finden, wie er denn je und je auf dem Standpunkte der MirabiliaSchreiber gestanden hat, und meint damit alles Nothwendige gethan zu haben.

Auf das von mir am 15. 4. 1887 (Mittheilungen 2 259) über ش س Vorgetragene dürfen die kleinen Semitisten nicht Rücksicht nehmen, da sonst der Ruhm der »großen« Semitisten in die Brüche gienge. Das Alphabet dient auch als Zahlzeichenreihe. Auf ن = ν = 50 folgt im Nasḳî سعفص قرشت, in der Schrift des Maġrib, die ich auf das Kûfî zurückgeführt habe, صعفض قرست. Das heißt für den, der so etwas zu lesen versteht, ס ist bei einem Theile der Araber durch س, bei einem anderen Theile durch ص, ש̇ bei einem Theile der Araber durch ش, bei einem anderen Theile, der ش als neu erfundenen Buchstaben an das Ende des Alphabets stellt, durch س vertreten.

Ich habe im Mai 1882 ς, das Ende des Wortes ἀριθμός, also das oben aus den Philosophumena von mir nachgewiesene σαν, als das Vorbild des ش erkannt, durch das die arabischen Mathematiker die Unbekannte bezeichnen: ich habe vermuthet, daß ش ϣει genannt worden, und so شيء = cosa (die Kos des sechszehnten Jahrhunderts) der Name für die Unbekannte geworden sei. Ξ hieß nicht ξι, sondern ξει: der Murbacher Psalter vor meinem Psalterium Hieronymi xv 16 xei gradum viduae moderatur rite secundum, wozu ich der ersten Facultät durch Citierung der Constitutiones γ 1 zu der Uebersetzung verhelfen zu müssen geglaubt habe »Eine Witwe darf nicht vor ihrem sechzigsten Lebensjahre in das χηρικόν der Kirche aufgenommen werden«. Ich will erwähnen, daß die Syrer εἶδος als ܐܝܕܘܦ haben, wo ܘ nur Lesemutter ist: auffällig ist (mit Artikel) ܐܕܦܐ.

Die Juden des Maġrib haben nicht in der Schrift »س mit ش, س mit ش, ص mit س« vertauscht, sondern sie haben ס bald wie ص, bald wie ش, ץ w ieض [punktiert], ש̇ wie س auszusprechen gelernt. Das heißt, die ihnen gewordene Ueberlieferung war eine andere als die Schule des †† Gesenius und Ewald, die sich grundsätzlich um

Geschichte nicht kümmert, annimmt. Hingegen eine andere Ueberlieferung anders dachte.

Welche der beiden vorhandenen Aussprachen die ursprüngliche ist, weiß noch Niemand, wird vielleicht auch nie jemand wissen. Die Frage nach den »Sibilanten« der semitischen Sprachen wird aber nicht eher beantwortet werden dürfen, als bis der von mir gestellten Vorfrage ihr Recht geworden sein wird. Die Wahrheitsliebe unserer »großen Männer« ist nicht erheblich: man wird sich schon Zeit nehmen und vorläufig zu der Waffe greifen (deutsche Schriften, Vorrede), die am nächsten liegt.

Wenn ich nun auf das Edessenische und das Targumische Bezug nehme, so finde ich, daß in

שְׁבָכָה	شبكة	ܫܒܟܐ [σαβαχα G Regn. δ 25$_{17}$]
שָׁבַע	شبع	ܫܒܥ
שָׁהַד	شهد	ܫܗܕ
שָׁב	شب	ܫܒ
שִׁיחַ	شيح	ܫܝܚ [Orientalia 2 53 ff.]
שְׁמָאל	شمال	ܫܡܐܠ
שָׁנָא	شنء	ܫܢܐ [𝔗 besser סני]
שַׂעַר	شعر	ܫܥܪ
שָׁפָה	شفة	ܫܦܐ [oft ܫܦܬܐ : PSmith]

ש von den im Maġrib und in Littauen wohnenden Juden so gesprochen worden ist, daß sein Laut mit dem in den entsprechenden arabischen Vokabeln gebrauchten identisch war, daß ihm aber im Aramäischen, sowohl dem Edessas wie dem Palaestinas (denn der Targum ist in Palaestina zu Hause, nicht in Babylonien) ein ס ܣ gegenübersteht.

Wenn ich danach folgende Reihe überlege

שְׁאַל	سال	ܫܐܠ
שֶׂבַע	سبع	ܣܒܥ
שִׁבֹּלֶת	سنبلة	ܣܒܠܬܐ
שָׁלֵם	سلام	ܫܠܡ
שָׁנָה	سنة	ܫܢܬܐ

so erhellt, daß ש von den im Maġrib, in Spanien, in Littauen wohnenden Juden so gesprochen wurde, daß sein Laut mit dem in den entsprechenden arabischen Vokabeln identisch war, daß ihm aber im Aramäischen, sowohl dem Edessas wie dem Palaestinas, ein ܫ gegenübersteht.

Daß die Juden Littauens mit denen Maroccos und Spaniens übereinstimmen, ist ein Beweis dafür, daß wir es mit einer wirklichen

Ueberlieferung zu thun haben. Es muß untersucht werden, »woher haben die am Rheine angesiedelten Juden den ihnen 1509 von Jacques Lefèvre d'Étaples bezeugten Laut š für שׁ?«.

Was Herr Schreiner in des Herrn Stade Zeitschrift 6 213—259 »zur Geschichte der Aussprache des Hebräischen« geschrieben, hilft uns sehr wenig.

Wären nicht die littauischen Juden, so wäre vielleicht die Annahme gestattet, daß die unter Arabern wohnenden Israeliten שָׂהֵד darum šáhéᴅ lasen, weil die Araber ihnen alle Tage šahida vorsprachen. Man kann aber auch behaupten, die nach Deutschland verschlagenen Juden seien aus aramäischen Gegenden hergekommen, und hätten dort שָׂהֵד nach ܣܗܕ gemodelt. »Auffassen« läßt sich Alles.

In den von französischen Juden hebräisch geschriebenen Büchern finden sich französische Vokabeln in hebräischer Schrift. Ein Glossar, das her gehört, ist durch Herr ANeubauer im ersten Bande der romanischen Studien des Herrn Boehmer veröffentlicht worden: zusammenfassend arbeitete Herr Darmesteter, glosses et glossaires hébreux français [Paris 1878] (über ihn ABerliner in meinen Mittheilungen 2 290r). Man wird in diesen Glossen und Glossaren für das französische s nicht ס, sondern ש finden.

Spanien liefert ähnliches Material.

Natürlich wird man die »rabbinische« Bibel, die man besitzt, bei Iudices 12 6 einsehen. Ich gewinne dadurch aus Yiçḥáqî (Buxtorf Blatt רעח v), daß die Ephraimiten מגמגמין: und David Qamḥî (ebenda) braucht denselben Ausdruck: Levy² 1 339 vergleicht جمجم [= *he spoke indistinctly* Lane 449¹ = غمغم Lane 2289³, Ḥarîzî Durra bei SdeSacy Anthologie 64 1]. David Qamḥî macht dann die mich hier viel angehende Bemerkung über die Ephraimiten אולי היה אויר ארצם גורם להם זה כמו אנשי צרפת שאינן מבינים לקרא השין וקוראין אותה כמו תיו רפה. Diese Stelle citiert Lipman Zunz, die synagogale Poesie des Mittelalters 2 [= die Ritus des synagogalen Gottesdiensts] 55 ohne sie auszuschreiben (ich verdanke das Citat Herrn Schreiner ZATW 6 258r), wo er lehrt

> in Aegypten, Palästina, Magreb, überhaupt bei den mostarabischen

مستعرب hier nicht christiano, sondern Judeo mezclado con los Alaraves, meine Evangelien arabisch xvj: ein in Deutschland lebender Jude wäre مستنمسى

> Gemeinden, wie man im Gegensatze zu den aus Europa eingewanderten die Eingeborenen in Aegypten, Tripolis, Syrien nennt, die später auch unter dem Namen Moriscos vorkom-

men. Sie unterscheiden sich in manchen bürgerlichen Einrichtungen, in der Sprache, in der Aussprache des Lautes Schin, welches die spanischen und französischen nicht von Sin unterschieden.

David Qamḥî (sein Satz steht oben) sagt von den jüdischen Gästen ÇáreṖaTs aus, daß sie statt שׂ (ohne Punkt) weiches ת sprachen. Was LZunz weiß, dankt er also nicht diesem David Qamḥî, den er mithin gar nicht nennen durfte. Vielleicht steht es bei »Asulai בִּרְכֵי יוֹסֵף zu Tur 1 50«, welches Buch ich nicht nachschlagen kann. בִּרְכֵי יוֹסֵף *Kniee Josephs* stammt aus Genesis 50$_{23}$: der Titel sagt nur aus, daß das Buch von einem Joseph verfaßt worden ist. Den Titel ברכי יוסף bespricht Beniacob unter § 629: Ḥayyîm Iôsép Dáwîd Azûlâî aus Livorno hat ספרי שם הגדולים ועד לחכמים geschrieben, aus deren Wilnaer Drucke von 1852 ich mich nicht habe unterrichten können: seine in Livorno gedruckte *Kniee Josephs* sind mir unzugänglich. Meine Wilnaer Ausgabe der ארבע טורים enthält nichts mir hier Brauchbares. DHoffmann, der Schulchan Aruch [Berlin 1885], hat mich im Stiche gelassen: ebenso des Herrn von Pavly Uebersetzung 1 212 ff. und Loewes Uebersetzung 4 20 ff.[1]). Es wird mithin des † Zunz Ausgabe noch von Kundigeren auf ihre Begründung zu prüfen sein.

Auf einen in Chartres liegenden Psalter, der den Urtext in lateinischer Umschreibung bietet, verwies ich — ohne Nutzen, natürlich! — in der Vorrede zu meinem Psalterium iuxta Hebraeos Hieronymi.

Man wird sich aber bei diesen Untersuchungen gegenwärtig zu halten haben, daß wer die 1891 irgendwo — dies Wort gehört nothwendig in meinen Text — übliche Aussprache eines französischen Buchstaben kennt, darum noch lange nicht weiß, wie ihn Yiçḥáqî 1050 in Troyes ausgesprochen hat.

JFoerster, spanische Sprachlehre 13 § 9

wir finden im diálogo de las lenguas angegeben »en muchas partes de Castilla convierten la s en j [x] y por sastre dicen xastre« . . . d. h. man sprach es wie sch, denn so klang damals j oder x.

GrMayans y Siscar, origenes de la lengua española, Madrid 1737, 1 150

S, mudada en J, que tiene el mismo valor que la G gutural.

1) Es handelt sich in den Paragraphen 46 bis 57 um das Hersagen der vorgeschriebenen Segenssprüche. Bei dieser Gelegenheit konnte es aber wohl kommen, daß die Aussprache gewisser Buchstaben berührt wurde. Von »Chajim Josef David Asulai« (etwa 1726 bis 1807) spricht DCassel, Lehrbuch 419.

A sapone jabon, salgma jalma, a Salone Jalòn rio, Saetabis Jativa, sirop Arabe jarope, a succo jugo .... Los Arabes regularmente pronuncian Jota donde nosotros S, diciendo Jan por San, Geñor por Señor, Gimon por Simon, pajas por passas.

Es genügt, im Yâqût, der seine Namen bequem nach den Anfangsbuchstaben ordnet, اشبونة = لشبون = Olyssipo = Lissabon, اشبيلية = Hispalis = Sevilla und die vielen mit شنت = Sant anhebenden Artikel aufzuschlagen, um zu wissen, daß das hispanische S dem Yâqût als ش zugekommen ist, die Hispanier also vor Yâqût s wie š gesprochen haben. ش ist ohne Zweifel š, die Namenformen sind durch die Reihe, in der sie stehn, sicher.

Vorläufig ist unter Vorbehalt (unten warne ich) anzusetzen: 𐤎 wurde s gesprochen, und ist mit س identisch: für 𐤎 haben die Aramäer 𐡎. 𐤔 wurde š gesprochen, und ist mit ش identisch: für 𐤔 = ش haben die Aramäer 𐡔.

7

Es läßt sich denken, daß eine Hieroglyphenschrift, die vielleicht allerhand Geheimnisse anzudeuten oder Winke zu geben hätte, die auf gefällige, dem vorhandenen Raume entsprechende Anordnung ihrer Zeilen zu sinnen veranlaßt wäre, mehr als Ein Zeichen für ein und dasselbe Wort vorräthig hielte. Es läßt sich denken, daß ein Volk, das eine entlehnte Schrift verwandte, ebenso wohl überflüssigen Reichthum vor sich sähe, wie ich sehr viel mehr ذ und ظ von dem Gießzettellosen Drugulin erhalten habe, als ich verwenden kann: die Griechen haben ja drei Formen des »σ« zur Verfügung gehabt, 𐤎 𐤑 𐤔. Es läßt sich aber nicht denken, daß die Semiten, wenn sie sich selbst eine Schrift erfanden, 𐤎 erfunden haben sollten, wenn sie für den durch 𐤎 bezeichneten Laut schon 𐤔 oder 𐤑 besaßen. Mit anderen Worten: ist 𐤔 oder 𐤑 *s*, so ist 𐤎 nicht *s*. Und umgekehrt.

Vergleichen wir das griechische Alphabet mit dem semitischen, so ist 𐤎 = ξ. So kann jeder Secundaner schließen. Ursprünglich ist 𐤎 ξ, schließt ein vorsichtiger Mann, und wenn er so viel grundböses und gedankenloses Volk vor sich hat, wie der arme Schreiber dieser Zeilen, so erläutert er sein »ursprünglich« durch die Anmerkung »so wenig aus dem Cicerone wie es Iosue Carducci oder Sansone (vulgo Salvatore) Barzilai der Galaadit spricht, folgt, daß *Κικέρων* der Griechen unrichtig sei, so wenig folgt daraus, daß 𐤎, das, als vor der ersten Olympiade die Griechen es übernahmen, ξ ausdrückte, auch für Moses Maimonides oder Abraham Berliner wie ξ klang und klingt.

Als PHaupt was ich in meinen Symmicta 1 115 ss geschrieben,

gelesen hatte, theilte er mir — NGGW 1883 99 r — mit (ich habe das in den Mittheilungen 1 152 weiter gegeben), daß 1866 auch EHinks die Secundanergleichung ס = ξ aufgestellt habe.

8

Seit Adolf Kirchhoffs bekanntem Buche ist leicht zu ersehen, daß die griechische Welt, was das von ihr gebrauchte Alphabet anlangt, in vier große Gruppen zerfällt:
in die, welche die nichtphoenicischen Zeichen φχψ und das phoenicische ξ nicht verwendet:
in die, welche ξ als ξ, und die nichtphoenicischen Zeichen φχψ in in dem uns geläufigen Sinne braucht:
in die, welche φ und χ wie wir benutzt, aber ξ durch χσ und ψ durch φσ ersetzt:
in die, welche ξ als x nicht kennt, und den nicht phoenicischen Zeichen φχψ die Werthung von φξψ verleiht,
wozu anzumerken lohnt, daß das lateinische X sein Dasein dieser letzten Uebung dankt.

Die Epigraphiker haben sich mit der Feststellung dieser Thatsache begnügt: nach dem Grunde der allgemein zugestandenen Thatsache hat meines Wissens noch keiner von ihnen gefragt.

Mir folgt aus dem von AKirchhoff formulierten Thatbestande, daß ס, so wie es ursprünglich gesprochen wurde, ein nicht allen Griechen bekannter oder genehmer Laut war. Wenn als Regel ausgesprochen wird (eine Ausnahme bei FBechtel, die Inschriften des ionischen Dialekts 41 r), daß ξ da nicht vorkommt wo man χσ schrieb, so gilt mir als ausgemacht, daß das ס, wie es zur Zeit der Uebernahme des phoenicischen Alphabets bei den Phoeniciern lautete, nicht χσ lautete, sondern irgendwie, nur nicht so, daß ein Grieche des das Alphabet übernehmenden Stammes — dieser Genetiv ist das Wesentliche — den Laut in seiner Sprache vorfand.

Es folgt für mich aus der Vorlage weiter, daß da wo ξ geschrieben wurde, ursprünglich der Laut des ξ mit dem — phoenicischen? — ס sich deckte.

9

Zu meinem Bedauern bin ich, um mich über die älteste Schrift der Semiten zu belehren, auf die Tafel, die Euting 1882 Chwolsons Corpus inscriptionum hebraicarum, und auf die andere Tafel angewiesen, die eben dieser Euting 1889 des Herrn Kautzsch »Gesenius« beigegeben hat. Kautzsch lobte erstere 1884 in seiner Grammatik des biblisch-Aramäischen § 9, er fügte die letztere der Jubelausgabe seines Gesenius an, muß sie also für tadellos erklärt haben, und

Kautzsch ist, wie sein Buch über die Moabitica lehrt, Epigraphiker von Beruf. Das nabatäische ס bespricht ESachau, ZDMG 38 537.

Mir ist allerdings gewis, daß Herr Euting 1889 die auf dem MesaSteine vorkommende Form des ס noch ebenso unrichtig widergibt wie 1882. Bei Smend-Socin 12 ואסחבה, 18 ואסחביהם, 21 לספת 25 באסרן, 26 המסלת, 29 יספתי (Smend-Socin arbeiteten 3 Jahre vor 1889) erblicke ich als moabitisch nicht das von Herrn Euting vorgestellte ס, sondern das ס der Cyprischen Fragmenta aenea, die Herr Euting auf Chwolsons Tafel »circa 700« ansetzt.

Man darf nicht so unbillig sein, zu verlangen, daß ich, als Mann von 61 Jahren gezwungen umzusatteln und den Semitisten zu machen, alsbald in allen Sätteln der Semologie gerecht sein solle: ich komme den semologischen Kattenbusch zuvor, und gestehe freiwillig ein, daß ich dilettiere: müssen die Männer der ersten Facultät entschuldigen, daß ich ab und zu etwa über das Weihnachtsfest oder den Bibeltext dilettiere, so können die Herren des vierten Ordo sehr wohl eine Duldung für meinen Dilettantismus in Semiticis gestatten.

Ich finde nun von Eutings »Meisterhand« zwei Formen des ס gezeichnet, die Ich für verschiedene Werthe anspreche, die in Moab und auf Cypern übliche, welche ersichtlich den Griechen ihr Ξ geliefert hat, und die in Phoenicien usw. vorkommende, welche ich für eine Ligatur aus ק und ש ansehe, welche die Griechen, weil sie Qoppa, nicht Kappa, enthielt, nicht brauchen konnten. So vermuthe ich. Wenn ich von Vermuthen rede, meine ich Vermuthen. Die an der Quelle Siloe gefundene Inschrift enthält kein ס.

10

Ich habe 1881 in den Mittheilungen 1 69 HLFleischers Dissertatio de glossis Habichtianis 58, WSpittas Grammatik 18, GAWallin ZDMG 9 60, Sacys anthologie grammaticale 267 zu dem Erweise citiert, daß die عامة zwischen س und ش anders wechselt als die لغة. Fleischer bemerkt aaO., س werde mitunter in ش verwandelt, ut per pleniorem quandam pronuntiationem ipsa significatio quasi plenior fiat et validior. Ich habe bemerkt, daß Wallins von mir citierter Aufsatz »für ס = ξ ganz besonders in Betracht kommt«. Länger als zehn Jahre will ich nun nicht abwarten, daß ein weniger als ich überbürdeter Mensch diese Bemerkung ausnutze: ich nutze sie selbst aus, wenigstens so weit Ich es vermag.

Gerade bei den echtesten Beduinen in Nagd und Irâq wird für ك jetzt, wie das vor Alters beim Stamme Rabî: der Fall war, war, kš gesprochen. Auch ks kommt vor. Ferner wird k zu tš, schließlich zu ts.

Ich setze die Gleichung an: ס zu כ wie צ zu ק. War das ס

irgend welcher Semiten — ich bitte die Gerechten, namentlich die Lautphysiologen, um Vergebung, wenn der Ausdruck dem gelahrten Jargon des laufenden Semesters nicht entspricht — war ס in der von Wallin geschilderten Weise eine Quetschung des כ, so konnten die Griechen dieses ס für ξ = kš schreiben. צ ist entweder Assibiation von ܛ = ظ oder Quetschung von ק = č, Uebersicht 30ʳ 2_6 129ʳ 2_1: die Qarräer sprechen צ č, JHalévy Revue des études juives 21 233 Ende, während in den Texten meiner persischen Studien erst das punktierte צ das č der Perser vertritt.

Bewährt sich was ich oben über שׁ und שׂ vorgetragen habe, so zeigt das Aramäische diesen zwei Buchstaben gegenüber eine Lautverschiebung. Es verhielte sich aber שׂ = س zu ܣ wie שׂ = ش zu ܫ, nicht wie שׁ = ث zu ܬ oder wie צ = ظ zu ܛ, nicht wie ז = ذ zu ܕ (wo die Stufen vorhanden sind), noch auch wie צ = ض = ܥ, oder ק = ا der Badawiyyîna (wo eine Lautspaltung [ç + ע = ض, k + ע = ק], nicht eine Lautverschiebung vorliegt).

Wie das ܫ der Aramäer in ältester Zeit ausgesprochen worden ist, weiß keine Seele: daß es spitz lautete, folgt nur daraus, daß ܣ dick lautete: es wäre kein gesunder Sachverhalt, wenn ܫ von ش nicht in derselben Entfernung abstände wie ܣ von س.

Ich muß, um nicht mehr unseres knappen und theuren Raumes zu verbrauchen, als unumgänglich ist, hier abbrechen, gebe aber noch zu bedenken, daß angeblich der ganze Canon, jedenfalls ein nicht kleiner Theil des Canons aus der althebräischen Schrift in die sogenannte assyrische, jetzt von uns benutzte Schrift umgeschrieben worden ist: man lese über כתב דעץ und des Epiphanius »deession« GHoffmann 1881 in ZWAT 1 334 ff. Der einfache senkrechte Keil der Assyrer, auf den ich mich 1877 in den armenischen Studien § 2274ʳ zur Erläuterung des von mir gegen רעץ aus Nathans עָרוּךְ festgestellten דעץ berufen habe, steht 1889 bei FDelitzsch, Grammatik 35 Nummer 204, als diš ṭiš tiz tiš. Daß bei dieser Umschreibung allerhand vorgekommen ist was uns ärmsten Semologen, namentlich mir, dem ἔκτρωμα dieser Gesellschaft, unsere Arbeit erschwert, ist einem Manne nicht zweifelhaft, der, selbstloser als die regierenden Meister der Zunft, so viele Handschriften abgeschrieben und verglichen, und so viele Correcturbogen gelesen hat wie ich.

Ich weiß noch wie heute, mit welcher Freude Ernst Freiherr von Leutsch mir als Geschenk den Aufsatz über die cyprischen Inschriften brachte, den HLAhrens in den Band 35 des Philologus geschrieben hat. Ahrens bespricht § 13, 22 ff., das Zeichen, das Iohannes Brandis unter Nummer 14 (SBAW 1873_{658}) mit σ umschreibt, das Moriz Schmidt zuerst ξ, dann σσ oder σ gelesen hat;

Ahrens selbst lehrt 24, es sei nicht ein ξ, sondern ein dickerer Zischlaut gemeint.

Die cyprische Schrift ist stark stylisiert. In jenem hier nicht zu druckenden Zeichen erblicke ich das aus ק und ש zusammengesetzte ס Phoeniciens, das vom Ξ der Moabiter nicht bloß der Form nach verschieden sein dürfte.

Ahrens 23 zieht den von Hesychius erhaltenen paphischen Satz zur Erläuterung heran *ἐσπόθ' ἕρπες* = [*ἐκ*] *πόθεν ἥκεις* [= *ἕρπεις*]. Durch Georg Meyer, dessen ich in meiner Abhandlung NeuGriechisches aus KleinAsien 6 gedachte, habe ich (Bezzenbergers Beiträge zur Kunde der indogermanischen Sprachen **10** 177) erfahren, daß das karische *-ασσις* mit *-αξις* wechselt, also *'Αρύαξις* mit *'Αρύασσις*, *Βρύαξις* mit *Βρύασσις*, und daß wer archaisiert, ξ, nicht *σσ*, anwendet.

Da hätten wir also den Weg, auf dem von qs zu ss gegangen worden ist, vor uns. Ueber *σσ* der griechischen Steine FBlaß in der Satura philologa für Herman Sauppe 121 ff.

Falls סוס (Lotz, die Inschriften Tiglathpilesers des Ersten 160 ff.), das zuerst den Elephanten, erst nachher das Ross bezeichnete, ein Fremdwort ist, so kann die Sprache, der es entnommen wurde, noch einmal die Probe auf meine Rechnung machen. סוף ist ϫοογϥ (Peyron 400 [1]), HBrugsch in meinen Mittheilungen 2 261.

Aus dem Buche der Richter 12 6 ist bekannt, daß die östlich vom Jordan wohnenden Galaaditer שִׁבֹּלֶת, die westlich von ihm sitzenden Ephraimiten סִבֹּלֶת sagten, und letztere gar nicht im Stande waren שִׁבֹּלֶת auszusprechen. Mas:ûdî berichtet in der Histoire des Sultans Mamlouks EQuatremères 2 2 189, daß im Jahre 1302 die Ḥaçarî des Ça:îd [?] daran erkannt wurden, daß sie die ق in دقيق richtig leisten konnten.

Die Nachricht, daß Ephraim das ש Galaads durch ס ersetzte, oder aber Galaad das ס Ephraims durch ש — denn welche der beiden Formulierungen die richtige ist, weiß noch niemand: da auch die Indäer שִׁבֹּלֶת haben, ist freilich die erste die wahrscheinlichere —, diese Nachricht ist werthvoll. Sie sagt allerdings nichts über die Lautung aus, aber sie mahnt, erstens, vorsichtig in der Annahme des oben über שׂ שׁ Vorgetragenen zu sein. Denn š kann sich leichter sowohl zu s als zu *σ-χ* ändern, als s zu x oder etwas Aehnlichem. Bei *σ-χ* denke ich an die Geschichte von dem Münsterländer, der im Palais Royal einen umhersuchenden Herrn mit der Frage anredete Que s-χers-χez Vous?, und die Antwort erhielt Je s-χers-χe mon s-χapeau, worauf dann das Gespräch auf Münsterländisch fortgesetzt wurde. Die Geschichte mahnt zweitens, vorsichtig in der Schätzung der Lautverschiebungen zu sein. Das hasa des c

wie h sprechenden Florentiners verhält sich zu casa nicht, wie das deutsche Hund zum griechischen *κύων*: Galaaditer und Ephraimiten bleiben trotz des Wechsels von ש und ס beide Israeliten.

11

Σίγμα scheint mir zu beweisen, daß ܣܡܟܬ nicht der ursprüngliche Namen des ξ ist: habe ich darin Recht, so ist auch der Satz ܣܡܟ nicht in der ursprünglichen Gestalt erhalten. Auf die Gefahr hin, einem ribaldo irgend eines Condottiere in die Hände zu fallen, will ich bemerken, daß ich die ältere Form des Satzes ܣܡܟ in שְׁכֶם *Σίκιμα* (Uebersicht 57 15) *Schulter* zu erkennen glaube: *σίγμα* = שִׁכְמָה. Ich will weiter bekennen (und behalte mir Näheres vor), daß ich die bei den Griechen übliche Benennung des ξ, nämlich ξει, als Bestätigung meiner eben ausgesprochenen Ansicht ansehe, daß das ס der Moabiter und das ס der Phoenicier von Hause aus zwei verschiedene Buchstaben gewesen sind: von סמך führt kein Weg zu ξει. Ich will drittens bekennen, daß, wenn das sexagesimale Zahlensystem von seiner in Babylonien liegenden Heimath aus (ich bitte Lehmanns Aufsätze nachzulesen) sich weiter verbreitet hat, die Uebereinstimmung von षष् und שֵׁשׁ (*σῶσσος*) und deren so vielfach wechselnden, durch Volksetymologien entstellten Nebenformen sich daraus erklärt, daß der ursprüngliche Name für 6 und 60 mit dem sexagesimalen Systeme gewandert ist — ἕξ *sex*, die awestischen Formen dieser Zahlen mit ihrem aus drei Consonanten bestehenden Anlaute, usw., wären Lehnworte —: wüßte ich über die älteste Gestalt von ⲥⲟⲟⲩ Bescheid, so würde ich möglicher Weise ξει zu ⲥⲟⲟⲩ stellen. In das System der semitischen Zahlen passt die Vokabel שֵׁשׁ nicht hinein, da אחד, שנים, שלש, ארבע, חמש, שבע, שמנה, תשע, עשׂר, מאה, אלף drei Wurzelconsonanten zeigen, und sicher noch einmal deutbar werden werden: daß sie deuten zu können von höchstem Nutzen für die älteste Geschichte sein würde, bedarf keiner Auseinandersetzung. سادس ist eine künstliche Parallele zu ثالث, so zu sagen ein שָׁדשׁ neben שָׁלשׁ ܬܠܬ: ܫܬ fällt ebenso aus aller Lautverschiebung heraus wie die awestische Form כשׁוואשׁ [= *kšwakš?]

Σαν ist kaum šinn = שֵׁן, in welcher Vokabel der Vokal *i* haftet. Ξει = ϣⲉⲓ kann sich zu שין = שַׁיִן* verhalten wie sich zai (Psalterium Hieronymi xiv 1) zu זין = זַיִן verhält. שָׁן = *σαν* kann der (wegen â nicht hochSemitische) Nominativus Dualis des Genetivus Dualis שַׁיִן sein, wie דָּתָן, wenn nicht eine falsche Lesart, der Nominativus Dualis zu dem Genetivus Dualis דֹּתַיִן ist. דח zu دواة: Uebersicht 82 1. Es *χσεν* kann für *χσαιν* stehn.

12

Nach den Zeitungen besitzt man in Berlin aramäische Inschriften

aus der Zeit des Isaias. Goettingen, die אֲרִיאֵל Berlins, ist nicht in der Lage, von diesen Inschriften eher etwas zu erfahren als Buxtehude: ich muß mich daher darauf gefaßt machen, daß was ich so eben vorgetragen habe, vielleicht bald beseitigt oder geändert sein werde: ich hoffe auf alle Fälle einige neue Gesichtspunkte angegeben zu haben.

Die Vikrama Aera.

Von

F. Kielhorn.

Die Entdeckungen der letzten Jahre haben gezeigt, daß die von James Fergusson aufgestellte und durch Max Müller berühmt gewordene Hypothese, nach welcher die Vikrama Aera erst im sechsten Jahrhundert, oder genauer, nach dem Jahre 543 n. Chr. von einem Könige Vikramâditya erfunden sein sollte, unhaltbar ist. Mit Recht schrieb Max Müller im Jahre 1883, daß die ganze Theorie Fergussons zusammenbrechen würde, wenn sich ein einziger Stein finden sollte, der (zeitgenössisch) von 543 n. Chr., d. i. vom Vikrama Jahre 600, oder früher datiert wäre. Solche Steine, aus den Vikrama Jahren 529 und 589, um nur die in jeder Hinsicht sichern Daten hier zu erwähnen, haben sich gefunden [1]); und wir wissen jetzt, daß die Vikrama Aera in der That vor 543 n. Chr. im Gebrauche war, daß die Jahre derselben aber als Jahre nach der Zählung der Mâlavas, Jahre der Mâlava Herrscher u. s. w. bezeichnet wurden. Kann die Aera somit nicht erst im sechsten Jahrhundert von einem Könige Vikramâditya gestiftet sein, so tritt von Neuem die Frage an uns heran, wie es zuging, daß sie in späterer Zeit mit einem Könige jenes Namens in Verbindung gebracht wurde. Ich will mit wenigen Worten zu zeigen versuchen, wie ich mir die Lösung dieses Räthsels denke.

Das älteste bekannt gewordene Datum, in dem das Wort *vikrama* erscheint, findet sich auf der Dholpur Steininschrift des

---

1) Vgl. meine chronologische Liste der Vikrama Daten im *Ind. Antiquary*, Band XX, S. 125.

Chauhân Chaṇḍamahâsena[1]), in der das Jahr 898 durch die eigenthümliche Wendung —

vasu nava [a]shṭau varshâ gatasya *kâlasya vikramâkhyasya*

„898 Jahre der *vikrama-benannten* (verflossenen) *Zeit*“ —

bezeichnet wird. Auch sonst ist gerade dieses Datum für uns von ganz besonderem Interesse. Es ist das frühste sichre Datum der sogenannten Vikrama Aera, dessen Correctheit wir beweisen können; und seine Berechnung zeigt, daß das in ihm erwähnte Jahr mit dem Monate Kârttika (October-November), nicht, wie das Śaka Jahr, mit Chaitra (März-April) angefangen haben muß. Anzunehmen, daß der Schreiber des Datums mit dem Worte *vikrama* eine Person bezeichnen wollte, die er sich als Stifter der Aera dachte, liegen zwingende Gründe nicht vor. Die älteste Steininschrift, deren Datum von einem Manne Vikrama spricht, ist die Gwâlior Sâsbahû Tempel Inschrift des Mahîpâla[2]) vom Jahre V. 1150.

Die älteste echte Kupferplatte, deren Datum das Wort *vikrama* enthält, ist die Râdhanpur Urkunde[3]) des Chaulukya Bhîmadeva I., deren Jahr als *vikrama-saṁvat* 1086 „das vikrama Jahr 1086“ bezeichnet wird. Ihr folgt die Sûnak Kupferplatte[4]) des Chaulukya Karṇadeva von *vikrama-saṁvat* 1148. Auch bei diesen Daten würde keine Nothwendigkeit vorliegen das Wort *vikrama* auf eine Person zu beziehen; doch darf ich hierauf kein Gewicht legen, weil wir aus dem Datum von Amitagati's Subhâshita-ratna-saṁdoha[5]) wissen, daß die Aera, von der ich spreche, schon in V. 1050 mit einem Fürsten Vikrama in Verbindung gebracht war. Sicher aber ist, daß sich bis jetzt kein Datum vor V. 1050 gefunden hat, das einen König Vikrama erwähnt, und daß das frühste sichre Datum vom Jahre V. 898 zwar die Zeit, zu der es gehört, als die *vikrama-Zeit* bezeichnet, eine Beziehung auf einen persönlichen Vikrama aber nicht enthält.

Fragen wir, wodurch sich das Vikrama Jahr von dem Jahre der viel allgemeiner gebräuchlichen Śaka Aera in besonders auffälliger Weise unterschied, so kann die Antwort nur die sein, daß das Vikrama Jahr mit dem Monate Kârttika (October-November), das Śaka Jahr dagegen mit dem Monate Chaitra (März-

1) Vgl. *Ind. Antiquary*, Band XIX, S. 35, wo ich die Berechnung des Datums gegeben habe.

2) Ib., Band XX, S. 129, No. 58.

3) Ib., S. 128, No. 47.

4) Ib., S. 129, No. 57.

5) Ib., Band XIX, S. 361.

April) anfing. Auf diesen ursprünglichen Unterschied der Jahre der beiden großen Aeren haben schon Andere aufmerksam gemacht, und ich habe oben bemerkt, daß das Jahr des ältesten berechenbaren Vikrama Datums unzweifelhaft ein *Kârttikâdi*, nicht ein *Chaitrâdi* Jahr war. Das Vikrama Jahr fing im Herbst, das Śaka Jahr im Frühling an.

Nun ist der Herbst (*śarad*) die Zeit des Auszugs zum Kriege; er ist in eminentem Grade der *vikrama-kâla*. Das wissen die Dichter ebenso gut wie die Verfasser der Nîti- und Dharmaśâstras. Raghu unternimmt seinen *digvijaya* im Herbste. Der Herbst, geschmückt mit Lotusblumen, naht sich ihm wie eine zweite Râjalakshmî; er lädt ihn ein auszuziehen, noch ehe Raghu selbst einen Entschluß gefaßt hat; im Herbste suchen selbst die Stiere es ihm an *vikrama* gleich zu thun [1]). Wie Kâlidâsa hier, so spricht Bhâravi vom Herbste beim Auszuge Arjunas [2]). Im Herbste zieht Râma aus Râvaṇa zu erschlagen und Sîtâ wiederzugewinnen [3]). Im Gaüḍavaho bricht Yaśovarman am Ende der Regenzeit, im Herbste, auf, sich den ganzen Erdkreis botmäßig zu machen [4]). Im Harshacharita erklärt Bâṇa die graubärtigen Wangen eines greisen Feldherrn dadurch, daß er den Besitzer den mit seinen blühenden Gräsern weißen Herbstanfang (*śarad-ârambha*) wieder von sich geben läßt, den er zur Kriegszeit (*vikramakâle*) getrunken hatte [5]).

Vom Herbste (*śarad*), als dem eigentlichen *vikrama-kâla*, zum Jahre (*śarad*) als *vikrama-kâla* ist nur ein kurzer Schritt; und ich glaube, daß die Inder in der That diesen Schritt gethan haben, und daß die spätere Bezeichnung der Mâlava Aera

---

1) *Raghuvaṁśa* IV, 22.

2) *Kirâtârjunîya* IV.

3) Vgl. *Setubandha* I, 14 und 16; Goldschmidts Uebersetzung: —

„Mühsam gieng dem Dâçarathi dahin die Regenzeit — die Verfinsterung für die Sonne seines Entschlusses, die starke Fessel für den Elefanten seines Zornes, der Käfig für den Löwen seines Sieges."

„Da naht — für den Affenfürsten der Weg des Ruhms, für das Leben des Râghava die erste Stütze, für Sîtâ die Hemmung der Tränen, für den Zehnköpfigen der Tag des Todes — es naht der Herbst."

Vgl. auch I, 34, mit der Erklärung des Scholiasten.

4) *Gaüḍavaho* 192.

5) Die Stelle, welche im 6ten uchchhvâsa (auf S. 156 der schlechten Calcuttaer Ausgabe) steht, ist schon von S. P. Paṇḍit, Gaüḍavaho, Introduction, S. 102 Anm., erwähnt, aber von ihm in ganz andrer Weise erklärt worden. Auch der Text, den er citiert, giebt keinen Sinn. Ich lese: vamann iva vikramakâlapîtam akâlepi vikâsikâśakânanaviśadaṁ śaradârambham.

als der eines Königs Vikrama ihren Ursprung einem Mißverständnisse verdankt. War man gewohnt vom Herbste (*śarad*) als *vikrama-kâla* zu sprechen, so war durch das Wort *śarad* die Beziehung auf das Jahr gegeben; und die Bezeichnung des Jahres als *vikrama-kâla* lag um so näher als man dadurch zunächst gerade das zum Ausdruck brachte was das Mâlava Jahr vom Śaka Jahre unterschied: das Factum nämlich, daß das Mâlava Jahr im *Herbste* anfing. Hatte man sich aber gewöhnt von Jahren als *vikrama-kâla* oder von *vikrama*-Jahren zu reden, so war Nichts natürlicher als daß spätere Geschlechter sich diese Bezeichnung im Sinne ihrer Zeit zu deuten suchten und so die Stiftung der Aera einem Könige Vikrama zuschrieben, der die Jahre, wie ihre eignen Könige, von seinem Regierungsantritte[1]) gezählt hatte.

1) Was die Śaka Aera betrifft, so möchte ich hier bemerken, daß ich in den Worten *Śaka-nṛipati-râjyâbhisheka-saṁvatsareshu* der Bâdâmî Inschrift des Maṅgaliśvara in keiner Weise mit meinem Freunde Fleet eine Spur einer alten Tradition über den Anfang der Śaka Aera entdecken kann. Mir sagen die betreffenden Worte nur, — was uns aus der Haidarâbâd Urkunde des Pulikeśin II. bekannt ist —, daß es *zur Zeit des Schreibers* üblich war die Jahre vom *râjyâbhisheka* eines Königs zu zählen.

Die Nîtimañjarî des Dyâ Dviveda.

Von

F. Kielhorn.

Als ich vor funfzehn Jahren im 5ten Bande des *Indian Antiquary* einen kurzen Aufsatz über die Nîtimañjarî des Dyâ Dviveda veröffentlichte, glaubte ich nicht, daß ich mich nochmal mit diesem Werke, dem nur die im Commentare enthaltenen Citate einigen Werth verleihen, befassen würde. Der Grund, weshalb ich es jetzt dennoch thue, ist folgender. In dem erwähnten Aufsatze hatte ich behauptet, daß Dyâ Dviveda aus Sâyaṇas Commentar zum Ṛigveda abgeschrieben hätte und deshalb natürlich später als Sâyaṇa, also nach der Mitte des 14ten Jahrhunderts gelebt haben müsse. Seitdem hat Professor Peterson auf S. 8 seines *Second Report of operations in search of Sanskṛit MSS.* über eine in der Bibliothek des Mahârâja von Alwar befindliche HS. der Nîtimañjarî berichtet, in der das Vikrama Jahr 1110 = 1053 n. Chr. als das Jahr bezeichnet sein soll, in dem Dyâ Dviveda sein Werk

vollendete. Obgleich diese Mittheilung meines Erachtens auf einem Irrthum beruht, halte ich es doch für richtig, meinen Fachgenossen ein Specimen von Dyâ Dvivedas Commentare vorzulegen, aus dem sie selbst ersehen mögen, ob Sâyaṇa von Dyâ oder Dyâ von Sâyaṇa abgeschrieben hat. Was ich mittheile, ist nicht gerade sehr schön, wird aber einen Begriff von Dyâ Dvivedas Geschmacke geben.

Was das erwähnte Datum betrifft, so kann ich nur sagen, daß die von Professor Peterson auf S. 103 citierten Worte des Originals — *bindušivaikena mite saṁvaty ambudhivatsare* —, die 1110 bedeuten sollen, mir unverständlich sind. Es ist wahr, *bindu* bedeutet 0, *śiva* mag, wie *îśvara*, *śaṁkara*, 11 bedeuten, und *eka* ist 1; aber daß etwas mit diesem Datum nicht in Ordnung ist, zeigen die Worte *ambudhivatsare*, die, wenn *bindušivaika* 1110 bedeuten, keinen Sinn geben. Und ich möchte hinzufügen, daß ich das Wort *saṁvat*, decliniert, bis jetzt nur in ganz modernen Daten gefunden habe. Daß aber Dyâ Dviveda lange nach 1053 n. Chr. gelebt hat, folgt schon daraus, daß er Shaḍgurušishyas Commentar zur Sarvânukramaṇî citiert, für dessen Abfassungszeit der Verfasser selbst uns den Tag des Kaliyuga 1565132, d. i. den 24ten März 1184 n. Chr., oder, mit andern Worten, den Tag der Meshasaṁkrânti, mit dem Kaliyuga 4285 = Śaka 1106 endete, gegeben hat.

Die folgenden zwei Verse samt ihrer Erklärung sind dem zweiten Capitel der Nîtimañjarî entnommen.

Aprâptayauvanayâ saha saṅgo na kârya ita âha |
Sahâromakayâ saṅgo nakartavyo naraiḥ striyâ |
Bhâvayavyobhajaj jñâtvâ Romaśâṁ prâptaromakâm ||
Aromakayâprâptalomnyâ striyâ saha saṅgo narair na kartavyaḥ | Bhâvayavyadṛishṭântena draḍhayati | yathâ Bhâvayavyo râjâ Romaśâṁ striyaṁ prâptaromakâṁ jâtalomnîṁ jñâtvâbhajat bheje || Âkhyânapûrvike ṛichau[1]) |
Ăgadhitâ párigadhitâ yấ kaśîkéva jáṅgahe |
dádâti máhyaṁ yấdurî yấśûnâm bhojyấ śatấ ||
úpopa me párâ mṛiśa mấ me dabhrấṇi manyathâḥ |
sárvâhám asmi romaśấ gandhấrîṇâm ivâvikấ ||
Bhâvayavya-Romaśayor dampatyoḥ saṁvâda ity anukramaṇî || Tathâ Bṛihaddevatâ[2]) |
Pañchâmandân Bhâvayavyasya gîtâ
jâyâpatyor dve ṛichau saṁpravâdaḥ |

1) Rigveda I, 126, 6 und 7.
2) Vgl. Bṛihaddevatâ III, 155—IV, 3.

prâdâch cha tâṁ Romaśâṁ nâma sâmnâ
Bṛihaspatir Bhâvayavyâya râjñe ||
Tatas tat sarvaṁ Harivân viditvâ
priyaṁ sakhâyaṁ Svanayaṁ didṛikshuḥ |
abhyâjagâmâtha Śachîsametaḥ
pratyarchitas tad vidhinâ cha râjñâ ||
Abhyâjagâmâṅgirasî cha tatra
dṛishṭvâ tayoḥ sâ charaṇau vavande |
Indraḥ sakhitvâd atha tâm uvâcha
româṇi te santi [na santi] [1]) râjñi ||
Sâ bâlabhâvâd atha saṁjagâda
româṇi me Śakra parâmṛiśeti |

Sambhogâya prârthito Bhâvayavyaḥ svabhâryâṁ [2]) Romaśâm apraudhâṁ matvâ parihasann anushṭubhâha || Ayam arthaḥ | bhojyâ bhogayogyaishâgadhitâ â samantâd gṛihîtâ svîkṛitâ [3]) | tathâ parigadhitâ parito gadhitâ | âdarârthaṁ punarvachanam | gadhyaṁ gṛihṇâter iti Yâskaḥ | yadvâ âgadhitâ â samantâd bhâvena miśrayantî | ântaraṁ prajananena [4]) bâhyaṁ bhujâdibhir ity arthaḥ | gadhyatir miśrîbhâvakarmeti Yâskaḥ | pûrvapakshe purushasya prâdhânyam uttarapakshe yoshita iti bhedaḥ | kîdṛiśî sâ | yâ [5]) jaṅgahe atyarthaṁ gṛihṇâti kadâpi na muñchati | atyâge dṛishṭântaḥ kaśîkeva | kaśîkâ nâma sûtavatsâ [6]) nakulî sâ yathâ patyâ saha chirakâlaṁ krîḍati kadâpi na muñchati tathaishâpi | kiṁchaishâ bhojyâ [7]) yâdurî | yâdur ity udakam | retolakshaṇam udakam râti [8]) âdadâti | bahuretoyuktety arthaḥ | tâdṛiśî satî yâśûnâṁ saṁbhogânâm | yâśur iti prajananânâma | tatsaṁbandhîni karmâṇi yâśûni bhogâḥ | teshâṁ śatâ śatâni mahyaṁ dadâtîti parihasantaṁ svabhartâraṁ praty âha | upopa ma iti | bhoḥ pate me mâm | dvitîyârthe chaturthî | upôpa upetyopetya parâmṛiśa samyak spṛiśa | bhogayogyâm avagachchhety arthaḥ | me mamâṅgâni dabhrâṇi alparomâṇi | dabhram arbhakam alpasyeti Yâskaḥ | mâ manyathâ mâ budhyasva | adabhratvaṁ viśadayati | ahaṁ sarvâ romaśâ bahuromayuktâsmi | yatoham îdṛiśy ataḥ saṁpûrṇâvayavâsmi | romaśatve dṛishṭânto gandhârîṇâm avikeva | Gandhârâ deśâs teshâṁ saṁbandhiny avijâtir iva | taddeśasthâ avayo meshâ

1) Die Worte in Klammern fehlen.
2) MS. svabhâvaṁ.
3) MS. tsvîkṛitâ; vielleicht matsvîkṛitâ.
4) MS. prajanena.
5) MS. om.
6) MS. sûtavatsâ yâ nakulî sâ kadâpi na muñchati yathâ.
7) MS. bhogyâ.
8) MS. udakaṁ eti.

yathâ romaśâs tathâham asmi | yadvâ yathâ gandhârîṇâṁ garbhadhâriṇîṇâṁ strîṇâm avikâtyantaṁ tarpayantî yonir iva | tâsâṁ âprasavaṁ româdikartanasya śâstre nishiddhatvâd yonî romaśâ bhavati | yatoham îdṛiśy ato mâm apraudhâṁ mâ budhyasveti || Sâmagṛihye[1]) | nâjâtalomnyopahâsam ichchhed iti || Tathâ Karmapradîpe |

ajâtavyañjanâlomnî na tayâ saha saṁviśed iti ||

Agnir ârâdhya ity artha âha |

Dhîmadbhir agnir ârâdhyo yaṁ vinâ na sukhî bhavet |
mukto Dîrghatamâḥ śâpâd agninâ hi Bṛihaspateḥ ||

Dhîmadbhir buddhimadbhir viprair agnir ârâdhyo yam agniṁ vinâ na sukhî bhavet | brâhmaṇasyâgneḥ sukhaṁ bhavatîty arthaḥ | hi yasmâd Dîrghatamâ ṛishir Bṛihaspateḥ śâpâd agninâ mochitaḥ[2]) || Taddarśanâyetihâsaḥ[3]) | Uchathya-Bṛihaspatinâmânau dvâv ṛishî âstâm | tatrochathyasya Mamatâ nâma bhâryâ sâ cha garbhiṇî tâṁ Bṛihaspatir gṛihîtvâramayat | śukranirgamanâvasare prâpte garbhastham retaḥ prâvâdît | he mune reto mâ tyâkshîḥ pûrvam ahaṁ saṁvasâmi retaḥsaṁkaraṁ mâ kârshîr iti | evam ukto Bṛihaspatir balât pratiruddharetaskaḥ sañ śaśâpa | he garbha tvaṁ yato retorodham akaror atas tvaṁ dîrghaṁ tamaḥ prâpnuhi jâtyandho bhaveti | evaṁ śâpato Dîrghatamâ ajâyata[4]) | sa utpannas tamovyayâyâgnim astaushît | sa cha stutyâ prîta âṇdhyaṁ paryaharad iti || Tathânukramaṇîbhâshye[5]) |

Itihâso hetubhûto vispashṭâya pravarṇyate ||
Prajâpateḥ putra âsîd Aṅgirâ nâma vai muniḥ |
tasya putrâs trayas tv âsaṁs tretâgnisamatejasaḥ ||
Uchathyo jyeshṭha ity eva madhyamas tu Bṛihaspatiḥ |
Saṁvartas tu kanishṭhotha jyeshṭho guṇagaṇair vibhuḥ ||
Uchathyabhâryâ Mamatâ nâmnâsîd varavarṇinî[6]) |
Uchathyâhitagarbhâṁ tâṁ chakametha Bṛihaspatiḥ ||
Uchathyaputro Mamatâgarbhasthovochad uttaram |
jyeshṭhapatnîṁ mâṭrikalpâṁ mainâṁ[7]) gantuṁ manaḥ kṛithâḥ ||
amogharetâs tvaṁ châsi na dvayor iha saṁbhavaḥ |
iti garbhavachaḥ śrutvâ śaśâpainaṁ Bṛihaspatiḥ ||
dîrghaṁ tamas tvaṁ [praviśa ma][8])dvâkyâd andha eva vâ |
tato Dîrghatamâ nâma Uchathyatanayobhavat ||

1) Vgl. Gobhilîyagṛihyasûtra III, 5, 3.
2) MS. hat hier noch agneḥ sukhî bhavety arthaḥ.
3) Vgl. Sâyaṇa zu Ṛigveda I, 147, 3.
4) MS. ajâyateti.
5) Vgl. Shadgurusishyas Vedârthadîpikâ, Macdonell's Ausgabe, S. 127.
6) MS. vaṁśavarṇinî.
7) MS. nainâṁ gantu mano kṛithâḥ.
8) Die Sylben in Klammern fehlen im MS.

Tathâ Bṛihaddevatâ[1]) |

Dvâ Uchathya-Bṛihaspatî ṛishiputrau babhûvatuḥ |
âsîd Uchathyabhâryâ tu Mamatâ nâma Bhârgavî ||
tâṁ yavîyân[2]) Bṛihaspatir maithunâyopachakrame |
śukrasyotsargakâle tu garbhas tam pratishedhati ||
ihâsmin[3]) pûrvasaṁbhûto na kâryaḥ śukrasaṁkaraḥ |
taṁ śukrapratighâtaṁ tu Bṛihaspatir amarshayat[4]) ||
sa vyâjahâra garbhaṁ taṁ tamas[5]) te dîrgham astv iti |
sa cha Dîrghatamâ nâma babhûvarshir Uchathyajaḥ ||
sa jâtobhyâtapad[6]) devân akasmâd andhatâṁ gataḥ |
dadau devaḥ stuto[7]) netre tatonandho babhûva saḥ || iti ||

Asminn artha ṛik[8]) |

Yé pâyávo mâmateyáṁ te agne páśyanto andháṁ durité'd árakshan |
raráksha tân sukṛíto víśvávedâ dípsanta íd ripávo nâ'ha debhuḥ ||

Dîrghatamâs trishṭubhâgniṁ tushṭâva | . . . . . he agne te tava saṁbandhino ye pâyavaḥ prasiddhâḥ pâlayitâro raśmayo mâmateyaṁ Mamatâyâḥ putram Dîrghatamasam andhaṁ paśyanto[9]) rakshaṇîyosmâbhir ity avagachchhanto duritâd duḥkhâd ândhyâd[10]) arakshaṁs tân raśmîn sukṛitaḥ sukhakartṛîn viśvavedâ viśvaprajñognî raraksha rakshati | asmatpâlanâyeti bhâvaḥ | tair asmân rakshatîty arthaḥ | evaṁ rakshitân asmân dipsanto dambhitum ichchhanto ripavaḥ kâmâdayo nâha debhuḥ | na khalu dambhituṁ śaknuvanti || tân | âhuḥ sakârodayayos takâram[11]) iti nakârasya pakshe takârâgamaḥ || Evaṁ dhîmadbhir agnir ârâdhya iti siddham | uktaṁ cha |

Ekâham api karmastho yogniṁ śuśrûshaṇaḥ śuchiḥ |
nayaty atra tad evâsya śatâhaṁ divi jâyate || iti ||

---

1) Vgl. Bṛihaddevatâ IV, 11—15.
2) MS. tâm abravîd Bṛihaspatir.
3) Lies ihâsmi.
4) Lies amarshayan(?), und vgl. die Ausgabe.
5) MS. tatas.
6) Lies abhyâpatad(?).
7) MS. stutaṁ.
8) Ṛigveda I, 147, 3.
9) MS. paśyantaḥ ikshaṇîyo.
10) MS. ândhyatvâd.
11) Ṛikprâtiśâkhya IV, 6.

Eine denkwürdige Sitzung der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften.

Von

Eberhard Nestle.

Vorgelegt von Paul de Lagarde[1]).

Eine denkwürdige Sitzung der K. Gesellschaft der Wissenschaften war und bleibt diejenige, in welcher G. F. Grotefend seine praevia de cuneatis, quas vocant, inscriptionibus Persepolitanis legendis et explicandis relatio der Gesellschaft vorlegte und die Entzifferung der ganzen Keilschrift-Litteratur begründete. Da einer der Hauptassyriologen Deutschlands neuerdings zweimal das Datum jener Sitzung falsch angegeben hat — Friedrich Delitzsch 1889 in seiner *Assyrischen Grammatik* (S. 4) und nach 2 Jahren aufs neue in seiner »*Geschichte Babyloniens und Assyriens*« (Zweite Auflage des gleichnamigen Werks von F. Mürdter, Calw und Stuttgart 1891 S. 8), beidemal als 14. Sept. 1802 —, so sei gestattet, hier festzustellen, daß die andern Recht haben, welche als Tag jener Sitzung den 4. Sept. des genannten Jahrs verzeichnen. S. den 2. Band der Anzeigen von 1802, Stück 149 vom 18. Sept. Zu dem, was Fr. Hommel in seiner »*Geschichte Babyloniens und Assyriens*« S. 65 ff. aus der angeführten Nummer ausgezogen hat, möge weiter hier bemerkt werden, daß der Bericht über Grotefend's relatio nicht bloß »*wahrscheinlich* Prof. Tychsen zum Verf. hatte«, sondern sicher von demselben herrührt. Die Tübinger Universitätsbibliothek besitzt von den Anzeigen das Exemplar, das einst dem trefflichen Jerem. Reuß gehörte, dem Schwiegersohn ihres damaligen Herausgebers Heyne, in welchem Reuß durch lange Jahrgänge hindurch allen Anzeigen die Namen ihrer Verf. beigeschrieben hat, so dem hier genannten den Tychsens. Bestätigt wird dies durch die seither von Wüstenfeld veranstaltete Zusammenstellung: Die Mitarbeiter an den Göttingischen Gelehrten Anzeigen in den Jahren 1801—1830, (Beilage zu den Nachrichten von 1887 S. 80).

Einen weiteren Irrthum über jene »epochemachende Abhandlung Grotefend's« verbreitet Kaulen noch in der *vierten* Auflage

1) [*Vergleiche IohFlemming in den von FDelitzsch und PHaupt herausgegebenen Beiträgen zur Assyriologie 1 86.*]

seines Werks »Assyrien und Babylonien (1891)«, wenn er S. 118 sagt, daß erst nach 13 Jahren Heeren »*dieselbe* als Beilage zur dritten Auflage seiner bekannten Ideen über die Geschichte der alten Völker« veröffentlicht habe. Was das genannte Werk I, 1 563—603 von Grotefend enthält, ist nicht jene grundlegende praevia relatio selber. Endlich nennt keiner den Namen »des ersten Gehilfen und Freundes«, der ihn zu seinem Entzifferungsversuch überhaupt angeregt, ihm in den ersten 8—14 Tagen treulich beistand und die »für einen einzelnen Menschen ohnehin allzumühselige Arbeit sehr erleichtern half«, den des damaligen Bibliothek-sekretärs, nachherigen mag. leg. Fiorillo (s. Grotefend bei Heeren, l. c. und noch »Tributverzeichnisse« 1852 S. 3. 89); und keiner erwähnt, was jene Sitzung doppelt denkwürdig erscheinen läßt, daß in derselben gleichzeitig über den *Stein von Rosette* die ersten genaueren Mitteilungen in Deutschland gemacht wurden. Heyne berichtete damals über das von London gekommene Faksimile des griechischen Teils der Inschrift »*welche vielleicht der Schlüssel werden kann, die heilige und die gemeine ägyptische Schrift, wo nicht zu enträthseln, doch etwas näheres davon zu errathen*« (s. Stück 148 der Anzeigen vom 16. Sept. 1802). So damals, und heute! Wären wir so weit, als wir sind, wenn jene Alten nicht vielfach etwas pünktlicher gewesen wären, als viele Neueren? denen man immer wieder das Wort Bengels zurufen muß, das Westcott-Hort nicht umsonst an den Schluß ihres Neuen Testaments gesetzt haben: »eorum qui praecessere neque defectum exagitabimus neque ad eum nos adstringemus; eorum qui sequentur profectum neque postulabimus in praesenti neque praecludemus in posterum: quaelibet aetas pro sua facultate veritatem investigare et amplecti fidelitatemque *in minimis* et maximis praestare debet.

Tübingen, 13. Mai 1891.

Ueber die geometrische Bedeutung der Formeln der sphärischen Trigonometrie im Falle complexer Argumente.

Von

Fr. Schilling.

(Vorgelegt von F. Klein).

Die Formeln der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie lassen sich bekanntlich ansehen als Relationen zwischen den 3 Kan-

tenwinkeln λ, μ, ν und den 3 Seitenwinkeln l, m, n eines räumlichen Dreikants, dessen Scheitel im Kugelmittelpunkt liegt, und dessen Kanten die Schnittgeraden der 3 Seitenebenen des vorliegenden sphärischen Dreiecks sind. Von diesem Umstande ausgehend kann man die Frage stellen:

„Lassen die Formeln der sphärischen Trigonometrie nicht auch eine einfache geometrische Deutung zu, wenn man in denselben den Größen λ, μ, ν; l, m, n nicht mehr reelle, sondern komplexe Werte beilegt?“

Ich habe in Beantwortung dieser Frage folgendes gefunden:

Man setze zunächst:

$$\lambda = \lambda' + i\lambda'', \quad l = l' + il'',$$
$$\mu = \mu' + i\mu'', \quad m = m' + im'',$$
$$\nu = \nu' + i\nu''; \quad n = n' + in''.$$

Man betrachte alsdann das Gebilde dreier beliebig im Raume gelegenen, gegen einander windschiefen Geraden I, II, III, welche die Kugel in reellen Punkten schneiden, und konstruiere die drei inneren kürzesten Abstände, welche im Sinne der nicht-Euklidischen Geometrie oder (um jedes Streifen metaphysischer Fragen zu vermeiden) im Sinne der auf die Kugel zu gründenden projektiven Maßgeometrie zwischen je zweien der Geraden I, II, III stattfinden. Es sei hierbei allgemein der Abstand zweier Punkte wie der Winkel zweier Ebenen definirt als $\frac{i}{2} \cdot \log DV$, wo DV das Doppelverhältnis bedeutet, welches die beiden Punkte resp. Ebenen mit den reellen oder imaginären Elementen ihres Trägers bilden, die der Fundamentalfläche angehören, [d.h. mit den Schnittpunkten der Verbindungslinie der beiden Punkte mit der Kugel resp. den Tangentialebenen durch die Schnittgerade der beiden Ebenen an die Kugel]. Man bezeichne dann den Winkel der jedesmaligen beiden Ebenen, welche durch je eine der Geraden I, II, III und die zu ihr gehörigen kürzesten Abstände sich legen lassen, bez. mit λ', μ', ν', dagegen die durch die kürzesten Abstände auf den Geraden I, II, III abgeschnittenen Längen mit $i\lambda''$, $i\mu''$, $i\nu''$. Entsprechend setze man den Winkel der beiden Ebenen, die sich durch je einen der kürzesten Abstände und die zugehörigen beiden Geraden legen lassen, gleich l', m', n', die Länge der kürzesten Abstände selbst gleich il'', im'', in'', wo sich l' und il'' z. B. auf den kürzesten Abstand der Geraden II, III beziehen sollen.

Das Resultat meiner Betrachtung war dann das folgende:

„Setzt man die so definirten Größen in der oben angegebenen Weise zu den 6 Größen λ, μ, ν; l, m, n zusammen, so bestehen zwischen den letzteren grade die Formeln, wie sie die Relationen der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie darstellen."

Es ist nicht schwer, die hiermit angedeuteten allgemeinen Betrachtungen für den Fall, daß die drei Geraden I, II, III sich innerhalb oder außerhalb der Kugel in einem Punkte schneiden oder in einer Ebene liegen, zu spezialisieren.

Ich möchte diesen Angaben jedoch noch die folgende Bemerkung hinzufügen:

Die angegebene Erweiterung der Bedeutung der sphärischen Formeln hängt auf's engste zusammen mit folgender Beziehung:

Wenn man im Falle, daß die drei Geraden I, II, III sich im Mittelpunkte der Kugel schneiden, um dieselben nach einander Drehungen des Gesammtraumes (im nicht-Euklidischen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, im gewöhnlichen Euklidischen Sinne) ausführt entspr. um die doppelten Winkel des zugehörigen sphärischen Dreiecks, so geht der Raum bekanntlich in sich selbst über. (Vgl. Hamilton, Lectures on Quaternions 1853, Art. 280 und 346). Dem entspricht nun bei unseren windschiefen Geraden I, II, III der folgende Satz:

„Führt man um die Geraden I, II, III als Schraubenaxen nach einander drei nicht-Euklidische Schraubenbewegungen aus, deren Drehwinkel und Verschiebungsgröße beziehungsweise gegeben sind durch

$$2(\lambda' + i\lambda''),\quad 2(\mu' + i\mu''),\quad 2(\nu' + i\nu''),$$

so kommt der Raum gleichfalls in seine ursprüngliche Lage zurück."

Der Beweis dieses letzten Satzes ist besonders einfach mit Benutzung des Hülfssatzes zu führen, daß jede Schraubenbewegung sich durch die Aufeinanderfolge zweier Rotationen von der Periode 2 ersetzen läßt.

Inhalt von Nr. 5.

Paul de Lagarde, Arabes mitrati. — Samech. — *F. Kielhorn*, die Vikrama-Aera. — Die Nitimanjari des des Dyâ Dviveda. — *Eberhard Nestle*, eine denkwürdige Sitzung der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften. — *Fr. Schilling*, über die geometrische Bedeutung der Formeln der sphärischen Trigonometrie im Falle complexer Argumente.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

12. August. **№ 6.** 1891.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 6. Juni.

Zur Moleculartheorie der piëzoëlectrischen und pyroëlectrischen Erscheinungen.

Von

Eduard Riecke.

Als ich begann, mich mit den pyroëlektrischen Erscheinungen des Turmalins in ausführlicherer Weise zu beschäftigen, war meine Absicht später in entsprechender Weise die piëzoëlektrischen Erscheinungen desselben zu untersuchen und der Bearbeitung des Turmalins eine möglichst umfassende quantitative Erforschung der beim Quarz beobachteten Erscheinungen folgen zu lassen. Es war im Wesentlichen ein molekulartheoretisches Interesse, welches sich für mich an jene Studien knüpfte. Die längst bekannten Erscheinungen des Turmalins schienen zu der Auffassung zu drängen, daß den Molekeln desselben eine elektrische Polarität in der Richtung der Hauptaxe von Hause aus zukomme, eine Auffassung, welche zuerst von William Thomson ausgesprochen worden ist. Die Gesetze, welche auf Grund dieser Vorstellung für die pyroëlektrischen Erscheinungen des Turmalins sich ergeben, habe ich durch eine große Zahl von Beobachtungen bestätigt. Es lag nun

die Vermuthung nahe, daß auch die elektrischen Erscheinungen anderer Crystalle durch die Annahme einer elektrischen Polarität ihrer Molekeln zu erklären sein würden; was die Vertheilung der Pole anbelangt, so war es natürlich, anzunehmen, daß dieselbe mit den Symmetrieverhältnissen des betreffenden Crystalls in Uebereinstimmung sich befinde; so habe ich gelegentlich [1]) die Vermuthung ausgesprochen, daß die Molekeln des Quarzes in einer zu der Axe desselben senkrechten Ebene von einem Systeme von Polen umgeben sein könnten, welche abwechselnd positiv und negativ die Ecken eines regulären Sechseckes bildeten. Zu einer weiteren Verfolgung dieser Vorstellung, zur Aufstellung irgend einer bestimmten Hypothese, wie aus derselben die bei elastischen oder thermischen Deformationen des Quarzes auftretenden elektrischen Wirkungen zu entwickeln sein würden, war ich noch nicht gelangt. Ich glaubte aber eine weitere Stütze für dieselbe in dem elastischen Verhalten der Crystalle finden zu dürfen. Mein verehrter Freund Voigt hat gezeigt, daß man die allgemeine Form des elastischen Potentiales, wie sie den Crystallen zukommt, auf Grund molekulartheoretischer Anschauungen gewinnen kann, sobald man den Molekeln eine polare Wechselwirkung zuschreibt. Auf der anderen Seite schienen mir die Beobachtungen von Voigt zu zeigen, daß diejenigen Crystalle, welche kräftige elektrische Wirkungen äußern, auch in ihrem elastischen Verhalten eine starke polare Wirkung der Molekeln erkennen lassen, und daran knüpfte ich die Vermuthung, daß die elastischen Eigenschaften der Crystalle gleichfalls auf einer elektrischen Polarität der Molekeln beruhen möchten [2]). Inzwischen hat die Lehre von den piëzoëlektrischen und pyroëlektrischen Erscheinungen einen ungemeinen Fortschritt gemacht durch die von Voigt aufgestellte allgemeine Theorie. Als das wesentliche Fundament derselben erscheint der Gedanke, daß bei Crystallen durch elastische oder thermische Deformationen elektrische Momente erzeugt werden können, deren Componenten lineare Functionen der Dilatationen sind. Indem Voigt diese letzteren den durch die Symmetrieverhältnisse der einzelnen Crystallgruppen gegebenen Bedingungen unterwarf, gelang es ihm, den Zusammenhang der elektrischen Erscheinungen für sämmtliche Crystallformen in übersichtlicher Weise zu entwickeln. Die von ihm aufgestellten Formeln sind von uns beiden bei Turmalin und Quarz einer experimentellen Prüfung unterworfen worden, durch welche ihre Rich-

1) Chem. Ber. 1888. S. 950.

2) Nachr. v. d. K. G. d. W. zu Göttingen. 1887. S. 151.

tigkeit erwiesen sein dürfte. Das Bedürfniß der experimentellen Physik ist hiernach durch die von Voigt gegebene Theorie vollständig befriedigt; alle Crystalle, welche kein Centrum der Symmetrie besitzen, erscheinen der elektrischen Erregung fähig; bei allen lassen sich die Erscheinungen, welche bei irgend einer gegebenen Vertheilung des Druckes oder der Temperatur eintreten müssen, zum Voraus berechnen, wenn gewisse piëzo- oder pyro-ëlektrische Constanten bestimmt sind, deren Anzahl von den Symmetrieeigenschaften des Crystalls abhängig ist. Immerhin ist es aber nicht ohne Interesse, die Frage weiter zu verfolgen, wie es möglich ist, daß eine einfache elastische oder thermische Verschiebung der Molekeln zur Entstehung von elektrischen Momenten, also zu elektrischen Verschiebungen Veranlassung giebt. Mit Bezug hierauf ist es von Wichtigkeit, daß die früher mit Bezug auf die elektrische Natur des Turmalins aufgestellte Anschauung ihrem wesentlichen Inhalte nach durch die allgemeinere Theorie von Voigt gleichfalls gefordert wird. Nach derselben existiert zwar für den Turmalin eine bestimmte Reihe zusammengehöriger, durch eine lineare Relation verbundener Werthe der Temperatur und des allseitig gleichen Druckes, bei welchen das elektrische Moment in der Richtung der Hauptaxe verschwindet; bei allen anderen Temperaturen und Drucken ist aber ein permanentes Moment in der Richtung der Axe vorhanden, welches durch eine entgegengesetzt elektrische Oberflächenschicht in seinen Fernwirkungen kompensiert sein muß. Die Existenz eines solchen permanenten Momentes wird aber kaum anders zu deuten sein, als durch die frühere Annahme einer elektrischen Polarisation der Molekeln in der Richtung der Axe. Was nun die Crystalle anbelangt, welchen wie dem Quarz ein permanentes elektrisches Moment nicht zukommen kann, so muß man doch jedenfalls annehmen, daß in denselben in Folge einer Deformation elektromotorische Kräfte enstehen, welche in den einzelnen Volumelementen elektrische Momente inducieren. Diese elektromotorischen Kräfte müssen ihre Existenz irgend einer Vertheilung elektrischer Massen verdanken und es liegt nun wiederum nahe, anzunehmen, daß diese elektrischen Massen nicht erst durch die Deformation ezeugt werden, sondern daß sie schon vorher vorhanden sind und nur in ihrer Wirkung modificiert werden, so daß inducierende Kräfte entstehen, welche den beobachteten elektrischen Ladungen entsprechen.

Somit gelangen wir zu der folgenden Vorstellung. Die Molekeln der Crystalle sind umgeben von Systemen elektrischer Pole, welche in ihrer Anordnung dieselben

Symmetrieeigenschaften besitzen wie die Crystalle selbst. Sofern die hierdurch gegebene Vertheilung elektrischer Massen an und für sich ein elektrisches Moment besitzt, sind ihre Fernwirkungen durch eine dem Crystall äußerlich aufliegende entgegengesetzt elektrische Schichte kompensiert. Wird der Zustand des Druckes und der Temperatur, unter welchen sich der Crystall befand, irgendwie geändert, so werden die Mittelpunkte der Molekeln bestimmte, gegenseitige Verschiebungen erleiden; es werden außerdem die Molekeln um ihre Mittelpunkte gedreht und es werden endlich auch die mit ihnen verbundenen Polsysteme Veränderungen erleiden können. Von dieser letzteren Möglichkeit werden wir im Folgenden absehen und uns beschränken auf die Untersuchung der Wirkung, welche von den beiden ersten Veränderungen herrührt. Es ergiebt sich, daß in Folge derselben auf die Mittelpunkte der Molekeln elektromotorische Kräfte ausgeübt werden, welche von den gegebenen Dilatationen abhängig und für alle Molekeln dieselben sind. Wir zerlegen diese Kräfte in Componenten nach den Axen eines Coordinatensystems, dessen Lage den Symmetrieverhältnissen des Crystalls entspricht; wir machen die Annahme, daß in den Molekeln des Crystalls elektrische Momente erzeugt werden, welche gleich den Componenten der inducierenden Kraft multipliciert mit gewissen dem Crystall eigenthümlichen Constanten sind. Man erhält auf diese Weise Formeln, durch welche die in der Richtung der Coordinatenaxen inducierten Momente mit Hilfe der gegebenen Dilatationen dargestellt werden und es ergiebt sich, daß diese Formeln identisch sind mit den Grundformeln der Voigt'schen Theorie. Es ist damit gezeigt, daß die von mir vorgeschlagene Molekulartheorie zu demselben Resultate führt, wie der allgemeine Ansatz der Voigt'schen Theorie in Verbindung mit den Symmetrieeigenschaften der Crystalle.

Wir beschränken uns im Folgenden auf die Betrachtung der Gestalten des quadratischen, hexagonalen und regulären Systems. In den beiden ersteren Fällen wählen wir die z-Axe so, daß sie mit der krystallographischen Hauptaxe zusammenfällt. Es sei A der Mittelpunkt einer Crystallmolekel, B der Mittelpunkt einer zweiten, deren Coordinaten mit Bezug auf ein System, dessen Mittelpunkt in A liegt, durch x_1, y_1, z_1 bezeichnet werden mögen. Die von der Molekel B auf den Punkt A ausgeübte elektrische Kraft habe die Componenten X_1, Y_1, Z_1; die Verschiebung der Molekel B mit Bezug auf A sei gegeben durch die Formeln:

$$u = a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}z_1, \quad v = a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}z_1$$
$$w = a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}z_1$$

wo $a_{ik} = a_{ki}$ sein soll.

Im Falle des quadratischen und hexagonalen Systems tritt zu der Verschiebung der Molekeln eine Drehung um die Axen x und y, welche zufolge der von Voigt entwickelten Elasticitätstheorie gegeben ist durch $l = ca_{32}$, $m = -ca_{13}$, wo c eine durch die elastischen Verhältnisse bestimmte Constante ist. Bezeichnen wir durch $\mathfrak{X}$, H, Z die Componenten der in Folge der Verschiebung, durch $\mathfrak{X}'$, H', Z' die Componenten der in Folge der Drehung neu entstehenden elektrischen Kräfte, so wird:

$$\mathfrak{X} = a_{11}\Sigma\frac{\partial X_1}{\partial x_1}x_1 + a_{22}\Sigma\frac{\partial X_1}{\partial y_1}y_1 + a_{33}\Sigma\frac{\partial X_1}{\partial z_1}z_1$$
$$+ a_{23}\left(\Sigma\frac{\partial X_1}{\partial y_1}z_1 + \Sigma\frac{\partial X_1}{\partial z_1}y_1\right) + a_{31}\left(\Sigma\frac{\partial X_1}{\partial z_1}x_1 + \frac{\partial X_1}{\partial x_1}z_1\right)$$
$$+ a_{12}\left(\Sigma\frac{\partial X_1}{\partial x_1}y_1 + \Sigma\frac{\partial X_1}{\partial y_1}x_1\right).$$

Entsprechende Formeln gelten für H und Z. Ferner ergiebt sich:

$$\mathfrak{X}' = -l\Sigma\left\{\frac{\partial X_1}{\partial y_1}z_1 - \frac{\partial X_1}{\partial z_1}y_1\right\} + m\Sigma\left\{\frac{\partial X_1}{\partial x_1}z_1 - \frac{\partial X_1}{\partial z_1}x_1 + Z_1\right\}$$
$$H' = -l\Sigma\left\{\frac{\partial Y_1}{\partial y_1}z_1 - \frac{\partial Y_1}{\partial z_1}y_1 + Z_1\right\} + m\Sigma\left\{\frac{\partial Y_1}{\partial x_1}z_1 - \frac{\partial Y_1}{\partial z_1}x_1\right\}$$
$$Z' = -l\Sigma\left\{\frac{\partial Z_1}{\partial y_1}z_1 - \frac{\partial Z_1}{\partial z_1}y_1 - Y_1\right\} + m\Sigma\left\{\frac{\partial Z_1}{\partial x_1}z_1 - \frac{\partial Z_1}{\partial z_1}x_1 - X_1\right\}.$$

Wir wenden uns nun zu der Betrachtung gewisser specieller Systeme elektrischen Pole.

1. Einaxiges Polsystem.

Die Molekeln des Crystalls seien verbunden mit je zwei entgegengesetzten elektrischen Polen; die sie verbindende Axe habe bei allen dieselbe Richtung und sei parallel der z-Axe des Coordinatensystems; das von den Mittelpunkten der Molekeln gebildete Punktsystem, welches quadratischen oder hexagonalen Typus besitzen kann, sei symmetrisch mit Bezug auf die Coordinatenebenen. Verstehen wir unter x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Mittelpunktes für irgend eine Molekel, so ist das von derselben auf einen Punkt x, y, z ausgeübte Potential

$$V = \Gamma\frac{z - z_1}{r^3}$$

Der Mittelpunkt des Coordinatensystems falle zusammen mit dem Mittelpunkt einer Molekel, für diese ergiebt sich dann:

$$\Xi = 3\Gamma\Big(\sum\frac{x_1^2+z_1^2}{r^5}-10\frac{x_1^2z_1^2}{r^7}\Big)a_{13},\quad H = 3\Gamma\Big(\sum\frac{y_1^2+z_1^2}{r^5}-10\frac{y_1^2z_1^2}{r^7}\Big)a_{23}$$

$$Z = 3\Gamma\Big(\sum\frac{x_1^2}{r^5}-5\frac{x_1^2z_1^2}{r^7}\Big)a_{11}+3\Gamma\Big(\sum\frac{y_1^2}{r^5}-5\frac{y_1^2z_1^2}{r^7}\Big)a_{22}+3\Gamma\Big(\sum 3\frac{z_1^2}{r^4}-5\frac{z_1^4}{r^7}\Big)a_{33}$$

$$\Xi' = -\Gamma\Big(\sum\frac{1}{r^3}+3\frac{x_1^2-2z_1^2}{r^5}\Big)m,\quad H' = \Gamma\Big(\sum\frac{1}{r^3}+3\frac{y_1^2-2z_1^2}{r^5}\Big)l$$

$$Z' = 0.$$

Sowohl für das quadratische, als für das hexagonale System ist

$$\sum\frac{x_1^2}{r^5} = \sum\frac{y_1^2}{r^5},$$

somit ergeben sich für die inducierten elektrischen Momente die Formeln:

(1) $\quad a = 2p\,a_{13}, \qquad b = 2p\,a_{23}, \qquad c = q(a_{11}+a_{22})+r\,a_{33}.$

Dieselben entsprechen den hemimorph-hemiëdrischen Gruppen des quadratischen und des hexagonalen Systems.

2. Trigonales Polsystem.

Durch den Mittelpunkt einer Molekel legen wir eine Ebene senkrecht zu der z-Axe des Coordinatensystems. In dieser zeichnen wir ein mit der Molekel koncentrisches gleichseitiges Dreieck, dessen Ecken mit positiven elektrischen Polen besetzt werden. Die Ecken eines zweiten gleichseitigen Dreiecks, welche mit den Ecken des ersten ein regelmäßiges Sechseck bilden, werden mit negativen Polen von gleicher Stärke besetzt. Die Mittelpunkte der Molekeln bilden ein regelmäßiges Punktsystem, dessen Projektion auf die xy-Ebene durch ein Netz von gleichseitigen Dreiecken gebildet wird. Die x-Axe sei parallel der einen Seite der Dreiecke, die y-Axe parallel der entsprechenden Höhe. Als erste Hauptlage der Polsysteme bezeichnen wir diejenige, bei welcher der von dem Mittelpunkt der Molekel nach einem positiven Pole gezogene Radius Vektor mit der x-Axe des Coordinatensystems parallel ist, als zweite Hauptlage die, bei welcher jener Radius Vektor der y-Axe parallel ist.

A. Erste Hauptlage.

Sind x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Mittelpunktes der Molekel, so ist ihr Potential auf einen Punkt mit den Coordinaten x, y, z gegeben durch die Kugelfunktion

$$V = A\frac{(x-x_1)^3-3(x-x_1)(y-y_1)^2}{r^7}.$$

Mit Rücksicht auf die Symmetrieeigenschaften eines hexagonalen Punktsystems ergiebt sich:

$$\Xi = A\left(\sum -6\frac{x_1^2}{r^7}+28\frac{x_1^4}{r^9}+63\frac{x_1^4y_1^2-3x_1^2y_1^4}{r^{11}}\right)(a_{11}-a_{22})$$

$$H = 2A\left(\sum 6\frac{x_1^2}{r^7}-28\frac{x_1^4}{r^9}-63\frac{x_1^4y_1^2-3x_1^2y_1^4}{r^{11}}\right)a_{12}$$

$$Z = 0 \text{ und ebenso } \Xi = H' = Z' = 0.$$

Hieraus folgen dann für die inducierten elektrischen Momente die Formeln der sphenoidisch-hemiëdrischen Gruppe des hexagonalen Systems.

$$a = s(a_{11}-a_{22}), \qquad b = -2s\,a_{12}, \qquad c = 0. \tag{2A}$$

Zweite Hauptlage.

Es ergeben sich ebenso die Formeln

$$a = -2s'a_{12}, \qquad b = -s'(a_{11}-a_{22}), \qquad c = 0. \tag{2B}$$

Die Superposition der beiden Hauptlagen des trigonalen Polsystems führt zu den Formeln der sphenoidisch-tetartoëdrischen Gruppe des hexagonalen Systems

$$\begin{aligned} a &= s(a_{11}-a_{22})-2s'a_{12} \\ b &= -s'(a_{11}-a_{22})-2s\,a_{12} \\ c &= 0. \end{aligned} \tag{2A, 2B}$$

Combiniert man das trigonale Polsystem in der zweiten Hauptlage mit dem einaxigen Polsystem, so ergiebt sich durch Addition der Formeln 1 und 2B

$$\begin{aligned} a = 2p\,a_{13}-2s'a_{12}, \qquad b &= 2p\,a_{23}-s'(a_{11}-a_{22}) \\ c &= q(a_{11}+a_{22})+r\,a_{33}. \end{aligned} \tag{1, 2B}$$

Es sind dies die Formeln der zweiten hemimorph-tetartoëdrischen Gruppe des hexagonalen Systems, (Turmalin).

3. Dihexagonales Polsystem.

Durch den Mittelpunkt einer Molekel legen wir eine Axe parallel zu der z-Axe des Coordinatensystems; auf ihr nehmen wir in gleichem Abstand von dem Mittelpunkt zu beiden Seiten dessel-

ben zwei Punkte und legen durch sie Ebenen senkrecht zu der z-Axe. In der oberen zeichnen wir ein regelmäßiges Zwölfeck, dessen aufeinander folgende Ecken mit 1, 2, 3 . . . bezeichnet werden mögen. In der zweiten Ebene zeichnen wir ein mit dem ersten kongruentes Zwölfeck, dessen Ecken 13, 14, 15 . . . 24 senkrecht unter den Ecken 1, 2, 3 . . . 12 liegen. Die Ecken des Sechseckes 1, 3, 5, 7, 9, 11 besetzen wir mit positiven Polen, die Ecken des Sechseckes 2, 4, 6, 8, 10, 12 mit negativen Polen von gleicher Stärke. Umgekehrt die Ecken 13, 15, 17, 19, 21, 23, mit negativen, die Ecken 14, 16, 18, 20, 22, 24 mit positiven Polen; das ganze Polsystem sei so orientiert, daß die durch seine Hauptaxe und die Pole 1 und 13 hindurchgehende Ebene mit der zx-Ebene den Winkel $\pi/_{12}$ einschließt. Sind wieder $x_1 y_1 z_1$ die Coordinaten des Mittelpunktes der Molekel, so ist das Potential auf einen Punkt x, y, z gegeben durch die Kugelfunktion:

$$V = B\frac{\{3(x-x_1)^5(y-y_1)-10(x-x_1)^3(y-y_1)^3+3(x-x_1)(y-y_1)^5\}(z-z_1)}{r^{15}}.$$

Ferner ergiebt sich mit Benützung der Symmetrieeigenschaften des hexagonalen Punktsystems:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= -24B\left\{\sum\frac{x_1^4y_1^2-x_1^2y_1^4}{r^{15}}\left(1-15\frac{z_1^2}{r^2}\right)\right\}a_{22}\\
H &= 24B\left\{\sum\frac{x_1^4y_1^2-x_1^2y_1^4}{r^{15}}\left(1-15\frac{z_1^2}{r^2}\right)\right\}a_{12}\\
\mathfrak{A}' &= -24Bc\left\{\sum\frac{x_1^4y_1^2-x_1^2y_1^4}{r^{15}}\left(1-15\frac{z_1^2}{r^2}\right)\right\}a_{22}\\
H' &= 24Bc\left\{\sum\frac{x_1^4y_1^2-x_1^2y_1^4}{r^{15}}\left(1-15\frac{z_1^2}{r^2}\right)\right\}a_{12}.
\end{aligned}$$

Die inducierten elektrischen Momente werden dargestellt durch die Formeln:

$$(3)\qquad a = 2t\,a_{22}, \qquad b = -2t\,a_{12}, \qquad c = 0.$$

Es sind das die Gleichungen, welche der trapezoëdrisch-hemiëdrischen Gruppe des hexagonalen Systems entsprechen.

Combinieren wir das einaxige Polsystem mit dem dihexagonalen, so ergeben sich die entsprechenden Momente durch Addition der Gleichungen 1 und 3; es wird also:

$$a = 2pa_{12}+2ta_{23}, \quad b = 2pa_{23}-2ta_{12} \qquad c = q(a_{11}+a_{22})+ra_{33}. \qquad (1, 3)$$

Formeln der ersten hemimorph tetartoëdrischen Gruppe des hexagonalen Systems.

Verbindet man das trigonale Polsystem in der ersten Hauptlage mit dem dihexagonalen, so ergiebt sich das Gleichungssystem der trapezoëdrisch tetartoëdrischen Gruppe des Hexagonalsystems

$$a = s(a_{11}-a_{22})+2ta_{23}, \quad b = -2sa_{12}-2ta_{13}, \quad c = 0. \quad (2A, 3)$$

Combiniert man endlich das einaxige Polsystem mit dem trigonalen in seinen beiden Hauptlagen und mit dem dihexagonalen, so gelangt man zu den Formeln der ogdoëdrischen Gruppe

$$\begin{aligned} a &= 2pa_{12}+s(a_{11}-a_{22})-2s'a_{12}+2ta_{23} \\ b &= 2pa_{23}-s'(a_{11}-a_{22})-2sa_{12}-2ta_{13} \quad (1, 2A, 2B, 3) \\ c &= q(a_{11}+a_{22})+ra_{33}, \end{aligned}$$

womit sämmtliche Formen des hexagonalen Systems, bei welchen piëzoëlektrische oder pyroëlektrische Erregung überhaupt möglich ist, erschöpft sind.

4. Tetraëdrisches Polsystem.

Vier positive Pole liegen in den Ecken eines Tetraëders, vier negative von gleicher Stärke in den Ecken eines zweiten Tetraëders, durch welches das erste zum Würfel ergänzt wird.

A. Erste Hauptlage.

Die z-Axe des Coordinatensystems steht senkrecht auf einer Würfelfläche, die Ebenen zx und zy sind parallel den Würfelseiten. Das Potential wird:

$$V = \Delta\frac{(x-x_1)(y-y_1)(z-z_1)}{r^7}.$$

Ferner ergiebt sich:

$$X = \Delta\left\{\sum 6\frac{x_1^2+z_1^2}{r^7}-7\frac{x_1^4+z_1^4}{r^9}-63\frac{x_1^2y_1^2z_1^2}{r^{11}}\right\}a_{23}$$

$$H = \Delta\left\{\sum 6\frac{x_1^2+z_1^2}{r^7}-7\frac{x_1^4+z_1^4}{r^9}-63\frac{x_1^2y_1^2z_1^2}{r^{11}}\right\}a_{13}$$

$$Z = \Delta\left\{\sum 6\frac{x_1^2+y_1^2}{r^7}-7\frac{x_1^4+y_1^4}{r^9}-63\frac{x_1^2y_1^2z_1^2}{r^{11}}\right\}a_{12}$$

$$X = \Delta\left\{\sum 6\frac{x_1^2-z_1^2}{r^7}-7\frac{x_1^4-z_1^4}{r^9}\right\}l, \quad H' = -\Delta\left\{\sum 6\frac{x_1^2-z_1^2}{r^7}-7\frac{x_1^4-z_1^4}{r^9}\right\}m$$

$$Z' = 0$$

und dem entsprechend

$$(4A) \qquad a = ka_{23}, \qquad b = ka_{31}, \qquad c = k'a_{12}.$$

Diese Formeln gehören zu der sphenoidisch-hemiëdrischen Gruppe des quadratischen Systems. Ist das Punktsystem ein reguläres, so wird die z-Axe mit x und y gleichberechtigt und wir erhalten die Formeln des regulären Systems

$$(4A)' \qquad a = ka_{23}, \qquad b = ka_{13}, \qquad c = ka_{12}.$$

B. Zweite Hauptlage.

Die zx- und die zy-Ebene gehen durch die Kanten des Würfels hindurch, während die Stellung der z-Axe unverändert bleibt. Das Potential wird

$$V = \tfrac{1}{2}\Delta \frac{\{(x-x_1)^2-(y-y_1)^2\}(z-z_1)}{r^7}$$

Ferner ergiebt sich:

$$\Xi = -\Delta\left\{\sum \frac{x_1^2+z_1^2}{r^7} - 21\frac{x_1^2z_1^2}{r^9} - \tfrac{7}{2}\frac{x_1^4-x_1^2y_1^2}{r^9}\left(1-18\frac{z_1^2}{r^2}\right)\right\}a_{31}$$

$$H = \Delta\left\{\sum \frac{x_1^2+z_1^2}{r^7} - 21\frac{x_1^2z_1^2}{r^9} - \tfrac{7}{2}\frac{x_1^4-x_1^2y_1^2}{r^9}\left(1-18\frac{z_1^2}{r^2}\right)\right\}a_{23}$$

$$Z = -\Delta\left\{\sum \frac{x_1^2}{r^7}\left(1-7\frac{z_1^2}{r^2}\right) - \tfrac{7}{2}\frac{x_1^4-x_1^2y_1^2}{r^9}\left(1-9\frac{z_1^2}{r^2}\right)\right\}(a_{11}-a_{22})$$

$$\Xi' = \Delta\left\{\sum \frac{x_1^2-z_1^2}{r^7} + 7\frac{x_1^2z_1^2}{r^9} - \tfrac{7}{2}\frac{x_1^4-x_1^2y_1^2}{r^9}\right\}m$$

$$H' = \Delta\left\{\sum \frac{x_1^2-z_1^2}{r^7} + 7\frac{x_1^2z_1^2}{r^9} - \tfrac{7}{2}\frac{x_1^4-x_1^2y_1^2}{r^9}\right\}l$$

$$Z' = 0,$$

und hieraus

$$(4B) \qquad a = ua_{13}, \qquad b = -ua_{23}, \qquad c = v(a_{11}-a_{22}).$$

Combinieren wir die beiden Hauptstellungen des tetraëdrischen Polsystems, so resultieren die Formeln der sphenoidisch tetartoëdrischen Gruppe des quadratischen Systems

$$(4A, 4B) \qquad \begin{aligned} a &= ka_{23}+ua_{13}, \qquad b = ka_{13}-ua_{23}, \\ c &= k'a_{12}+v(a_{11}-a_{22}). \end{aligned}$$

5. Ditetragonales Polsystem.

Zwei regelmäßige Achtecke stehen zu einander und zu der z-Axe des Coordinatensystems in derselben Beziehung wie die Zwölf-

ecke des dihexagonalen Systems; sie werden in derselben Weise wie jene mit elektrischen Polen besetzt. Bezeichnen wir eine positive Ecke des oberen Achteckes mit 1, die darunter liegende negative Ecke des unteren Achteckes mit 9, so soll die Ebene, welche durch die Hauptaxe des Polsystems und die Punkte 1 und 9 hindurchgeht mit der εx-Ebene den Winkel $\pi/8$ einschließen. Das Potential wird:

$$V = \Theta_1 \frac{\{(x-x_1)^3(y-y_1)-(x-x_1)(y-y_1)^3\}(z-z_1)}{r^{11}}.$$

Ferner ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
X &= -\Theta\left\{\sum \frac{3x_1^3y_1^3-x_1^6}{r^{11}}\left(1-11\frac{z_1^2}{r^2}\right)\right\}a_{23}\\
H &= \Theta\left\{\sum \frac{3x_1^3y_1^3-x_1^6}{r^{11}}\left(1-11\frac{z_1^2}{r^2}\right)\right\}a_{12}\\
X' &= -\Theta\left\{\sum \frac{3x_1^3y_1^3-x_1^6}{r^{11}}\left(1-11\frac{z_1^2}{r^2}\right)\right\}l\\
H' &= -\Theta\left\{\sum \frac{3x_1^3y_1^3-x_1^6}{r^{11}}\left(1-11\frac{z_1^2}{r^2}\right)\right\}m\\
Z &= Z' = 0
\end{aligned}$$

und somit

$$a = 2wa_{23}, \quad b = -2wa_{12}, \quad c = 0 \qquad (5)$$

die Formeln der trapezoëdrisch-hemiëdrischen Gruppe des quadratischen Systems.

Combiniert man diese Formeln mit denjenigen, welche dem einaxigen Polsystem entsprechen, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
a &= 2pa_{12}+2wa_{23}, \quad b = 2pa_{23}-2wa_{12}, \qquad (1, 5)\\
c &= q(a_{11}+a_{22})+ra_{33}.
\end{aligned}$$

Es sind dieß die Formeln der hemimorph-tetardoëdrischen Gruppe des quadratischen Systems und damit sind auch alle der elektrischen Erregung fähigen Gruppen dieses Systems erschöpft.

Alle auf die elektrische Erregung der Crystalle des regulären, des hexagonalen und des quadratischen Systems bezüglichen Formeln können hiernach durch die Combination von nur 5 verschiedenartigen elektrischen Polsystemen erhalten werden. Es

ist zu übersehen, daß auf demselben Wege auch die Gleichungen für die noch übrigen 5 hemimorphen oder hemiëdrischen Formen, welche dem rhombischen, monoklinen und triklinen System angehören, zu gewinnen sind.

Ueber die Maximaltension, mit welcher Wasserstoff aus Lösungen durch Metalle in Freiheit gesetzt wird.

Mit 1 Figur.

Von

G. Tammann und **W. Nernst.**

(Aus dem physikalischen Institut zu Göttingen.)

(Vorgelegt von Eduard Riecke.)

A. Theoretischer Theil.

Bringt man ein Metall mit einer wässerigen Lösung in Berührung, so geschieht es häufig, daß jenes in Lösung geht und die elektrisch äquivalente Wasserstoffmenge in Freiheit setzt.

Diese Reaktion ist mit einer beträchtlichen Volumvermehrung verbunden; nach den bekannten Gesetzen über den Einfluß des Druckes auf die Reaktionsfähigkeit der Stoffe wird es möglich sein, durch Anwendung genügend großen Druckes die Reaktion in der Richtung vor sich gehen zu lassen, welche mit einer Volumverminderung verbunden ist, und es muß also im Allgemeinen zu erzielen sein, durch mit genügend hohem Druck in wässerige Lösungen gepreßten Wasserstoff die in Lösung befindlichen Metalle auszufällen.

Denjenigen Partialdruck des Wasserstoffs, bei welchem dieses Gas mit der Lösung und dem Metalle im Gleichgewicht sich befindet, wollen wir als die »Maximalspannung« des in Freiheit gesetzten Wasserstoffs bezeichnen; die Analogie dieser Druckgröße mit einer Dampf- oder Dissociationsspannung springt in die Augen.

Dieser Druck ist gleichzeitig das Maaß der Arbeit, welche in maximo bei der Auflösung der Metalle in Säuren gewonnen werden kann; da bekanntlich die elektromotorische Kraft der sogenannten umkehrbaren galvanischen Elemente ein Maaß für die gleiche Energiegröße ist, so erkennen wir bereits, daß jener Druck mit

der elektromotorischen Wirksamkeit auf das innigste verknüpft sein muß, wie es auch die nähere Betrachtung alsbald ergeben wird.

Bei der Maximalspannung des Wasserstoffs ist die Reaktion vollkommen reversibel; die Aenderung jener mit der Temperatur muß also mit der Wärmetönung und der Volumänderung der Reaktion in der analogen Beziehung stehen, wie sie für die Verdampfung durch die bekannte Clausius'sche Formel

$$\varrho = -T\frac{dp}{dT}(v-v') \qquad (1)$$

gegeben ist; nur bedeutet in unserem Falle ϱ die Wärmemenge, welche bei der Auflösung von z. B. 1 g-Aequivalent Zink in einer beliebigen Säurelösung entwickelt wird, v das der Maximalspannung p entsprechende Volum von 1 g Wasserstoff und v' die Volumabnahme, welche das aus Metall und Lösung bestehende System durch die Abgabe des Wasserstoffs erfährt. In den meisten Fällen wird man v' gegen v vernachlässigen dürfen.

Betrachten wir ein reversibeles galvanisches Element, z. B. das Daniell'sche nach den Typus

$$Zn \mid Zn\,SO_4\text{-}Lsg \mid Cu\,SO_4\text{-}Lsg \mid Cu$$

zusammengesetzte. Es betrage die Maximaltension des Wasserstoffes für das System Zink-Zinkvitriollösung p_1, für das System Kupfer-Kupfervitriollösung p_2. Dann können wir die maximale Arbeit, welche bei der Auflösung des Zinkes und Ausfällung der äquivalenten Menge Kupfer gewonnen werden kann, einmal aus der elektromotorischen Kraft des Elementes, sodann aus dem Unterschiede der beiden Maximaltensionen erhalten. Wir können also aus den Maximaltensionen der Metalle gegenüber den betreffenden Lösungen die elektromotorische Kraft des aus ihnen kombinirten Elementes berechnen.

Die Arbeit, welche bei der Entwickelung von 2 g Wasserstoff und der Ueberführung des entwickelten Gases unter Normaldruck P gewonnen werden kann, beträgt

$$A = pv + RTln\frac{p}{P},$$

worin p die Maximalspannung und R die Gaskonstante bedeutet; zählen wir das Volum in Litern und den Druck in Atmosphären, so ist für eine g-Molekel eines Gases bekanntlich

$$pv = RT = 0.0819\,T$$

und nach Einführung der Gasgleichung wird

$$A = 0{\cdot}0819\, T\left(1 + ln\, \frac{p}{P}\right)$$

Die Arbeit, welche im Daniellelemente bei Auflösung einer g-Molekel Zink und Ausfällung einer g-Molekel Kupfer gewonnen werden kann, beträgt also

$$A_1 - A_2 = 0{\cdot}0819\, T\, ln\, \frac{p_1}{p_2}.$$

Diese Arbeit ist gleich der elekromotorischen Kraft E; es wird also

$$E = 0{\cdot}0819\, T ln\, \frac{p_1}{p_2} \tag{2}$$

oder nach Einführung des üblichen Maaßsystems [1])

$$E = 0{\cdot}430\, T \times 10^{-4} ln\, \frac{p_1}{p_2} \text{ Volt.}$$

Durch die vorstehende Gleichung ist zum ersten Male für die elektromotorische Kraft der umkehrbaren, aus zwei verschiedenen Metallen kombinierten galvanischen Elemente ein Ausdruck ermittelt worden, welcher dieselbe aus anderweitigen, der Messung direkt zugänglichen Größen im absoluten Maaße zu berechnen gestattet; doch sei daran erinnert, daß obige Gleichung nur unter der Voraussetzung gültig ist, daß auch bei dem der Maximaltension entsprechenden Wasserstoffdrucke der Austausch der Elektricität zwischen Metallen und Lösung nur durch die Ionen der betreffenden Metalle und nicht etwa gleichzeitig durch die in der Lösung befindlichen Wasserstoffionen oder durch den in den Metallen gelösten Wasserstoff vermittelt wird. Inwieweit und bei welchen Metallen diese Voraussetzung erfüllt ist, bedarf erst näherer Untersuchung. Ist die Maximaltension des Wasserstoffs zu groß, als daß letzterer noch den Gasgesetzen gehorcht, so läßt sich leicht ein strengerer Ausdruck ableiten.

Formel (1) schreibt sich bei Vernachlässigung von v'

$$q = -0{\cdot}0819\, T^2 \frac{d\, ln\, p}{dT}. \tag{3}$$

Die Wärmetönung im Elemente entspricht der Differenz der Auflösungswärme des Zinks und des Kupfers:

1) Vgl. z. B. Zeitschr. f. physik. Chem. 4 138 und 176 (1889).

$$W = \varrho_1 - \varrho_2 = -0{\cdot}0819\, T^n \frac{d\ln \frac{p_1}{p_2}}{dT}. \qquad (4)$$

Differenzieren wir Gl (2), so wird

$$\frac{dE}{dT} = 0{\cdot}0819 \ln \frac{p_1}{p_2} + 0{\cdot}0819\, T \frac{d\ln \frac{p_1}{p_2}}{dT}$$

oder in (4) eingeführt:

$$W - E = -T\frac{dE}{dT}.$$

Dies ist aber die bekannte Gleichung, welche v. Helmholtz direkt durch Anwendung der thermodynamischen Principien auf die umkehrbaren galvanischen Elemente gefunden hat, und zu der wir soeben auf einem zwar etwas umständlicheren aber dafür vielleicht in mancher Hinsicht anschaulicheren Wege gelangt sind.

Was den Mechanismus der von uns behandelten Reaktion betrifft, so lassen sich vom Standpunkte der neueren Lösungstheorie und in weiterer Fortführung der Anschauungen, welche einer von uns[1]) über den Vorgang der Auflösung von Metallen entwickelt hat, darüber folgende Bemerkungen machen. Das mit der Lösung in Berührung befindliche Metall sucht vermöge einer als »elektrolytischen Lösungstension« bezeichneten Expansivskraft seine positiv geladenen Ionen in die Lösung hineinzubefördern; der Vorgang kann zum Stillstand gebracht werden entweder durch die mit dem Uebertritt der metallischen Ionen in die Lösung hervorgerufenen elektrostatischen Ladungen, indem nämlich sich die Flüssigkeit positiv, das Metall negativ electrisch ladet und so durch die elektrostatische Wirkung der entstandenen Doppelschicht der Lösungstension das Gleichgewicht gehalten wird, oder aber durch den osmotischen Partialdruck der in Lösung befindlichen Ionen des betreffenden Metalls, welcher ebenfalls der Lösungstension entgegenwirkt. Im allgemeinen werden natürlich beide Wirkungen sich superponieren.

Die elektrolytische Lösungstension kann nun aber auch einen solchen Betrag erreichen, daß eine derartige Kompensation ausgeschlossen ist; es kann vorkommen, daß an Stelle der positiven Ionen, die aus dem Metalle austreten, anderweitige gleichartige Ionen aus der Lösung heraus gedrängt werden und sich auf dem Metalle niederschlagen. Dies geschieht bei der Verdrängung

1) Nernst, diese Zeitschr. 4 150 (1889).

eines Metalles durch ein anderes (z. B. des Kupfers durch Eisen) aus der Lösung und bei der Entwickelung von Wasserstoff, in welchem Falle für die metallischen Ionen, die in Lösung gehen, die äquivalente Menge Wasserstoffionen im Metalle sich lösen; daß die Löslichkeit des Wasserstoffs in Metallen eine allgemeine Erscheinung ist, haben ja u. A. die Untersuchungen von Thoma[1]) gelehrt. Aus seiner Lösung im Metalle vermag der Wasserstoff dann unelektrisch zu entweichen, sobald seine Tension hinreichend groß geworden ist. Freiwillige Wasserstoffentwickelung kann hiernach nur in dem Falle stattfinden, daß der Druck des Wasserstoffs über seiner »festen« Lösung im Metall größer wird als der einer Atmosphäre. Auch diese spezielleren Anschauungen führen zu den oben für die Maximaltension des entweichenden Wasserstoffs entwickelten Beziehungen, und sie lassen auch unmittelbar erkennen, daß obige Maximaltension ein Maaß der elektromotorischen Wirksamkeit des betreffenden Metalles sein muß. Auf die Folgerungen, welche sich hieraus für die galvanische Polarisation ergeben, kann hier nicht näher eingegangen werden.

B. Experimenteller Theil.

Das chemische Gleichgewicht, welches den Gegenstand unserer Untersuchung bildet, läßt sich von zwei Seiten her erreichen, indem man entweder in eine Metallsalzlösung Wasserstoff bis zu solchem Drucke einpreßt, daß das Metall ausfällt, oder aber indem man den Druck bestimmt, bei welchen die Wasserstoffentwickelung des aus Lösung und festem Metall gebildeten Systemes aufhört.

Von älteren diesbezüglichen Versuchen seien vor allen Dingen diejenigen N. N. Beketoffs[2]) erwähnt. Beketoff suchte den Druck zu bestimmen, unter dem der in die Lösung des Metallsalzes gepreßte Wasserstoff das Metall aus der Lösung zu fallen beginnt. Er zeigte, daß Wasserstoff beim Drucke einer Atmosphäre aus einer Lösung von Silberacetat metallisches Silber abscheidet, daß bei höheren Drucken bis zu 10 Atmosphären verdünnte Lösungen von Merkuronitrat, Silbernitrat, Silbersulfat und ammoniakalische Silberchloridlösung gefällt werden, ferner daß Kupfer- und Bleinitratlösung von Wasserstoff unter Drucken bis zu 10 Atmosphären nicht gefällt werden, daß aber die Fällung eintritt, wenn in die Lösungen ein Platindraht taucht. Betreffs der besonnenen und äußerst sorg-

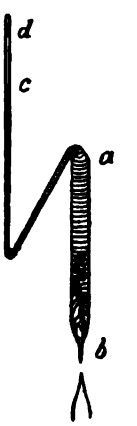
1) Zeitschr. f. physik. Chemie. 3 69 (1889).

2) N. N. Beketoff, Compt. rend. 48, p. 442, 1859, und Untersuchungen über die Erscheinungen der gegenseitigen Ausscheidung der Elemente aus ihren Verbindungen. Dissertation, Charkow 1865.

fältigen Versuchstechnik Beketoffs muß auf seine Abhandlung verwiesen werden. C. Brunner[1]) fand, daß eine verdünnte Lösung von Silbernitrat von Platinchlorid und Palladiumchlorid schon beim Durchleiten von Wasserstoff das Metall abscheidet.

Cailletet[2]) brachte gewogene Zinkplatten in eine Lösung von Schwefelsäure und ließ die Wasserstoffentwickelung unter bestimmten Drucken vor sich gehen. Wie zu erwarten, fand Cailletet die Geschwindigkeit der Auflösung beim Wachsen des Wasserstoffdruckes stark abnehmend; schließlich hört bei einem gewissen Druck, für den aber die Zusammensetzung der Lösung leider nicht bestimmt wurde, die Wasserstoffentwickelung gänzlich auf. Ferner zeigte Cailletet, daß Natriumamalgam aus seinen Salzlösungen bei hohen Drucken nicht mehr Wasserstoff entwickelt; bricht man aber das Rohr, in dem sich alles im Gleichgewicht befand, auf, so tritt wiederum lebhafte Gasentwickelung ein.

Da es von vorneherein aussichtslos erschien, den Druck, bei welchem die Fällung des Metalls beginnt, auch nur annähernd zu bestimmen, so waren wir auf die Messung des Druckes, bei welchem die Wasserstoffentwickelung aufhört, angewiesen. Der Apparat, dessen wir uns bei unsern Versuchen bedienten, bestand aus einer starkwandigen Glasröhre ab (cf. Fig.) von etwa 1 cm innerer Weite und etwa 20 cm Länge, an welche ein geschlossenes von einer Kapillare gebildetes Luftmanometer angesetzt war. Die Füllung geschah in folgender Weise. Nachdem das Manometer mit trockner Luft erfüllt und mit Quecksilber beschickt war, wurde in dem in umgekehrter Stellung befindlichen Apparat durch b das zu untersuchende Metall, eine zum Bedecken desselben erforderliche Menge Chloroform, ein Glasstäbchen und schließlich die Lösung eingeführt; da das Metall vor dem Angriff seitens der Säure durch das Chloroform geschützt war, konnte keine Wasserstoffentwickelung stattfinden und das Abschmelzen bei b unter möglichster Vermeidung eines schädlichen Luftvolumens erfolgen. Drehte man den Apparat hingegen um, so fiel das schwerere Chloroform nach unten, während das Metall durch das Glasstäbchen oberhalb des Chloroforms und innerhalb der Lösung getragen wurde; es entwickelte sich Wasserstoff mit immer steigendem Drucke, der an dem Luftmanometer abgelesen wurde. Die



1) C. Brunner, Pogg. Ann. 122, p. 153, 1864.
2) Cailletet, Compt. rend. 68, p. 395, 1869.

Genauigkeit der Ablesung wurde übrigens sehr dadurch vergrößert, daß das zu messende Luftvolum cd beiderseits von Quecksilberfäden abgeschlossen war (cf. Figur), deren Differenz sich leicht bis auf 0·1 mm messen ließ, und so eine Berücksichtigung der Verjüngung des Lumens am oberen Ende der Kapillare vermieden war. Die Länge des abgeschlossenen Luftvolumens betrug bei Barometerdruck meistens gegen 40 cm.

Bei Beginn der Reaktion war die Wasserstoffentwickelung gewöhnlich sehr stürmisch, ließ aber bald nach und schien den Angaben des Manometers zufolge nach einigen Tagen, bisweilen auch Wochen, ihr Ende erreicht zu haben. Die Schnelligkeit, mit welcher das Gleichgewicht erreicht wurde, hing natürlich im höchsten Maaße von der Größe des bei a befindlichen Luftbläschens ab. Häufiges Umrühren der Lösung, welches durch wiederholtes Umkehren des Apparats und das Hin- und Hergleiten des darin befindlichen Metalles erzielt wurde, war unbedingt erforderlich.

Die Apparate befanden sich sämmtlich in einem großen Wasserbade, welches im ungeheizten Zimmer aufgestellt war und dessen Temperatur nur wenig um 4° variierte.

Die Messung des Druckes ließ sich mit mehr als hinreichender Genauigkeit ausführen; schwieriger war die Ermittelung der Endkonzentration der Lösung, welche von der ursprünglichen häufig merklich verschieden war. An eine Analyse der Lösung am Ende des Versuches war nicht zu denken, weil dieselbe beim Oeffnen des Apparats sich in Gestalt feiner Tröpfchen zerstäubte, und mußte daher die entwickelte Wasserstoffmenge geschätzt und so die Abnahme des Säuretiters und die entstandene Salzmenge berechnet werden.

Der entwickelte Wasserstoff befindet sich zum Theil gelöst, zum Theil in Luftbläschen bei a, dessen Größe im Vergleich zum Gesamtvolum der Lösung nur durch Schätzung sich ermitteln ließ. Der Absorptionskoefficient des Wasserstoffs beträgt bei 4° 0·0208[1]); die beim Druck P Atmosphären in Lösung befindliche Menge von Wasserstoff entspricht also einer Abnahme des Säuretiters der Lösung um

$$P\frac{0{\cdot}0208}{11{\cdot}2} \text{ Aequivalente pro Liter}$$

weil 1 g H (= 1 Aequivalent) bei 0° im Raume = 1 Liter befindlich unter dem Drucke von 11·2 Atmosphären steht.

1) Timofeiew, Zeitschr. f. physik. Chemie. 6 147 (1890).

Bezeichnet ferner n den Bruchtheil, welchen das Volum des Luftbläschens vom Gesamtvolum der Lösung ausmacht, so sind

$$\frac{P}{11{\cdot}3n} \text{ Aequivalente pro Liter}$$

Säure zur Erzeugung des der Lösung entzogenen Wasserstoffs verbraucht worden, weil bei der Versuchstemperatur von 4° 1 g H im Raume = 1 Liter befindlich unter dem Drucke von 11·3 Atmosphären steht. Insgesamt beträgt also die Abnahme des Säuretiters

$$P\left(0{\cdot}00186+\frac{1}{11{\cdot}3n}\right)$$

und die äquivalente Menge Metall ist natürlich in das Salz der Säure übergegangen.

Im Folgenden sind die Drucke P angeführt, welche sich bei den einzelnen Metallen und den betreffenden Endkonzentrationen C, ausgedrückt in g-Aequivalenten pro Liter, ergeben haben und ihrer Konstanz zufolge als Maximaltensionen anzusehen waren. Häufig wandten wir die Metalle platiniert an, wodurch bekanntlich die Geschwindigkeit der Wasserstoffentwickelung sehr beschleunigt wird; daß Gegenwart von Platin den Absolutwerth der Maximalspannung ändern sollte, ist wohl von vornherein im höchsten Maaße unwahrscheinlich und gaben unsere Versuche auch keinen Anhalt zu dieser Annahme.

Zink. Dasselbe kam in auf der Drehbank aus Stücken reinen Metalls gedrehten Spiralen zur Verwendung.

1) $C = 0{\cdot}13\,H_2SO_4 + 1{\cdot}3\,ZnSO_4$; $P = 18$ Atm.
2) $C = 0{\cdot}11\,H_2SO_4 + 1{\cdot}2\,ZnSO_4$; $P = 23{\cdot}5$ Atm.
3) $C = 0{\cdot}29\,H_2SO_4 + 1{\cdot}7\,ZnSO_4$; $P = 25{\cdot}6$ Atm.
4) $C = 0{\cdot}20\,H_2SO_4 + 0{\cdot}36\,ZnSO_4$; $P = 57$ Atm.
5) $C = 0{\cdot}35\,H_2SO_4 + 1{\cdot}15\,ZnSO_4$; $P = 29$ Atm.
6) $C = 0{\cdot}34\,H_2SO_4 + 1{\cdot}16\,ZnSO_4$; $P = 40{\cdot}2$ Atm.

Apparate, die mit reiner normaler Schwefelsäure oder mit 1.5fach normaler Schwefelsäure und doppeltnormaler Zinkvitriollösung beschickt waren, explodierten bei Drucken von 70 bis 80 Atmosphären. Wenn die Zahlen untereinander auch zum Theil stark differieren, (vgl. z. B. 1 und 2, 5 und 6), so ersieht man doch mit Sicherheit, daß mit zunehmender Säurekonzentration der Druck stark zunimmt und anderseits durch Gegenwart von Neutralsalz stark heruntergedrückt wird. Leider erreichte die Korrektion wegen der Abnahme des Säuretiters einen sehr hohen Betrag;

da so die Endkonzentrationen der Säure mit einiger Unsicherheit behaftet sind, können die vorstehenden Zahlen nur zur ersten Orientirung dienen.

7) $C = 0{\cdot}68\,HCl + 0{\cdot}30\,ZnCl_2 + 1\,ZnSO_4$; $P = 48$ Atm.
8) $C =$ » » » » $P = 52$ Atm.

Apparate, die mit normaler Salzsäure beschickt waren, explodierten bei Drucken von 70 bis 80 Atm., wobei der Säuretiter etwa auf 0·7 bis 0·8 gesunken war. Dasselbe geschah bei einem mit normaler Essigsäure gefüllten Apparate.

Kadmium. $C = 0{\cdot}62\,HCl + 0{\cdot}3\,CdCl_2$, P ca. 44 Atm.

Eisen. Es kamen eiserne Nägel zur Verwendung.

$$C = 0.46\,H_2SO_4 + 1{\cdot}04\,FeSO_4;\ P = 6{\cdot}4 \text{ Atm.}$$

Während hier bereits nach 3 Tagen Konstanz eingetreten war, ließ ein mit normaler Schwefelsäure beschickter Apparat ein so langsames Ansteigen des Druckes erkennen, wie es in keinem andern Falle beobachtet war. Nach 8 Tagen betrug der Druck erst 5 Atm., nach 14 Tagen erst 6 Atm.; im Laufe eines Vierteljahrs erreichte er den Wert von 34 Atm., ohne daß jedoch der Gleichgewichtszustand erreicht zu sein schien. Die Abnahme des Säuretiters ist auf 11% zu schätzen. Aehnlich verhielt sich ein mit normaler Salzsäure beschickter Apparat. Bei Anwendung doppeltnormaler Schwefelsäure fand bei einem Drucke von 90 Atm. Zertrümmerung des Apparats statt.

Mangan in Stückenform lieferte mit normaler Salzsäure in Berührung einen Druck von 52 Atm. Abnahme des Säuretiters ca. 11%.

Nickel. Das Metall kam in Stückenform und platiniert zur Verwendung; die Konstanz des Druckes trat hier schneller ein als bei andern Metallen.

1) $C = 0{\cdot}94\,H_2SO_4 + 0{\cdot}07\,NiSO_4$; $P = 7{\cdot}5$ Atm.
2) $C = 1{\cdot}52\,H_2SO_4 + 0{\cdot}50\,NiSO_4$; $P = 42$ Atm.
3) $C = 0{\cdot}86\,HCl + 0{\cdot}15\,NiCl_2$; $P = 23{\cdot}1$ Atm.
4) $C = 0{\cdot}88\,HCl + 0{\cdot}15\,NiCl_2$; $P = 29{\cdot}0$ Atm.

Vielleicht ist gerade dieses Metall zu weiteren Versuchen über die Abhängigkeit der Maximaltension von der Konzentration, Temperatur etc. besonders geeignet.

Aluminium. Selbst bei Anwendung von 0·25 normaler Salzsäure waren die Apparate nicht widerstandsfähig genug, obwohl im Laufe der Reaktion der Titer sicherlich bis auf 0·15 heruntergieng. Die Zertrümmerung trat hier übrigens erst nach 20 Tagen ein; ein mit normaler HCl beschickter Apparat explodierte bereits wenige Stunden nach seiner Zusammensetzung.

Magnesium. Eine Anzahl mit 0·25 H_2SO_4, 0·25 HCl, 0·1 CH_3COOH mit und ohne Gegenwart von Neutralsalz beschickter Apparate explodierten theils nach einigen Stunden, theils nach einigen Wochen. Ein mit neutraler doppelt normaler Magnesiumsulfatlösung und mit von Platindraht umwickeltem Magnesiumdraht zusammengesetzter Apparat zeigte nach 8 Tagen einen Druck von 95 Atm. und zersprang schließlich.

Natrium. Selbst bei Anwendung eines einprocentigen Amalgams und einer zehnfachnormalen Natronlösung fand Zertrümmerung des Apparats infolge eines Drucks von 90 Atm. statt.

Kupfer und Silber, die mit Säuren bekanntlich Wasserstoff nicht entwickeln, können demgemäß nur nach Bruchtheilen einer Atmosphäre zählende Maximaltensionen besitzen.

Wir enthalten uns vorläufig, weitere Schlüsse aus dem vorliegenden Beobachtungsmaterial zu ziehen und wollen nur noch darauf hinweisen, daß die Spannungsreihe, in welche nach den Versuchen von Fr. Streintz[1]) die in Lösungen ihrer Nitrate oder Chloride befindlichen Metalle sich einordnen lassen,

Mg, Zn, Al, Cd, Fe, Ni, Cu, Ag

offenbar auch den auf vergleichbare Konzentrationen der Lösungen reducierten Werthen der Maximaltensionen entspricht; nur würde bei einer Ordnung der Metalle nach der Größe ihrer Maximaltensionen das Aluminium vor dem Zink zu stehen kommen.

Allerdings sind unsere Beobachtungen dem Einwande ausgesetzt, daß bei ihnen möglicherweise der Gleichgewichtszustand noch nicht erreicht und der Fortschritt der Reaktion nur stark verzögert sei. Wenn er auch in anbetracht des Umstandes, daß in vielen Fällen die Maximaltension ziemlich schnell erreicht wurde und daß einer rapiden Zunahme des Druckes ein Zustand folgte, wo er während sehr langer Zeit sich wenigstens nicht nachweisbar änderte, wenig Wahrscheinlichkeit für sich hat, so wäre es doch im höchsten Maaße erwünscht, denselben Gleichgewichtszustand von der anderen Seite her zu erreichen. Der direkte Weg wäre natürlich die Bestimmung des Druckes, mit welchem man Wasserstoff in Metallsalzlösungen hineinpressen muß, um gerade noch Metallabscheidung zu erhalten; allein in Anbetracht der Thatsache, die auch wir gelegentlich konstatierten, daß man nämlich mit Kupfersulfatlösung Tage lang Wasserstoffgas von nach mehreren Atmosphären zählenden Drucke in Berührung bringen kann, ohne Ausfällung metallischen Kupfers zu erzielen, trotzdem die Maximal-

1) Wien. Ber. 77 410 (1878).

tension von Kupfer in Berührung mit seinen neutralen Lösungen sicherlich nur nach kleinen Bruchtheilen einer Atmosphäre zählt, müssen wir schließen, daß der von uns studierte Gleichgewichtszustand von der entgegengesetzten Seite aus noch ungleich schwieriger zu erreichen ist.

Ein anderer Weg, der ebenfalls zur gesuchten Maximaltension führen dürfte, würde darin bestehen, daß man die Metallsalzlösung elektrolysiert und den Druck bestimmt, bei welchem an der Kathode die Wasserstoffentwickelung aufhört und die Metallabscheidung beginnt. Thatsächlich beobachteten wir denn auch, wie bei der Elektrolyse eine bezüglich des Gehaltes an Schwefelsäure und Zinksulfat je 0·5-normalen Lösung, wobei als Anode Zinkamalgam und als Kathode ein Platindraht diente, mit zunehmendem Druck eine immer reichlichere Zinkabscheidung stattfand; allein sie war immer noch von Wassenstoffentwickelung begleitet, bis der Apparat schließlich zersprang, und ein scharfer Uebergangspunkt ließ sich nicht konstatieren. Wahrscheinlich wirken die durch die Elektrolyse in der Nähe der Kathode hervorgerufenen Konzentrationsänderungen im hohen Maaße störend.

Wir wollen unsere Mittheilung nicht ohne den Hinweis schließen, daß wir in den Ergebnissen unserer bisherigen, übrigens nicht ganz einfachen und gefahrlosen Versuche nur den ersten Anfang einer eingehenderen Erforschung eines chemischen Gleichgewichtszustandes erblicken, dessen hohes theoretisches Interesse aus den im ersten Theile unserer Notiz mitgetheilten Beobachtungen wohl zur Genüge erhellt. Da wir äußerer Umstände willen die gemeinschaftliche Fortführung unserer Versuche abbrechen mußten, veröffentlichen wir jetzt schon die bisherigen Resultate, deren Unvollständigkeit Niemand mehr empfinden kann, als wir selber; doch wir entschlossen uns zur Publikation in der Hoffnung, die Aufmerksamkeit auf ein bisher zu wenig beachtetes Gebiet zu lenken, für dessen Erforschung wir die leitenden Prinzipien gegeben zu haben glauben, welches seinen experimentellen Ausbau jedoch noch fast völlig von der Zukunft zu erwarten hat.

Dorpat und Göttingen im Juni 1891.

Ueber die Permeabilität von Niederschlagsmembranen.

Von

G. Tammann.

Um die Thatsache der Semipermeabilitität zu erklären, hat M. Traube [1]) in den Niederschlagsmembranen Poren angenommen, durch die wohl die Wassermoleküle hindurch diffundiren, die aber von den Molekülen gewisser anderer Stoffe nicht passirt werden können. Nach Traube sind die Niederschlagsmembranen Atomsiebe, mit deren Hülfe man die relative Größe der Moleküldurchmesser bestimmen kann. Aus der Porentheorie Traube's folgt der Satz: Moleküle, die durch die Niederschlagsmembranen mit weiten Poren nicht hindurchgehn, können durch Niederschlagsmembranen mit engen Poren erst recht nicht durchtreten. Sollten sich Thatsachen finden, die gegen diesen Satz sprechen, so wäre die Porentheorie Traube's hinfällig.

In jüngster Zeit hat Ostwald [2]) die Anschauungen Traube's auf die Ionen der gelösten Stoffe übertragen und darauf aufmerksam gemacht, daß man nicht von der Durchlässigkeit der Membran für ein Salz, sondern von der für bestimmte Ionen zu sprechen hätte. Ein Salz kann nur dann durch die Membran treten, wenn beide Ionen desselben die Membran zu durchdringen vermögen. Vermag auch nur eines der Ionen die Membren nicht zu durchdringen, so wird auf der anderen Seite der Membran das Salz nie nachgewiesen werden können. Aus Ostwalds Anschauungen ergiebt sich betreffs des Verhaltens von Salzen gegenüber Niederschlagsmembranen ein allgemeiner Satz, nämlich der: daß alle Verbindungen eines Ions, welches die Membran nicht durchdringt, ebenfalls nicht durch die Membran diffundiren. Dieser Satz könnte durch das Verhalten des nichtdissociirten Antheils mannigfache Einschränkungen erleiden, da ja immerhin der Fall denkbar wäre, daß, wenn auch beide Ionen durch die Membran nicht diffundiren, es doch der nicht dissociirte Antheil thut. Einen Satz zu schaffen, wie den: kann eine der Ionen oder beide Ionen die Membran nicht durchdringen, so kann es der nicht dissociirte Antheil auch nicht, wäre mindestens verfrüht, da die Beobachtungen von Pfeffer [3])

1) M. Traube, Archiv f. Anatomie und Physiologie 1867, p. 87.

2) W. Ostwald, Zeitschrift f. phys. Chem. VI, p. 71, 1890.

3) W. Pfeffer, Abhandlungen der sächsischen Gesellsch. 16, p. 338, 1890.

am Protoplasma strickt gegen die auf dem Boden der Porentheorie stehende Ansicht sprechen, nämlich die: ein Stoff geht um so leichter durch eine Membran, je weniger Atome in seinem Molekül enthalten sind. Es ist nicht bekannt, ob bei der Diffusion eines Elektrolyten durch eine Niederschlagsmembran die Ionen oder der nichtdissociirte Antheil oder beide Arten von Molekülen diffundiren. Es werden später einige Messungen über die durch eine Niederschlagsmembran durchdiffundirten Mengen verschiedener Säuren mitgetheilt werden, aus denen allerdings zu folgen scheint, daß hauptsächlich die Ionen die Membran durchdringen.

Zur Prüfung der Anschauungen von Traube und Ostwald habe ich eine Reihe von Versuchen, theils schon vor mehreren Jahren, ausgeführt. Die einzigen mir bekannten Angaben über die Permeabilität von Niederschlagsmembranen rühren von M. Traube[1]) und mir[2]) her; da unter denselben einige widersprechende Angaben vorkommen, so habe ich sie bei anderer Versuchsanordnung nochmals geprüft.

1. Ist man berechtigt die Niederschlagsmembranen als Molekülsiebe zu betrachten? Zur Entscheidung dieser Frage wurden mit den Membranen, die sich bei der Berührung der Lösungen von Gerbsäure und Leim, von Ferrocyankalium und Zinksulfat und von Ferrocyankalium und Cupfersulfat bilden, Versuche betreffs ihrer Permeabilität für Farbstoffe angestellt. Die Concentrationen der Membranogene waren folgende; Gerbsäure 1% Leim, 1% Lösung; Cupfersulfat, Zinksulfat und Ferrocyankalium 0.05 g Molekül in Liter. Zu den Lösungen der Gerbsäure und des Ferrocyankaliums wurde ein wenig der tabellirten Farbstoffe gesetzt, und deren Lösungen dann vorsichtig in einem Reagensrohr auf die Leim-, die Kupfer- und Zinksulfatlösung geschichtet. Nach einer Stunde wurde nachgesehen ob durch die Membran etwas vom Farbstoff durchgedrungen war. Blieb die Grenze zwischen der angefärbten Lösung und der farblosen scharf, wie gleich nach dem Uebereinanderschichten, so wurde in der Tabelle impermeabel verzeichnet. Hatte sich dagegen um die Membran ein nach unten hin heller abschattirter Hof gebildet, so wurde in der Tabelle permeabel notirt. Ich habe dabei drei verschiedene Grade der Permeabilität unterschieden; die Abkürzungen in der Tabelle bedeuten: perm. sp. nur eine leichte Andeutung des Hofes, perm. eine sehr deutliche Ausbildung

1) M. Traube, loc. cit. p. 133—141.

2) G. Tammann, Wied. Ann. 34, p. 310, 1888 und Mémoires de l'Acad. de St. Petersbourg 35, N. 9, p. 169, 1887.

des Hofes und sehr perm. ein sofortiges Erscheinen des Farbstoffes in der angefärbten Lösung. In diesem letzteren Falle wird die ganze farblose Lösung bald gefärbt. Geht der Farbstoff sehr langsam durch die Membran, so haben sich die osmotischen Druckdifferenzen schon ausgeglichen bevor der Farbstoff in deutlich wahrnehmbarer Menge durch die Membran diffundirt ist, und die Bedingung zur Ausbildung des gefärbten Hofes, das Fehlen störender Convectionsströme ist vorhanden. Geht aber Farbstoff in großen Quantitäten durch die Membran, so wird, da der osmotische Strom anfangs seine volle Thätigkeit entwickelt, die ganze Lösung durch die Convectionsströme gefärbt. In den ersten 6 Stunden war bei keinem Farbstoffe, wenn derselbe nicht innerhalb der ersten Stunde durchgetreten war, eine Diffusion durch die Membran zu bemerken. Nach 24 Stunden aber hatte sich an der gerbsauren Leim und der Ferrocyankupfermembran eine starke Fällung gebildet; in Folge dessen waren in die Leimlösung alle in der Tabelle verzeichneten Farbstoffe, mit Ausnahme von Lackmus gelangt; ebenso in die Kupferlösung alle mit Ausnahme von Methylviolett 2B, Brillantgrün, Baumwollenblau, Methylorange und Lackmus. In der Zinksulfatlösung war nach 24 Stunden nichts, was nicht schon in der ersten Stunde bemerkt wurde, durchgetreten. Die Ferrocyanzinkmembran hatte sich aber auch nur wenig verdickt, sie war trübe geworden, starke Fällungen bilden sich an ihr nie aus. Fast alle der untersuchten Farbstoffe sind Salze, nur Eosin und Methyleosin sind freie Säuren und gerade diese sind am reichlichsten durch alle Membranen hindurchgetreten. Wie wir später sehn werden, gehn alle Säuren durch die Niederschlagsmembranen. Alle anderen Farbstoffe sind Salze, und zwar haben wir 2 Gruppen zu unterscheiden: I. Salze, deren Basen gefärbt sind, untersucht wurden Chloride, Oxalate, Pikrate; II. Natronsalze, deren Säureradicale gefärbt sind und die größtentheils zu den Sulfonsäuren gehören. Die Stoffe sind der Kürze wegen mit ihren Handelsnamen bezeichnet, und innerhalb jeder Gruppe nach der Anzahl von Atomen im im gefärbten Ion geordnet.

I. Salze gefärbter Basen.	Membran aus gerbsaurem Leim;	aus Ferrocyanzink;	aus Ferrocyankupfer.	
Fuchsin Chlorid	perm.	imper.	perm.	1.
Diamantfuchsin Chlorid	perm. sp.	imper.	perm. sp.	2.
Safrania-Chlorid	perm.	imper.	imper.	
Methylviolett 2B Chlorid	imper.	imper.	imper.	
Brillantgrün-Oxalat	perm. sp.	imper.	imper.	
Anilingrün-Pikrat	perm.	perm. sp.	imper.	
Methylviolett-5BChlorid	imper.	imper.	imper.	

II. Natronsalze der Sulfonsäuren.	Membran aus gerbsaurem Leim;	aus Ferrocyanzink;	aus Ferrocyankupfer.	
Methylorange	perm.	imper.	imper.	
Orange 2	imperm.	imper.	imper.	
Bordeaux R	perm. sp.	perm.	imper.	3.
Ponceau 3R	perm. sp.	perm. sp.	perm.	4.
Marineblau	imper.	imper.	imper.	
Baumwollenblau	imper.	perm.	imper.	5.
Erytrosin extra, Tetrajodfluorescennatrium	perm.	sehr perm.	imper.	6.
Lackmussaures-Kali	imper.	imper.	imper.	
Säuren.				
Eosin	sehr perm.	perm.	sehr perm.	7.
Methylosin	sehr perm.	sehr perm.	sehr perm.	

Von 17 Farbstoffen gehen 11 durch die Membran aus Gerbsäure und Leim, 7 durch die Ferrocyanzinkmembran und nur 5 durch die Ferrocyankupfermembran. Betrachtet man die Membranen als Atomsiebe, so hätte man damit die Reihenfolge der Lochweiten in den Sieben festgestellt. Nothwendigerweise darf aber ein Atom, welches durchs Sieb mit größter Lochweite nicht hindurchgeht, ein Sieb mit engen Löchern erst recht nicht passiren. Man kann sich leicht in der Tabelle überzeugen, daß dieser Bedingung nicht genügt wird. Es kommen 7 Ausnahmen vor, die in der Tabelle mit Ziffern bezeichnet sind.

2. Diffusion der Säuren durch die Ferrocyankupfermembran. Alle Säuren durchdringen die Niederschlagsmembran aus Ferrocyankupfer, und zwar diffundiren die schwachen Säuren wenig, die starken Säuren in großer Menge durch die Membran. Man kann die Diffusion der Säuren durch eine Ferrocyankupfermembran leicht in folgender Weise verfolgen. Ueber eine Lösung der Säure (0.05 GM.) und des entsprechenden Kupfersalzes (0.05 GM.) wird in einem schief gehaltenen Reagensglase eine mit Lackmus gefärbte Lösung von Ferrocyankalium (0.1 GM.) geschichtet. Bei den starken Säuren: Salzsäure, Salpetersäure, Schwefelsäure, Pseudocumolsulfonsäure und Tribromessigsäure nimmt man dicht über der Ferrocyankupfermembran eine scharf ausgebildete rothe Zone wahr, aus der sich rothe Schlieren durch die Ferrocyankaliumlösung erheben, oben sammeln sich die verdünnten Lösungsschichten der Ferrocyankaliumlösung an, und in einer Minute färbt sich etwa 1 cm Lösungssäule von oben herab nach unten hin roth. Bei schwachen Säuren ist der rothe Saum über der Ferrocyankupfermembran nicht zu beobachten, sonst geht wie früher die Rothfärbung der Lösung

nur langsam, von oben herab vor sich. Die untersuchten schwachen Säuren sind: Essigsäure, Propionsäure, Isobuttersäure, Milchsäure, Bernsteinsäure, Malonsäure, Weinsäure, Citronensäure, Mono-, Di- und Trichloressigsäure. Natürlich kann man bei anders gewählten Concentrationen der Lösungen auch andere Bilder beobachten. Herrscht in der Lösung der Säure und des Kupfersalzes höherer osmotischer Druck als in der Ferrocyankaliumlösung, so tritt die Rothfärbung ebenfalls an der oberen Seite der Membran auf, um sich aber von unten nach oben langsam, entsprechend der Diffusion der Säure, zu verbreiten.

Die Beobachtung, daß starke Säuren augenscheinlich in bedeutend größerer Menge als die schwachen Säuren durch die Ferrocyankupfermembran treten, machte einige quantitative Parallelversuche mit verschiedenen Säuren wünschenswerth. In eine flache Schale von 10.5 cm Durchmesser wurden 80 cbcm einer Lösung von Ferrocyankalium (0.05 GM.) gebracht, die Lösung mit einem Stück Pergamentpapier überdeckt und auf dieses immer 100 cbcm einer Lösung von Säure mit dem Zusatz des entsprechenden Kupfersalzes gebracht. Nach einer kurzen Zeit wurde die überdiffundirte Säure in der ganzen Portion der Ferrocyankaliumlösung mit normaler Natronlauge titirt. In folgender Tabelle sind für jeden Versuch die Anzahl von verbrauchten cbcm Natronlauge neben der seit Beginn des Versuchs verflossenen Zeit in Minuten notirt.

0.5 GM. HCl + 0.05 GM. $CuCl_2$		0.5 GM. HNO_3 + 0.05 GM. $Cu(NO_3)_2$	
Zeit	cbcm norm. Natronl.	Zeit	cbcm norm. Natronl.
8	2.6	10	3.6
11	4.2	14	5.6
16	8.7	18	7.7
30	9.4	33	11.7
70	16.0	45	14.8
70	15.9	62	18.0
80	18.0	102	21.9
120	21.8		

0.25. GM. H_2SO_4 + 0.05 GM. $CuSO_4$		0.5 GM. CH_3COOH + 0.05 GM. $Cu(CH\,COO)_2$	
Zeit	cbcm norm. Natronl.	Zeit	cbcm norm. Natronl.
10	2.6	12	1.0
22	3.4	20	1.6
60	8.2	62	3.9
84	9.7	120	6.2
120	12.2	180	7.9
318	17.5	376	12.5

Nach Eintritt des Gleichgewichts, nachdem auf beiden Seiten der

Membran die Concentration der Säure dieselbe geworden ist, müßten 22 cbcm norm. Natronlauge zur Sättigung in den 80 cbcm Ferrocyankaliumlösung verbraucht werden. Am schnellsten wird dieser Gleichgewichtszustand bei Salpetersäure und Salzsäure erreicht. Die durch den osmotischen Wasserstrom hervorgerufenen Convectionsströme beschleunigen den Eintritt des Gleichgewichts in hohem Maasse. Durch ein Stück Pergamentpapier diffundirte von oben nach unten durch Pergamentpapier unter ganz ähnlichen Bedingungen, nur waren die beiden Membranogene nicht zugefügt worden, in 70 Minuten 0·0043 GM., während in derselben Zeit durch die Pergamentschicht mit einer Ferrocyankupfermembran 0.0160 GM., also die vierfache Menge hindurch diffundirte. Nach 15 Minuten sind in Grammmolekülen durch die Ferrocyankupfermembran hindurch diffundirt

Salzsäure	0.0070 GM
Salpetersäure	0.0060
Schwefelsäure	0.0034
Essigsäure	0.0011.

Unter denselben Bedingungen, mit der Abweichung, daß die Schale Ferrocyankaliumlösung von 0.025 GM. und die Lösung auf dem Pergamentpapier 0.25 GM. der folgenden Säuren plus 0.025 GM. des Kupfersalzes der entsprechenden Säure enthält, sind in 75 Minuten in Grammmolekülen durch die Ferrocyankupfermembran hindurchdiffundirt

Salzsäure	0.0090 GM.
Trichloressigsäure	0.0066
Monochloressigsäure	0.0033
Essigsäure	0.0026.

Bei verschiedenen Säuren ordnen sich die durch die Ferrocyankupfermembran hindurchdiffundirten Mengen in der Reihenfolge der Gehalte jener Lösungen an dissociirten Molekülen. Ob die diffundirten Mengen wirklich proportional der Anzahl von Ionen in den Lösungen sind, läßt sich nicht entscheiden, da man die Concentration der Säurelösung an der Ferrocyankupfermembran nicht kennt. Die Säurelösung wird ja beständig durch den osmotischen Strom verdünnt. Die Frage, ob die nicht dissociirten Antheile die Membran durchdringen, kann also auf Grund jener Versuche weder bejaht noch verneint werden. Man darf nur behaupten, daß hauptsächlich die Ionen die Membran durchdringen.

3. Diffusion von Salzen durch Niederschlagsmembranen. Traube[1]) hat von der Ferrocyankupfermembran angegeben,

1) M. Traube, loc. cit. p. 133—141.

daß sie für Chlorkalium, Chlornatrium und Chlorammonium permeabel, für Baryumchlorid und Nitrat, Calciumchlorid, Kalium und Ammoniumsulfat impermeabel ist. Ich habe früher die Angabe für Kaliumsulfat bestätigt, habe mich aber jetzt überzeugt, daß alle die von Traube angegebenen Salze, mit Ausnahme von Calciumchlorid, die Membran zu durchdringen vermögen. Von der Membran aus gerbsaurem Leim giebt Traube an, daß sie von Chlorammonium, Ammoniumsulfat, Baryumnitrat und Schwefelsäure durchdrungen wird; impermeabel soll dieselbe für Ferrocyankalium sein. Die letzte Angabe ist nicht richtig; denn eine Membran aus gerbsaurem Leim vermehrt den Widerstand einer Ferrocyankaliumlösung, die vor ihr in zwei untereinander nicht zusammenhängende Theile getrennt wird, und außerdem kann man leicht nach dem unten beschriebenen Verfahren zeigen, daß Ferrocyankalium wie auch Cupfersulfat in recht bedeutenden Mengen durch die Membran treten. Man kennt also für die Membran aus gerbsaurem Leim kein Metallsalz, für welches die Membran impermeabel ist.

Schichtet man in einem schief gehaltenen Probirglase über eine Lösung von Ferrocyankalium eine Lösung von Cupfersulfat und Kaliumsulfat, so kann man nach 10 Minuten in der Ferrocyankaliumlösung eine geringe Menge von Kaliumsulfat nachweisen. Da aber gewöhnlich während dieser Zeit eine stärkere Fällung von Ferrocyankupfer eintritt, und da auch ohne Zusatz von Kaliumsulfat zur Kupfersulfatlösung nach der Bildung einer starken Fällung Kaliumsulfat in der Ferrocyankaliumlösung nachweisbar ist, so bleibt man im Zweifel, ob das Kaliumsulfat durch die Membran hindurchdiffundirt oder bei der Bildung der Fällung in die Ferrocyankaliumlösung gelangt ist. Man kann Versuche über die Permeabilität der Ferrocyankupfermembran Salzen gegenüber mit viel größerer Sicherheit anstellen, wenn man die Ferrocyankupferhaut, wie es Pfeffer[1]) gethan, in Pergamentpapier einlagert. Dadurch verzögert man das Eintreten der störenden Fällung sehr bedeutend. Nach 1 Stunde ist auf dem Pergamentpapier nur eine braune Färbung entstanden, und auch nach 3 und 4 Stunden ist die Fällung von Ferrocyankupfer so gering, daß es nicht gelingt, in der Ferrocyankaliumlösung Kaliumsulfat nachzuweisen. All die untersuchten Salze gehen sehr leicht durch das Pergamentpapier hindurch, so daß diese die Resultate wenigstens in qualitativer Richtung hin nicht beeinflussen kann. Zur Ausführung der folgenden Prüfungen wurde auf ein kleines Uhrglas eine Lösung von Ferro-

1) W. Pfeffer, Osmotische Untersuchungen 1877, p. 12.

cyankalium (0.1 GM) gebracht, nach dem Bedecken dieser mit Pergamentpapier, wurde aufs Papier eine Lösung, die 0.1 GM. des zu prüfenden Salzes und 0.1 GM. des entsprechenden Kupfersalzes enthielt, gegossen. Entweder wurde auf das diesen beiden Salzen gemeinsame Ion, oder auf das dritte vorhandene Ion in der Ferrocyankaliumlösung geprüft. Die Concentrationen der Lösungen sind so gewählt, daß der osmotische Strom Convectionsströme veranlaßt, die für Vertheilung des durchgetretenen Stoffes in der Ferrocyankaliumlösung sorgten. Wenn nicht eine andere Zeit angegeben ist, so blieben die Lösungen eine Stunde lang in Berührung.

Von den Sulfaten diffundiren durch die Ferrocyankupfermembran in geringer Menge Ammoniumsulfat, in bedeutend geringerer Menge Kaliumsulfat und Natriumsulfat und in Spuren Lithiumsulfat. Für Magnesiumsulfat ist die Membran ganz impermeabel, auch nach 5 Stunden war in der Ferrocyankaliumlösung keine Schwefelsäure nachzuweisen. Ueber das Verhalten der Chloride, Bromide, Nitrate und Dithionate der alkalischen Erdmetalle giebt folgende Zusammenstellung einen Ueberblick. Es wurde nach 1 und 3 Stunden in der Ferrocyankaliumlösung auf das Vorhandensein des Salzes der alkalischen Erde mit kohlensaurem Natron geprüft.

	Cl_2	Br_2	$(NO_3)_2$	S_2O_6
Ba	perm.	perm.	perm.	imp.
Sr	perm.	perm.	imp.	perm.
Ca	imp.	imp.	imp.	imp.
Mg	imp.	imp.	imp.	—

Chlorbaryum war am meisten durchgetreten, von allen anderen Salzen nur Spuren. Von den Kalk- und Magnesiumsalzen diffundirt kein einziges durch die Membran. Die Chloride, Bromide und Nitrate von Kalium, Ammonium, Natrium und Lithium gehn alle in reichlicher Menge, vielmehr als die entsprechenden Sulfate, durch die Membran. Die folgenden Salze wurden zur Ferrocyankaliumlösung gesetzt und nach 1 und 3 Stunden wurde die Kupfersulfatlösung abgedampft und erhitzt; trat eine Verfärbung des hellblauen Kupfersulfats ein, so war damit der Durchtritt der Salze bewiesen. Von den Kalisalzen der Carbonsäuren geht am meisten ameisensaures, dann essigsaures, schließlich propionsaures und malonsaures Kalium durch. Isobuttersaures und isovaleransaures, bernsteinsaures, weinsaures und citronensaures Kalium diffundiren nicht durch die Membran.

Die Ferrocyanzinkmembran verhält sich, so weit dieselbe auf das Verhalten von Salzen geprüft wurde, ganz ähnlich der Ferrocyankupfermembran. So gelten die über das Verhalten der Sul-

fate gemachten Angaben im selben Wortlaut auch für die Ferrocyanzinkmembran.

Bernsteinsäure, Weinsäure, Citronensäure und Isobuttersäure durchdringen die Ferrocyankupfermembran, für die Kalisalze dieser Säure ist aber dieselbe Membran impermeabel. Die Chloride und Nitrate der Alkalien gehn in großen Mengen durch die Membran, ebenso tritt viel Schwefelsäure durch dieselbe. Also finden weder die Ionen Kalium, Natrium, Ammonium, Lithium und andererseits das Ion SO_4 an der Membran einen bedeutenden Widerstand, und doch gehn die Sulfate von Kalium, Natrium und Lithium nur in sehr geringer Menge durch die Membran. Kaliumdithionat durchwandert die Membran, nicht aber Strontiumdithionat, das ja auch diffundiren müßte, da ja Strontiumchlorid, -bromid und -nitrat die Membran durchdringen.

Diese Befunde sprechen gegen die Ansicht Ostwalds: alle Salze, in denen ein Ion enthalten ist, welches durch die Membran nicht diffundirt, können ebenfalls die Membran nicht passiren.

4. Um die Semipermeabilität von Niederschlagsmembranen zu erklären, hat Traube die Porentheorie aufgestellt. Es giebt aber noch eine Reihe von anderen semipermeabeln Substanzen, auf die man die Porentheorie nicht anzuwenden braucht, um ihre Semipermeabilität zu erklären. Nach Deville und Troost[1]) und Th. Graham[2]) durchdringt Wasserstoff, besonders leicht bei höherer Temperatur, Eisen, Platin und Palladium; von diesen Metallen wies Graham nach, daß sich in ihnen Wasserstoff auflöst. Lermite zeigte Osmose in einem System von Aether, Wasser und Chloroform. Schichtete er diese Flüssigkeit in einem Rohr übereinander, so nahm das Chloroform an Volumen zu, indem der Aether, der sich in Wasser löst, durch dieses zum Chloroform diffundirt. Für Stoffe, die sich in Membranen aus jenen Materialien lösen, sind diese Membranen permeabel, für solche, die in jenen Membranen sich nicht lösen, sind sie impermeabel. Nernst hat in dieser Weise die Semipermeabilität z. B. fürs Protoplasma erklärt. In ganz derselben Weise kann man auch die Semipermeabilität der Niederschlagsmembranen verstehn. Alle Niederschlagsmembranen sind hydratische Stoffe. Für diese Hydrate ist es, wie für Kieselsäurehydrat, wahrscheinlich, daß die Curven ihrer Dampfspannun-

1) M. Deville und Troost, Compt. rend. 56. 977. 1863.
2) Th. Graham, Phil. Mg. (4) 32 p. 401. 1866.
3) L'hermite Ann. chem. phys. [3] 43 p. 420. 1854.
4) W. Nernst, Zeitschrift f. phys. Chem. VI, p. 40, 1890.

gen nach dem Wassergehalt des Hydrats hin durch eine stetig gekrümmte Linie, ohne Sprünge wie bei gewissen Salzhydraten, dargestellt wird. Man darf ferner annehmen, daß durch das Imbitationswasser, das colloide Stoffe, zu denen die Niederschlagsmembran gehören, aufnehmen, die Dampfspannung einer solchen hydratischen Niederschlagsmembran sehr nahe der des reinen Wassers wird. Der osmotische Strom in einem System einer Lösung einer Niederschlagsmembran und einer Lösung, käme dann durch einen Destillationsproceß zustande. Der Wassergehalt der Membran müßte von den Dampfspannungen der sie umgebenden Lösungen abhängen. Hat die Lösung A größeren osmotischen Druck als die Lösung B, so würde zuerst Wasser von B in die Membran, durch diese in die Lösung A destilliren oder diffundiren. Ob ein Stoff außer Wasser die Membran passiren kann, hängt nur von der Löslichkeit jenes in der Membran ab. Wir haben früher gesehn, daß die Thatsachen den Folgerungen aus der Porentheorie nicht genügen. Regeln für die Permeabilität kann man aus den oben entwickelten Anschauungen nicht ableiten. Besitzen wir doch überhaupt keine Regeln, die uns in Stand setzen, etwas über die Löslichkeit zweier Stoffe in einander vorauszusagen.

Dorpat, 10. Mai 1891.

Inhalt von Nr. 6.

Eduard Riecke, zur Theorie der piëzoëlektrischen und pyroelektrischen Erscheinungen. — *G. Tammann und W. Nernst*, über die Maximaltension, mit welcher Wasserstoff aus Lösungen durch Metalle in Freiheit gesetzt wird. — *G. Tammann*, über die Permeabilität von Niederschlagsmembranen.

Für die Redaction verantwortlich: *E. Snuppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

19. August. **№ 7.** 1891.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 4. Juli.

Schering legt eine neue Lösung der Kepplerschen Gleichung vor.

Schwarz macht eine Mittheilung über ein demnächst zu veröffentlichendes Verzeichniß aller (oder wenigstens der Mehrzahl) derjenigen Schriften, welche seit dem Jahre 1761 veröffentlicht sind und sich mit der Theorie der Flächen kleinsten Flächeninhalts beschäftigen.

Riecke legt eine Abhandlung vor: »über eine mit den elektrischen Eigenschaften des Turmalins zusammenhängende Fläche 4. Ordnung«.

Klein legt eine Arbeit des Herrn Dr. Hilbert in Königsberg vor: »über die Theorie der algebraischen Invarianten«.

Wüstenfeld übergiebt für den Band 37 der Abhandlungen eine Fortsetzung seiner früheren Arbeiten über: »Die gelehrten Schâfi'iten des 5. Jahrhunderts der H.«

de Lagarde legt einen Aufsatz des Herrn Dr. Rahlfs: »über Lehrer und Schüler bei Junilius Africanus« vor.

Ueber eine mit den electrischen Eigenschaften des Turmalins zusammenhängende Fläche.

Von

Eduard Riecke.

Wir beziehen den Turmalin auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen z-Axe mit der dreizähligen Symmetrieaxe zusammenfällt, während die x-Axe auf einer Symmetrieebene senk-

recht steht. Es sei eine beliebige Richtung dadurch bestimmt, daß ihre Cosinusse mit Bezug auf die Coordinatenaxen gleich γ_1, γ_2, γ_3 sind. Durch einen in dieser Richtung ausgeübten Druck p werden in den einzelnen Volumelementen des Turmalins elektrische Momente erzeugt, welche bezogen auf die Einheit des Volumens die Componenten a, b, c besitzen mögen. Nach den von Voigt aufgestellten Gleichungen ist:

$$\begin{aligned} a/p &= \gamma_1(2\gamma_2 Q + \gamma_3 R) \\ b/p &= (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) Q + \gamma_2 \gamma_3 R \\ c/p &= S + \gamma_1^2 T \end{aligned}$$

wo Q, R, S und T gewisse dem Turmalin eigenthümliche Constante sind.

Trägt man nun die einem bestimmten Drucke entsprechenden Werthe von a/p, b/p, c/p auf den Coordinatenaxen auf, so bestimmen sie einen Punkt, p, welcher eine gewisse Fläche beschreiben wird, wenn man dem Druck alle möglichen Richtungen im Raume ertheilt. Die Eigenschaften dieser Fläche sollen im Folgenden untersucht werden. Man bemerkt zunächst, daß jeder gegebenen Druckrichtung ein bestimmter Punkt der Fläche entspricht; der Radius Vektor dieses Punktes giebt durch seine Richtung die Richtung des piëzoëlektrischen Momentes, durch seine Länge die Größe des Momentes an.

Es ist zweckmäßig, an Stelle der rechtwinkligen Coordinaten Polarkoordinaten einzuführen, indem man

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sin\Theta\cos\Phi, & \gamma_2 &= \sin\Theta\sin\Phi, & \gamma_3 &= \cos\Theta \\ a/p &= \varrho\sin\vartheta\cos\varphi, & b/p &= \varrho\sin\vartheta\sin\varphi, & c/p &= \varrho\cos\vartheta \end{aligned}$$

und zur Abkürzung noch

$$\varrho\sin\vartheta = \sigma$$

setzt. Die Voigt'schen Gleichungen werden dann:

$$\begin{aligned} \xi &= \sigma\cos\varphi = Q\sin^2\Theta\sin 2\Phi + R\sin\Theta\cos\Theta\cos\Phi \\ \eta &= \sigma\sin\varphi = Q\sin^2\Theta\cos 2\Phi + R\sin\Theta\cos\Theta\sin\Phi \\ \zeta &= \varrho\cos\vartheta = S + T\cos^2\Theta \end{aligned}$$

Wir betrachten zunächst die Schnitte der Fläche durch Ebenen, welche senkrecht zu der z-Axe gelegt werden; die einer solchen Schnittkurve angehörenden Flächenpunkte entsprechen Druckrichtungen, welche einen um die z-Axe als Rotationsaxe beschriebenen Kreiskegel bilden. Es ergiebt sich dieß aus der für die z-Coor-

dinate eines beliebigen Flächenpunktes geltenden Gleichung $\zeta - S = T\cos^2\Theta$. Setzen wir:

$$Q\sin^2\Theta = Q', \qquad R\sin\Theta\cos\Theta = R'$$

so wird

$$\xi = Q'\sin 2\Phi + R'\cos\Phi$$
$$\eta = Q'\cos 2\Phi + R'\sin\Phi.$$

Die Größen Q', R' und $\zeta - S$ können mit Hülfe einer einfachen geometrischen Construktion gefunden werden, sobald Q, R, T und Θ gegeben sind.

Die einem bestimmten Werthe des Winkels Θ entsprechende Schnittkurve, beziehungsweise ihre Projektion auf die xy-Ebene kann nun in folgender Weise konstruirt werden. Wir beschreiben in der xy-Ebene um den Anfangspunkt des Coordinatensystems einen Kreis mit dem Halbmesser R'; durch den Anfangspunkt ziehen wir einen Radius Vektor, welcher mit der x-Axe den Winkel Φ einschließt und welcher demzufolge in der durch die Druckrichtung gehenden Meridianebene liegt. Durchschneidet dieser Radius den mit R' beschriebenen Kreis in dem Punkte c, so ziehen wir durch c eine Linie, welche mit der y-Axe den Winkel 2Φ einschließt und schneiden auf dieser von c aus die Strecke Q' ab; der so erhaltene Punkt ist die Projektion eines Punktes der Oberfläche, welcher das der Druckrichtung (Θ, Φ) entsprechende elektrische Moment repräsentirt.

Wir wollen nun untersuchen, welche Werthe des Winkels Φ dem Winkel $\varphi = \pi/6$ entsprechen. Die Gleichungen sind

$$\sigma\cos\pi/6 = Q'\sin 2\Phi + R'\cos\Phi, \qquad \sigma\sin\pi/6 = Q'\cos 2\Phi + R'\sin\Phi$$

woraus

$$Q'\cos(2\Phi + \pi/6) = -R'\sin(\Phi - \pi/6) \text{ oder}$$
$$Q'\sin 2(\Phi - \pi/6) = R'\sin(\Phi - \pi/6).$$

Eine Lösung dieser Gleichung erhält man, indem man $\Phi = \pi/6$ setzt; in diesem Falle liegt also die Richtung des piëzoëlektrischen Momentes in derselben durch die Hauptaxe gehenden Ebene, wie die Druckrichtung. Da allgemein

$$\sigma^2 = Q'^2 + R'^2 + 2Q'R'\sin 3\Phi,$$

so wird für $\Phi = \pi/6$: $\sigma = R' + Q'$.

Zwei weitere Wurzeln der für Φ geltenden Gleichung sind:

$$\Phi = \frac{\pi}{6} \pm \arccos \frac{R'}{2Q'}.$$

Ist $Q' < R'/2$ so sind die dieser Gleichung entsprechenden Winkel imaginär. Es existieren in diesem Falle keine weiteren Druckrichtungen, für welche das elektrische Moment in das Azimut $\pi/6$ fällt. Ist $Q' = R'/2$, so sind die beiden anderen Wurzeln der Gleichung ebenfalls gleich $\pi/6$. Wenn aber $Q' > R'/2$, so existieren noch zwei andere Azimute Φ, für welche das Azimut des elektrischen Momentes gleich $\pi/6$ wird. Es ergiebt sich in diesem Falle

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= R'^2 + Q'^2 + 2R'Q' \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm 3 \arccos \frac{R'}{2Q'}\right) \\ &= R'^2 + Q'^2 + 2R'Q' \cos\left(3 \arccos \frac{R'}{2Q'}\right) \\ &= R'^2 + Q'^2 + (R'^2 - 3Q'^2)\frac{R'^2}{Q'^2}.\end{aligned}$$

Setzen wir hier für R' und Q' ihre Werthe in Q, R und Θ, so ergiebt sich:

$$\sigma Q = R^2 \cos^2\Theta - Q^2 \sin^2\Theta.$$

Da nun

$$\cos^2\Theta = \frac{\xi - S}{T},$$

so erhält man die Gleichung

$$TQ(\sigma + Q) = (R^2 + Q^2)(\xi - S).$$

In dieser Gleichung ist die folgende merkwürdige Eigenschaft unserer Fläche ausgesprochen. Wir haben gesehen, daß die betrachtete Curve auf dem durch $\varphi = \pi/6$ bestimmten Radius Vektor jedenfalls einen Punkt besitzt, für welchen $\sigma = R' + Q'$ und Φ ebenfalls gleich $\pi/6$. Außerdem hat aber die Curve auf demselben Radius noch einen Doppelpunkt, wenn $Q' > 2R'$; für diesen ist $\sigma Q = R^2 \cos^2\Theta - Q^2 \sin^2\Theta$ und $\Phi = \pi/6 \pm \arccos R'/2Q'$. Auf der Oberfläche selbst liegt die betrachtete Curve in einer zur z-Axe senkrechten Ebene, deren Abstand von der xy-Ebene durch $\xi = S + T\cos^2\Theta$ gegeben ist. Nun zeigt die letzte Gleichung, daß zwischen σ und ξ eine lineare Gleichung besteht; d. h. die Doppelpunkte der in den verschiedenen

auf einanderfolgenden Schnittebenen befindlichen Curven liegen auf einer geraden Linie.

Für $Q' = R'$ oder $\operatorname{tg}\Theta = \frac{R}{Q}$ wird $\sigma = 0$ und $\Phi = \pi/2$ oder gleich $-\pi/6$.

Aus den Gleichungen $\xi = R'\cos\Phi + Q'\sin 2\Phi$ und $\eta = R'\sin\Phi + Q'\cos 2\Phi$ ergiebt sich, daß die zu untersuchenden Schnittkurven Hypocykloiden sind, welche in folgender Weise konstruirt werden können. In der xy-Ebene beschreiben wir um den Anfangspunkt 0 des Coordinatensystems einen Kreis mit dem Halbmesser $3R'/2$; in diesem lassen wir einen zweiten Kreis rollen, dessen Halbmesser gleich $R'/2$ ist; nehmen wir auf dem rollenden Kreis einen Punkt, π, im Abstande Q' von seinem Mittelpunkt c und stellen wir den Kreis so, daß die Azimute der Linien Oc und $O\pi$ gegen die x-Axe gleichzeitig den Werth $\pi/6$ annehmen, so beschreibt der Punkt π die zu untersuchende Schnittkurve.

Es ist hiernach leicht, einen Ueberblick über die verschiedenen Gestalten zu gewinnen, welche die Schnittkurve annimmt, wenn Θ von 0 bis $\pi/2$ wächst und dem entsprechend ξ von $S+T$ bis S abnimmt. Für sehr kleine Werthe von Θ ist $R' = R\Theta$ und $Q' = Q\Theta^3$; die entsprechende Hypocykloide weicht demnach nur sehr wenig ab von einem mit dem Halbmesser R' beschriebenen Kreise. Da der Halbmesser des rollenden Kreises gleich dem dritten Theil von demjenigen des Bahnkreises ist, so kehrt der erstere genau in seine Anfangslage zurück, wenn er drei Umwälzungen vollzogen hat. Die Hypocykloide bildet eine geschlossene Curve; sie ist symmetrisch mit Bezug auf drei durch den Mittelpunkt des Bahnkreises gezogene Durchmesser, welche mit der x-Axe die Winkel $\pi/6$, $5\pi/6$, $9\pi/6$ einschließen. Der Radius Vektor der Hypocykloide hat seinen größten Werth $R'+Q'$ in den Azimuten $\varphi = \pi/6$, $= 5\pi/6$, $= 9\pi/6$, seinen kleinsten Werth $R'-Q'$ in den Azimuten $\varphi = 3\pi/6$, $= 7\pi/6$, $= 11\pi/6$. Die Cykloide ist eine verkürzte, so lange $Q' < R'/2$. Wird $Q' = R'/2$, also $\operatorname{tg}\Theta = R/2Q$ und $\xi = S + \frac{4Q^2T}{4Q^2+R^2}$, so erhalten wir eine gewöhnliche Hypocykloide mit 3 Spitzen. Wird $Q' > R'/2$, so wird die Hypocykloide eine verlängerte, mit Doppelpunkten in den Richtungen $\varphi = \pi/6$, $= 5\pi/6$, $= 9\pi/6$. Für $Q' = R'$ geht die Cykloide durch den Mittelpunkt des Bahnkreises hindurch, die drei Doppelpunkte fallen in einen dreifachen Punkt zusammen. Wird $Q' > R'$, so fallen die Doppelpunkte in die Azimute $\varphi = 7\pi/6$, $= 11\pi/6$, $= 3/\pi 6$. Wenn endlich Θ nahe an $\pi/2$ rückt, so wird $Q' = Q$ und $R' = R(\pi/2-\Theta)$;

für $\Theta = \pi/2$ geht die Cykloide über in einen Kreis mit dem Halbmesser Q; gleichzeitig wird $\zeta = S$ und für die Doppelpunkte $\sigma = -Q$.

Wir wenden uns nun zu der Untersuchung der Meridianschnitte der Fläche. Zuerst mögen die in einer der Symmetrieebenen liegenden Curven betrachtet werden. Setzen wir $\varphi = \pi/6$, so wird für die Maximalwerthe $R' + Q'$ des Radius Vektors auch $\Phi = \pi/6$; lassen wir Θ wachsen von 0 bis $\pi/2$, so sind jene Maximalwerthe gegeben durch $\sigma = R \sin\Theta \cos\Theta + Q \sin^2\Theta$, die entsprechenden Werthe der z-Coordinate durch $\zeta = S + T\cos^2\Theta$. Die in derselben Symmetrieebene liegenden Minima der Radien Vektoren, $R' - Q' = R \sin\Theta\cos\Theta - Q\sin^2\Theta$ erhalten wir, wenn wir $\varphi = 7\pi/6$, und dem entsprechend auch $\Phi = 7\pi/6$ setzen und dann wiederum Θ von 0 bis $\pi/2$ wachsen lassen. Die zugehörigen z-Coordinaten sind wieder gegeben durch $\zeta = S + T\cos^2\Theta$. Wenn wir nun in der betrachteten Symmetrieebene für die beiden in Frage kommenden Quadranten die positive Richtung von σ so wählen, daß sie mit der Maximalrichtung des Radius Vektors übereinstimmt, so haben wir das Vorzeichen des Minimalwerthes umzukehren und erhalten, wenn Θ in dem Quadranten $z, +\sigma$ liegt: $\sigma = Q\sin^2\Theta + R\sin\Theta\cos\Theta$, wenn Θ in dem Quadranten $z, -\sigma$ liegt: $\sigma = Q\sin^2\Theta - R\sin\Theta\cos\Theta$. Beide Ausdrücke können in den einen $\sigma = Q\sin^2\Theta + R\sin\Theta\cos\Theta$ zusammengefaßt werden, wenn wir Θ selbst in dem ersteren Quadranten positiv, in dem zweiten negativ nehmen. Bezeichnet man durch σ und σ' die beiden Radien, welche einem und demselben absoluten Werthe von Θ entsprechen, so wird

$$\frac{\sigma+\sigma'}{2} = Q\sin\Theta \text{ und daher } \frac{\sigma+\sigma'}{2Q} + \frac{\zeta - S}{T} = 1.$$

Es ergiebt sich somit der Satz: Zieht man in der Symmetrieebene Linien senkrecht zu der z-Axe, so schneiden diese die Oberfläche in zwei Punkten; die Halbierungspunkte der durch die Schnittpunkte gebildeten Segmente liegen in einer geraden Linie, welche die Punkte mit den Coordinaten $\zeta = S$, $\sigma = \sigma' = Q$ und $\zeta = S + T$, $\sigma = \sigma' = 0$ verbindet. Setzt man nun

$$\tau = \sigma - \frac{Q}{2}, \qquad \zeta' = \zeta - S - \frac{T}{2},$$

so ergiebt sich durch Elimination von Θ:

$$(T\tau + Q\zeta')^2 + R^2\zeta'^2 = R^2T^2/4.$$

Die betrachtete Curve ist somit eine Ellipse, deren Mittelpunkt in dem ursprünglichen System die Coordinaten $\sigma = Q/2$, $\zeta = S + T/2$

hat und welche von einer zu der xy-Ebene in der Entfernung S gelegten Parallelebene im Abstande Q von der z-Axe, von einer in der Entfernung $S+T$ gelegten Parallelebene in der z-Axe selbst berührt wird.

Diese Ellipse repräsentiert aber nicht den ganzen Schnitt der Fläche durch die dem Azimut $\varphi = \pi/6$ entsprechende Symmetrieebene; denn in dieser Ebene liegen noch die Doppelpunkte der Hypocykloiden; die von diesen gebildete gerade Linie

$$TQ(\sigma+Q) = (R^2+Q^2)(\xi-S)$$

genommen zwischen den Ordinaten $\xi = S$ und $\xi = S+\frac{4Q^2T}{4Q^2+R^2}$ muß der Ellipse noch hinzugefügt werden, um den vollständigen Schnitt zu erhalten. Aus dem Folgenden geht hervor, daß die gerade Linie als eine doppelt zählende zu betrachten ist.

Für eine beliebige Meridianebene erhält man die Gleichung der Schnittkurve am einfachsten, wenn man zunächst die Gleichung der zu der xy-Ebene parallelen Schnittkurven in rechtwinkeligen Coordinaten aufstellt. Setzt man zu diesem Zweck in den Gleichungen

$$\begin{aligned}\xi &= R'\cos\Phi + 2Q'\sin\Phi\cos\Phi\\ \eta &= R'\sin\Phi + Q'(\cos^2\Phi-\sin^2\Phi)\end{aligned}$$

$$\cos\Phi = \frac{x}{z},\quad \sin\Phi = \frac{y}{z},$$

so erhält man die in x, y und z homogenen Gleichungen

$$\begin{aligned}2Q'xy + R'xz-\xi z^2 &= 0\\ Q'x^2-Q'y^2+R'yz-\eta z^2 &= 0\\ x^2+y^2-z^2 &= 0.\end{aligned}$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen x, y, z und setzt man zugleich für R' und Q' ihre Werthe in R, Q und Θ, so ergiebt sich als Gleichung der Hypocykloiden in rechtwinkligen Coordinaten:

$$\begin{aligned}&16Q^2(\xi^2+\eta^2)\xi^2 + 4QR^2\cos^2\Theta(4\eta^2-9\xi^2)\eta\\ &-8(2Q^2\sin^2\Theta+R^2\cos^2\Theta)(Q^2\sin^2\Theta-R^2\cos^2\Theta)\xi^2\\ &+(4Q^2\sin^2\Theta-R^2\cos^2\Theta)^2\eta^2+8\sin^2\Theta(Q^2\sin^2\Theta-R^2\cos^2\Theta)^2\\ &= 0.\end{aligned}$$

Setzt man hier an Stelle von $\cos^2\Theta$ und $\sin^2\Theta$ die Ausdrücke

$$\cos^2\Theta = \frac{\zeta - S}{T}, \qquad \sin^2\Theta = \frac{S + T - \zeta}{T},$$

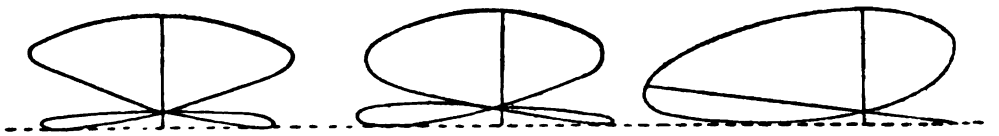
so erhält man die Gleichung der piëzoëlektrischen Fläche in rechtwinkligen Coordinaten, welche darnach von der vierten Ordnung ist.

Setzt man $\eta = 0$, so erhält man die Gleichung der Curve, in welcher die Fläche durch die xz-Ebene geschnitten wird:

$$16\,Q^2\xi^4 - 8\,(2\,Q^2\sin^2\Theta + R^2\cos^2\Theta)\,(Q^2\sin^2\Theta - R^2\cos^2\Theta)\,\xi^2 + 8\sin^2\Theta\,(Q^2\sin^2\Theta - R^2\cos^2\Theta)^2 = 0.$$

Die Schnittkurve ist symmetrisch gegen die z-Axe. Ihre Gestalt wird durch die beistehende Figur 1 anschaulich gemacht; gleichzeitig giebt Figur 2 die Schnittkurve in einer Meridianebene, deren Azimut $\varphi = \pi/12$ ist, Figur 3 die Schnittkurve in der Symmetrieebene mit $\varphi = \pi/6$. Man sieht, daß die in der letzteren Figur auftretende gerade Linie in der That aus dem Zusammenfallen zweier Curvenzweige entsteht.

Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.



Es bleibt endlich noch zu untersuchen, welche Curven der Endpunkt des elektrischen Momentes auf der piëzoëlektrischen Fläche beschreibt, wenn der Druck in einer und derselben Meridianebene alle möglichen Richtungen durchläuft. Eliminieren wir $\cos\Theta$ und $\sin\Theta$ aus je zweien der Gleichungen

$$\begin{aligned}\xi &= R\cos\Phi\sin\Theta\cos\Theta + Q\sin 2\Phi\sin^2\Theta\\ \eta &= R\sin\Phi\sin\Theta\cos\Theta + Q\cos 2\Phi\sin^2\Theta\\ \zeta &= (S+T)\cos^2\Theta + S\sin^2\Theta,\end{aligned}$$

so erhalten wir die Projektionen der gesuchten Curven auf die drei Coordinatenebenen.

Die Elimination aus den ersten beiden Gleichungen giebt:

$$(Q\sin 2\Phi\,\eta - Q\cos 2\Phi\,\xi)^2 + (R\cos\Phi\,\eta - R\sin\Phi\,\xi)\,(R\cos\Phi\,\eta - R\sin\Phi\,\xi - RQ\cos 3\Phi) = 0.$$

Die Projektion der Curve auf die xy-Ebene ist somit eine Ellipse, welche durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems hindurchgeht. Für $\Phi = \pi/6$ wird die Gleichung $\eta\cos\Phi - \xi\sin\Phi = 0$;

d. h. die Ellipse geht über in eine gerade Linie, welche der mit x-Axe den Winkel $\pi/6$ einschließt. Für $\Phi = 0$ ergiebt sich

$$\frac{\xi^2}{R^2/4} + \frac{(\eta - Q/2)^2}{Q^2/4} = 1.$$

Für $\Phi = \pi/2$: $\xi^2 = 0$, die Ellipse geht über in ein doppelt zu zählendes Stück der Axe η, ebenso wie in der ersten Symmetrieebene, für welche $\Phi = \pi/6$ ist.

Für die Projektionen der auf der piëzoëlektrischen Fläche verlaufenden Curven auf die beiden anderen Coordinatenebenen erhält man die Gleichungen:

$$\{Q\cos 2\Phi\,(S+T-\xi) - T\eta\}^2 - R^2\sin^2\Phi\,(S+T-\xi)\,(\xi - S) = 0$$
$$\{Q\sin 2\Phi\,(S+T-\xi) - T\xi\}^2 - R^2\cos^2\Phi\,(S+T-\xi)\,(\xi - S) = 0.$$

Multipliciert man dieselben beziehungsweise mit $\cos^2\Phi$ und $\sin^2\Phi$, so ergiebt sich durch Subtraktion:

$$(S+T-\xi)\,Q\,(\cos 2\Phi\cos\Phi \mp \sin 2\Phi\sin\Phi) = T(\eta\cos \mp \xi\sin\Phi).$$

Die für konstante Werthe von Φ auf der piëzoëlektrischen Fläche sich ergebenden Curven sind somit ebene Curven; da aber ihre Projektion auf die xy-Ebene eine Ellipse ist, so müssen auch die auf der Fläche liegenden Curven selbst Ellipsen sein. Ob in der vorhergehenden Gleichung das positive oder negative Zeichen zu wählen ist, ergiebt sich, wenn man den aus derselben folgenden Werth von $S + T - \xi$ in der Gleichung

$$\{Q\cos 2\Phi\,(S+T-\xi) - T\eta\}^2 - R^2\sin^2\Phi\,(S+T-\xi)\,(\xi - S) = 0$$

substituiert; die resultierende Gleichung muß identisch sein mit der zuvor für die Projektion auf die xy-Ebene gefundenen. Aus dieser Bedingung ergiebt sich, daß das negative Zeichen das richtige ist. Die Gleichung der Ebenen der Ellipsen wird somit

$$(S+T-\xi)\,Q\cos 3\Phi = T(\eta\cos\Phi - \xi\sin\Phi).$$

Für $\Phi = 0$ wird dieselbe

$$(S+T-\xi)\,Q = T\eta.$$

Wenn der Druck alle möglichen Richtungen in der xz-Ebene annimmt, so beschreibt der Endpunkt des piëzoëlektrischen Momentes eine zur yz-Ebene senkrecht stehende Ellipse.

Ueber die Theorie der algebraischen Invarianten.

Von

David Hilbert aus Königsberg in Pr.

(Vorgelegt von F. Klein.)

Es sei eine Grundform mit beliebig vielen Veränderlichen und Veränderlichenreihen vorgelegt. Wir betrachten die ganzen rationalen Invarianten dieser Grundform d. h. alle solchen ganzen rationalen homogenen Funktionen der Coefficienten C jener Form, welche sich nur um einen die Substitutionscoefficienten enthaltenden Faktor ändern, wenn man die Coefficienten C durch die entsprechenden Coefficienten C' der linear transformirten Grundform ersetzt. Diese Invarianten bilden ein System von ganzen rationalen homogenen Funktionen, denen folgende fundamentalen Eigenschaften zukommen:

1. Die Invarianten des Systems lassen die linearen Transformationen einer gewissen continuirlichen Gruppe zu.

2. Die Invarianten des Systems genügen gewissen partiellen linearen Differentialgleichungen.

3. Jede ganze rationale Funktion der Invarianten, welche in den Coefficienten C der Grundform homogen wird, ist wiederum eine Invariante: das System aller Invarianten bildet einen Integritätsbereich. Im Folgenden verstehen wir unter »Invariante« ohne weiteren Zusatz stets eine ganze rationale Invariante d. h. eine Invariante des eben definirten Integritätsbereiches.

4. Jede algebraische — sowie überhaupt jede analytische — Funktion von beliebig vielen Invarianten, welche einer ganzen rationalen homogenen Funktion der Coefficienten C gleich wird, ist wiederum eine Invariante.

5. Wenn das Produkt zweier ganzen rationalen Funktionen der Coefficienten C eine Invariante ist, so ist jeder der beiden Faktoren eine Invariante.

6. Es giebt eine endliche Anzahl von Invarianten, durch welche sich jede andere Invariante in ganzer rationaler Weise ausdrücken läßt; wir sagen kurz: der durch die Invarianten bestimmte Integritätsbereich besitzt eine endliche Basis.

Die Sätze 1 und 2 gestatten die Umkehrung. Satz 5 sagt aus, daß in dem durch die Invarianten bestimmten Integritätsbe-

reiche die gewöhnlichen Teilbarkeitsgesetze gültig sind: Jede Invariante läßt sich auf eine und nur auf eine Weise als Produkt von nicht zerlegbaren Invarianten darstellen.

Es bietet sich die Aufgbabe, zu untersuchen, welche der aufgezählten Eigenschaften sich gegenseitig bedingen und welche getrennt von einander für ein Funktionensystem möglich sind. Ich hebe hier kurz hervor, daß es Systeme von unbegrenzt vielen ganzen rationalen homogenen Funktionen giebt, denen die Eigenschaft 3 zukommt, ohne daß der Satzt 6 gilt. Ein solches System ist beispielsweise das System aller derjenigen ganzen rationalen homogenen Funktionen von x und y, welche sich ganz und rational aus Funktionen der Reihe xy, x^3y^4, x^8y^9, x^4y^{16}, . . . zusammensetzen lassen. Denn angenommen, man könnte eine Funktion $x^\lambda y^{\lambda^2}$ durch die vorhergehenden Funktionem der Reihe ganz und rational ausdrücken und es wäre etwa $x^\alpha y^{\alpha^2} \cdot x^\beta y^{\beta^2} \ldots x^\lambda y^{\lambda^2}$ ein Glied dieses Ausdruckes, so müssten für die ganzen positiven Zahlen $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ die beiden Gleichungen

$$\alpha + \beta + \cdots + \lambda = \varkappa$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \cdots + \lambda^2 = \varkappa^2$$

erfüllt sein, was unmöglich ist.

Es giebt ferner Funktionensysteme, denen die Eigenschaften 2, 3, 4, 6 zukommen, ohne daß der Satz 5 für dieselben gilt. Als Beispiel diene das System aller ganzen rationalen homogenen Funktionen f von x, y, z, t, welche der Differentialgleichung

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} - t\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

genügen. Der durch diese Funktionen bestimmte Integritätsbereich besitzt die endliche Basis xy, xt, yz, zt. Wie man sieht sind x, y, z, t Faktoren von Funktionen des Systems, ohne selbst zum System zu gehören: die Funktionen xy, xt, yz, zt sind sämtlich in dem betrachteten Integritätsbereiche unzerlegbar und die Identität

$$xy \cdot zt = xt \cdot yz$$

zeigt, daß die gewöhnlichen Teilbarkeitsgesetze in jenem Integritätsbereiche nicht gültig sind.

Der Satz 6 ist die Grundlage für die tiefer eindringenden Untersuchungen über Invariantensysteme. An diesen Satz schließen sich zunächst zwei weitere Sätze, welche unmittelbar aus mei-

nen allgemeinen Untersuchungen über die Theorie der algebraischen Formen[1]) folgen, nämlich der Satz von der Endlichkeit der irreduciblen Syzygien und der Satz von der Syzygienkette, welche im Endlichen abbricht. Ich werde in der vorliegenden Note zeigen, daß diesen Endlichkeitstheoremen keineswegs lediglich eine principielle Bedeutung zukommt, sondern daß mit ihrer Hülfe die genaue Erledigung einer Reihe besonderer Fragen über die Aufstellung und Struktur voller Invariantensysteme möglich ist. Zugleich werden wir Methoden gewinnen zur Behandlung der bekannten Aufgabe, Formen zu bestimmen, deren Invarianten gegebene Werte besitzen.

Der Kürze und Anschaulichkeit wegen entwickle ich die folgenden Sätze nur für den Fall einer einzigen binären Grundform f von der n^{ten} Ordnung, obwohl die Methoden und Resultate ganz allgemein gültig sind. Die endliche Basis des Invariantensystems bestehe aus den Invarianten $i_1, i_2, \ldots, i_m$ und diese seien beziehungsweise von den Graden $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ in den Coefficienten der Grundform. Wir bezeichnen das Produkt dieser Grade $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ mit π und bilden die Invarianten

$$i_1' = i_1^{\frac{\pi}{\nu_1}}, \qquad i_2' = i_2^{\frac{\pi}{\nu_2}}, \ldots, \qquad i_m' = i_m^{\frac{\pi}{\nu_m}},$$

welche sämmtlich vom nämlichen Grade π in den Coefficienten der Grundform sind. Ist m größer als $n-2$, so besteht zwischen den m Invarianten $i_1', i_2', \ldots, i_m'$ jedenfalls eine Relation von der Gestalt

$$F(i_1', i_2', \ldots, i_m') = 0,$$

wo F eine ganze rationale homogene Funktion der Invarianten $i_1', i_2', \ldots, i_m'$ bedeutet. Wir führen nun eine lineare Transformation dieser m Invarianten aus, indem wir setzen

$$\begin{aligned} i_1'' &= \alpha_{11} i_1' + \alpha_{12} i_2' + \cdots + \alpha_{1m} i_m', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ i_m'' &= \alpha_{m1} i_1' + \alpha_{m2} i_2' + \cdots + \alpha_{mm} i_m', \end{aligned}$$

wo für die Coefficienten $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{mm}$ solche Zahlenwerte gewählt sein mögen, daß in der linear transformirten Funktion $G(i_1'', i_2'', \ldots, i_m'')$ der Coefficient der höchsten Potenz von i_m'' gleich Eins wird. Hieraus geht hervor, daß alle Invarianten der Grundform ganze algebraische Funktionen der $m-1$ Invarianten $i_1'', i_2'', \ldots, i_{m-1}''$

1) Mathematische Annalen Bd. 36. S. 534.

sind. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens gelangen wir zu dem Satze:

Es giebt $n-2$ Invarianten $I_1, I_2, \ldots I_{n-2}$ derart, daß eine jede andere Invariante sich als ganze algebraische Funktion derselben ausdrückt.

Hieraus folgt unmittelbar die weitere Thatsache:

Wenn man den Coefficienten der Grundform solche besonderen Werte erteilt, daß jene $n-2$ Invarianten gleich Null werden, so verschwinden auch zugleich sämmtliche übrigen Invarianten der Grundform.

Im allgemeineren Falle einer Grundform mit beliebig vielen Veränderlichenreihen tritt an Stelle der Zahl $n-2$ die Zahl σ der algebraisch unabhängigen Invarianten der Grundform.

Es ist nun von größter Bedeutung für die ganze hier zu entwickelnde Theorie, daß die in dem letzten Satze ausgesprochene Eigenschaft allemal nothwendig die im voranstehenden Satze ausgesprochene Eigenschaft bedingt. Um den Nachweis hiervon zu führen, entwickeln wir zunächst ein Theorem, welches sich als drittes allgemeines Theorem aus der Theorie der algebraischen Funktionen den beiden in Abschnitt I und III meiner vorhin citirten Arbeit zugesellt. Dieses Theorem lautet:

Es seien $F, F', F'', \ldots$ ganze rationale homogene Funktionen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von der Beschaffenheit, daß sie für alle diejenigen Wertsysteme dieser Veränderlichen verschwinden, für welche gewisse m vorgelegte ganze rationale homogene Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_m$ der nämlichen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ gleich Null sind: dann ist es stets möglich eine ganze Zahl r zu bestimmen derart, daß jedes Produkt P von r beliebigen Funktionen der Reihe $F, F', F'', \ldots$ dargestellt werden kann in der Gestalt

$$P = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_m f_m,$$

wo $a_1, a_2, \ldots, a_m$ geeignet gewählte ganze rationale homogene Funktionen der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind.

Der Beweis dieses Satzes ist mir durch den Schluß von n auf $n+1$ Veränderliche gelungen. Im besonderen ist nach diesem Satze die r^{te} Potenz irgend einer von jenen Formen $F, F', F'', \ldots$ in der angegebenen Gestalt darstellbar, eine Thatsache, welche für

den speciellen Fall zweier nicht homogenen Veränderlichen bereits von E. Netto[1]) ausgesprochen und bewiesen worden ist.

Es seien nun μ Invarianten $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$ der Grundform vorgelegt von der Beschaffenheit, daß allemal, wenn man den Coefficienten der Grundform solche besonderen Werte erteilt, welche diese μ Invarianten $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$ zu Null machen, nothwendig sämmtliche Invarianten der Grundform verschwinden. Es giebt dann dem vorigen allgemeinen Theoreme zufolge eine Zahl r derart, daß jedes Produkt P von irgend r oder mehr Invarianten der Grundform in der Gestalt

$$P = a_1 I_1 + a_2 I_2 + \cdots + a_\mu I_\mu$$

darstellbar ist, wo $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ ganze rationale Funktionen der Coefficienten der Grundform sind. Nunmehr denken wir uns die endliche Basis $i_1, i_2, \ldots, i_w$ der Invarianten des Systems ermittelt und es sei ν die größte von den Gradzahlen dieser Invarianten: dann stellt sich offenbar eine jede Invariante i, deren Grad $\geqq \nu r$ ist, als Summe von Produkten P dar und es gilt daher die Formel

$$i = b_1 I_1 + b_2 I_2 + \cdots + b_\mu I_\mu,$$

wo $b_1, b_2, \ldots, b_\mu$ wiederum ganze rationale Funktionen der Coefficienten der Grundform sind. Nach den Entwickelungen des letzten Abschnittes meiner oben citirten Abhandlung[2]) kann man in der letzten Formel die Ausdrücke $b_1, b_2, \ldots, b_\mu$ stets durch Invarianten $i'_1, i'_2, \ldots, i'_\mu$ ersetzen, so daß wir die Gleichung

$$i = i'_1 I_1 + i'_2 I_2 + \cdots + i'_\mu I_\mu$$

behalten. Die Invarianten $i'_1, i'_2, \ldots, i'_\mu$ sind sämmtlich von niederem Grade in den Coefficienten der Grundform als die Invariante i; sie können ihrerseits wiederum in der nämlichen Weise durch lineare Combination der Invarianten $I_1, I_2, \ldots I_\mu$ erhalten werden und dieses Verfahren läßt sich so lange fortsetzen, bis wir zu Invarianten gelangen, deren Grad $< \nu r$ ist. Wir denken uns sämmtliche linear unabhängige Invarianten, deren Grad $< \nu r$ ist, aufgestellt und bezeichnen dieselben mit $k_1, k_2, \cdots, k_w$. Für eine beliebige Invariante i der Grunform besteht dann ein System von w Gleichungen der folgenden Gestalt

---

1) Vgl. Acta mathematica Bd. 7, S. 101.

2) Vgl. Mathematische Annalen Bd. 36, S. 527.

$$
\begin{aligned}
ik_1 &= G_1^{(1)}k_1 + G_2^{(1)}k_2 + \cdots + G_w^{(1)}k_w,\\
ik_2 &= G_1^{(2)}k_1 + G_2^{(2)}k_2 + \cdots + G_w^{(2)}k_w,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
ik_w &= G_1^{(w)}k_1 + G_2^{(w)}k_2 + \cdots + G_w^{(w)}k_w,
\end{aligned}
$$

wo $G_1^{(1)}, \ldots, G_w^{(w)}$ ganze rationale Funktionen der Invarianten $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$ bedeuten. Durch Elimination von $k_1, k_2, \ldots k_w$ folgt die Gleichung

$$
\begin{vmatrix}
G_1^{(1)}-i & G_2^{(1)} & \cdots & G_w^{(1)}\\
G_1^{(2)} & G_2^{(2)}-i & \cdots & G_w^{(2)}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
G_1^{(w)} & G_2^{(w)} & \cdots & G_w^{(w)}-i
\end{vmatrix} = 0,
$$

welche zeigt, daß i eine ganze algebraische Funktion von I_1, $I_2, \ldots, I_\mu$ ist. Wir gelangen somit zu folgendem Satze, welcher den Kern der zu entwickelnden Theorie der algebraischen Invarianten enthält:

Wenn irgend μ Invarianten $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$ die Eigenschaft besitzen, daß das Verschwinden derselben stets nothwendig das Verschwinden aller Invarianten der Grundform zur Folge hat, so sind alle Invarianten ganze algebraische Funktionen jener μ Invarianten $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$.

Der Satz findet in allen besonderen bisher berechneten Fällen die schönste Bestätigung, wie folgende Beispiele zeigen.

Für die binäre Form 5ter Ordnung erfüllen die 3 Invarianten A, B, C von den Graden beziehentlich 4, 8, 12 die Bedingungen des Satzes. Denn das gleichzeitige Verschwinden derselben bedingt notwendig das Auftreten eines dreifachen Linearfaktors in f und dieser Umstand wiederum hat, wie man leicht einsieht, zur Folge, daß alle Invarianten der binären Form gleich Null sind. Nach unserem Satze müssen daher alle Invarianten ganze algebraische Funktionen von A, B, C sein und in der That enthält das volle System nur noch eine weitere Invariante nämlich die schiefe Invariante R, deren Quadrat bekanntlich eine ganze rationale Funktion von A, B, C ist.

Die binäre Form 6ter Ordnung besitzt, wie leicht einzusehen ist, 4 Invarianten A, B, C, D von den Graden beziehentlich 2, 4, 6, 10, deren gleichzeitiges Verschwinden nothwendig das Auftreten eines vierfachen Linearfaktors bedingt. Dieser Umstand hat zur Folge, daß alle Invarianten der Form gleich null sind: in der

That ist entsprechend unserem Satze die noch übrige schiefe Invariante R der Grundform eine ganze algebraische Funktion von A, B, C, D, nämlich gleich der Quadratwurzel aus einer ganzen rationalen Funktion dieser 4 Invarianten.

Um die simultanen Invarianten zweier binären cubischen Formen f, g aufzustellen, bilden wir eine lineare Combination $\varkappa f + \lambda g$ derselben und entwickeln die Diskriminante von dieser Form nach den unbestimmten Parametern $\varkappa$ und λ, wie folgt:

$$D(\varkappa f + \lambda g) = D_0 \varkappa^4 + D_1 \varkappa^3 \lambda + D_2 \varkappa^2 \lambda^2 + D_3 \varkappa \lambda^3 + D_4 \lambda^4.$$

Die 5 Invarianten D_0, D_1, D_2, D_3, D_4 sind offenbar nur dann sämmtlich gleich null, wenn die cubischen Formen f und g beide den nämlichen Linearfaktor zweifach enthalten und dieser Umstand wiederum hat zur Folge, daß auch alle übrigen Simultaninvarianten null sind. Unserem Satze zufolge müssen daher alle simultanen Invarianten der beiden cubischen Formen f und g ganze algebraische Funktionen von D_0, D_1, D_2, D_3, D_4 sein. Das volle Invariantensystem enthält nun außer diesen 5 Invarianten nur noch 2 weitere Invarianten nämlich die Ueberschiebung $(f, g)_2$ und die Resultante R der beiden Formen: man findet in der That, daß diese beiden Invarianten ganze algebraische Funktionen jener 5 Invarianten sind.

Um die entsprechende Untersuchung für zwei binäre biquadratische Formen f und g durchzuführen, setzen wir

$$\begin{aligned} i(\varkappa f + \lambda g) &= i_0 \varkappa^2 + i_1 \varkappa \lambda + i_2 \lambda^2, \\ j(\varkappa f + \lambda g) &= j_0 \varkappa^3 + j_1 \varkappa^2 \lambda + j_2 \varkappa \lambda^2 + j_3 \lambda^3. \end{aligned}$$

Es folgt dann aus entsprechenden Gründen wie vorhin, daß jede Simultaninvariante der beiden Formen f und g eine ganze alge-Funktion der 7 Invarianten i_0, i_1, i_2, j_0, j_1, j_2, j_3 ist.

Wir betrachten ferner zwei ternäre cubische Formen f und g; wir combinieren dieselben linear und bilden die beiden Invarianten

$$\begin{aligned} S(\varkappa f + \lambda g) &= S_0 \varkappa^4 + \ldots + S_4 \lambda^4, \\ T(\varkappa f + \lambda g) &= T_0 \varkappa^6 + \ldots + T_6 \lambda^6. \end{aligned}$$

Aus unserem Satze folgt dann, daß alle simultanen Invarianten der beiden Formen f und g ganze algebraische Funktionen der 12 Invarianten $S_0, \ldots, S_4, T_0, \ldots, T_6$ sind und hieraus schließt man zugleich, daß dieselben von einander algebraisch unabhängig sind.

Betrachten wir eine binäre Form f von der 5ten Ordnung und eine lineare Form l, so ergiebt sich, daß alle simultanen Invarianten dieser beiden Formen ganze algebraische Funktionen von A, B, C,

$(f, l^n)_n$, $(h, l^n)_n$, $(i, l^n)_n$ sind, wo $h = (f, f)_2$ und $i = (f, f)_4$ gesetzt ist; es drücken sich also alle 23 Formen des vollen Invariantensystems einer binären Grundform als ganze algebraische Funktionen von sechs derselben aus.

Wir behandlen endlich noch ein allgemeineres Beispiel, nämlich das System von ν binären linearen Formen

$$l_1 = a_1 x + b_1 y, \quad l_2 = a_2 x + b_2 y, \ \ldots, \quad l_\nu = a_\nu x + b_\nu y.$$

Das volle Invariantensystem besteht aus den Determinanten

$$p_{ik} = a_i b_k - a_k b_i \, (i, k = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Wir bilden die beiden binären Formen $\nu-1^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\varphi = a_1 \xi^{\nu-1} + a_2 \xi^{\nu-2}\eta + \cdots + a_\nu \eta^{\nu-1},$$
$$\psi = b_1 \xi^{\nu-1} + b_2 \xi^{\nu-2}\eta + \cdots + b_\nu \eta^{\nu-1}$$

und berechnen die Funktionaldeterminante derselben

$$(\varphi, \psi)_1 = P_0 \xi^{2\nu-4} + P_1 \xi^{2\nu-3}\eta + \cdots + P_{2\nu-4}\eta^{2\nu-4}$$

Die Coefficienten $P_0, P_1, \ldots, P_{2\nu-4}$ sind als lineare Combinationen der Determinanten p_{ik} selber Invarianten der linearen Grundformen, und man erkennt leicht, daß, wenn diese Invarianten $P_0, P_1, \ldots, P_{2\nu-4}$ sämmtlich Null sind, nothwendig entweder alle Coefficienten der Form φ oder diejenigen von ψ verschwinden oder beide Formen bis auf einen numerischen Faktor mit einander übereinstimmen. In allen diesen Fällen sind sämmtliche Determinanten p_{ik} gleich null und hieraus folgt mit Hülfe unseres Satzes, daß die Determinanten p_{ik} ganze algebraische Funktionen von $P_0, P_1, \ldots P_{2\nu-4}$ sind[1]), woraus zugleich die Unabhängigkeit der letzteren $2\nu-3$ Invarianten geschlossen werden kann.

Bei dem Beweise unseres allgemeinen Satzes wurde die Eigenschaft 6 der Invarianten wesentlich benutzt; aber es folgt auch umgekehrt aus diesem Satze die Endlichkeit des vollen Invariantensystems. Wenn nämlich $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$ ein System von Invarianten ist, durch welche alle anderen Invarianten als ganze algebraische Funktionen dargestellt werden können, so kann man einen von L. Kronecker[2]) gegebenen fundamentalen Satz der Theorie der

1) Das nämliche Resultat habe ich auf einem völlig anderen Wege erhalten in meiner Arbeit: Ueber Büschel von binären Formen mit vorgeschriebener Funktionaldeterminante; Mathematische Annalen Bd. 33. S. 233.

2) Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen § 6.

algebraischen Funktionen anwenden und findet so in dem durch alle Invarianten bestimmten Rationalitätsbereiche eine endliche Zahl $i_1, i_2, \ldots, i_\varkappa$ von ganzen algebraischen Funktionen der Größen $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$ von der Art, daß jede andere ganze algebraische Funktion I des betrachteten Rationalitätsbereiches in der Gestalt

$$I = a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_\varkappa i_\varkappa$$

dargestellt werden kann, wo $a_1, a_2, \ldots, a_\varkappa$ ganze rationale Funktionen von $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$ sind. Nun sind $i_1, i_2, \ldots i_\varkappa$ ganze rationale Invarianten; denn es kann leicht gezeigt werden, daß jede rationale Invariante, welche eine ganze algebraische Funktion der ganzen rationalen Invarianten $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$ ist, nothwendig selber eine ganze rationale Invariante ist. Die Invarianten $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$, $i_1, i_2, \ldots, i_\varkappa$ bilden folglich eine endliche Basis des Systems aller Invarianten der Grundform. Nach Kenntniß eines Systems von Invarianten $I_1, I_2, \ldots, I_\mu$, durch welche sich alle Invarianten als ganze algebraische Funktionen ausdrücken lassen, erfordert also die Aufstellung des vollen Invariantensystems nur noch die Lösung einer elementaren Aufgabe aus der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen. Bei der wirklichen Ausführung der Rechnung kommt es vor allem auf die Berechnung der Diskriminante einer den Rationalitätsbereich bestimmenden Gleichung an, da bei der Darstellung der Funktionen des Fundamentalsystems diese Diskriminante allein im Nenner auftreten kann.

Um beispielsweise zu dem bekannten vollen Formensysteme einer binären Form 5ter Ordnung zu gelangen, hat man ein Fundamentalsystem im Systeme aller derjenigen Funktionen zu bestimmen, welche ganze algebraische Funktionen der oben angegebenen invarianten Bildungen, $A, B, C, f, h = (f, f)_2$, $i = (f, f)_4$ und zugleich rationale Funktionen vou $f, h, (f, h)_1, i, (f, h)_2$ sind.

Nach den obigen Entwickelungen ist es für das Studium der Invarianten einer Grundform von größter Wichtigkeit, dasjenige algebraische Gebilde Z zu kennen, welches durch Nullsetzen aller Invarianten bestimmt ist. Bedeutet σ die Anzahl der algebraisch unabhängigen Invarianten, so giebt es, wie oben gezeigt worden ist, stets σ Invarianten, durch deren Nullsetzen das Gebilde Z bereits völlig bestimmt ist; aus unserem allgemeinen Satze kann zugleich geschlossen werden, daß es nicht möglich ist, eine kleinere Zahl von Invarianten anzugeben, durch deren Nullsetzen das Gebilde Z ebenfalls schon bestimmt wird. Für den Fall einer bi-

nären Grundform läßt sich das Nullgebilde Z allgemein angeben, wie der folgende Satz zeigt:

Wenn alle Invarianten einer binären Grundform von der Ordnung $n = 2\nu$ beziehungsweise $n = 2\nu+1$ gleich null sind, so besitzt die Grundform einen $\nu+1$-fachen Linearfaktor und umgekehrt, wenn dieselbe einen $\nu+1$-fachen Linearfaktor besitzt, so sind sämmtliche Invarianten gleich null.

Auf entsprechende Untersuchungen für Formen mit mehr Veränderlichen gehe ich hier nicht ein.

Die Fruchtbarkeit der im Obigen dargelegten Principien bewährt sich insbesondere, wenn man dieselben mit denjenigen auf allgemeine Moduln bezüglichen Methoden in Verbindung bringt, welche ich in Abschnitt III und IV meiner Abhandlung »Ueber die Theorie der algebraischen Formen« entwickelt habe. Um das einzuschlagende Verfahren an einem Beispiele kurz zu kennzeichnen, stellen wir uns die Aufgabe, die »charakteristische Funktion« desjenigen algebraischen Gebildes zu bestimmen, welches man erhält, wenn man

$$p_{ik} = a_i b_k - a_k b_i \, (i, k = 1, 2, \ldots, \nu)$$

setzt und hierin die Größen p_{ik}, als die Veränderlichen und die Größen a_i, b_i als willkürliche Parameter auffaßt. Man sieht leicht ein, daß die charakteristische Funktion dieses Gebildes gleich ist der Anzahl der linear unabhängigen Invarianten vom Grade $2R$ in den Coefficienten der ν binären linearen Formen:

$$a_1 x + b_1 y, \qquad a_2 x + b_2 y, \ldots, \qquad a_\nu x + b_\nu y,$$

und diese Anzahl stellt sich nach dem Cayley-Sylvester'schen Abzählungssatze[1]) als Differenz zwischen Anzahlen von Lösungen gewisser linearer diophantischer Gleichung dar. Nach einer einfachen Rechnung erhalten wir für die gesuchte charakteristische Funktion den Wert

$$\chi(R) = \frac{1}{(\nu-1)!\,(\nu-2)!}(R+1)(R+2)^2 R+3)^2 \ldots (R+\nu-2)^2(R+\nu-1).$$

Die Funktion ist, wie man sieht, vom $2\nu-4^{\text{ten}}$ Grade in R: jenes algebraische Gebilde ist mithin von der Dimension $d = 2\nu-4$.

---

1) Vgl. Cayley, Philosophical Transactions. London 1856, S. 107 und Sylvester, Crelle's Journal Bd. 85, S. 89.

Der Coefficient der d^{ten} Potenz von R ist $\frac{1}{(\nu-1)!\,(\nu-2)!}$; derselbe giebt mit $d!$ multipliciert die Ordnung jenes algebraischen Gebildes an[1]). Diese beiden Resultate bestätigen die bekannten Thatsachen[2]), daß es zu jeder gegebenen binären Form gerader Ordnung $2\nu-4$ Büschel von binären Formen giebt, deren Funktionaldeterminante jener gegebenen Form gleich sind und daß die Anzahl dieser Formenbüschel gleich $\frac{(2\nu-4)!}{(\nu-1)!(\nu-2)!}$ wird.

1) Vgl. meine Abhandlung: »Ueber die Theorie der algebraischen Formen«. Mathematische Annalen Bd. 36, S. 520.

2) Vgl. meine Arbeit: »Ueber Büschel von binären Formen mit vorgeschriebener Funktionaldeterminante«, Mathematische Annalen Bd. 33, S. 227, sowie die dort ausführlich citirte Litteratur.

Königsberg i. Pr. den 30. Juni 1891.

Lehrer und Schüler bei Iunilius Africanus.

Von

Alfred Rahlfs.

Vorgelegt von Paul de Lagarde.

Die Instituta regularia divinae legis des Iunilius Africanus, deren kritische Ausgabe wir H. Kihn[1]) verdanken, sind in Form eines Gespräches zwischen Lehrer und Schülern abgefaßt. Das Gespräch verläuft in Fragen und Antworten; jenen hat Iunilius jedesmal ein Δ, diesen ein M vorgesetzt. Den Grund, welcher ihn veranlaßt hat, diese griechischen Buchstaben zu wählen, während er doch sonst sein Buch in lateinischer Sprache schreibt, gibt er selbst in der dem Buche vorausgeschickten Widmung an Primasius an. Die Worte lauten bei Kihn 468_{17}—469_2

> Et ne aliqua confusio per antiquariorum, ut adsolet, neglegentiam proveniret, magistro M graecam litteram, discipulis Δ praeposui, ut ex peregrinis characteribus et quibus latina scriptura non utitur, error omnis penitus auferatur.

Wir sehen: Iunilius mistraut den Abschreibern gründlich, und er hat Recht mit seinem Mistrauen. Denn trotz seiner Vorsicht ha-

1) Theodor von Mopsuestia und Junilius Africanus, Freiburg i. B. 1880, S. 465—528.

ben sie ihm eine confusio in sein Buch gebracht, welche sich überall sehen lassen kann.

Es liegt auf der Hand, daß Iunilius, wenn er die griechischen Buchstaben Δ und M zur Bezeichnung von Lehrer und Schülern gebraucht, damit die griechischen Wörter διδάσκαλος und μαθηταί meint. Und bei dieser Deutung von Δ und M ist auch alles im Reinen. Denn da es zur Zeit des Iunilius, ebenso wie noch heut zu Tage, so hergegangen sein wird, daß der Lehrer fragte und die Schüler antworteten, so ist es ganz richtig, wenn die Fragen dem Δ = διδάσκαλος, die Antworten den M = μαθηταί zugewiesen werden.

Nun fangen aber unglücklicher Weise die Wörter für *Lehrer* und *Schüler* im Lateinischen mit denselben Buchstaben an, wie im Griechischen, und zwar umgekehrt mit denselben Buchstaben: der Lehrer, der im Griechischen διδάσκαλος heißt, heißt im Lateinischen *magister*, der Schüler, der sich dort μαθητής nennt, nennt sich hier *discipulus*. Dies hat die trefflichen antiquarii bewogen, M als magister, Δ als discipuli zu deuten und in der angeführten Stelle

magistro M graecam litteram, discipulis Δ praeposui

zu schreiben, während es natürlich heißen muß

magistro Δ graecam litteram, discipulis M praeposui.

Nur Eine Handschrift, Kihns D, hat das Richtige erhalten.

Wie aber überhaupt ein Unglück selten allein kommt, so ist es auch hier gegangen. Die erste Verwirrung hat eine zweite nach sich gezogen.

Iunilius spricht sich in den der oben ausgeschriebenen Stelle unmittelbar vorangehenden Worten über die Anlage seines Werkes aus. Er sagt, er habe demselben »ipsius dictionis, quantum potui, utilem formam« gegeben,

ut velut magistro interrogante et respondentibus discipulis breviter singula et perlucide dicerentur.

Diese Worte, welche so nur in NF erhalten sind, geben die Anlage des Buches durchaus richtig und klar an. Aber sobald man Δ als discipuli, M als magister versteht, widersprechen sie dem Thatbestande, denn Δ fragt und M antwortet. Dieser Widerspruch hat den Schreiber von F nicht angefochten. Die übrigen haben ihn zu beseitigen gesucht. Zu diesem Zwecke haben sie zweierlei Wege eingeschlagen.

Das Gros der Handschriften, AGMD[1])LPR, dreht die Sache

1) Es ist sehr auffällig, daß D, welcher in der zuerst besprochenen Stelle allein das Richtige bewahrt hatte, hier (nach Kihn) das Falsche hat, da diese

einfach um und schreibt

ut velut discipulis interrogantibus et magistro respondente etc.

Doch hat A

discipulo interrogante

im Singular und verrät dadurch noch, daß dort ursprünglich magistro interrogante gestanden hat.

Dem Schreiber von N dagegen ist es zu dumm gewesen, die Schüler fragen und den Lehrer antworten zu lassen. Daher hat er eine Radikalkur gebraucht und die *Δ* und *M* im ganzen Buche vertauscht (Kihn 471_{6} r).

Alle älteren Ausgaben, welche ich verglichen habe, die editio princeps Basel 1545, und die Abdrücke bei de la Bigne[2] I Paris 1589, Gallandi XII Venedig 1778 und Migne LXVIII (vgl. Kihn 299—302), haben die falschen Lesarten, weil sie diese in ihrer Vorlage fanden. De la Bigne, Gallandi und Migne sind auf dem von den antiquarii eingeschlagenen Wege noch weiter gegangen: sie haben die — jetzt allerdings sinnlos gewordenen — griechischen Buchstaben durch lateinische ersetzt. Kihn fand das Ursprüngliche in einigen Handschriften vor, wurde aber jedenfalls durch die Menge und das Alter (vgl. unten) der dagegen stehenden Zeugen gehindert, es als ursprünglich zu erkennen und in den Text einzusetzen.

Man darf Kihn hieraus keinen Vorwurf machen, sondern muß ihm dankbar sein, daß er durch seine vollständige Mitteilung des textkritischen Materials auch diejenigen, welche die Handschriften nicht einsehen können, in den Stand gesetzt hat, seinen Text zu controllieren und eventuell zu berichtigen. Es versteht sich von selbst, daß der, welcher einen so verderbten Text, wie den des Iunilius, zum ersten Male kritisch herausgibt, nicht überall gleich das Richtige trifft. Trotzdem muß es auffällig erscheinen, daß Kihn hier an dem Richtigen so achtlos vorübergegangen ist, da er den alten Text nicht gedankenlos übernommen, sondern sich über die in demselben angegebene, sonderbare Anlage des Werkes Rechenschaft zu geben versucht hat. Er sagt 222:

> Die Fragen der Schüler, welche sich unterrichten lassen, dienen lediglich zur Vermittlung der Uebergänge in dem Vortrage des Lehrers, der ihnen Belehrung ertheilt

und zieht am Rande als Parallele die »24 Collationes patrum« Cassians herbei,

---

zweite confusio erst eine Folge jener ersten ist. Falls Kihns Angabe nicht auf einem Irrtum beruht, muß Ds Text ein Mischtext sein.

wo die Freunde nach kurzen Zwischenreden vom fragenden oder befragten ‚Vater' unterrichtet werden.

Aber mit dieser Erklärung ist Kihn ganz unglücklich gefahren. Die Fragen bei Iunilius sind keineswegs, wie die bei Cassian, gleichgültige Uebergangsformeln, vielmehr bilden sie das Gerippe des ganzen Werkes; nähme man sie fort, so würde das Uebrigbleibende in unzusammenhangende Stücke zerfallen. In den Fragen liegt die Disposition des Buches; nur derjenige kann sie stellen, welcher den ganzen Stoff beherrscht und das Gespräch völlig zielbewußt leitet, also nur der Lehrer, nicht die Schüler. Und dann die Form der Fragen! Man braucht nur einige derselben zu lesen, etwa im 4. Kapitel des 1. Buches

Quid est prophetia?
Da in praeteritis prophetiam!
Da in praesentibus!
Da in futuris!
Quare in definitione positum est ‚latentium'?
Proba hoc divinae scripturae testimonio!
Quare addidimus ‚ex divina inspiratione'?,

um zu sehen, daß so nicht der Schüler, sondern nur der Lehrer fragen kann. Das Buch des Iunilius ist ein »Katechismus«, dessen Antworten die Schüler auswendig zu lernen und dem Lehrer auf seine Fragen herzusagen haben. Das »Gespräch« zwischen Lehrer und Schülern hat nicht, wie ein platonischer Dialog, den Zweck, durch gemeinsames Forschen neue Wahrheiten zu entdecken, sondern den, die festgestellten Regeln den Schülern einzupauken, — lateinisch gesagt — *regulis discipulorum animos imbuere* (Iunilius' Widmung Kihn 468$_{6/8}$). Die entgegengesetzte Vorstellung, daß die Schüler — NB. im Plural — den Lehrer katechesieren, und er als geduldiges Opferlamm alle ihre unverschämten Fragen beantwortet, widerlegt sich selbst. Eine solche Vorstellung kann man nur so lange für möglich halten, als man sich ein lebendiges Bild von dem Hergange in praxi zu machen versäumt.

Ich schließe mit einer Nutzanwendung für die Textkritik insgemein.

Der vorliegende Fall beweist, daß Eine Handschrift allen anderen gegenüber Recht haben kann.

Er beweist ferner, daß selbst bei Stellen, die in so engem Zusammenhange stehn, wie die besprochenen, doch verschiedene Handschriften das Richtige bewahrt haben können, sodaß ein eklektisches Verfahren zur Herstellung des ursprünglichen Textes erforderlich ist.

Er beweist endlich, daß man in dem hohen Alter einer Handschrift keine Garantie für die Richtigkeit der von ihr gebotenen Lesarten sehen und bei der Reconstruction eines Textes sein Urteil nicht durch das Alter oder die Jugend der Handschriften bestimmen lassen darf. Kihns älteste Handschrift, G, welche nach ihm aus der zweiten Hälfte des 6. Jahrhunderts, also aus der Zeit kurz nach Abfassung des im Jahre 551 geschriebenen Buches (vgl. Kihn 275—289) stammt, hat an beiden Stellen das Falsche. Der Codex D, welcher an der ersten Stelle den ursprünglichen Text bewahrt hat, gehört dem 9. Jahrhundert an; die Codices NF, welche ihn an der anderen Stelle bewahrt haben, zählen, da N im 10. oder im Anfange des 11., F im 11. Jahrhundert geschrieben ist, sogar zu den jüngsten Handschriften: nur noch Eine Handschrift (R) stammt aus dem 11. Jahrhundert, alle übrigen sind älter.

Dies sind keine neuen Sätze, sondern neue Beweise für alte Sätze. Ich führe sie an, weil sie die Richtigkeit der alten Sätze so schlagend und unwiderleglich darthun.

Wenn man will, kann man aus dem ersten Satze weiter auf das Recht der Emendation, vulgo Conjectur, schließen: wäre D verloren, so müßten wir ohne Zeugen emendieren. Ich darf wohl erwähnen, daß ich wirklich in vorliegendem Falle die Emendation gemacht habe, ehe ich die Bestätigung ihrer Richtigkeit in Kihns Apparate fand; was ja in diesem Falle nicht schwer war.

Inhalt von Nr. 7.

Eduard Riecke, über eine mit den electrischen Eigenschaften des Turmalins zusammenhängende Fläche. — *D. Hilbert*, über die Theorie der algebraischen Invarianten. — *Alfred Rahlfs*, über Lehrer und Schüler bei Junilius Africanus.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

11. November. **№ 8.** 1891.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 1. August.

Riecke kündigt eine Arbeit von sich und Voigt an: „Bestimmung der elektrischen Constanten des Turmalins und Quarzes".

Voigt kündigt eine Abhandlung an: „Bestimmung der Constanten der innern Reibung für einige Krystalle".

Kielhorn kündigt „Tafeln aus indischen Inschriften und Handschriften" an.

Die piëzoëlectrischen Constanten des Quarzes und Turmalins.

Von

E. Riecke und W. Voigt.

1. Allgemeine Angaben über die Methode der Beobachtung.

Die untersuchten Crystallstücke besaßen die Form rechtwinkliger Prismen, deren Kanten gegen die Hauptaxen der Crystalle in bestimmter Weise orientirt waren. Die Anordnung des Apparates, welcher zur Belastung der Prismen diente, war eine etwas verschiedene, je nachdem die elektrische Erregung auf den gepreßten Flächen selbst beobachtet werden sollte oder auf den Seitenflächen. Im ersteren Falle war die Einrichtung folgende. Ein parallelepipedisches Messingstück M von $13\frac{1}{2}$ cm Länge, 3 cm Breite, $1\frac{1}{2}$ cm Höhe war auf einem großen mit Gewichten beschwerten Holzklotze so befestigt, daß es über den Rand des Klotzes um 3 cm

vorstand. Die Crystalle wurden von einer Klemme gefaßt, deren Backen aus federnden Streifen von hartem Kupferblech bestanden und durch ein Hartgummistück von einander isolirt waren. An den Enden der Backen waren nach innen zu Blei- oder Kupferplatten angelöthet, deren Distanz so regulirt war, daß die Crystalle zwischen ihnen mit mäßigem Drucke festgehalten wurden. Auf der oberen Backe war nach außen ein kleines Stahlstück befestigt, dachförmig abgeschrägt, so daß sich in seiner Mitte eine scharfe Kante von etwa 0,3 cm Länge bildete, parallel zu der Längsrichtung der Klemme. Die Crystalle wurden so in die Klemme gebracht, daß jene Kante genau über der Mitte der gepreßten Crystallflächen lag. Die Klemme mit dem von ihr gehaltenen Crystall wurde auf das Messingstück *M* gestellt, so daß der Crystall auf dem überragenden Theile desselben sich befand und daß die Kante des Stahlklötzchens der Längsrichtung von *M* parallel war. Nun wurde ein aus einem rechteckigen Rahmen bestehender Bügel über die Klemme gehängt, dessen oberes horizontales Stück eine nach innen gekehrte scharfe Schneide besaß. Mit dieser wurde der Bügel über die an dem Stahlklötzchen befindliche Schneide gehängt, so daß der Berührungspunkt der beiden Schneiden genau über der Mitte der gepreßten Crystallflächen sich befand. An seinem unteren Ende trug der Bügel einen starken Draht, an welchen die zur Aufnahme der Gewichtsstücke dienende Wagschale angehängt wurde. Zufolge der geschilderten Einrichtung stand die untere Klemme in metallischer Berührung mit dem als Unterlage dienenden Messingstücke; sie wurde ein für allemal mit der Gasleitung verbunden. Der Holzblock, auf welchem die Vorrichtung ruhte, war mit Stanniolstreifen überzogen und gleichfalls abgeleitet. Die obere Feder und damit auch die obere Endfläche des Crystalls wurde mit dem einen Quadrantenpaar eines von Stöhrer konstruirten Thomson'schen Elektrometers verbunden; das andere Quadrantenpaar war abgeleitet, die Nadel mit Hülfe einer trockenen Säule geladen. Die ganze Einrichtung befand sich auf einem festen Tische in einem Glaskasten, welcher auf seiner inneren Seite mit Gittern von Messingdraht ausgekleidet war. Die Oberfläche des Tisches war gleichfalls mit Stanniol überzogen und abgeleitet; der die Wagschale tragende Draht gieng durch eine Auskehlung des Tischrandes nach unten. Durch einen federnden Contakt konnte der die obere Crystallfläche mit dem Elektrometer verbindende Draht abgeleitet werden. Die Bewegung des Contaktes erfolgte mit Hülfe einer Schnur, welche durch eine Durchbohrung der Decke in das Innere hineingeführt war.

Sollte die elektrische Ladung auf den Seitenflächen der Crystalle beobachtet werden, so wurden die Klemmen entfernt. Auf das Messingstück *M* wurde eine Hartgummiplatte als isolirende Unterlage gelegt, und auf diese der Crystall gestellt, so daß er sich wieder auf dem überragenden Theile von *M* befand. Die zur Aufnahme des Bügels dienenden Stahlklötzchen waren gleichfalls auf Hartgummiplatten befestigt; sie wurden mit diesen frei auf die oberen Flächen der Crystallprismen aufgesetzt, so daß die Schneiden über der Mitte der gepreßten Flächen sich befanden. Der Bügel und die zur Belastung dienenden Gewichte wurden ebenso angebracht wie früher. Die Seitenflächen, auf welchen die elektrische Erregung gemessen werden sollte, wurden mit Stanniol überzogen; sie wurden wieder von den beiden Backen einer federnden Klemme gefaßt, welche von der Seite her angeschoben wurde. Die eine der beiden von einander isolirten Federn wurde mit der Gasleitung, die andere mit dem Elektrometer verbunden.

Bei jeder Beobachtungsreihe wurde die Empfindlichkeit des Elektrometers bestimmt, indem dasselbe Quadrantenpaar, welches bei den piëzoëlektrischen Versuchen mit der Crystallfläche verbunden war, durch ein Clarkelement geladen wurde, dessen anderer Pol zur Erde abgeleitet war. Die Verbindungen der Pole konnten durch einen eingeschalteten Commutator vertauscht werden. Nachdem das Clarkelement entfernt war, wurde die Verbindung der Crystallfläche mit dem Quadrantenpaar hergestellt und durch Schließen des erwähnten Federkontaktes die Ableitung nach der Erde bewerkstelligt. Diejenige Stellung, welche das Elektrometer unter diesen Umständen annimmt, wird im Folgenden als Nullstellung bezeichnet. Die Crystallprismen wurden zunächst dauernd mit einem Gewichte belastet, welches je nach der Größe der gepreßten Fläche zwischen 3 und 4 kgm schwankte. Durch Aufheben des Federkontaktes wurde die Crystallfläche sammt dem mit ihr verbundenen Quadrantenpaar isolirt. Hierauf wurden 2 kgm auf der Wagschale zugelegt und der hierdurch verursachte Ausschlag gemessen. Die Nadel des Elektrometers wurde sodann durch Schließen des Contaktes in die Nullstellung zurückgeführt, der Contakt jetzt abermals unterbrochen, die zuvor aufgelegten 2 kgm wieder abgenommen und der nun nach der entgegengesetzten Seite erfolgende Ausschlag beobachtet. So wurde bei abwechselnder Belastung und Entlastung eine größere Zahl von Ausschlägen nach der einen und der anderen Seite hin beobachtet; die Differenz der beiderseitigen Ablesungen gab ein Maaß für die entwickelte Elektricitätsmenge. Dividirt man die Hälfte der Differenz d. h. den einer

Belastung von 1 kgm entsprechenden doppelten Ausschlag, durch den entsprechenden von dem Clarkelement bei der Vertauschung der Pole erzeugten, so erhält man das Potential V, bis zu welchem das Quadrantenpaar des Elektrometers bei einer Belastung von 1 kgm geladen wird, in der Einheit des Clark. Bezeichnet man durch Q die Kapacität des Quadrantenpaares, durch X die der Crystallfläche und der verbindenden Drähte, so ist die entwickelte Elektricitätsmenge

$$e = (Q + X)\, V.$$

Die Verhältnisse der auf den verschiedenen Crystallflächen entwickelten Elektricitätsmengen sind gegeben durch die entsprechenden Werthe von V, wenn die Verschiedenheiten von X für die verschiedenen Flächen zu vernachlässigen sind. Daß dies bei der gewählten Anordnung der Versuche in der That gestattet war, wurde durch eine besondere Versuchsreihe nachgewiesen. Bestimmt man die Kapacität $Q + X$ in elektrostatischem Maaße und drückt man ebenso das Potential V statt in Clark in absolutem elektrostatischem Maaße aus, so ergiebt sich die Menge der entwickelten Elektricität in den Einheiten der Elektrostatik.

2. Die piëzoëlectrischen Constanten des Quarzes.

Bei den Versuchen wurden zunächst 3 Prismen benutzt, welche im Folgenden durch B, C und D bezeichnet sind. Alle drei waren aus einer und derselben Platte geschnitten, welche senkrecht zu einer polaren Queraxe x des Crystalles lag. Die Dicken der Platten in der Richtung der x-Axe waren in cm.

B	C	D
1,921	1,912	1,919.

Die Lage der Prismen in der yz-Ebene werde dadurch bestimmt, daß die Winkel ihrer Höhen oder Seiten gegen die Hauptaxe z des Quarzes angegeben werden. Die Winkel sind positiv gerechnet im Sinne einer Drehung von der z-Axe zu der y-Axe.

Quarz	Höhe	Winkel gegen die z-Axe
B	5,402	45^0
C	5,239	135^0
D	3,437	$22\frac{1}{2}^0$
	3,501	$112\frac{1}{2}^0$.

Der Quarz B wurde später senkrecht zu seiner Höhe in zwei gleiche Stücke zerlegt, welche mit B_1 und B_2 bezeichnet werden mögen. Die Längen ihrer Seiten und ihre Orientirung gegen die z-Axe sind im Folgenden gegeben.

Quarz	Seite	Winkel gegen die z-Axe
B_1	2,498	45°
	2,279	135°
B_2	2,492	45°
	2,274	135°.

Als Einheit der Länge ist das cm benutzt.

Die belegten Flächen, auf welchen die Ladung gemessen wurde, waren bei allen Crystallen die zur x-Axe senkrecht stehenden. Die Prismen B und C wurden nur parallel ihren Höhen, also in den Azimuten 45° und 135° gepreßt; bei D wurde der Druck in der Richtung der beiden Seiten, also in den Azimuten $22\frac{1}{2}$° und $112\frac{1}{2}$°, ausgeübt. Ebenso bei den beiden Stücken B_1 und B_2 entsprechend den Azimuten 45° und 135°. Endlich wurden die Prismen B_1 und B_2 auch noch in der Richtung der x-Axe gepreßt und die auf den gedrückten Flächen selbst erzeugten Electricitätsmengen gemessen. Man erhält dadurch indirekt die Ladung für das Azimut von 90° eines in der Ebene xy ausgeübten Druckes, d. h. die Ladung, welche durch einen Druck in der Richtung der y-Axe auf einer zur x-Axe senkrechten Seitenfläche erzeugt wird.

Bezeichnet man mit m_x die auf der belegten zur x-Axe senkrechten Fläche erzeugte Ladung, durch q_x ihren Flächeninhalt, durch p die Belastung, durch q den Querschnitt der gepreßten Fläche, durch ϑ das Azimut der Druckrichtung, so ist

$$-\frac{m_x}{p} \times \frac{q}{q_x} = -\delta_{11} \sin^2\vartheta + \delta_{14} \sin\vartheta \cos\vartheta = -\nu.$$

Die für die verschiedenen Druckrichtungen aus den Beobachtungen sich ergebenden Werthe von $\frac{m_x}{p} \times \frac{q}{q_x} = \nu$ sind:

	$22\frac{1}{2}$°	45°	90°	$112\frac{1}{2}$°	135°
ν	0,044	0,119	0,186	0,151	0,076.

Hieraus ergeben sich die folgenden Werthe der Constanten δ_{11} und δ_{14}

$$\delta_{11} = 0{,}1908 \qquad \delta_{14} = -0{,}0431$$

und die mit Hülfe dieser Werthe berechneten piëzoëlectrischen Momente ν

	$22\frac{1}{2}$°	45°	90°	$112\frac{1}{2}$°	135°
ν ber.	0,043	0,117	0,191	0,148	0,074

welche mit den beobachteten in befriedigender Uebereinstimmung stehen. Als Einheit des Druckes ist dabei das kgm, als Einheit der Electricitätsmenge diejenige benutzt, mit welcher das Quadrantenpaar des Electrometers durch 1 Clarkelement geladen wird.

3. Die piëzoëlectrischen Constanten des Turmalins.

Es waren für die Zwecke der Untersuchung 4 Prismen aus demselben Crystall, einem brasilianischen von grüner Farbe, geschnitten worden, welche im Folgenden durch A, B, C, D bezeichnet werden. Die Länge, Breite und Höhe dieser Prismen, soweit ihre Kenntniß für die Berechnung nothwendig ist, wird in der folgenden Tabelle in cm angegeben.

	l	b	h
A	1,159	0,595	0,519
C	0,892		0,538
D	1,206		0,689.

Die Orientirung der Prismen gegen die Axen des Crystalls werde durch die Richtungskosinusse ihrer Kanten bestimmt; dabei ist das Coordinatensystem so gewählt, daß die z-Axe mit der dreizähligen Hauptaxe, die y-Axe mit einer Symmetrieebene des Crystalls zusammenfällt.

		x	y	z
	l	1	0	0
A	b	0	1	0
	h	0	0	1
	l	0	1	0
B	b	1	0	0
	h	0	0	1
	l	0	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
C	b	1	0	0
	h	0	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
	l	0	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
D	b	1	0	0
	h	0	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$

Die Beobachtungen ergaben für einen Druck von 1 kgm die folgenden Potentiale in der Einheit des Clarkelementes.

1. Druckrichtung parallel der z-Axe. Beobachtung der Ladung auf der zu der z-Axe senkrechten Fläche. Turmaline A und B.

$$V = 0{,}172.$$

2. Druckrichtung parallel der y-Axe. Beobachtung der Ladung auf einer zu der y-Axe senkrechten Fläche. Turmaline A und B.

$$V = 0{,}0205.$$

3. Die Richtungskosinusse der Druckrichtung sind $0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ladung auf der zu der Druckrichtung senkrechten Fläche. Turmaline C und D.

$$V = 0{,}177.$$

4. Die Richtungskosinusse der Druckrichtung sind $0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ladung auf der zu der Druckrichtung senkrechten Fläche. Turmaline C und D.

$$V = 0{,}191.$$

5. Druckrichtung parallel der x-Axe. Ladung auf der zur z-Axe senkrechten Fläche. Turmalin A.

$$V = 0{,}061.$$

6. Druckrichtung parallel der y-Axe. Ladung auf der zur z-Axe senkrechten Fläche. Turmalin A.

$$V = 0{,}028.$$

7. Richtungskosinusse der Druckrichtung $0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ladung in der Richtung $0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$. Turmalin D.

$$V = 0{,}097.$$

8. Vergleichende Messung der bei den Turmalinen C und D auftretenden seitlichen Ladungen, wenn bei C die Richtungskosinusse des Druckes $0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$, die der Ladung $0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ sind, während D unter denselben Verhältnissen beobachtet wird wie zuvor.

$$V_C = 0{,}062 \qquad V_D = 0{,}092.$$

Bei dem Turmalin werden die electrischen Momente a, b, c der Volumeinheit für den Druck p gegeben durch die Gleichungen

$$\frac{a}{p} = 2\gamma_1\gamma_2\delta_{22} - \gamma_1\gamma_3\delta_{15}$$

$$\frac{b}{p} = (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)\delta_{22} - \gamma_2\gamma_3\delta_{15}$$

$$\frac{c}{p} = -\delta_{31} + (\delta_{31} - \delta_{33})\gamma_3^2.$$

Wenden wir diese Formeln auf die im Vorhergehenden mitgetheilten Beobachtungsresultate an, so ergeben sich die folgenden Gleichungen zur Berechnung der piëzoëlectrischen Moduln.

$$1.\quad -\delta_{23} = 0{,}172$$

$$2.\quad \delta_{22} = 0{,}020$$

$$3.\quad -\delta_{15}-\delta_{23}-\delta_{31}-\delta_{22} = 2\sqrt{2} \times 0{,}177 = 0{,}500$$

$$4.\quad -\delta_{15}-\delta_{23}-\delta_{31}+\delta_{22} = 2\sqrt{2} \times 0{,}191 = 0{,}539$$

$$5.\quad -\delta_{31} = 0{,}061 \times \frac{0{,}519}{1{,}159} = 0{,}027$$

$$6.\quad -\delta_{31} = 0{,}028 \times \frac{0{,}519}{0{,}595} = 0{,}025$$

$$7.\quad -\delta_{15}+\delta_{22}+\delta_{23}+\delta_{31} = 2\sqrt{2} \times 0{,}097 \times \frac{0{,}689}{1{,}206} = 0{,}156$$

$$8.\quad \frac{-\delta_{15}-\delta_{22}+\delta_{23}+\delta_{31}}{-\delta_{15}+\delta_{22}+\delta_{23}+\delta_{31}} = \frac{0{,}062}{0{,}092} \times \frac{0{,}538}{0{,}892} \times \frac{1{,}689}{1{,}206}.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die folgenden Werthe der piëzoëlectrischen Moduln.

$$\delta_{15} = -0{,}326 \qquad \delta_{22} = \left\{\begin{matrix}0{,}020\\0{,}019\\0{,}022\end{matrix}\right\} = 0{,}020$$

$$\delta_{31} = \left\{\begin{matrix}-0{,}027\\-0{,}025\end{matrix}\right\} = -0{,}026 \qquad \delta_{23} = \left\{\begin{matrix}-0{,}172\\-0{,}167\end{matrix}\right\} = -0{,}169.$$

4. Die piëzoëlectrischen Moduln in absolutem Maaße.

Durch Vergleichung mit einem Luftkondensator ergab sich für die Kapacität des mit dem Crystall verbundenen Quadrantenpaares und der verbindenden Conduktortheile

$$Q + X = 57 \text{ (cm. g. s.)}.$$

Die electromotorische Kraft eines Clarkelementes ist in electrostatischem Maaße gleich $0{,}48 \times 10^{-8}$. Endlich entspricht der Druck von 1 kgm einer Anzahl von $9{,}81 \times 10^5$ Dynen. Die früher gegebenen Werthe der electrischen Moduln müssen daher durch Multiplikation mit dem Faktor $27{,}8 \times 10^{-8}$ auf absolutes Maaß reducirt werden. Ihre Werthe im cm. g. s. System sind somit

1. *Quarz.*

$$\delta_{11} = 5{,}31 \times 10^{-8} \qquad \delta_{14} = -1{,}20 \times 10^{-8}.$$

2. *Turmalin.*

$$\delta_{15} = -9{,}07 \times 10^{-8} \qquad \delta_{22} = 0{,}55 \times 10^{-8}$$
$$\delta_{31} = -0{,}71 \times 10^{-8} \qquad \delta_{33} = -4{,}70 \times 10^{-8}.$$

Dagegen findet Curie bei Quarz $\delta_{11} = 6{,}3 \times 10^{-8}$, bei Turmalin $\delta_{33} = -5{,}3 \times 10^{-8}$.

5. Die pyroëlectrische Constante des Turmalins.

Es mögen die im Vorhergehenden für den Turmalin gefundenen Zahlen noch benutzt werden zur Berechnung seiner pyroëlectrischen Constanten und zu einer Vergleichung derselben mit dem Werthe, welchen der eine von uns bei directer Messung des durch Erwärmung erzeugten electrischen Momentes gefunden hat. Für das durch eine Erwärmung um ϑ Grade erregte electrische Moment gilt die Formel [1])

$$c = \vartheta\,(2\varepsilon_{31} a_2 + \varepsilon_{33} a_3).$$

Hier sind a_2 und a_3 die Ausdehnungscoëfficienten des Turmalins in der Richtung der y- und der z-Axe. Ferner ist:

$$\varepsilon_{31} = \delta_{31} c_{11} + \delta_{33} c_{13}, \qquad \varepsilon_{33} = \delta_{31} c_{31} + \delta_{33} c_{33}.$$

Für die Elasticitätsconstanten c ergeben sich, wenn man als Einheit des Zuges die Dyne und als Einheit der Fläche das cm^2 benützt, die Werthe:

$$c_{11} = 270 \times 10^{10} \qquad c_{33} = 161 \times 10^{10}$$
$$c_{13} = 9 \times 10^{10} = c_{31}.$$

Somit ist

$$\varepsilon_{31} = -234 \times 10^{3}, \qquad \varepsilon_{33} = -763 \times 10^{3}.$$

Da ferner

$$a_2 = 7{,}73 \times 10^{-6}, \qquad a_3 = 9{,}34 \times 10^{-6}$$

so wird schließlich

$$c = -1{,}08 \times \vartheta.$$

Dagegen führen die an 5 verschiedenen brasilianischen Turmalinen angestellten Messungen pyroëlectrischer Momente [2]) im Mittel zu der Formel

$$c = -1{,}18 \times \vartheta$$

welche mit der aus der allgemeinen Theorie sich ergebenden in hinreichender Uebereinstimmung steht.

---

1) Voigt, Allgem. Theorie der electr. Erscheinungen an Crystallen. Abhandl. d. Ges. d. Wiss. zu Goettingen 1890. S. 69.

2) Riecke, über die Pyroëlectricität des Turmalins. Wied. Ann. 1890 Bd. XL S. 303 u. 305.

Ueber das von S. Günther 1888 herausgegebene spätmittelalterliche Verzeichnis geographischer Koordinatenwerte.

Methodische Bedenken

von

Hermann Wagner.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 2. Juli 1890. Nachträge 1891.)

Im Besitz des Herrn Stadtsekretairs Markus Schüßler in Nürnberg findet sich eine aus dem 15. Jahrhundert stammende Handschrift von 71 Blättern in gr. Quarto, aus welcher der durch zahlreiche Arbeiten auf dem Gebiete der älteren Geschichte der Mathematik und mathematischen Geographie bekannte Sigismund Günther 1888 zwei Tabellen geographischer Positionen mitgeteilt und eingehend analysirt hat (Zeitschr. f. wissensch. Geogr. VI. 1888. S. 160—164). Derselbe sucht nachzuweisen, daß die ganze Handschrift in *Libau* oder mindestens in den heutigen Ostseeprovinzen entstanden sei.

Diese Behauptung erschien mir schon beim flüchtigen Lesen seiner Darlegungen im hohen Grade unwahrscheinlich. Bei näherer Betrachtung ergaben sich meines Erachtens so viele Einzelmisverständnisse, ja historisch wie geographisch ganz unmögliche Annahmen und Beweisführungen, daß es sich wohl im Interesse der methodischen Behandlung derartiger Fragen verlohnte, den Irrgängen des Herausgebers nachzugehen, auch wenn das Objekt an sich und in isolirter Betrachtung von keiner hervorragenden Bedeutung ist. Es gehört dasselbe zu den mittelalterlichen sog. Tabulae regionum; diese verhältnismäßig im Umfang meist beschränkten Tabellen sind eine bis jetzt noch zu wenig beachtete und bearbeitete Klasse von Dokumenten zur Geschichte der Geographie im Mittelalter, für welche man meist nur die uns überlieferten kartographischen Darstellungen verwertete. Aber in Handschriften vergraben, bereiten sie der bloßen Sammlung schon nicht unerhebliche Schwierigkeit. Ich habe eine solche seit längerer Zeit begonnen. Aber durch andere Arbeiten an dem Abschluß einer darauf bezüglichen Monographie voraussichtlich auf länger verhindert, lege ich einige methodische Winke, die an ein bereits bearbeitetes Beispiel unmittelbar anknüpfen und an demselben ge-

prüft werden können, den Freunden der Geschichte der Erdkunde im Mittelalter vor. Dieselben könnten vielleicht insofern von einigem Werte sein, als die Zahl der Bearbeiter wie der Kenner jenes Abschnittes der Geschichte noch so äußerst gering ist, daß diesen wenigen eine verhältnismäßig große Auctorität innewohnt. Zu diesen letztern gehört mein Freund Sigismund Günther in München, dessen außerordentlichem Spürsinn und Sammeleifer es bereits gelungen ist, manche vergessene Thatsache aus der Geschichte der Grenzgebiete zwischen Geographie, Physik und Mathematik an das Licht zu ziehen.

Mehr und mehr habe ich mich jedoch überzeugen müssen, daß Günther über der Freude der Entdeckung der litterarhistorischen Einzelnotiz das wichtige Erfordernis eines Geschichtsschreibers der Wissenschaften zu sehr außer Acht läßt, nämlich die Versenkung in den Zeitgeist, in das ganze wissenschaftliche Können, sowie den litterarischen Gesichtskreis einer Gruppe von Forschern der jeweilig in Betracht kommenden Perioden. Dadurch müssen aber sicher unrichtige und schiefe Auffassungen im Leser entstehen, welchen sich, wie ich an immer zahlreichern Beispielen erkennen mußte, oft ein ganz anderes Bild enthüllt, als es von G. mit wenigen Strichen gezeichnet wird, — jedoch nie ohne eine fast erdrückende Fülle von Citaten beizufügen, die sich bei näherer Einsicht nicht selten als irrig, ja als wertlos, weil nicht den Originalschriften entnommen oder gegeneinander in ihrem Werte abgewogen, ergeben. Andererseits kann aber eine richtige Beachtung des gesammten geistigen Niveaus, in welchem sich ein Einzelautor oder eine Gelehrtenschule befand, oft ein besseres Mittel zur Datirung und Erklärung eines historischen Dokumentes abgeben, als ein einzelnes Kennzeichen.

Diese Zwischenbemerkung glaube ich an dieser Stelle einschieben zu müssen, da sich meine methodischen Bedenken im vorliegenden Falle nicht gegen einen einzelnen Irrtum, sondern die ganze Arbeitsweise eines Fachgenossen, und zugleich eines Freundes und Mitarbeiters, richten müssen. Nicht leicht wird mir der Ausspruch, daß die angedeuteten Erfahrungen mit der Zeit aus dem einstigen Bewunderer seiner Gelehrsamkeit einen starken Skeptiker haben werden lassen, der jedoch nichts aufrichtiger wünscht, als daß G. die unschätzbaren Dienste, die er vermöge seiner ausgebreiteten Kenntnisse, seinem unübertroffenen Sammeleifer und hervorragendem mathematischen Wissen unserer Disziplin — ich rede hier nur von der Geschichte der Geographie — leisten könnte, durch eine wirkliche Vertiefung in den zu behandelnden

Gegenstand und gründlichere Quellenkritik zu zuverlässigen und wahren wissenschaftlichen Hülfeleistungen gestaltete.

Die Einwürfe, die ich im vorliegenden Falle gegen die Günthersche Beweisführung zu machen habe, sind kurz die folgenden:

1) Der fragliche Kodex enthält keine einheitliche Schrift, sondern besteht aus drei ganz heterogenen Bestandteilen. Derjenige, welcher die für den Geographen interessanten Ortstabellen enthält, hat aller Wahrscheinlichkeit nach *Nürnberg* zum Ursprungsort, in keinem Fall aber „die Länder des deutschen Ordens".

2) Günther hat von der Wichtigkeit, welche man im Mittelalter auf die Kenntnis guter Polhöhen legte — der Konstruktion der Sonnenuhren wegen (S. 160) — eine viel zu günstige und darum unrichtige Vorstellung.

3) Irreführend ist ferner seine Ansicht über den hohen Grad von Genauigkeit der Beobachtungen damaliger Zeit. Günther verwechselt viel zu oft die rein rechnerische Exaktheit, die sich z. B. bei fortgesetzter Teilung von Winkelgrößen in den Tabellen ergibt, mit derjenigen, welche die Beobachtungsinstrumente hätten ergeben müssen, thatsächlich aber erst Jahrhunderte später in Folge ihrer Vervollkommnung zuließen. Und diese Ansichten führen ihn im vorliegenden Falle auf ganz seltsame Abwege.

I.

Der erste Punkt ist formaler Natur und rasch zu erledigen. Herr Schüßler hatte die Freundlichkeit, mir den Kodex zu näherer Einsicht zu überlassen, und meinem gelehrten Kollegen Wilhelm Meyer hieselbst verdanke ich noch verschiedene die Handschrift betreffende Erläuterungen. Dieselbe enthält auf den ersten 20 Blättern einen Kalender, der mit dem Jahre 1439 beginnt und von Johann von Gmünd stammt. Er ist identisch mit einer auch auf der Göttinger Bibliothek befindlichen Handschrift (im Cod. Gotting. theolog. 234); (ausführlich berichtet über denselben Stern in Ersch u. Gruber 1843 unter Joh. v. Gmunden). Dieser Kalender interessirt uns hier nicht. — Ganz unabhängig davon ist das zweite Manuskript von 36 Blättern — die zwei Blätter der vierten Kustode *d* sind herausgeschnitten, ebenso die vier letzten der Kustode *e* —, das in schöner Handschrift, die etwa auf die Mitte des 15. Jahrhunderts hinweist (W. Meyer), eine Ars componenda horologia enthält, welcher verschiedene Abhandlungen über den Quadranten, z. B. der „Prologus Prophatii Judaei in quadrantem novus", ein tractatus chilindri etc., folgen. Das dritte

beigeheftete Stück, wie das erste eine große Krone als Wasserzeichen tragend, während das zweite den kleinen Ochsenkopf zeigt, ist teils chronologischen Inhalts — eine Ostertabelle mit dem Jahre 1477 beginnend bildet den Anhang —, teils behandelt es die Theorie und Praxis der Sonnenuhren. Die Handschrift ist eine vom zweiten Teile vollkommen verschiedene; die 5 z. B. ist der unsrigen fast gleich, in den ältern Teilen des Kodex gleicht sie der oben offenen 9. Schon hiernach ist eine Abhängigkeit dieses letzten Stückes von den Ortstabellen des zweiten oder umgekehrt, wie sie Günther (l. c. 160) behauptet, unwahrscheinlich. Die verschiedenen Wasserzeichen des Papiers bestätigen dies. Unter den Blättern des mittlern Stücks finden sich nun einige, auf welchen — ohne Zusammenhang mit dem übrigen Inhalt — die beiden Verzeichnisse geographischer Namen und Koordinaten geschrieben sind, die den Gegenstand der Untersuchung bilden: eine Liste, die wesentlich aus Landschaftsnamen mit beigefügter Breitenlage (tabula regionum Tab. I) und eine solche von Städten (tabula civitatum), mit einer dreiziffrigen Zahlenreihe ohne Tabellenkopf versehen, welche G. für Längenangaben nach Stunden, Minuten und Sekunden hielt. Entgegen den Anschauungen Günthers leugne ich den innern Zusammenhang beider Tabellen; ich halte die erstere für älter und historisch interessanter; sie stammt aus einer ganz andern Quelle als die zweite, die sicher auf Regiomontan selbst zurückgeführt werden muß; im übrigen ist es zweckmäßiger, beide ganz getrennt zu betrachten.

II.

1. Für die Analyse der Tafel der Landschaften ist die im Original gegebene Reihenfolge nicht ohne Bedeutung. Wir drucken sie daher hier nochmals ab, zugleich einige Versehen berichtigend, die Günther bei der Abschrift untergelaufen sind. Die laufenden Nummern finden sich im Originale nicht.

I. Elevationes seu altitudines poli arctici in variis regionibus:

1. *Norvegia*	60 gradus	12. *Frisia*	55 gradus
2. *Swecia*	59	13. *Hernested*	
3. *Russia alba*		14. *Marchia vetus*	
4. *Dacia*	58	15. *Prussia*	
5. *Samaicia*		16. *Hibernia*	54
6. *Asia*	57	17. *Holandria*	
7. *Litphania*		18. *Saxonia*	
8. *Darpht*		19. *Marchia nova*	
9. *Scocia*	56	20. *Russia media* (*Prussia media* G.)	
10. *Liphania*			
11. *Pomerania*			

21. *Anglia*	53 gradus	51. *Francia*	47 gradus
22. *Britannia*		52. *Burgundia*	
23. *Brabancia*		53. *Swaicia*	
24. *Geliea*		54. *Carinthia*	
25. *Westfalia*		55. *Bulgaria*	
26. *Thuringia*	52	56. *Yberia*	
27. *Misna*		57. *Hastringis*	
28. *Slesia*		58. *Gabaudia*	
29. *Colonia*		59. *Cumanna*	
30. *Flandria*		60. *Venecia*	46
31. *Julck*		61. *Coneolla* (*Concolla* G.)	
32. *Lowanium*		62. *Croacia*	
33. *Leodium* (*Leodunum* G.)	51	63. *Palespontus*	
34. *Remis*		64. *Magna insula Calchus*	
35. *Hassia*		65. *Albania*	
36. *Lusacia*		66. *In pede montis*	
37. *Russia parva*		67. *Prewencia*	
38. *Normandia*		68. *Toscana*	45
39. *Pacardia*		69. *Wandalicia*	
40. *Vestril*		70. *Delphinatus*	
41. *Franconia*	50	71. *Roma*	
42. *Bawaria*		72. *Narwarra*	
43. *Bohemia*		73. *Primania*	
44. *Morawia*		74. *Cracia* (*Gracia* G.)	44
45. *Luthringia*		75. *Pontus*	
46. *Swevia*	49	76. *Ellespontus insula*	
47. *Austria*			
48. *Elsacia*			
49. *Stiria*	48		
50. *Walachia*			

An die Tabelle schließt sich unmittelbar der nachfolgende Text: *„Si maximam solis declinationem vel elevationem habere velis primo oportet sciri elevationem poli mundi sive equinoctialis in eadem regione. Tunc ad elevationem equinoctialis quoad maximam elevationem adde 23 gradus et 32 minuta. Sed quoad maximam* (sic!) *declinationem tunc eosdem ab elevatione equinoctialis subtrahe et habebis. Tunc quanta erit elevatio maxima tanta erit etiam elevatio poli arctici sive poli celi.“*

2. Es ist nun zunächst der letzte Passus, von welchem Günther bei seinen Betrachtungen ausgeht. Mit Recht vermutet er, daß im zweiten Satz ein Fehler des Abschreibers — maximam statt minimam — vorliege; um so mehr muß man sich allerdings wundern, daß Günther auf den sinnlosen letzten Satz hin, wonach die Polhöhe so groß wie die Sonnenhöhe z. Z. des Sommersolstitiums sein müßte, den Schluß aufbaut, die Handschrift sei in den Ostseeprovinzen entstanden. „Der unwissende

Abschreiber hat mit jenem Satz", meint Günther, „einen argen Verstoß sich zu schulden kommen lassen, allein eben dadurch hat er uns auch einen wertvollen Fingerzeig hinsichtlich seines Aufenthaltsortes gegeben. Soll nämlich seine Regel richtig sein, so muß

$$\varphi = h_1 \text{ und } 90^0 - \varphi = \varphi - 23^0\ 32'$$

folglich $$\varphi = \tfrac{1}{2}(90 + 23^0\ 32') = 56^0\ 46'$$

sein. Dies ist aber die geographische Breite von *Libau* etwa, und es gab somit in dem vom Kompilator bewohnten Lande einen Punkt, für welchen seine Vorschrift genau, und viele Punkte, für welche sie annähernd stimmte, und mit diesem Grade von Uebereinstimmung gab sich der Abschreiber zufrieden."

Diese Beweisführung leidet nun m. E. in größtem Maße an innerer Unwahrscheinlichkeit. Im vorliegenden Fall schreibt Günther die Genügsamkeit in Bezug auf die Genauigkeit der Person des Abschreibers zu, im allgemeinen ist die Wichtigkeit, die man in jenen Jahrhunderten allgemein auf gute Polhöhen legte, eine seiner Prämissen. Man könne hiefür nicht die richtige Vorstellung gewinnen, wenn man bloß die gedruckten Bücher berücksichtige, wie es Peschel gethan, man müsse das zahlreich vorhandene handschriftliche Material zu Rate ziehen, um zu erkennen, daß man auf die Kenntnis guter Polhöhen schon um deswillen naturgemäß Wert legen mußte, da diese Kenntnis die erste Vorbedingung für die Konstruktion jeder Sonnenuhr sei. Dieser Satz läßt jeden Unbefangenen vermuten, daß man gegen Ende des Mittelalters, d. h. doch nichts anderes als vor Erneuerung der Astronomie durch die Wiener Schule, vor allem durch Peurbach und Regiomontan schon zahlreiche gute Polhöhenbestimmungen besessen habe. Wie kommt es dann, daß uns davon so ungemein wenige überliefert sind? Warum gräbt man sie mühsam aus dem handschriftlichen Material noch heute im Interesse der Geschichte der Wissenschaft aus? Einfach, weil man sie nur in höchst bescheidenem Maße besaß und man sich selbst in Gegenden, wo man durch leidliche Wege die Lage mancher Punkte auf einen fester bestimmten Ort beziehen konnte, mit ganz rohen Annäherungen begnügen mußte. Die uns überlieferten Karten beweisen dies zur Genüge und die gewaltigen Verzerrungen der europäischen Länder in westöstlicher Richtung, an die Günther gar nicht gedacht zu haben scheint, hängen nicht nur von den Mängeln der Kenntnis der Längen, sondern zum Teil auch von den fehlerhaften Breitenannahmen ab.

Die in unserer Handschrift mitgeteilte Tabula regionum I spricht gleichfalls für die Genügsamkeit der Zeit, wenn ich so sagen darf. Es werden in ihr Landschaften aufgezählt, die annähernd unter gleicher Breite liegen. Sie dürfte, das ist wohl mit Sicherheit anzunehmen, einer Karte entnommen sein, an deren Rand nach ptolemäischer Art neben den Klimaten auch die Gradzahlen angesetzt waren. Dies ist der natürliche Uebergang zu den spätern genauern Angaben der Lage, wenn wir von den äußerst wenigen, astronomisch bestimmten Punkten absehen (s. u.).

Aber Günther, die Zeitverhältnisse schon in diesem Punkte verkennend, will uns beweisen, daß der Verfasser, den er uns auf Grund des völlig verkehrten Satzes „quanta erit elevatio maxima (sc. solis) tanta erit etiam elevatio poli arctici sive poli celi" als einen unwissenden Kompilator schildert, doch vielleicht selbst für seinen Aufenthaltsort mittelst des Gnomon oder des Baculus die Polhöhe gemessen habe! (p. 162). War dies letztere der Fall, so erscheinen die theoretischen Misverständnisse noch ungeheuerlicher. Andererseits konnte er sich mittelst des Gnomon kaum um mehrere Grade irren, wenn er nicht ein ebenso ungeschickter Beobachter wie Theoretiker war. In der That schließt Günther die Richtigkeit seiner „Messung" aus dem Umstande, daß *Prussia*, das eigentliche Deutschordensterritorium, mit 55° der Breite ganz gut weggekommen sei [1]). Wie reimt sich nun mit der eigenen Beobachtung von 55° die vermeintliche Uebereinstimmung zwischen der größten Sonnenhöhe h_1 und der Polhöhe am Beobachtungsort, da aus

$$\varphi = h_1 \text{ und } \varphi - 23^0\ 32' = 90^0 - \varphi$$

ja unbedingt $\varphi = 56^0\ 46'$ also fast 2^0 mehr folgt? Diese Breite ist, sagt Günther trotzdem, etwa diejenige von *Libau* und es gab somit in dem vom Kompilator bewohnten Lande einen Punkt, für welchen seine Vorschrift genau, und viele Punkte, für welche sie annähernd stimmte.

Ein weiteres Argument für den Ursprungsort der Handschrift im Ordenslande ist nach Günther ferner, daß in derselben an einer andern Stelle als gnomonisches Beispiel die Anfertigung einer Sonnenuhr „*in Prusia*" gelehrt werde. Indessen zeigt die betreffende Figur, neben welcher „*in Prusia*" steht, genau die gleiche Unwissenheit des Abschreibers in den ersten Elementen der Ortsbestimmung.

1) Was das von G. als „unter der topographischen Bezeichnung *Prussia media* wenig bekannte Mittelpreußen" betrifft, welches ebenfalls gut bestimmt sei (S. 162), so existirt dieses in der Handschrift nicht; es steht dort deutlich „*Russia media*".

Denn nach derselben bildet, was Günther entgangen ist, im Meridiandurchschnitt die linea equinoctialis einen Winkel von 55°, die Axis einen Winkel von 35° mit dem Horizont; während es für Orte unter 55° Br. gerade umgekehrt sein müßte. Unmöglich kann zwischen dem Misverständnis „quanta erit" und diesem „*in Prusia*" irgend ein Zusammenhang bestehen, da in dem ersten Falle die größte Höhe der Sonne (also zur Zeit des Sommer-Solstitiums), im zweiten die Aequatorhöhe derselben, (also zur Zeit der Aequinoctien) mit der Polhöhe bezw. der geographischen Breite identifizirt wird. Und der Mann also, der sich solche Verstöße zu Schulden kommen läßt, sollte im Stande gewesen sein die Polhöhe durch Gnomon oder gar durch den Baculus zu bestimmen[1])?

3. Vorausgesetzt der Abschreiber habe wirklich in jenen Gegenden gewohnt, wie stimmen nun seine Ansichten über die gegenseitige Lage der in Frage kommenden Landschaften mit der Wirklichkeit überein? — es werden *Samaicia*, *Litphania*, *Liphania*, *Prussia* genannt, nebst *Darpht*, ein Name, der hinter *Litphania* folgt. Unter *Darpht* ist gewiß, wie G. ausführt, nichts anderes zu verstehen als *Dorpat* (*Tarbatum*) und für diesen Ort (58$^1/_3$° N.) stimmt die Breite von 57° wenigstens nicht schlechter, als für manche andere Orte. *Dorpat* liegt aber, und lag doch auch niemals in *Lithauen* (*Litphania*). Doch wie dem auch sei, wie sollte ein in jenen Gegenden wohnender Klosterbruder nun *Livonia* (*Livland*), südlich von *Litthauen* setzen? „Gerade dieser Umstand spricht dafür", sagt G. (S. 162 ob.), „daß ein Preuße die Beschreibung anfertigte, denn ein solcher bezeichnete eben mit dem Wort *Litthauen* das ganze Gebiet des Ordenslandes bis hoch in den Norden" (!?). In der That eine seltsame Argumentation. Denn niemals konnte eine so generelle Bezeichnung es zuwege bringen, daß man deshalb glaubte, der Weg von Preußen führe durch das Gebiet von *Litthauen* südwärts nach *Livland*. Aber selbst wenn beide Namen zu vertauschen wären, sodaß an erster Stelle *Liphania* (57°), an zweiter *Litphania* (56°) stände, so müßte die Stellung von *Samaicia* unter 58° die Vermutung, der Verfasser habe in *Prussia* gewohnt, ganz über den Haufen werfen. Denn für *Samaicien* liegt ein Schreibfehler in keinem Fall vor. *Sarmatia*

1) Das letztere Instrument ist doch vor Regiomontan sicher nur in den Händen von astronomisch durchgebildeten Männer gewesen, wenn wirklich auf Grund der neuern Handschriftenfunde die Existenz desselben gegenüber den frühern Ansichten um hundert und dreißig Jahre zurück datirt werden muß (s. Günther, Martin Behaim. Bamberg 1890. p. 63. Anm. 55 u. ders. in Eneström's Bibliotheca mathematica 1890. 73—80).

dafür einsetzen zu wollen bei der besondern Aufzählung von *Russia alba, media, parva* hat keinen Sinn. *Samaicia* mit *Samland* zu identificiren, wie G. es bedingungsweise thut, ohne zu bedenken, daß dadurch der Breitenunterschied zwischen *Prussia* (55°) und *Samland* (58°) ja noch viel unerklärlicher bei einem „Preußen" wäre, ist ebensowenig angängig, da *Samland* im Mittelalter *Sambia* oder *Zambia* hieß. *Samaicia* ist vielmehr nichts anderes als die unzweifelhaft zu *Litthauen* gehörige Landschaft *Sameytha*, das Land der Samogiten, durch die Swiatha (jetzt Swenta, rechter Nebenfluß der Wilija) von *Litthauen* getrennt, kurz also eine südlich von *Livland* gelegene Landschaft. Roger Baco, der über die gegenseitige Lage dieser Landschaften (Opus majus. Lond. 1733 p. 226) schon weit besser orientirt war, als die Tabelle unserer Handschrift, verlegt *Semi-gallia* (*Samogitia*) östlich von *Livland*. Es muß also gerade aus dem Umstand, daß die Tabula regionum im Nordosten so außerordentlich fehlerhaft ist, von neuem geschlossen werden, daß ihr Ursprung in jenen Gegenden nicht zu suchen ist.

4. Aber zu Gunsten seiner Auffassung führt G. weiter den doppelten Umstand an, daß einerseits mit weiterem Fortschreiten gegen Süden die Unsicherheit der Angaben mehr und mehr wächst, und daß andererseits die Breiten, wenn Fehler mit unterlaufen, nur vergrößert niemals verkleinert werden. Auch diese Behauptung ist, wie sich aus der Einzelanalyse der Tabelle ergeben wird, in ihrer Allgemeinheit faktisch unrichtig. Einige ganz auffallende Misverständnisse in Bezug auf gewisse Namen mögen teilweise Veranlassung zu der irrtümlichen Auffassung gegeben haben (s. u. *Dacia* und *Wandalicia*); im übrigen hätte eine geographische Untersuchungsmethode den Interpret sicher zu andern Ansichten geführt. Es zeigt sich nämlich bei einer solchen, daß die Breitenlagen am besten für die westdeutschen Landschaften stimmen, etwa zwischen 52° und 47°, daß die Fehler sich von hier aus nordostwärts und südostwärts am meisten vergrößern, und zwar sind die östlichen Landschaften fast alle zuweit nach Norden gerückt, wofür man auch eine plausible Erklärung geben könnte. Dies soll indessen, da es näher belegt werden müßte, für jetzt nicht geschehen. Wir wollen die Tabelle selbst näher betrachten, sie in drei Abteilungen zerlegend.

a) Schreibt man zunächst die Landschaften mit einer Polhöhe von mehr als 53° nach ihrer Breitenlage, wie folgt, in horizontalen Reihen neben bezw. übereinander, so weicht unter den 22 Namen nur *Pomerania* (Nr. 11 in Tab. I) von der Regel ab, daß in jeder Breitenzone die Aufzählung mit der westlichen Landschaft beginnt:

Breite									
60°				*Norvegia*					
59°					*Svecia*			*Russia alba*	
58°				*Dacia*			*Samaicia*		*Asia*
57°							*Litphania*		
56°	*Scocia*				*Pomerania.*		*Liphania*		
55°		*Frisia.*	*Hernested.*	*Marchia vetus.*			*Prussia*		
54°	*Hibernia.*	*Holandria.*	*Saxonia.*	*Marchia nova*				*Russia media*	
53°		*Anglia.*	*Britannia.*						

Zunächst weist diese Anordnung schon unzweideutig auf die Identität von *Dacia* und *Dania* oder *Dänemark* hin, auch wenn nicht jede Ptolemäusausgabe den Namen *Dacia* im südlichen Schonen bezw. im Gebiet der Inseln trüge und derselbe Name sich auf zahlreichen handschriftlichen und gedruckten andern Karten des 15. u. 16. Jahrhunderts (Reysch, Orontius Finaeus, J. Vadian u. a.) fände, sodaß es in der That verwunderlich ist, wie G. darüber Erörterungen noch anstellen konnte, daß „mit jenem Namen *Dacia* (das unter 58° verlegt ist!), wohl etwas anderes gemeint sein müsse als das *Dacien* zur Römer Zeit" (bekanntlich in ca. 45° Br.!)

Nur der Name *Hernested* macht Schwierigkeit. Mir scheint jedoch die Karte des Cl. Clavus v. J. 1427 den Schlüssel zu geben. Dort steht (ca. 57½° nach Ptolemaeus, 53½° nach Clavus, also im Mittel 55°) die Inselgruppe *Haelieland (Helgoland)*, wie G. Waitz (Nordalbingische Studien I. 1844) aus dem aus dem schwer zu entziffernden Namen gelesen; ich lese *Haelgaeland*. Das von Nordenskjöld (Studien u. Forschungen. Lpz. 1885. Taf. II) herausgegebene Facsimile der Karte des Clavus zeigt den Namen etwa wie: [illegible], dessen letzte Hälfte leicht als *sted* gelesen werden könnte. Die Aufzählung hinter *Frisia* spricht jedenfalls nicht gegen diese Konjektur.

b) Auffallend ist, daß keiner deutschen Landschaft die Polhöhe von 53° gegeben wird. Auf der andern Seite zeigt sich sofort, daß die Namen Nr. 23—35, die sich mit Ausnahme von *Russia parva* und *Walachia* auf Mitteleuropa beziehen, in annähernd richtiger Breite und westöstlicher richtiger Folge aufgezählt sind. Die fünf Ortsnamen lassen wir zunächst aus der Uebersicht fort.

Breite									
52°		*Brabancia.*	*Geliea.*	*Westfalia.*		*Thuringia.*	*Misna*		*Slesia.*
51°	*Flandria.*			*Hassia.*			*Lusacia.*		
50°	*Normandia.*	*Pacardia.*		*Vestril.*	*Franconia.*	*Bavaria.*	*Bohemia.*	*Moravia.*	
49°			*Luthringia.*	*Swevia.*			*Austria.*		
48°			*Elsacia.*				*Stiria.*		
47°	*Francia.*		*Burgundia.*	*Svaicia.*					

Daraus ergibt sich, daß die östlichen Landschaften z. T. um 1° zuweit nördlich gerückt sind, dies gilt von *Thuringia*, *Misna*, *Slesia*, *Bawaria*, *Austria*, *Stiria*, während man für die *Lausitz* und *Böhmen* den 51° bezw. 50° als mittlere Breite annehmen kann. Unter den westlichen Landschaften macht uns *Vestril* Schwierigkeit. Verstümmelt oder verschrieben ist der Name gewiß. Einen Schlüssel für die Erklärung kann jedoch die Aufzählung zwischen *Picardia* und *Franconia* abgeben; nach meiner Vermutung handelt es sich um den Namen *Westrich* (*Vestric*). Der Name rührt bekanntlich von *Neustria* oder *Westria* (*Austrasia*) her und umfaßte im Mittelalter die Landschaften zwischen *Elsaß*, *Lothringen*, *Trier* und *Pfalz*, also jedenfalls einen größern Landkomplex als später, wo man darunter den südwestlichen Teil der *Pfalz* verstand. Schon des Nic. Cusanus Germania (ca. um 1460, gestochen 1491)[1]) gibt der Landschaft diesen beschränkten Umfang.

Es ist ferner bemerkenswert, daß sich sämmtliche Ortsnamen in der Tabelle mit Ausnahme von *Darpht* und *Remis* auf bekannte Städte u. zw. meist Bischofsitze in der schmalen Zone zwischen *Köln* und *Löwen* beziehen, nämlich *Colonia* selbst, *Julk* (*Jülich*), *Lowanium* (*Löwen*) und *Leodium* (*Lüttich*), und daß die Breitenfehler für dieselben, sobald man unter den Ziffern nicht Parallelkreise, sondern Breitengrade versteht, hier ziemlich gering sind. *Reims* freilich ist in der Lage erheblich falsch gesetzt (und vielleicht erst später eingeschoben). Immerhin könnte jener Umstand in Verbindung mit der ziemlich richtigen Lage der Landschaften im rheinischen Deutschland plausibler auf den Ursprungsort hindeuten, als auf irgend eine andere Gegend Mitteleuropas.

c) Die Fehler vergrößern sich von neuem für die südlichen, mehr noch für die südöstlichen Landschaften und wenn die Breitenlage auch für einige (norditalische) gut paßt, so fällt es auf, daß die Ordnung der Aufzählung in westöstlicher Richtung fast ganz durchbrochen wird. Dadurch wird die Lokalisirung der nicht ohne weiteres verständlichen Namen erschwert. Wir trennen die westlichen von den östlichen Landschaften:

54. *Carinthia*	46°	66. *In pede montis*	45°	72. *Narwarra*	44°
57. *Hastringis*		67. *Prewenzia*		73. *Primania*	
58. *Gabaudia*		68. *Tuscana*			
60. *Venezia*		69. *Wandalicia*			
61. *Coneolla*		70. *Delphinatus*			
62. *Croacia*		71. *Roma*			

1) S. die photolithographische Reproduktion der kürzlich wiedergefundenen Karte, herausg. v. S. Ruge im Globus Bd. LX. 1891.

In dieser Tafel ist Nr. 54 *Hastringis* nicht zu erklären. Der Umstand, daß er vor *Gabaudia* (oder, wie G. schon sagt, *Sabaudia* d. h. *Savoyen*) genannt wird, könnte vielleicht ihn in Zusammenhang mit einer westlichen Landschaft (*Gastinois* um *Nemours*??) bringen. Für die Vermutung G.'s, daß man unter *Carniolla Krain* zu verstehen habe, spricht in der That der Umstand, daß dort *Coneolla* und nicht *Concolla* steht und zwar vor *Croacien* aufgezählt wird. — Ganz entschieden müssen wir uns gegen die Uebersetzung von *Wandalicia* mit *Andalusien* erklären. Schon der gewaltige, alle andern Irrthümer weit übersteigende Fehler von 8° in der Breite spricht gegen diese Annahme. Ebenso scheint aber auch die Latinisirung des Namens *Andalusia*, der erst aus der arabischen Geographie spät in die mittelalterliche übergegangen ist, in der Form *Wandalicia* eine sehr selten gebrauchte und jedenfalls sehr späten Datums zu sein. Während der Name *Andalus* sich auf den arabischen Karten des 10. Jahrh. schon zeigt, tritt er in den Karten der Abendländer erst am Ende des 16. Jahrh. auf, aber stets in der Form „*Andalusia*". Die Karten zu den Ptolemäusausgaben nennen auch auf den sog. Tabulae novae jene Landschaft *Baetica*, ebenso fehlt *Wandalicia* oder *Vandalicia* im Thesaurus geogr. von Ortelius v. J. 1587, wogegen auch in diesem *Andalusia* mit *Baetica* latinisirt wird. Wie sollte ferner plötzlich diese eine südspanische Landschaft in die Gruppe der norditalischen kommen, während sonst überhaupt keine von so südlicher Breite genannt werden? Es dürfte daher wenig Zweifel sein, daß *Wandalicia* für *Vindelicia* steht, und die wiedergefundene Karte des Cusanus, die jedenfalls spätern Datums (s. vor. S.), bestätigt, daß der Name ähnlich wie *Westrich* im 15. Jahrh. noch nicht obsolet geworden war. — Mit *Narwarra* (*Navarra*) und *Primania* erreichen wir im Westen die südlichsten Landschaften. Ob *Romania* für *Primania* zu lesen ist, so daß dieses für den ganzen Kirchenstaat zu stehen hätte, muß dahin gestellt sein. Doch wüßte ich auch zunächst keinen andern Ausweg, nur kann nicht der nördliche Teil des ehemaligen Kirchenstaates, *Romagna* im engern Sinne, gemeint sein, wie G. vermutet.

Als östliche Landschaften bleiben dann noch die folgenden

55. *Bulgaria*	46°	74. *Cracia*	44°
56. *Yberia*		75. *Pontus*	
57. *Cumanna*		76. *Ellespontus insula*	
58. *Palespontus*			
64. *Magna insula Calchus*			
65. *Albania*			

Auch hier also beträchtliche Nordverschiebung, die jedoch 3 Breitengrade nicht übersteigt, wenn wir bedenken, daß *Cracia* (*Graecia*) nicht dem heutigen Griechenland, sondern dem Rumpf der türkischen Halbinsel entspricht. Unter *Cumanna* ist Cumanenland d. h. Ungarn zu verstehen (G.) *Yberia*, *Colchis* und *Albania* führen uns in die Kaukasusländer bezw. das südlichste Rußland. Die Form *Palespontus* vermag ich für jetzt auch nicht zu erklären. Da *Pontus* noch besonders — südlicher von jenem gelegen — genannt wird, kann man vielleicht an den Asow'schen Busen denken und irgend eine Kombination von *Palus* und *Pontus* vermuten (??)

5. Fassen wir die ganze Tabelle zusammen, so entbehrt sie in ihrer Gruppirung nicht des Interesses und ist eine nicht unwichtige Ergänzung der kartographischen Darstellungen aus dem Anfang (?) des 15. Jahrhunderts. Denn älter als des Cusanus (1464) Germania ist sie gewiß. Zur Zeit ist mir jedoch weder eine Karte bekannt, die als Quelle der Aufstellung angesehen werden könnte, noch eine anderweitige Tabula regionum, an die sie sich anschließt. Gerade die Beschränkung auf Landschaften des mittlern und nördlichen Europa gibt ihr ein Alter vor dem allgemeinern Bekanntwerden der Geographie des Ptolemäus im Abendland (die erste lateinische Uebersetzung durch den Florentiner Jacobo Angelo ward bekanntlich 1410 vollendet, was hier nur erwähnt wird, weil G. den Italiener (l. c. 160 Anm. 2) schlankweg zu einem Deutschen Jakob Engels, macht). Setzt die geordnete Reihenfolge, in welcher die Landschaften nördlich des 46° mit geringen Ausnahmen aufgezählt werden, m. E. voraus, daß der ursprüngliche Verfasser eine Karte vor sich hatte, welche am Rande eine Einteilung nach Klimaten und Einzelgraden hatte, so kann dieselbe nicht ganz klein, nach Art der Imago mundi des Petrus d'Ailly, gewesen sein; dies könnte höchstens von einer zweiten Karte gelten, aus der vielleicht die Landschaften zwischen 44° und 46° entnommen sind, wobei die richtige Aufzählung nach Breitenzonen größere Schwierigkeit bot, denn unwahrscheinlich ist es, wie gesagt, daß eine solche überhaupt ohne eine die räumliche Vorstellung unterstützende Kartenskizze erfolgt sein sollte. Indessen mag das Weitere bis zur Durchmusterung noch anderen Materials zurückgestellt werden.

III.

Nur ein Kriterium gibt es noch für die Datirung zu erörtern, welches G. nicht weiter beachtet hat, nämlich die Annahme der Schiefe der Ekliptik zu 23°32′. Ueber diesen Punkt enthält

die G.'sche Darstellung nur die Worte „die Schiefe der Ekliptik ward von Peurbach zu 23°33′ angesetzt, von Coppernikus zu 23°29′, unsere Quelle bedient sich eines zwischen diesen beiden Zahlen liegenden Wertes". Diese Darstellung ist in den Ziffernangaben des erstern Teils unrichtig, in ihrem zweiten m. E. irreführend. Ich muß über diesen Punkt etwas weiter ausholen. Jener Ausdruck kann doch wohl nicht anders verstanden werden, als daß Peurbach selbstständig die Schiefe zu 23°33′ bestimmt habe, ebenso wie später Coppernikus zu 23°29′. Aber für diese Behauptungen liegen keine Belege vor. Ich berühre dabei einen wunden Punkt in der Geschichte der astronomischen Wissenschaft. Trotzdem im Laufe der letzten drei Jahrhunderte die Geschichte der Bestimmungen der Schiefe der Ekliptik (meist unter dem Stichwort der säkularen Aenderung bezw. Abnahme derselben) oft in kosmographischen oder astronomischen Werken behandelt ist, fehlt es, so viel mir bekannt, noch ganz an einer vollständigen und wirklich quellenmäßigen Darstellung[1]). Meist wird in den Einzelhinweisen nicht auf die Originalquellen zurückgegangen. Für seine Zeit am vollständigsten hat wohl Riccioli im Almagestum novum Bonon. 1661. p. 160—161 berichtet[1]). Sonst pflegt der eine Autor diesen, der andere jenen Urheber in ziemlich willkührlicher Weise fort zu lassen oder er nimmt einen solchen auf, ohne das Gewicht desselben für die Entwickelung der Wissenschaft erst abzuwägen. So schiebt Günther neuerdings (Handbuch der math. Geogr. 1890. S. 736) auf eine zufällige, neue litterarhistorische Notiz hin[2]) in eine alte Mädler'sche Tabelle von nur vier Namen (die Versetzung Albatâni's oder des Albategnius a. a. O. ins 10. statt ins 9. Jahrh. darf nicht auf Mädlers Rechnung gestellt werden) zwischen Arzachel und Coppernicus noch den Lehrer des letztern, Novara, ein, den Copp. selbst nicht einmal nennt und dessen Bestimmung keinerlei Einfluß auf die Berechnungen seiner oder

1) Wenn G. in seinem Handbuch der math. Geogr. 1890. S. 736 sagt: „Im Zusammenhang studirt die aus älterer Zeit überlieferten Messungsergebnisse Laplace in seinem den Conn. des temps von 1841 einverleibten Aufsatze: Sur la diminution de l'obliq. de l'éclipt. qui resulte des observ. des Anciens" (sic, statt anciennes) so kann G. die Arbeit unmöglich selbst eingesehen haben, denn erstens steht dieselbe in den Conn. des temps 1811, sodann beschäftigt sie sich nur mit den Messungen der Chinesen, älterer Griechen excl. Ptolemaeus und einiger Araber und Perser, aber nicht mit denen des 15. und 16. Jahrhunderts.

2) Leben d. Coppernikus v. Prowe I. 1885. S. 244, wo die Autorschaft des Novara für den Wert 23°29′ durch handschriftliche Notizen festgestellt wird.

späterer Zeiten geübt hat, während z. B. weder Prophatius, noch Peurbach und Regiomontan, noch Werner etc. von G. in die Liste gestellt werden.

Genug die Bestimmung des Coppernicus ist nicht 23°29′, sondern 23°28′24″ (wie G. auch in seinem Handbuch anführt), wofür in seinem Hauptwerk auch öfters 23°28′30″ gesetzt wird [1]). Aber mehr interessirt uns zur Zeit Peurbach, von dem feststeht, daß er 1460 mit Regiomontan zugleich die Ekliptikschiefe zu 23°28′ bestimmt hat, so daß Coppernikus mit Recht sagen konnte, die von ihm gefundenen Werte stimmen mit dem von P. u. R. erhaltenen wohl überein [2]). Das rein fachwissenschaftliche Interesse knüpft sich bei solchen Werten bekanntlich mehr an die Bedeutung derselben für die Kenntnis der wahren Verhältnisse zu

---

1) Nic. Coppernicus: Ueber die Kreisbewegung der Himmelskörper, übers. mit Anm. v. M. Menzzer. Thorn 1879. S. 60. 135. 143.

2) Menzzer gibt (l. c. Anm. 102 u. 103) nur einige biogr. Notizen über Peurbach und Regiomontan, aber sagt nichts über ihre Bestimmung. Daher mögen folgende Belegstellen folgen. M. Ptolemei alex. in Magnam Constructionem Georgii purbachii ejusque discipuli Joh. de Regio monte Astronomicon Epitoma (Venetiis 1496). Lib. I prop. XVII: Nos autem invenimus arcum alt. trop. hiem. 65 graduum 6 minutorum et arcum alt. trop. estualis 18 gr. 10 min. Ideoque nunc distantia tropicorum est 46 gr. 56 min., ergo declinatio solis maxima nostro tempore est 23 gr. 28 min.“ — Ferner ist der in *Nürnberg* aufbewahrte und von Murr (Memorabilia biblioth. publ. Norimb. 1786. I.) veröffentlichte Briefwechsel Regiomontans mit Bianchini von Wichtigkeit. Anfang 1464 (l. c. 148—149) schreibt R. an B.: „Nos autem, praeceptor meus et ego, instrumentis reperimus declinationem solis maximam 23 gr. minutorum 28 fere. M. Paulum florentinum et D. Baptistam de Alberthis sepe audivi dicentes se diligenter observasse et non reperisse majorem gr. 23 minutis 30 que res etiam tabulas nostras videlicet tabulam declinationis et ceteras que super eam fundantur innovare persuadet“. Es ist dies die Stelle, in welcher sich R. sehr eingehend mit einer Kritik auch der ältern Werte beschäftigt. Wenn, beiläufig, Günther in seinen Studien z. Gesch. d. math. u. phys. Geographie (Halle 1877. Heft 2. S. 77) gegenüber Mädler (Gesch. der Himmeskunde I, 123) behauptet, es sei ein Irrtum des letztern, daß Peurbach bereits etwas von der Veränderung der Schiefe der Ekliptik gewußt habe, so kann G. wohl nicht die Theorica motus octavae sphärae (den letzten Teil der 1460 geschriebenen Theoricae novae planetarum), selbst eingesehen haben, deren vorletzter Abschnitt: „de mutatione declinationum solis maximarum“ mit dem Worten beginnt: „Unde fit, ut maximae Zodiaci declinationes variabiles existant . . . . .; majores namque reperta sunt a Ptolemeo quam ab Almeone“ etc. Erst hinterher folgte jener Anhang: „Theorica octavae sphärae secundum Thebit“. Wenn ferner Peurbach im Eingang seiner Theorica oct. sphaerae dem „tertius motus“ derselben hinzufügte: „qui motus trepidationis vocatur“, warum nennt Günther a. a. O. diesen von Delambre gebrauchten Ausdruck einen ganz und gar unhistorischen“?

gewissen Zeiten, sodaß man die event. von den Beobachtern noch vernachlässigten Korrektionen, wie in unserm Fall besonders diejenigen der Refraktion, anbringt, sie also gleichsam wissenschaftlich zustutzt. Aber das historische Interesse verweilt mehr bei den Originalziffern selbst und deren Einfluß auf die Arbeiten der Zeit. Wenn nun einerseits keine Frage ist, daß eine ganze Reihe von Tafeln Regiomontans und seiner unmittelbaren Nachfolger bezw. Herausgeber auf jenen Wert von 23°28′, der von ihm und Peurbach ein Jahr vor des letztern Tode gefunden ward, gegründet sind, so steht andererseits fest, daß beide und besonders Peurbach während des größern Teil seines Lebens hindurch sich an einen der ältern Werte hielten und zwar wesentlich an die Zahl 23°33′30″, den Regiomontan ausdrücklich als den üblichen bezeichnet[1]) und gelegentlich auf Thebit (ben Korra um 900)[2]) zurückführt, woneben gelegentlich auch 23°33′ oder wohl auch rund $23^1/_2{}^0$ angewandt wird.

Der in unserm Manuskript vorkommende Wert 23°32′ hat also mit den eben genannten Zahlen nichts zu thun und dieser ist mit Sicherheit auf Prophatius Judaeus (Jacob ben Machir um 1300) zurückzuführen, wobei ich mich ohne weitere Erörterungen auf die ausführlichen Darlegungen Menzzer's[3]) die er zum Teil dem gelehrten M. Steinschneider verdankt, beziehen kann; nur mag hinzugefügt werden, daß die Kommentatoren Peurbachs und Regimontan's den Prophatius auch bereits mit zu nennen pflegten[4]). Jedenfalls geht hieraus hervor, daß uns diese Zahl nicht etwa auf eine zeitlich zwischen Peurbach und Coppernicus fallende Periode führt, wie man leicht aus Günthers Worten herauslesen könnte. Nicht daß wir die Ortstabelle auf

---

1) Regiomontan an Bianchini 23. Juli 1463 (Murr l. c., 76): „utor enim declinatione maxima solis usitata gr. 23 min. 33 sec. 30" und als Bianchini (p. 81), den Wert gr. 23 m. 30 sec. 30 supponirt „sicut ipsam multociens cum instrumento at in diversis temporibus consideravi diligenter" antwortet R. (p. 85), daß er bei Berechnung der ihm von Bl. gestellten Frage die größte Deklination der Sonne zu 23 gr. 30 min. angenommen habe „que declinatione maxima convenienter usitata minor fere est tribus minutis".

2) Reg. im Brief an Bianchini 1464 (Murr. l. c. p. 146): „post eos Tebith declinationem invenit maximam gr. 23 minuta 33 fere. Vergl. auch Peurbach: Theor. oct. sphaerae sec. Thebit: Eclyptica fixa semper secat equatorem ad angulum semper eundum, puta 23 gr. 33 min. et 30 sec.

3) Nic. Copp.: Ueber d. Kreisbewegungen etc. s. o. Anm. 89.

4) S. z. B. Chr. Vurstisius: Quaest. novae in theor. planet. Basel. 1578. S. 421, wo jedoch Prophatius mit 23°22′ min. angeführt wird, oder Peurbach: theor. nov. planet. ed. Ed. Reinholdo. Wittenb. 1601 p. 238.

die Zeit des Prophatius zurück datiren wollen, aber da Regiomontan dessen Berechnung der Ekliptikschiefe niemals erwähnt, so folgt wohl hieraus von neuem, daß wir jene Tabelle auf eine Zeit vor Reformation der Astronomie durch die Wiener Schule zurückrücken dürfen.

IV.

1. Die Ortstabelle (Tabula civitatum) unseres Manuskripts, unter deren 62 Namen sich einige wenige Landschaftsnamen finden, ist die folgende. Ein Tabellenkopf fehlt.

1.	*Hibernia*	m	1	16	59	33.	*Erffort*		4	51	
2.	*Scocia*	m	0	36	59	34.	*Lips*		10	51	
3.	*Oxonium*	m	0	52	53	35.	*Ingelstadium*				
4.	*Compostellum*	m	1	40	45		(*Ingelstadum* G.)		4	49	
5.	*Lisibona*	m	1	40	41	36.	*Nurenberga*	*a* 0	0	49	
6.	*Toletum*	m	1	27	41	37.	*Ratisbona*	*a* 0	6	49	
7.	*Corduba*	m	1	21	38	38.	*Ulma*	*a* 0	0	47	
8.	*Cesaraugusta*	m	1	6	41	39.	*Praga*	*a* 0	24	50	
9.	*Rhotomagus*	m	0	43	50	40.	*Vratislavia*	*a* 0	40	51	
10.	*Parsiiis* (sic)	m	0	30	48	41.	*Cracovia*	*a* 0	50	51	
11.	*Lugdunum*	m	0	31	45	42.	*Caschovia*		56	50	
12.	*Burdigalia*	m	0	52	45	43.	*Buda*		50	47	
13.	?	m	0	32	44	44.	*Segnia*				
14.	*Tolosa*	m	0	43	43		(*Seguia* G.)		32	45	
15.	*Vienna provincie*	m	0	30	44	45.	*Vienna anno'*		15	48	
16.	*Massilia*	m	0	28	43	46.	*Patavia*		10	48	
17.	*Pragis*	m	0	36	52	47.	*Saltzeburga*		12	48	
18.	*Gandanum*	m	0	24	52	48.	*Iudeburgum*		14	47	
19.	*Trajectum*	m	0	12	53	49.	*Villacum*		13	46	
20.	*Colonia*	m	0	13	51	50.	*Brixina*		8	45	
21.	*Machilia*	m	0	24	51	51.	*Venetie*		10	45	
22.	*Maguntia*	m	0	15	50	52.	*Ancona*		14	44	
23.	*Herpipolis*	m	0	4	50	53.	*Roma*		20	42	
24.	*Argentina*	m	0	12	45	54.	*Tarentum*		44	40	
25.	*Constantia*	m	0	10	46	55.	*Brudusium* (sic)		40	39	
26.	*Augusta Vindelicorum*	A	0	10	46	56.	*Neapolis*		36	41	(sic)
27.	*Dacia*	*a*	0	36	58	57.	*Florentia*		10	42	
28.	*Swetia*			26	62	58.	*Mediolanum*		0	44	
29.	*Bubeca*			16	56	59.	*Taurinum*	m 0		43	
30.	*Dantiscum*			56	56	60.	*Genua*	m 0	4		
31.	*Prunswigum*	*a*	0	0	53	61.	*Sardinia*	*a* 0	2	38	
32.	*Magdeburgum*			16	54	62.	*Sicilia*	*a* 0	30	37	

2. „Man wird zugestehen müssen", sagt Günther, „daß diese Tafel, welcher auch nicht ein Schatten von Erklärung beigegeben ist, demjenigen, der sie betrachtet, zunächst ein Räthsel aufgibt." Muß schon diese Frage der ohne Weiteres verständlichen Tabelle gegenüber verwundern, wieviel mehr die Lösung, daß man es

hier mit einer Tafel ausschließlich der Längen zu thun habe und obige Ziffern den Längen in Stunden, Minuten und Sekunden entsprächen!! Hier darf man wohl mit Recht fragen, welche Fortschritte für den so notwendigen streng wissenschaftlichen Betrieb der Erdkunde zu erwarten sind, wenn ein Autor, der seit mehr als einem Jahrzehnt mit besonderer Vorliebe die historische Seite der mathematischen Geographie traktirt und uns der Führer durch das nicht leicht verständliche Gebiet sein könnte, der u. a. über Peurbach, Regiomontan, Joh. Werner, Apian, Keppler kleinere oder größere Monographien geschrieben, eine so einfache Tabelle jener Zeit total misversteht, und die beigegebenen Grade der Breite für Längensekunden erklärt! Man würde es für ein Versehen allzu flüchtiger Betrachtung ansehen, wie es einem so unendlich vielschreibenden Autor einmal unterlaufen kann, wenn G. sich nicht diesmal besonders Zeit genommen hätte und sich des Langen und Breiten abmühte, aus den so verkannten Zahlen den Mittelmeridian herauszukonstruiren. Zuvor erklärt er offen: „Wir sind außer Stande anzugeben, von welchen Worten *a* und *m* als Anfangsbuchstaben zu denken sind." Wunderbar, daß nicht wenigstens dem Mathematiker G. und Verfasser einer Geschichte des mathematischen Unterrichts die Ausdrücke „adde" und „minue" oder „addendum" und „minuendum" eingefallen sind, wofür in den deutschen Ausgaben der Tabelle, von denen die Rede sein wird, *g* (zugeben) und *n* (abnehmen) steht. „Da somit", sagt G., „ein offenbarer Fehler vorliegt, so gilt es eine möglichst schonende Verbesserung anzubringen; so sehr wir uns die Schwierigkeit vor Augen stellen, in ein solches Zahlenheer, vielleicht von einem unwissenden Kopisten mit allen möglichen Versehen zusammengeschrieben, Konjekturen hineinzutragen, so wird sich doch im gegebenen Falle dieses Wagnis nicht ganz vermeiden lassen." Ich finde die einzige Erklärung für das totale Verkennen der Zahlen der dritten Spalte (von denen, wohl bemerkt, keine unter 37 herabgeht) als Zeitsekunden in der irrigen Vorstellung, welche sich G. über den Grad der Genauigkeit für die Beobachtungen jener Zeit gebildet hat, vielleicht verführt durch die langen Ziffernreihen der astronomischen Tabellenwerke, wie z. B. der Libros del saber des Königs Alphons. Hier handelt es sich jedoch einfach um rechnerische Operationen, die beliebig weit ausgedehnt werden konnten und mit dem Genauigkeitsgrad, mit dem man sich bei Beobachtungen begnügen mußte, nichts gemein haben.

Die obige Tabelle, welche wir als eine weit verbreitete aus

dem Kalender und den Ephemeriden des Regiomontan ohne Schwierigkeit werden nachweisen können, gibt, obwohl sie bereits aus der Zeit der Reformation der Astronomie durch diesen großen Mathematiker stammt, ein neues Zeugnis für die Genügsamkeit jener Zeit. Die vermeintlichen Zeitsekunden geben die Breitenlage zwischen 62° und 37° in ganzen Graden an und die Längenangaben in Stunden und Minuten bieten nur für fünf Orte eine ungerade Zahl von Minuten, d. h. im Bogenmaß eine Genauigkeit bis auf Viertelgrade. Für weitere 11 gerade, aber nicht durch vier teilbare Zahlen, also eine Genauigkeit nur bis auf halbe Grade, alle übrigen (durch 4 teilbaren) Längenangaben würden im Bogenmaß ausgedrückt für die Lage nur ganze Grade ergeben!

Die völlig falsche Prämisse, daß man es hier nur mit Längenangaben in Stunden, Minuten und Sekunden zu thun habe, sind begreiflicher Weise Schuld, daß Günthers Versuche den angenommenen Mittelmeridian aus der Tabelle herauszulesen, völlig hinfällig sind. Wir brauchen uns dabei nicht aufzuhalten, da sich derselbe aus der Länge $0^h\ 0^m$ von selbst ergibt; es ist die durch *Braunschweig*, *Nürnberg*, *Ulm* und *Mailand* ziehende Mittagslinie, die von selbst schon auf *Nürnberg* als den Ursprungsort der Tabelle hinweist.

3. Natürlich mußten auch die Versuche, die veralteten Ortsnamen in die uns geläufige Form umzuschreiben, durch das Verkennen vor allem der Bedeutung der dritten Zahlenspalte leiden. Es könne nicht entschieden werden, sagt G., ob *Lugdunum* (Nro. 11) *Leyden* oder *Lyon* sei. Der Zusatz 45, d. h. 45° d. Br., läßt ohne Weiteres erkennen, daß *Lyon* gemeint ist. *Dacia* entspricht natürlich auch in dieser Tabelle *Dänemark*. Auch würde G. sich bei *Neapel* nicht verlesen und 45° gesetzt haben, wenn er die Ziffern als Breiten erkannt hätte (die Zahl 41 ist nicht gut geschrieben). Ebenso hätte er die fehlenden Zahlen bei *Neapel* ($0°\ 2^m$ L.) und *Genua* (43° Br.) ergänzen können. Im übrigen halten wir uns bei den leichtverständlichen Namen nicht auf, die an der Hand der häufigen Reproduktionen durch den Druck leicht identificirt werden können, auch wenn sie hier verschrieben sind (*Pragis* statt *Prugis*, *Bubeca* statt *Lubeca*, *Argentina* 45° statt 47° etc.).

Nur gegen der Vermutung G.'s, daß man unter *Segnia* (nicht *Seguia*, wie G. gelesen) der Bischofssitz *Seckau* in Steiermark zu verstehen sei, wollen wir uns mit Entschiedenheit erklären. Eine geographische Untersuchungsmethode ist von G. nicht angewandt, es bot ihm offenbar nur die Namensähnlichkeit den Anhalt. *Seckau* liegt jedoch nicht 20 Kil. nordöstlich von Judenburg. Man vergleiche da-

mit den Längenunterschied nach obiger Tabelle; nach dieser liegt *Segnia* $18^m = 4^1/_2$ Längengrade oder ca. 350 Kil. östlich von Judenburg. Solcher Fehler wird dem Autor der Tabelle also bei zwei ganz benachbarten Orten imputirt! Indessen ist m. E. gar kein Zweifel, daß man *Segnia* mit dem heutigen *Zengg* in Dalmatien zu identifiziren hat, wofür nicht nur jener Längenunterschied, sondern auch die Breite von 45° spricht. Außerdem findet sich der alte Name für *Zengg* als *Senia*, *Signia*, *Segnia* auf zahlreichen Karten des Mittelalters, sowie der Ptolemäusausgaben. Selbst Spruner-Menkes Atlas genügt zur Erläuterung.

4. Wie schon angedeutet, ist es ebenso verwunderlich, daß der Biograph des Regiomontan, der uns eine genaue Inhaltsangabe seines berühmten Kalenders (Allg. deutsche Biographie Bd. 22 Joh. Müller) mitteilt, die vorliegende Ortstabelle nicht sofort als diejenige erkannt hat, die sich nicht nur in fast allen Ausgaben des lateinischen Calendarium, wie des deutschen Kalenders, sondern auch in den Ephemeriden und dem Almanach desselben als „*Tabula regionum*" figurirt und von hier aus auch in die Ausgaben der Alphonsinischen Tafeln übergegangen ist, um, später allmählich erweitert, im 16. Jahrhundert noch oft abgedruckt zu werden. Freilich müssen wir auch nach der rein litterarhistorischen Seite G. einer seltsamen Unkenntnis zeihen, wenn er nach — doch hoffentlich aus der Autopsie geschöpften — Beschreibung des deutschen Kalenders von 1475 mit der Tafel der „Landt und stet" (das eben ist unsere Tabelle) in der Allg. deutschen Biographie, die das Zuverlässigste enthalten sollte, was gegeben werden kann, fortfährt: „Ganz ähnlich war auch der z. Z. in Göttingen — vielleicht in dem einzigen noch übrigen Exemplar — befindliche latein. Kalender, der 1485 zu Venedig erschien" etc. Hätte G. einmal in Hain's Repertorium bibliograph. 1836—38 geblickt, so würde er mit Nro. 13 775 beginnend allein gegen 15 Ausgaben des Kalenders, davon 9 lateinischen, neben 5 Ausgaben der Ephemeriden und zweien des Almanach, welche bis 1500 im Druck erschienen, begegnet sein, und nach den mit einem * bezeichneten, von Hain selbst gesehenen Ausgaben, darf angenommen werden, daß die Münchener Bibliothek eine ganze Reihe dieser Kalender besitzt, ganz abgesehen von den nach 1500 gedruckten. Das Göttinger Exemplar ist nebenbei die 1482 in Venedig erschienene (Hain 13 777) Ausgabe. Uebrigens sind die Hain'schen Zusammenstellungen sowohl Stern (Ersch u. Gruber 1843 Joh. de monte regio) als R. Wolf (Gesch. der Astronomie 1877, S. 96) entgangen.

Durch Einsicht in eine dieser Ausgaben hätte sich auch die Lücke Nro. 13 mit *Avignon* ausfüllen lassen und der „räthselhafte Zusatz“ *annoe* bei Wien hätte sich als *Vienna pannonie* im Gegensatz zum *Vienna provincie* entpuppt. Auf die kleinen Abweichungen, welche die verschiedenen Ausgaben der tabula regionum haben, verlohnt es hier kaum einzugehen. Mit *Hibernia* beginnend und mit *Sicilia* endigend füllt sie fast immer eine Seite kl. 4° in den genannten Werken. In der Ausgabe der Alphonsinischen Tafeln von 1483 (Alfontii regis tab. astron., cur. Erh. ratoldt) befindet sich noch eine Kombination der ältern Tabula regionum und der neuen, geordnet nach der Länge von W. nach O. und mit Angabe der Längen in Graden und Minuten (letztere meist auf 10 abgerundet) und der Breiten in Graden, nur daß bei 9 Orten auch noch Breitenminuten eingesetzt sind. In der hier in Göttingen befindlichen Ausgabe der Alph. regis tab. astr. vom Jahre 1498 steht dagegen genau die gleiche wie im Regiomontans Kalender, wobei die Längen in Stunden und Minuten ausgedrückt sind [1]).

5. In dem einen Punkte glaube ich Günther beistimmen zu müssen, daß hier die erste Ortstabelle vorliegt, in welcher die Längen durchweg in Zeit angegeben sind, und nach allem, was zur Zeit bekannt, dürfen wir wohl nur Regiomontan als den Urheber dieser Neuerung ansehen, welche im engen Zusammenhang mit der Herausgabe neuer Ephemeriden stehen dürfte. Daß derselbe früher sich der üblichen Bezeichnung im Bogenmaß, mit dem Anfang an der Westgrenze der bewohnten Erde, bediente, geht u. A. unzweideutig aus dem Briefwechsel mit Joh. Bianchini, Jac. Spira, Christian Roder in Erfurt 1463—71 hervor. Noch im letzten Brief vom 4. Juli 1471 an Roder heißt es (Murr l. c. 195): „Urbs roma longitudinem habet ab occidente graduum 35 et latitudinem ab equinoctiali 42 graduum.“

Ob die erste Ausgabe des Kalender Regiomontans bereits 1473 oder erst 1474 erschienen, ist mir zur Zeit nicht bekannt. Die k. Bibliotheksverwaltung zu Berlin teilte mir mit, daß die dort befindliche Ausgabe von 1473 (sic) eine Tabula regionum nicht habe, wohl aber die von 1475. Da nun die erste 1474 gedruckte Ausgabe der Ephemeriden für 1475—1506 [2]) (s. Wolf, Gesch. d. Astron. 1877, S. 96, Hain Nro. 13 790) die Tabula gleichfalls enthält, so muß wohl 1474 bezw. 1475 als das Jahr des ersten Erscheinens

1) Nicht also zuerst in den alphonsinischen Tafeln erschienen diese Listen neuer Breitenbestimmungen, wie S. Ruge (Globus Bd. LX. 1891) meint.

2) Gallois (s. folg. S.) gibt S. 7 irrtümlich 1405—1506 an.

der Tabula mit Angaben der Längen in Zeit angesetzt werden. Damit ist dann auch unsere handschriftliche Tabelle datirt, welche nach allem nichts anderes sein kann, als eine Kopie aus dem Kalender selbst, vielleicht eine Abschrift des handschriftlichen Originals. Damit werden wir in Betreff der Herstellung dieses Mittelstücks wieder auf *Nürnberg* hingeführt und zwar auf die Zeit, in welcher Regiomontan sich dort aufhielt (1471—75).

6. Zum Schluß lenken wir die Aufmerksamkeit nochmals auf die „Genügsamkeit der Zeit in Betreff guter Polhöhen". Nicht, daß es zu jener Zeit nicht eine Reihe von Städten gegeben hätte, für welche man bessere Werte hätte einsetzen können, wie *Wien*, *Nürnberg*, *Erfurt*, *Würzburg*, *Mainz*, *Paris*, *Oxford*, *London* u. A., aber kaum wird sich aus unserer Tabelle ein Dutzend Orte herausheben lassen, für welche man Polhöhen hatte, die man anders als auf halbe Grade abzurunden wagte. Da sie fast verschwanden gegenüber den unsicher bestimmten, ließ man die Minuten auch bei den genauer bekannten fort, trotzdem auf diese Weise geographische Ungereimtheiten sich ergaben, wenn man die Tabelle zur unmittelbaren Eintragung in eine Karte hätte benutzen wollen, wo *Salzburg* und *Passau*, ebenso *Regensburg*, *Ingolstadt* und *Nürnberg* auf eine westöstliche Linie gerückt worden wären. Es zeigt sich daraus, daß die Tabelle wesentlich zu astronomischem Gebrauch, nicht zu geographischen Zwecken zusammengestellt war und daß sie in den Ephemeriden ihren eigentlichen Platz hatte. Die Bevorzugung der Längen durch Angabe der Zeitminuten ist natürlich mehr scheinbar, da, wie oben nachgewiesen, für nicht weniger als 44 Orte bezw. Landschaften die Zeitmaße nur ganzen Graden der Länge im Bogenmaß entsprechen. Die nähere Untersuchung wird jedoch auch diese Tabelle in den Kreis ihrer Betrachtung ziehen müssen, wenn es gilt die Kartographen zu nennen, welche die Feststellungen der Astronomen in Mitteleuropa zuerst mit ausnutzten. Für jetzt fragen wir, ob aus dieser Tabelle nicht von neuem hervorgeht, daß es in damaliger Zeit an guten Polhöhen noch ganz außerordentlich gefehlt haben muß, und man sich demnach mit den rohesten Annäherungen zufrieden geben mußte. Von diesem Standpunkt aus erfährt der von Günther begangene Irrtum von Längenangaben bis auf einzelne Zeitsekunden zu sprechen (in unsern Breiten entspricht die Differenz einer Zeitsekunde einer Längendifferenz im Wegemaß von ca. $^1/_3$ Kilometer) eine neue Beleuchtung.

Nachträglich sei auf die mir erst 1891 zugekommene Arbeit von L. Gallois, Les géographes allemands de la renaissance (Biblio-

thèque de la faculté des lettres de Lyon T. XIII 1890. Paris, E. Leroux) hingewiesen, in welcher sich der Verfasser eingehender mit den ältern im Druck erschienenen Tabulae regionum (Regiomontan, Stöffler, Schoener, Apian, Münster) beschäftigt, die er zum Abdruck bringt (App. I—VI). Er vergleicht dabei teils Regiomontans Positionen mit solchen aus Ptolemaeus, teils die der andern mit den wirklichen nach unserer heutigen Kenntnis. Daß die Tabula regionum Regiomontans auch im Calendarium enthalten war, scheint dem Verfasser entgangen zu sein. Hinsichtlich des Zwecks der Ortstabellen in den Ephemeriden kommt Gallois zu den gleichen Resultaten, wie ich sie oben angeführt habe (l. c. p. 8). Der Vollständigkeit wegen mag noch hinzugefügt werden, daß R. Wolf schon 1872 (Vierteljahrsschr. Zürich. nat. Ges. 1872. 17 S. 378) einen kleinen Auszug (6 Orte) aus Regiomontans Ortstabelle von 62 Namen mitteilte.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

August, September und Oktober 1890.

(Fortsetzung.)

Bölcsészettudományi Értekezések. (Philosoph. Abhandlungen). III. Köt. 2. Szám. Ebd. 1889.

Ballagi Aladár: Colbert Másadik Resz. Ebd. 1887/90.

Czánki Dezsö: Magyarország történelmi földrajza a Hunyadiak korában. (Geschichtliche Geographie Ungarns im 15. Jahrh.). I. Köt. Ebd. 1890.

Monumenta Hungariae juridico-historica. Corpus statutorum Hungariae municipalium. Tom. II. Pars I. Ebd. 1890.

Demkó Kálmán: A felsö-magyarországi városok életéröl a XV.—XVII. században. (Das Leben oberungarischer Städte im 15.—17. Jahrh.). Ebd. 1890.

Kovács, Ferd.: Index alphabeticas codicis diplomatici Arpadiani continuati per G. Wenzel editi. Ebd. 1889.

Monumenta comitialia regni Hungariae. X. Köt. (1602–1604). Ebd. 1890.

Monumenta comitialia regni Transsylvaniae. XIV. Köt. (1664—1669). Ebd. 1889.

(Fortsetzung folgt.)

Inhalt von Nr. 8.

E. Riecke und *W. Voigt*, die piëzoëlektrischen Constanten des Quarzes und Turmalins. — *Hermann Wagner*, über das von S. Günther 1888 herausgegebene spätmittelalterliche Verzeichnis geographischer Koordinatenwerte. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *E. Sauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

25. November. **№ 9.** 1891.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 7. November.

de Lagarde, A) Worterklärungen: *Cicisbeo*, *Caparra*, *Σατράπης*, B) dritter Brief des Paulus an die Korinther.

Schering theilt von Herrn Alberto Tonelli „eine Notiz über die Auflösung quadratischer Congruenzen“ mit.

Klein legt einen Aufsatz von Herrn Prof. Franz Meyer in Clausthal vor: „Ueber ein Trägheitsgesetz für algebraische Gleichungen“.

Ehlers legt einen Aufsatz von Herrn Privatdocenten Dr. Bürger vor: „Vorläufige Mittheilungen über Untersuchung an Nemertinen von Neapel“.

Wallach legt eine Mittheilung vor „Ueber einige neue Kohlenwasserstoffe mit ringförmiger Bindung der Kohlenstoffatome“.

Ueber ein Trägheitsgesetz für algebraische Gleichungen.

Von **Franz Meyer** in Clausthal.

(Vorgelegt von Herrn F. Klein).

1. Sei gegeben eine Gleichung n^{ten} Grades

$$(1) \qquad f(\lambda) = a_0 + n a_1 \lambda + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a_2 \lambda^2 + \cdots + a_n \lambda^n = 0$$

mit reellen Coefficienten und ungleichen Wurzeln, so kann man nach einem endlichen System von Gleichungen

$$(2) \qquad f_1(\lambda) = 0, \quad f_2(\lambda) = 0, \quad \ldots \quad f_\nu(\lambda) = 0$$

fragen, so, daß die Gesammtanzahl der reellen Wurzeln aller $\nu+1$-Gleichungen (1), (2), von Uebergangsfällen abgesehen, unverändert dieselbe bleibt, wie auch die ursprüngliche Gleichung (1) ausgewählt sein mag.

Beschränken wir uns auf den Fall, wo die Gleichungen (2) vermöge Annahme von (1) bereits völlig und zwar rational mitbestimmt sind, so werden die Formen $f_1, f_2 \ldots f_\nu$ rationale Covarianten der Form f sein.

Das Gleichungensystem (1), (2) wird — falls Complicationen vermieden werden sollen — die Eigenschaft besitzen müssen, daß, sobald für irgend eine derselben in Folge geeigneter Variationen der Coefficienten a zwei reelle Wurzeln in's Imaginäre übergehen (resp. vice versa), genau umgekehrt zwei Wurzeln einer der übrigen Gleichungen aus dem imaginären Größengebiet in das reelle übertreten (resp. vice versa).

Daß eine derartige Erscheinung möglich ist, lehrt das bekannte Beispiel einer cubischen Form $f(\overset{3}{\lambda})$ und ihrer Hesse'schen Covariante $f_1(\overset{3}{\lambda})$. Sind nämlich die drei Wurzeln von $f = 0$ reell, so fallen die beiden von $f_1 = 0$ imaginär aus (u. umg.); ist hingegen nur eine Wurzel von $f = 0$ reell, so müssen es auch die von $f_1 = 0$ sein (u. umg.). Oder anders ausgedrückt, die Productgleichung $ff_1 = 0$ hat die constante Anzahl von drei reellen Wurzeln.

Der algebraische Grund dieser Eigenthümlichkeit ist offenbar der, daß die Discriminanten der beiden Formen f und f_1 übereinstimmen.

2. Wir beweisen zunächst folgenden Satz:

„Ist $f_0 = f(\overset{n}{\lambda})$ eine binäre Form *ungerader* Ordnung $n = 2\nu+1$, und bildet man die Reihe der Ueberschiebungen:

$$(3)\quad f_1 = (f,f)^2,\quad f_2 = (f_1,f)^4,\quad f_3 = (f_2,f)^6,\ \ldots\ f_\nu = (f_{\nu-1},f)^{2\nu},$$

so erfüllen die Discriminanten der $\nu+1$ Formen f_i die Kette von Beziehungen:

$$(4)\quad D(f) = D_0,\quad D(f_1) = D_0 D_1,\quad D(f_2) = D_1 D_2,\ \ldots$$
$$D(f_{\nu-1}) = D_{\nu-2} D_{\nu-1},\quad D(f_\nu) = D_{\nu-1},$$

wo sämmtliche D irreducible Invarianten der Form f_0 sind."

Das Bildungsgesetz der Covarianten f_i(3) tritt noch deutlicher hervor, wenn wir dasjenige ihrer Leitglieder berücksichtigen.

Es ist nemlich das Leitglied von f_i nichts Anderes, als die Determinante j_i:

$$(5) \qquad j_i = \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & \ldots & a_{i-1}, & a_i \\ a_1, & a_2, & \ldots & a_i, & a_{i+1} \\ . & . & \ldots & . & . \\ . & . & \ldots & . & . \\ a_i, & a_{i+1}, & \ldots & a_{2i-1}, & a_{2i} \end{vmatrix} = (0, 1, \ldots i-1, i).$$

Hieraus geht sofort der Ausdruck für den nächstfolgenden Coefficienten von f_i hervor; derselbe ist (bis auf einen Zahlenfactor) gleich der Determinante j':

$$(6) \qquad j_i' = \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & \ldots & a_{i-1}, & a_{i+1} \\ a_1, & a_2, & \ldots & a_i, & a_{i+2} \\ . & . & \ldots & . & . \\ . & . & \ldots & . & . \\ a_i, & a_{i+1}, & \ldots & a_{2i-1}, & a_{2i+1} \end{vmatrix} = (0, 1, \ldots i-1, i+1).$$

Die weiteren Coefficienten von f_i setzen sich linear aus Determinanten zusammen, von denen wenigstens eine noch andere Colonnen von Größen a enthält, als die in j_i und j_i' auftretenden.

Eine Ausnahme dieser Regel findet nur bei der letzten Covariante $f_\nu = f_{\frac{n-1}{2}}$, der sog. Canonizante von f_0 statt, deren Coefficienten bekanntlich die Determinanten der Matrix:

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & \ldots & a_{\nu-1}, & a_\nu, & a_{\nu+1} \\ a_1, & a_2, & \ldots & a_\nu, & a_{\nu+1}, & a_{\nu+2} \\ . & . & \ldots & . & . & . \\ a_\nu, & a_{\nu+1}, & \ldots & a_{n-2}, & a_{n-1}, & a_n \end{vmatrix}$$

sind.

Mit f_ν bricht offenbar die Reihe der Bildungen f_i von selbst ab.

Der Grad von f_i in λ ist $(i+1)(n-2i)$, derjenige in den Coefficienten a ist $(i+1)$, mithin der Grad der Discriminante von f in den a gleich $2(i+1)\{(i+1)(n-2i)-1\}$.

3. Es fragt sich nunmehr, unter welchen Umständen die Discriminante von f_i verschwinden kann. Denkt man sich die dann entstehende Doppelwurzel von $f_i = 0$ an die Stelle $\lambda = 0$ verlegt, so kommt die Frage darauf hinaus, wann die beiden Determinanten j_i und j_i' gleichzeitig Null sind.

Zufolge eines bekannten Determinantensatzes kann dies nur dann stattfinden, wenn entweder von der einen, oder aber der andern der beiden Matrices:

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & \dots & a_{i-1} \\ a_1, & a_2, & \dots & a_i \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_i, & a_{i+1}, & \dots & a_{2i-1} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & \dots & a_{i-1}, & a_i, & a_{i+1} \\ a_1, & a_2, & \dots & a_i, & a_{i+1}, & a_{i+2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_i, & a_{i+1}, & \dots & a_{2i-1}, & a_{2i}, & a_{2i+1} \end{vmatrix}$$

sämmtliche vollständige Determinannten verschwinden.

Im ersten Falle verschwinden dann aber auch die beiden ersten Coefficienten j_{i-1}, j'_{i-1} von f_{i-1} (indessen keine weiteren, auch keine sonstigen Größen j), im letzteren die beiden ersten Coefficienten j_{i+1}, j'_{i+1} von f_{i+1} (mit dem entsprechenden Zusatze).

Eine eigenthümliche Schwierigkeit bietet hierbei die letzte Covariante f_ν. Zuvörderst gilt allerdings wiederum der Schluß, daß das Verschwinden der beiden ersten Coefficienten j_ν, j'_ν entweder das von $j_{\nu-1}$, $j'_{\nu-1}$ nach sich zieht, oder aber dasjenige sämmtlicher Coefficienten von f_ν.

Nun bemerkt man aber leicht, daß die Covariante f_ν nicht einmal dann identisch verschwindet, wenn die ersten $\nu+1$ Coefficienten $a_0, a_1, \dots a_\nu$ von f_0 gleich Null gesetzt werden, während alle übrigen Bedingungen ($j = 0, j' = 0$) sicher dadurch erfüllt werden.

Nach einem Satze von H. Hilbert[1]) kann daher einzig und allein das identische Verschwinden von f_ν nicht durch das Verschwinden von Invarianten der Form f_0 ersetzt werden d. h. die Discriminante von f_ν kann überhaupt keinen Factor (der doch eine Invariante sein müßte) aufweisen, der dem in Rede stehenden Falle entspräche.

4. Durch das Vorhergehende ist bereits begründet, daß eine Kette von Zerlegungen der Art (4) existiren muß: es wäre nur möglich, daß die dort mit D_i bezeichneten Ausdrücke Potenzen irreducibler Invarianten Δ_i, und daß sogar die beiden Potenzen von Δ_i in $D(f_i)$ und $D(f_{i+1})$ verschiedene sind.

Diesem Einwande begegnet man durch wirkliche Aufstellung der D_i und nachfolgende Gradvergleichung.

Zu dem Behuf betrachte man die Gleichung:

$$(9)\qquad a^{2(\nu-i)}_{\lambda_0;\,\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_i;\,\mu_0,\mu_1,\mu_2,\dots\mu_i} = 0$$

als eine in den $i+1$ Größen μ identische; von den damit äquivalenten $i+2$ Gleichungen bilde man die Resultante bez. der Größen λ.

Es wird behauptet, daß diese Resultante R_i mit der Invariante D_i übereinstimmt.

---

1) Vgl. diese Nachrichten vom laufenden Jahre Nr. 7.

In der That ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß jene $i+2$ Gleichungen für ein Werthsystem $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_i$ zusammenbestehen, genau durch das Verschwinden aller Determinanten der zweiten, unter (8) angegebenen Matrix characterisirt.

Wie man ferner durch geeignete Specialisirungen der Coefficienten a erkennt, ist die Resultante R_i auch nicht die Potenz einer andern Bildung. Mithin könnte D_i nur noch eine Potenz von R_i sein.

Nun ist aber R_i vom Grade $(i+1)(i+2)(n-2i-1)$ in den a, somit der Gesammtgrad von $R_{i-1} R_i$ gleich $2(i+1)\{(i+1)(n-2i)-1\}$ d. i. gleich dem Grade von $D(f_i)$. Also folgt $D_i = R_i$ q. e. d.

5. Nach diesen Vorbereitungen können wir zum Beweise des Hauptsatzes übergehen:

„Ist $f_0 = f(\lambda)$ wiederum eine binäre Form ungerader Ordnung $n = 2\nu + 1$, und sind f_i $(i = 1, \ldots \nu)$ die unter (3) aufgestellten Covarianten, so besitzt die Productgleichung:

$$f_0 \cdot f_1 \cdot f_2 \ldots f_\nu = 0 \tag{10}$$

eine *unveränderliche*[1]) Anzahl von *reellen* Wurzeln".

Man lasse etwa die Invariante D_{i-1} vermöge Variation der Coefficienten a den Werth Null passiren. Im „penultimaten" Zustande befinden sich dann sowohl unter den Wurzeln von $f_{i-1} = 0$, wie unter denen von $f_i = 0$ zwei nahezu coincidirende. Es handelt sich um den Nachweis, daß diese beiden Wurzelpaare von ungleichem Realitäts-Character sind, sodaß stets eines der beiden Paare reell, das andere imaginär ausfällt.

6. Zu dem Zwecke ist eine explicite Darstellung der drei ersten Coefficienten der Covariante f_i erforderlich.

Die Werthe der beiden ersten entnehmen wir aus (5) und (6):

(5) $j_i = (0, 1, \ldots i-1, i)$; (6) $j_i' = (0, 1, \ldots i-1, i+1)$,

sodaß die Entwickelung von f_i beginnt, wie folgt:

$$f_i = j_i + \mu j_i' \lambda + (\,)\,\lambda^2 + \cdots \tag{11}$$

Der Zahlenfactor μ berechnet sich leicht als

$$\mu = n - 2i. \tag{12}$$

---

1) sc. mit Ausschluß der Uebergangsfälle, wo eine oder mehrere der Invarianten D_i verschwinden.

Um zu einer übersichtlichen Darstellung des Coefficienten von λ^2 in (11) zu gelangen, wählen wir eine Entstehung von f_i, die derjenigen von D_i in Nr. 4 analog ist.

Versteht man nämlich unter:

$$(13) \qquad a^{n-2i}_{\lambda;\lambda_1,\lambda_2,\dots\lambda_i;\,\mu_1,\mu_2,\dots\mu_i} = 0$$

eine in den μ identisch erfüllte Gleichung, so fließen daraus $i+1$ Gleichungen, aus denen die Größen $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_i$ eliminirt werden können. Das Eliminationsresultat ist eine Covariante mit dem Leitgliede j_i, die demnach mit f_i übereinstimmen muß.

Es kommt so für f_i die Determinante (von der es genügt, die erste Zeile zu notiren):

$$(14) \qquad f_i = \Big| a_0 + \mu a_1 \lambda + \frac{\mu(\mu-1)}{2} a_2 \lambda^2 + \cdots,$$

$$a_1 + \mu a_2 \lambda + \frac{\mu(\mu-1)}{2} a_3 \lambda^2 + \cdots, \quad \dots, \quad a_i + \mu a_{i+1} \lambda + \frac{\mu(\mu-1)}{2} a_{i+2} \lambda^2 + \cdots \Big|$$

Bedient man sich entsprechender Abkürzungen, wie bei (5) und (6), so hat man für den Factor von λ^2:

$$(15) \quad \frac{\mu(\mu-1)}{2}(0,1,\dots i-1, i+2) + \Big(\mu^2 - \frac{\mu(\mu-1)}{2}\Big)(0,1,\dots i, i+1)$$

$$= \frac{\mu}{2}\{(\mu-1)(0,1,\dots i-1, i+2) + (\mu+1)(0,1,\dots i, i+1)\},$$

und die Entwickelung von f_i fängt mit nachstehenden drei Gliedern an:

$$(16) \qquad f_i = (0,1,\dots i-1, i) + \mu(0,1,\dots i-1, i+1)\lambda$$

$$+ \frac{\mu}{2}\{(\mu-1)(0,1,\dots i-1, i+2) + (\mu+1)(0,1,\dots i, i+1)\}\lambda^2 + \cdots$$

$$= F_i(\lambda^2) + \cdots$$

7. Indem wir jetzt die Bedingungen, unter denen die Gleichungen $f_i = 0$ und $f_{i+1} = 0$ eine gemeinsame Doppelwurzel Null erhalten, nahezu als erfüllt ansehen, werden wir zeigen müssen, daß alsdann die Discriminanten der beiden quadratischen Formen F_i und F_{i+1} stets verschiedene Vorzeichen besitzen.

Dieser Beweis soll indessen hier unter einer vereinfachenden Annahme geführt werden.

Die fraglichen Bedingungen werden zweifellos befriedigt, wenn man alle Coefficienten $a_i, a_{i+1}, \dots, a_{2i+1}$ verschwinden läßt. Dagegen bleiben dabei sämmtliche Invarianten D_k $(k \gtrless i)$ von Null verschieden.

Demgemäß ergiebt sich ein penultimater Zustand, wenn man setzt:

$$(17) \qquad a_i = \varepsilon\alpha_i, \quad a_{i+1} = \varepsilon\alpha_{i+1}, \quad \ldots, \quad a_{2i+1} = \varepsilon\alpha_{2i+1}$$

wo ε eine beliebig kleine, positive resp. negative reelle Größe bedeutet, während die α endlich und reell sind.

Berücksichtigt man beim Hinschreiben der Formen F_i und F_{i+1} immer nur die niedrigsten Potenzen von ε, so liefert eine leichte Rechnung mit Rücksicht auf (16):

$$(18) \quad \begin{cases} F_i = -a_{i-1}^i a_{2i} + (\,)\,\varepsilon\lambda - \dfrac{(n-2i)(n-2i-1)}{2} a_{i-1}^i a_{2i+2}\lambda \\ F_{i+1} = -a_{i-1}^i a_{2i} a_{2i+2} + [\,]\,\varepsilon\lambda + \dfrac{(n-2i-2)(n-2i-1)}{2} a_{i-1}^i a_{2i+2}^2 \lambda^2. \end{cases}$$

Die Factoren von $\varepsilon\lambda$ sind nur angedeutet, da sie bedeutungslos sind. Stellt man nemlich nunmehr die beiderseitigen Discriminanten auf, so beginnen dieselben mit der ersten Potenz von ε, wie folgt:

$$(19) \quad \begin{cases} D(F_i) = -2(n-2i)(n-2i-1)\, a_{i-1}^{2i} a_{2i} a_{2i+2} \quad \varepsilon + \cdots \\ D(F_{i+1}) = +2(n-2i-2)(n-2i-1)\, a_{i-1}^{2i} a_{2i} a_{2i+2}^2 \, \varepsilon + \cdots, \end{cases}$$

sind also in der That stets von ungleichen Vorzeichen: die letzteren vertauschen sich nur, wenn ε durch Null hindurchgeht.

Für $i = 0$ und $i = 1$ treten hinsichtlich der Vorzeichen der einzelnen Glieder in (18) kleine Modificationen ein, die aber das Endergebniß (19) nicht beeinflussen.

Damit ist gezeigt, daß die Anfangs aufgeworfene Realitätsfrage für Gleichungen ungeraden Grades eine einfache Lösung [1]) zuläßt.

Für Gleichungen von geradem Grade versagt indessen eine entsprechende Beantwortung, wenigstens auf dem hier eingeschlagenen einfachsten Wege.

Allerdings ist auch hier die geschlossene Reihe der Ueberschiebungen

$$f_1 = (f, f)^2, \quad f_2 = (f_1, f)^4, \quad \ldots \quad f_{\frac{n}{2}} = (f_{\frac{n}{2}-1}, f)^n$$

1) Die sich naturgemäß anschließende Frage nach der Größe der als constant nachgewiesenen Gesammtanzahl von reellen Wurzeln zu beantworten, ist mir vorderhand nicht möglich.

vorhanden, aber die letzte derselben ist vom Grade Null in λ, kann also keine Discriminante liefern.

Obgleich demnach alle Schlüsse des Vorhergehenden bis zur vorletzten Form $f_{\frac{n}{2}-1}$ gültig bleiben, so hört es eben bei dieser [1]) auf d. i. wenn die Invariante $f_{\frac{n}{2}}$ durch Null hindurchgeht, so kann die Gleichung $f_{\frac{n}{2}-1} = 0$ reelle Wurzeln verlieren oder gewinnen, ohne daß ein Ausgleich stattfindet.

---

1) Uebrigens tritt hier noch die weitere Aenderung hinzu, daß der zweite Factor der Discriminante von $f_{\frac{n}{2}-1}$ gleich der $\left(\frac{n}{2}\right)^{\text{ten}}$ Potenz von $f_{\frac{n}{2}}$ wird.

Clausthal, den 24. October 1891.

Vorläufige Mittheilungen über Untersuchungen an Nemertinen des Golfes von Neapel.

Von

Dr. **Otto Bürger**, Privatdozent in Göttingen.

(Vorgelegt von Ehlers.)

Der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin bin ich zu großem Dank verpflichtet, da sie mir einen längeren Aufenthalt an der zoologischen Station zu Neapel ermöglichte. Es wurde mir somit nicht nur Gelegenheit gegeben, reiches Material zu sammeln, sondern auch eine Reihe von Beobachtungen am lebenden Thier zu machen, die unerläßlich sind, sobald man eine vielseitige Bearbeitung einer Thiergruppe ins Auge gefaßt hat. Einige der gewonnenen Resultate erlaube ich mir vorläufig mitzuteilen.

Die Nemertinenfauna des Neapler Golfes erscheint bisher als die bedeutendste der Welt. Erstaunlich ist die Menge, in der sich viele Arten zu allen Zeiten vorfinden, und überraschend der Formenreichtum. Durch Hubrecht sind bislang 52 Arten registriert worden. Nur 5 von diesen sind mir während der sechs Monate, die ich am Golfe weilte, nicht zu Gesicht bekommen, dagegen über 30 von Hubrecht noch nicht beschriebene und überhaupt mit wenigen Ausnahmen neue Formen.

Es ist bekannt, daß fast alle in der Nordsee aufgefundenen Nemertinenformen auch im Golfe Neapels angetroffen sind. Man

macht aber die sehr augenfällige Beobachtung, daß die Nemertinen des mittelländischen Meeres klein sind im Vergleich zu ihren nordischen Verwandten, die z. B. an den englischen und amerikanischen Küsten gefischt sind. Solch riesig lange Nemertinen wie sie Mc. Intosh und Verrill (Lineus marinus [Montg.] 15—30 und Macronemertes gigantea [Verr.] 10 Fuß) gesehen haben, sind, wie mir der Herr Conservator Lo-Bianko versicherte, niemals gedredgt worden und somit auch wohl nicht dort. Ein Schauexemplar, ein Cerebratulus marginatus, welcher conserviert fast noch 1 m lang und 3 cm breit ist, wird in der Sammlung der Station als ein Unicum von Größe aufbewahrt.

Die Arten der waffenlosen Nemertinen dokumentieren sich als solche meist durch Färbung und characteristische Zeichnung, Merkmale, die nur bei relativ wenig bewaffneten sich vorfinden. Es bedarf daher bei letzteren der eingehendsten und oft sehr langwieriger Untersuchungen, Art- ja selbst Gattungsmerkmale aufzufinden.

Aus der Zahl der bewaffneten Nemertinen hebe ich heute nur drei sehr dünne Nemertinen hervor, welche im Sande mit Lineus lacteus und Amphioxus zusammen leben. Sie besitzen Otolithen und Nemertinen mit diesen Organen ausgestattetet sind soviel ich weiß in Neapel überhaupt noch nicht und sonst nur vereinzelt aufgefunden worden.

Die Otolithen kommen nur paarig vor, jede Gehirnhälfte besitzt eine Otolithenblase von ovaler Form. In ihr liegt ein je nach der Art verschieden gestalteter Otolith. Ich fand solche in Hantelform (man muß das Verbindungsstück der Kugeln nur sehr verkürzt denken) und solche die eine Rosette bilden. In jeder Blase liegt nur ein Otolith. Claparède[1]) fand eine sehr kleine Nemertine Oerstedia pallida (Kef.) mit ein Paar Otolithenblasen deren jede drei Otolithen enthielt, die durch schwingende Wimpern in zitternde Bewegung versetzt wurden.

Die Otolithen der von mir beobachteten Nemertinen rührten sich nicht. Auch Wimpern vermochte ich in der Blase nicht zu konstatieren.

Ich bemerkte schon daß die Arten der unbewaffneten Nemertinen gut gekennzeichnet sind. Auch ihre Gattungen zeigen vielfach einen bestimmten auffälligen Habitus.

So sind alle Arten der Gattung Carinella durch den sehr

1) Beobachtungen über Anatomie und Entwickelungsgeschichte wirbelloser Thiere. Leipzig 1863.

breiten nach hinten durch die Furchen der Seitenorgane scharf abgesetzten discusartige Kopf kenntlich. Sie ähneln so den Angehörigen der Gattung Enpolia, aber alle Enpoliiden vermögen den Kopf völlig einzuziehen im Gegensatz zu den Carinelliden.

Von Kennel beschrieb letzterdings [1]) eine ziemlich transparente Nemertine, welche er früher in Neapel erhalten hatte unter dem Namen Balanocephalus pellucidus.

Sie soll den Kopf völlig einziehen können. Kennel sagt: „dass kein Vergleich so passend erscheint wie der mit der Glanspenis und dem sich darüberziehenden Praeputium“:

Es ist kein Zweifel, nach der guten Beschreibung, welche der Autor beifügte, diese Nemertine mit dem characteristischen Vorderende ist eine Eupolia. Sie ist dreimal während meines Aufenthaltes in Neapel zu Tage gefördert worden. — Der discusartig geformte retractile Kopf, die vielen Augen, die Furchen am Kopfe, das sehr kurze Rhynchocoelom mit dem entsprechend kurzen Rüssel: das alles sind Charactere einer Eupolia. Dass diese Nemertine ventrale seitliche Spalten besitzt, von derem hintersten Ende die Kanäle der Seitenorgane in die Tiefe ziehen, so beschreibt Kennel, wird uns nicht verleiten, sie vom Genus Eupolia abzutrennen. Im Gegenteil es sind auch diese ventralen wohl etwas flachen Spalten wie ich schon früher Gelegenheit hatte nachzuweisen, Eigentümlichkeiten vieler Eupoliiden. — Eupolia pellucida würde man sie nennen müssen; vielleicht ist sie auch identisch mit Eup. minor Hubr. Eine andere systematische berichtigende Bemerkung finde hier noch Platz.

Von Joubin [2]) ist unter anderen Nemertinen eine Carinella Aragoi nov. sp. beschrieben worden.

Es ist diese Carinella dieselbe, welche Mc. Intosh [3]) als Carinella annulata beschrieben und abgebildet hat. Aber letztere ist nicht ein Synonym von Valencinia ornata Quatrefages, wie Mc. Intosh angiebt. Nämlich Valencinia ornata zeichnen auf rothbrauner Grundfarbe drei dorsale und eine ventrale weisse Längslinie, die vom Kopf bis zum Schwanzende verlaufen. Die mittlere dorsale Längslinie führt aber bis zur äußersten Kopfspitze. Außerdem sind weiße Querringel vorhanden, deren vorderster um den Kopf geht. Derselbe schneidet ein vorderes rothbraunes Feld, ein Stirnfeld ab, daß von der dorsalen Mittellinie natürlich halbiert

1) Ueber einige Nemertinen. Sitzungsberichte der Dorpater Naturforscher Gesellschaft. Jahrg. 1890.

2) Recherches sur les Turbellariés des côtes de France. Némertes. Arch. d. Zoolog. exp. T. 8. 1890.

3) A. Monograph of the British Annelids. Part I. Nemerteans.

wird. Es folgen dann 3 Ringel in sehr weiten Abständen. Dann erst beginnt die Region in welcher die Ringel sehr nahe gerückt sind, sodaß etwa 10 Ringel auf jeden der beiden von den voraufgehenden durch die 3 Ringel begrenzten weiten Abstände kommen würden. Carinella annulata Mc. Intosh hat eine gelbrothe Grundfarbe. Wir vermissen die ventrale weiße Längslinie, die mittlere dorsale reicht nur bis an den Kopfringel hinan, sodaß das Stirnfeld ungeteilt bleibt. Die nachfolgenden Ouerringel rücken ganz allmählich von vorn nach hinten zu dichter zusammen, aber nicht so dicht wie bei Valencinia ornata die Ringel in der hinteren Körperregion.

Hubrecht[1]) führt sowohl Valencinia ornata Ouatrf. als auch Carinella annulata Mc. Int. als Syn. seiner Carinella annulata an.

Beide Carinellen sind in Neapel nicht selten. Ich möchte der Anciennität gemäß folgendermaßen nominieren.

Syn. Valencinia ornata Ouatrf. Syn. Carinella annulata Mc. Int.
„ Carinella annulata Joub. „ Carinella Aragoi Joub.
Carinella annulata (Montagu. Johnst.) Carinella Mc. Intoshii (mihi).

Leicht kenntlich sind auch die Vertreter der Gattung Valencinia an dem pfriemenförmig zugespitzten Kopfende.

Unter die Gattung Cerebratulus faßt Hubrecht eine Anzahl von Arten zusammen, die Mc. Intosh in Cerebratulus, Mikrura und Lineus sondert.

Ich habe mich bereits überzeugt, daß sich mindestens in diese 3 Gattungen auch die Neapler Cerebratuliden Hubrechts verteilen.

Nämlich erstens im Schlamm ziemlich seicht wohnen breite kräftige Formen, die sich durch ihre raschen Bewegungen auszeichnen. Sie sind vorzügliche Schwimmer; mit schlängelnden aalartigen Bewegungen durchmessen sie das Bassin. Solche Thiere sieht man, wie mir Herr Conservator Lo Bianko versicherte, gelegentlich an der Oberfläche des Meeres sich rasch schwimmend fortbewegen. Ihr Kopf ist lanzettlich zugeschärft, der breite Körper ist platt und mit stark hervortretenden Seitenrändern versehen. Diese Thiere vermögen sich wohl wie eine Spirale aufzurollen, aber nicht zu Klumpen aufzuknäueln. Sie besitzen ausnahmelos ein weißliches Schwänzchen.

Zweitens, finden sich in größeren Tiefen, zwischen Corallineen wohnend, kleine im Verhältnis zur Länge dünne Formen mit spatelförmigem Kopf; sie sind weich und können sich zu Klumpen zu-

1) The Genera of European Nemerteans critically revised with description of several new species. Notes from the Leyden Museum N. 44.

sammenknäueln, aber sie vermögen sich nicht durch Schwimmbewegungen fortzubewegen. Die Ortsveränderung geschieht lediglich durch kriechen. Im Bassin können sie am Wasserspiegel durch Flimmerbewegung hingleiten. Auch sie besitzen ein Schwänzchen.

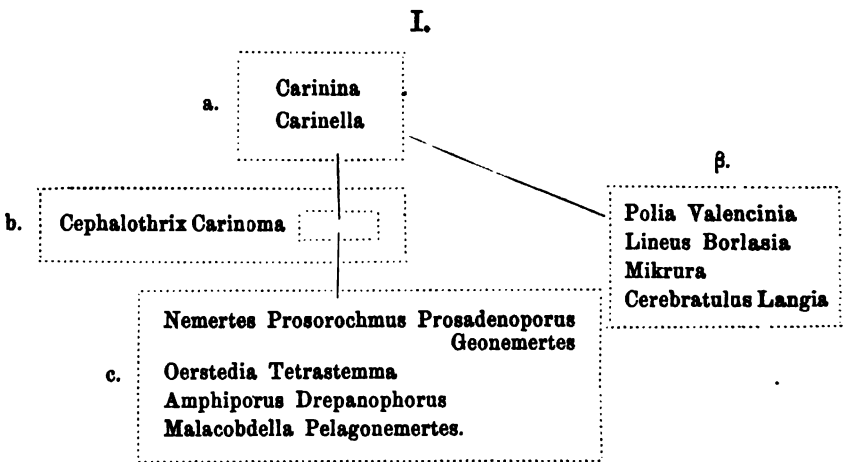
Drittens giebt es Formen, welche den letzt characterisierten im Habitus nahe stehen — aber sie besitzen kein Schwänzchen.

Die Vertreter der Gattung Langia, die von Hubrecht aufgestellt wurde, sind kenntlich an den nach oben aufgebogenen Seitenrändern. Sie stehen der ersten der eben skizzierten 3 Gruppen nahe. In Neapel ist nur eine Art bislang gefunden worden eine zweite wurde von Joubin[1]) beschrieben. Diese kommt an der französischen Küste vor.

Nicht minder characteristisch ist der Habitus der Gattung Borlasia. Ich war so glücklich eine zweite Art derselben zubekommen. —

Ein bis ins Einzelne ausgearbeitetes System der Nemertinen ist mir noch nicht zur Hand allein für die Anordnung der Hauptgruppen auf phylogenetischer Grundlage, deren Plan ich bereits früher angedeutet habe, sammelte ich weitere Erfahrungen, die in mir die Ueberzeugung, daß das Hubrechtsche System und mithin auch dasjenige von Max Schulze ein künstliches, befestigten.

Ich gebe ein Schema.



a) Bei Carinina liegen die Seitenstämme epithelial, bei Carinella sind sie bis unter die Basalmembran gesunken, also liegen sie der Ringmuskulatur außen an.

1) L'Anatomie d'une Némerte d'Obock. Langia Obockiania. Archiv d. Zoolog. exp. 1887.

b) bei Cephalothrix und Carinoma haben sie auch die Ringmuskulatur durchbrochen und liegen bereits inmitten der Längsmuskulatur.

c) Bei Nemertes-Malacobdella (Hoplonemertinen Hubrechts) haben sie die Längsmuskulatur völlig durchbrochen und liegen innen von ihr im Leibesparenchym.

β) Bei Polia-Langia sind die Seitenstämme in der Lage wie sie sich uns bei Carinella darstellten, liegen geblieben, aber es hat sich zwischen Ringmuskulatur und Epithel eine Schicht von Drüsenzellen, Bindegewebe und Längsmuskeln gebildet. Somit liegen die Seitenstämme auch hier in der Tiefe.

Man beachte, von a nach b zu c sind die Seitenstämme gerückt, aber in die Lage wie sie bei β statt hat gerückt worden.

Anordnung der Gattungen in den Rechtecken c und β ist eine durchaus provisorische; ich stütze mich wesentlich auf die von Hubrecht gegebene (op. cit.). Ebenso bemerke ich ausdrücklich, daß ich weder Cephalothrix noch Carinoma für die Uebergangsformen von a zu c halte; ich fasse sie als Verwandte der wahren Zwischenform auf, die wir bisher nicht kennen. Das habe ich durch das leere Rechteck anzudeuten versucht.

Jedenfalls ist es meines Erachtens nicht möglich den Stammbaum anders zu construieren, nachdem wir Nemertinen mit der characteristischen Mittellage der Seitenstämme kennen lernten, deren eine, selbst wenn auch sie durch das Fehlen der Seitenorgane eine abweichende Form darstellt, so doch — ich habe Carinoma im Auge — durch den Bau der Körperwand, durch die Nephridien und das Blutgefäßsystem ferner durch die eigentümliche innere Ringmuskulatur sehr an Carinella erinnert; füge ich nun noch andrerseits hinzu, daß Carinoma Darmtaschen besitzt, die im hinteren Körperabschnitt ungemein tief sind, daß diese metamer angeordnet mit Genitaltaschen wechseln — so wird sich der Leser, wenn er die tiefe Lage der Seitenstämme bedenkt ein Querschnittsbild contruiren können, das sehr an das z. B. einer Nemertes erinnert.

In der eben gegebenen Darlegung der inneren Bauverhältnisse von Carinoma Armandi (Mc. Int. Oud.) bin ich in wesentlichen Punkten von derjenigen Oudemans[1]) abgewichen. Ich gedenke die meine bald zu rechtfertigen.

Indem ich die systematischen Betrachtungen schließe, ich weiß ich habe nichts weiter gegeben als einige Ideen zu einem Bauplane,

1) The circulatory and nephridial Apparatus of the Nemertea. Ou. Journ. of micr. Sc. Vol 25. N. S. 1885.

füge ich zunächst einige Beobachtungen über die Organisation der Nemertinen an, welche fast ausschließlich am lebenden Object gemacht wurden.

Bei sehr vielen bewaffneten Nemertinen so Amphiporus, Drepanophorus, Tetrastemma habe ich bemerkt wie sich an der Kopfspitze bald ein rundlicher Hügel vorwölbt, bald dieser wieder verschwindet; er ist mit borstenartigen Haaren besetzt, die bedeutend kürzer sind als die Wimpern des Körperepithels. Er ist ohne Frage ein vorstülpbarer Sinneshügel, ein Sinnesorgan, das über der Rüsselöffnung gelegen ist und zum Tasten dient. Aber an der nämlichen Stelle müßte ja die Mündung der Kopfdrüse sich befinden[1])! Gewiß. Wir entsinnen uns, daß die Kopfdrüsen in eine terminale flaschenförmige Grube einmünden, und ich zweifle nicht, daß es dieses Grübchen ist, das sich handschuhfingerartig aus- und einzustülpen vermag. Ich fand früher[2]) auch bei verschiedenen Cerebratuliden an Schnittpraeparaten am Kopfende 3 kleine Grübchen und bemerkte nunmehr auch am lebenden Nemertinen (z. B. Mikrura purpurea Mc. Int.) 3 kleine mit langen Haaren besetzte Hügel, die bald hervorragten bald eingezogen wurden[3]).

Lange als Tasthaare zu deutende einzeln stehende Borsten bemerkte ich außer in der Kopfregion, bei den Tetrastemmaarten vor allem, am Schwanzende. Aber vorne und hinten sind sie immer nur in sehr geringer Anzahl eingepflanzt.

Von neuem überzeugte ich mich von der Existenz der tiefen Gruben, welche in nächster Nähe der äußerlich auch mit der Lupe nicht sichtbaren Nephridialöffnungen gelegen sind, welche ich früher als ein zweites Paar von Seitenorganen bei Carinella polymorpha und annulata beschrieb. Diese eben sind auch mit unbewaffnetem Auge leicht erkennbar. Bei anderen Carinellaarten habe ich sie bisher nicht aufgefunden.

Ein eingehendes Studium widmete ich dem Nervensystem, angeregt durch die Ehrlichsche Färbmethode mittels Methylenblau. Die Ergebnisse dieser Experimente sind, kurz gefaßt, diese.

---

1) Bürger zu Anatomie und Histologie der Nemertinen nebst Beiträgen z. Systematik. Zeitschrift f. wiss. Zoolog. Bd. 50. 1890.

2) Bürger, Beiträge zur Kenntnis der Nemertinen. Nachricht. der Königl. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen. 1888. No. 17.

3) Hubrecht erwähnt von Meckelia Ehrenbergii (Diesing): „an der Rüsselöffnung fanden sich 3 kleine mit längeren Flimmern besetzte Papillen vor".

Untersuchungen über Nemertinen a. d. Golf von Neapel. Niederländ. Archiv für Zoologie. Bd. II. 1873.

Der Ganglienbelag des Gehirns und der Seitenstämme besteht nur aus unipolaren Zellen, deren jede einen Fortsatz in die Centralsubstanz (Punktsubstanz) sendet. Aber die Centralsubstanz, welche quantitativ mächtig entwickelt ist, besteht nur zur geringsten Masse aus nervösem Gewebe, es stellt vielmehr die Centralsubstanz des Gehirnes, Kugeln, die der Seitenstämme Cylinder aus einem feinverfilzten Bindegewebe gebildet dar. In der bindegewebigen Grundmasse der Centralsubstanz des Seitenstammes befindet sich nun bei vielen Nemertinen nur ein einziger sehr dünner mehr oder minder central gelegener Längsstrang, welcher aus nervösen Fibrillen besteht. Diese Fibrillen sind die Fortsätze der Ganglienzellen. Den Strang, zu welchem sie sich inmitten der bindegewebigen Centralsubstanz vereinigen, habe ich Centralstrang genannt. Einen zweiten Längsstrang finden wir dort, wo Neurochordzellen vorhanden sind, da deren Fortsätze sich nicht mit den Fortsätzen anderer Ganglienzellen mischen. Dem Centralstrang entspringen Fibrillen, die in oder an dem Hautmuskelschlauch abgehen. Mit andern Worten: aus dem Centralstrang gehen die Nervenfasern der „Spinalnerven" ab, die ihre beträchtliche Dicke (man kann sie auch auf Schnitten gut constatieren) wiederum bindegewebigen Hüllen verdanken.

Es gelang mir nicht selten, eine Nervenfaser, die sich im Hautmuskelschlauch hinzog, zurück in dem Centralstrang und schließlich bis an die Ganglienzelle zu verfolgen.

Niemals sah ich aus dem Strang der Nenrochorde eine Nervenfaser entspringen. Dagegen gehen vom Seitenstamm feine und dickere Nervenfasern ab, denn es besteht auch sein Ganglienbelag aus kleinen und größeren Ganglienzellen. — Wie man zwei Arten von Ganglienzellen außer dem Neurochordzellen am Seitenstamm scharf unterscheiden kann, wird man auch zwei Arten von Nervenfasern immer constatiren müssen. Ich betone dies, da ich der Meinung bin, daß die dickeren Nervenfasern die motorischen, die dünneren die sensiblen darstellen. Beiderlei Fasern verfolgte ich bis zu Ganglienzellen zurück. Ich kann mithin nicht an die doppelte Ursprungsweise der Nervenfasern und den verschiedenartigen Ursprung der motorischen und sensiblen glauben. Die abgehenden Nervenfasern gehen sämmtlich unter ziemlich gleichem stumpfem Winkel in symmetrischer Weise ab, es kreuzen sich also eine große Anzahl von Nervenfasern, die Ganglienzellen entstammen, welche vorne im Thierkörper liegen mit solchen, welche mit Ganglienzellen verbunden sind, die wir hinten suchen müssen.

Es besitzen die Fibrillen des Centralstranges feinste Aestchen.

Nennen wir die Fibrillen Stammfortsätze der Ganglienzellen, so müssen wir sagen, der Stammfortsatz hat Nebenfortsätze und zwar nicht nur in seinem ersten Abschnitt, nicht nur unmittelbar nach seinem Eintritt in die Centralsubstanz, sondern vielleicht in seiner ganzen Länge, sicher wenigstens in einer sehr langen Strecke seines Verlaufes innerhalb der Centralsubstanz des Seitenstammes. Die Fibrillen des Centralstranges ebenso wie die Nervenfasern (wie wir jene Fibrillen ja nennen, nachdem sie sich aus dem Seitenstamm herausbegeben haben zur Innervation der Muskulatur u. s. f.) sind mit unzähligen Verdickungen besetzt, die ihnen ein perlschnurartiges Aussehen verleihen.

Eine merkwürdige Erscheinung sind bekanntlich die peripheren Nervenschichten, welche vor allem bei den Formen auftreten, deren Seitenstämme auf der Grenze zweier Schichten der Körperwand liegen. Also weder die Hoplonemertinen noch die Arten von Cephalothrix, noch Carinoma besitzen sie in typischer Ausbildung wie Hubrecht[1]) sie uns bei Carinella, Eupolia, Cerebratulus, Langia kennen lehrte. Durchaus nicht aufgeklärt ist auch die Bedeutung der medianen Nerven, die ich den kleinen und großen Rückennerven nannte.

Ich fand: die periphere Nervenschicht, deren reticulären Character ich früher schon betonte, besteht zum Wesentlichen aus demselben Bindegewebe wie die Centralsubstanz der Seitenstämme. In dieses sind die Nervenfasern, welche dem Seitenstamm entspringen, eingebettet.

Die Rückennerven haben *nicht* die Bedeutung von Nerven, welche Organe innervieren wie die Schlundnerven, die Augennerven u. s. f. Es steht nur der obere große Rückennerv (Carinella) in direkter Verbindung mit dem Gehirn durch die dorsale Commissur, der untere Rückennerv wird gebildet, indem Fasern des oberen die Ringmuskulatur durchdringen und unter dieser über dem Rhynchocoelom nach hinten ziehen. Aber fortgesetzt in sehr engen Abständen steigen immer wieder Fasern vom oberen Rückennerven zum unteren herab, diesen unablässig verstärkend.

Oberer und unterer Rückennerv bilden ein Strickleitersystem. Mit dem oberen Rückennerven treten die „Spinalnerven“ in engste Beziehung. Sämmtliche Spinalnerven, die bei Carinella,

1) Hubrecht, The peripheral nervous System in Palaeo- and Schizonemert etc. Ou Journ. of micr. Sc. Vol. 20.

welche ich im Auge habe, ziemlich regellos vom Seitenstamm entspringen verflechten sich mit dem oberen Rückennerven und vermischen sich mit seinen stammeigenen Fasern, die, wie gesagt, teils der dorsalen Commissur entspringen, teils aber von einem sehr spärlichen eigenen Belag von unipolaren Ganglienzellen abstammen. Es ist nachzuweisen, daß mindestens ein Theil der „Spinalnervenfasern" im Rückennerven fortzieht und sich auch nunmehr an der Bildung des kleinen Rückennerven beteiligt, aber es ist auch zweifellos, daß die Fasern der „Spinalnerven" teilweise durch den großen Rückennerven hindurch dringen und mithin Nervenfasern, welche vom linken Seitenstamme kommen bis in die rechte Körperhälfte sich fortsetzen.

Der große Rückennerv ist also ein Längsstrang nervöser Fasern, die teilweise vom Gehirn herkommen, teilweise eigenen Ganglienzellen entspringen, vor allem aber von den Fasern der Nerven der Seitenstämme sich herleiten. Diese drei nach dem Ursprung verschiedenartigen Nervenfasern verflechten sich in ihm.

Ich möchte ein Analogon heranziehen und glaube ein solches bei den Wirbeltieren im Grenzstrang des Sympathicus zu finden.

Leider gelang es mir nicht, die Nervenfasern, welche ich einerseits wohl zu den zugehörigen Ganglienzellen verfolgen konnte, andererseits bis zu den Endigungen hinzuverfolgen, und zwar weder bis zu Zellelementen motorischer noch sensibler Art.

Darin war ich glücklicher bei der Untersuchung des Rüssels. Im bewaffneten Rüssel befindet sich eine wechselnde für die Art constante Anzahl von Nerven, deren jeder mit einem Ganglienbelag ausgestattet sind. Die Ganglienzellen liegen zwischen den im Rüssel parallel verlaufenden Längsnerven und zwar sind die einzig unipolaren Ganglienzellen fast ausnahmslos mit den aufgebauchten Enden aneinander gepreßt. Immer je ein Paar Ganglienzellen liegt zusammen. Wir haben Geschwisterzellen im Rüssel vor uns. Jede Zelle sendet ihren einzigen Fortsatz in einen anderen Nerven.

Auch der Rüsselnerv besteht quantitativ der Hauptsache nach aus verfilztem Bindegewebe. In jedem Nerven, wie ich diesen Strang auch in seiner Gesammtheit trotzdem nennen will, bilden die Ganglienzellfortsätze einen sehr feinen Centralstrang. Aus diesem gehen feine Fibrillen ab, Nervenfasern, welche den Muskelschlauch des Rüssels innervieren und deren Endigungen zwischen den Muskelzellen deutlich zu sehen sind, ferner entspringen dem Centralstrang zugweise auch jene Nervenfasern, von denen man

jede einzelne an eine Zelle der Papillen herantreten sieht. Doch nicht direkt; zwischen beiden, zwischen Nervenfibrille und Papillenzelle ist noch eine Zelle, eine Nervenzelle eingeschaltet.

Was bedeutet aber der Reichtum an Ganglienzellen, die ich (was die physiologische Bedeutung anbetrifft) in scharfem Gegensatz zu den Nervenzellen stelle, für den Rüssel? Nur durch den Besitz von Ganglienzellen, mit denen das Rüsselnervensystem in so hohem Maße ausgezeichnet ist, kann man es erklären, daß der Rüssel so wenig abhängig vom Centralnervensystem ist, so wenig, daß derselbe vom Körper getrennt nicht leblos erscheint, sondern fast alles leistet, was er leistete als er mit ihm noch eins war: Er stülpt sich ein und aus, er klebt sich vermöge seiner Papillenzellen fest und läßt sich wieder los, ja er kriecht; er zeigt mit einem Worte die bedeutendsten Lebenserscheinungen. Vermöchte er das, wenn nicht sein eigener nervöser Apparat ein dem centralen fast gleichwertiger wäre?

Am wichtigsten von vorn herein erschien mir die Aufgabe, die Art der Endigungen des Excretionsgefäßsystemes festzustellen.

Den Angaben Oudemans[1]), wonach die Canäle des Nephridialapparates in offner Verbindung mit den Blutgefäßen stehen sollen, vermochte ich nicht Zutrauen zu schenken.

An stark comprimirten dünnen Nemertinen wie Nemertes gracilis und einer noch unbeschriebenen durch den Besitz von 4 Augen ausgezeichneten sehr langen, ziemlich durchsichtigen Nemertine beobachtete ich zuerst Wimperflammen als letzte Enden der verzweigten Nephridialcanäle.

Die Nephridialcanäle sind bei diesen Formen sehr lang, sie sind vom Gehirn bis in die hintere Körperregion zu verfolgen, wo sie auch noch zwischen den Geschlechtsorganen entlang ziehen und auch die Wimperkölbchen überall erkannt werden können.

Das Excretionsgefäßsystem jener Nemertinenarten ist mithin ganz anders als das eines Amphiporus oder Drepanophorus, wo die Nephridialcanäle lediglich in der Oesophagalregion sich ausbreiten, oder richtiger jederseits mit ihren vielen Aesten ein Knäuel bilden, durch das die seitlichen Blutgefäße hindurchgehen. Aber auch ihre letzten Enden sind Wimperkölbchen, von denen sich unzählige in die Wand der seitlichen Blutgefäße einbohren.

Eine Beziehung zwischen Blutgefäßsystem und Nephridialapparat besteht mithin, aber sie ist ganz anderer Art wie die von

1) Op. cit.

Oudemans beschriebene: Es bohren sich die blindgeschlossenen Enden der Nephridialcanäle in die Wandung der Blutgefäße ein, nicht allein bei den Hoplonemertinen, von denen ich soeben einige Vertreter heranzog, sondern auch bei Carinella und Carinoma. Bei diesen ursprünglicheren Formen hat Oudemans derartige Enden, wie ich später beweisen werde, für offene gehalten, obwohl dieselben immer vom Endothel der Blutgefäße vollständig bekleidet sind.

Auf Grund meiner Nachuntersuchung darf ich es als höchstwahrscheinlich hinstellen, daß auch in dem blindgeschlossenen, in das Blutgefäß hineinragenden Enden der Excretionsgefäße von Carinoma Armandi Wimperflammen sich befinden. Solcher Enden finden sich bei Carinoma aber nur wenige, kaum in und an jedem Blutgefäß mehr als 10.

Das Excretionsgefäßsystem der Nemertinen weist auf das der Turbellarien hin.

Der histologische Bau freilich beider ist sehr verschieden. Die Excretionscanäle der Nemertinen haben eine zellige Auskleidung, deren einzelne Elemente hohe Cylinderzellen darstellen, die denen des Körperepithels sehr ähnlich sind. Doch trägt jede Zelle nur eine Wimper oder doch nur ein Paar Flimmern. Auch die Endkölbchen, in welchen der lange dicke Wimperschopf schwingt, besitzen ein aus sehr vielen kleinen, hier freilich etwas flachen Zellen sich zusammensetzendes Epithel.

Bei den Turbellarien aber ist das Zellmaterial, aus welchem die Excretionscanäle sich aufbauen, bekanntlich ein sehr spärliches, es sollen die Canäle z. B. bei den Polycladen nach Lang eine Durchbohrung von linearen Zellreihen darstellen. Das Endkölbchen besteht aus einer einzigen Zelle.

Auf große Schwierigkeiten stieß in Neapel die Beschaffung von Material zwecks entwicklungsgeschichtlicher Studien.

Obwohl ich ein halbes Jahr lang verschiedene Arten, teilweis sehr massenhaft, in Aquarien gehalten habe, welche Geschlechtsprodukte enthielten und Männchen und Weibchen vorhanden waren, war ich nicht so glücklich, je einmal Eier zu bekommen. Die Thiere, Lineus lacteus, Eupolia delineata und curta und Nemertes gracilis hielten sich Monate lang sehr gut, aber dann begannen viele Exemplare, besonders von Lineus lacteus, zu zerstückeln. Es gelang mir nicht, die Ursachen ihres Unterganges festzustellen.

Die Nemertinenarten, welche in größeren Tiefen leben, halten sich überhaupt nur wenige Tage mit Ausnahme einiger Amphiporusarten und Drepanophorus serraticollis, den ich außerordent-

lich lange im Aquarium am Leben erhalten konnte. Merkwürdiger Weise ganz im Gegensatz zu seinem nahen Verwandten Drepanophorus rubrostriatus, der die Gefangenschaft gar nicht erträgt. Auch mit den großen im Schlamm lebenden Cerebratulusarten habe ich unglücklich experimentirt. Indes war ich so glücklich, von draußen einmal ein Thier, Nemertes gracilis, zu bekommen, das sofort Eier ablegte, die sich ungemein schnell entwickelten. Die Furchung war eine totale aequale, und noch in der Eihülle entwickelte sich ein Embryo, der ein dichtes Wimperkleid besitzt, und an dessen einem Ende — er hat eine länglich ovale Form angenommen — zwei lange Geißeln schwingen. Es wurden zwei Richtungskörper, welche in diesem Entwicklungsstadium sich noch vorfanden, gebildet.

Der Embryo wächst, durchbricht die Eihülle und bewegt sich mit Hilfe seiner beiden Geißeln im Wasser umher. Seine weitere Entwicklung habe ich nicht beobachten können.

Deshalb war es mir eine außerordentlich erwünschte Hilfe, als mir Herr Professor Korotneff, Director der Zoologischen Station in Villa Franca, seine Unterstützung zusicherte, indem derselbe mir lebendes und conserviertes Material von Prosorochmus Claparèdii versprach und mir auch wiederholt Sendungen dieser lebendig gebärenden von Claparède an der Küste der Normandie entdeckten Nemertine zukommen ließ.

Besonders erfreulich war es aber, als ich diese Nemertine auch in Neapel zwischen dem Materiale, das die Fischer besorgen, mit Nemertes gracilis vergesellschaftet fand.

Herrn Professor Korotneff bin ich zu großem Danke verpflichtet, ich erlaube mir denselben an dieser Stelle auszusprechen.

Obwohl sich die Exemplare von Prosorochmus Claparèdii, welche von Villa Franca und aus dem Neapler Golf stammen, in Gestalt und Färbung gleichen, ist doch die Bewaffnung des Rüssels ein derartig verschiedene, daß man in Versuchung kommt, zwei Prosorochmusarten, zu unterscheiden, mindestens aber Varietäten als Pr. Claparedii (Nizza) und Pr. Claparedii (Napoli).

Nämlich die Prosorochmus-Individuen von Villa Franca zeigen in jeder Seitentasche des Rüssels 4 Nebenstilette. Das untere Ende derselben bildet einen glatten kugligen Knauf, diejenigen aber des Golfes besitzen stets nur je 2 Nebenstilette in jeder Tasche; aber der Knauf ist fünfteilig, er bildet eine Rosette. Dementsprechend ist natürlich auch der Knauf des Hauptstilettes gestaltet.

Ein Prosorochmus enthält oft alle Entwicklungsstadien. Während vorn noch Eier sich befinden, sieht man im hintersten Ende

des Thieres Embryonen, in welchen man bereits die Nebenstilette bemerkt. Aus Villa Franca bekam ich Thiere mit Embryonen im Mai und Anfang Juni, in Neapel im Juli.

Die Entwicklungsperiode wird auch wohl in Neapel früher fallen und schon lange begonnen haben, ehe ich die ersten Prosorochmen dort auffand, immerhin ist zu bedenken, daß sich dieses Jahr ein ausnahmslos ungünstiger Frühling in Neapel geltend gemacht hat, sodaß die heurigen klimatischen Verhältnisse an der Riviera vielleicht günstiger waren, als bei uns am soviel weiter südlich gelegenen Golfe Neapels. Jedenfalls wird man doch mindestens auf 5—6 Wochen rechnen können, während welcher man fortgesetzt trächtige Thiere erwarten darf.

Wo sind die Männchen von Prosorochmus? Ich habe sie bislang nicht gefunden.

Beim Weibchen sind die Genitaltaschen mit Eier prall gefüllt. Dieselben alterniren mit den Darmtaschen. Aber nur wenige, meist nur ein einziges Ei kommt von einem Haufen von Eiern zur Entwicklung. Das sich entwickelnde nährt sich von den anderen Eiern. Es bildet sich eine Hülle um das in die Embryonalentwicklung eintretende Ei und in dieser liegen anfangs zahlreich andere Eier eingeschlossen. Je mehr aber die Entwicklung fortschreitet, je kleiner werden die im Follikel eingeschlossenen Eier und schließlich, wenn sich ein Embryo entwickelt hat, an dem der Kopf sich schon formt, sind auch die letzten Eireste verschwunden.

Von der Entwicklung des Embryo will ich nichts vorweg nehmen, da ich die nach lebenden Entwicklungsstadien aufgezeichneten Befunde erst noch am conservierten Material, das mir reichlich zur Verfügung steht, prüfen und weiter verfolgen möchte.

Nur über die Entwicklung des Stilettapparates des Rüssels will ich gleich folgendes bemerken. Man ist sich nicht darüber einig, wo das Hauptstilett herkommt. Man behauptet, es werde aus den Seitenstiletttaschen bezogen und nennt dementsprechend die Stilette, welche in den seitlichen Taschen enthalten sind, Reservestilette, man behauptet aber dem entgegengesetzt auch, das Hauptstilett habe nichts mit den sog. Reservestiletten zu thun, das Hauptstilett entstehe nicht in deren Tasche, sondern an Ort und Stelle.

Die Beweise, welche Max Schultze[1]) für seine Ansicht bringen konnte, waren, wenn auch nicht völlig exacte, so doch sehr beachtenswerte. Er war der Meinung, das Hauptstilett stamme aus den Seitentaschen.

1) Max Schultze. Beiträge zur Naturgeschichte der Turbellarien. Greifswald 1851.

In dem sich entwickelnden Rüssel von Pr. Claparedii treten zuerst die Reservestilette auf und zwar sind sie, in jeder Tasche ein Paar, schon ziemlich fertig, wenn die Basis des Hauptstilettes erst im Entstehen begriffen ist. Diese wird geschaffen, indem sich ein Sekret, das einem Drüsenkranze entstammt, der sich in der Stilettregion sehr frühzeitig ausbildet und zeitlebens erhält, in eine Form ergießt, die von der inneren Muskulatur des Rüssels gebildet wird. Die Rüsselmuskulatur bildet nämlich eine trichterförmige Mulde und daher hat auch die Basis des Hauptstilettes anfangs in eine pyramidale Gestalt, welche sich erst später ändert und die Form eines (nicht mathematischen) Kegels annimmt.

Man kann die Bildung der Basis in allen Stadien verfolgen, man wird aber nichts von einer doch gleichzeitig notwendigen Bildung des Hauptstilettes an diesem Orte wahrnehmen, obwohl schon im Embryo die Basis ein Stilett erhält. Man macht nun stets die Beobachtung, daß, sobald die Basis bepflanzt ist, in einer der Seitentaschen 1 Stilett fehlt.

Wie die Stilette aus der Reservetasche zur Basis gelangen, ist mir nicht klar geworden. Ich habe sie nie auf halbem Wege gesehen, sondern ich constatierte nur stets das vollendete Factum.

Ich war aber so glücklich, einmal ein Stilett in der Basis eingeschlossen zu erblicken. Die Basis war in dem bereits ausgeschlüpften Thier aber auch bepflanzt und in der einen Seitentasche waren zwei, in der anderen nur ein Reservestilett enthalten. Das zeugte davon, daß die Basis erst kürzlich besetzt war, denn die Reservestilette bilden sich ungemein rasch, um die übliche Zahl in den Taschen wieder herzustellen. Es ist dies Bild nicht anders zu deuten, als daß das Reservestillett zu früh zur Basis, ehe sie vollendet war, gelangte und nunmehr verschüttet wurde. Man findet derartige Bilder auch in Mc. Intosh's Monographie gezeichnet. Ich deute sie nicht anders.

Um die Frage nach der Herkunft der Hauptstilette zu studieren, habe ich mehreren Exemplaren von Drepanophorus serraticollis die Rüssel exstirpiert. Dieselben wurden bald regeneriert. Und in jedem der neuen Rüssel legten sich am frühzeitigsten die Taschen der Reservestilette an, welche ja hier so ungemein zahlreich sind. Den 20 Hauptstiletten entsprechen 18 Taschen mit etwa 12 Reservestiletten. (Häufig stimmt sogar die Zahl der Hauptstilette mit derjenigen der Reservestiletttaschen genau überein.) Viel später erst, nachdem sich eine größere Anzahl der Nebenstiletttaschen gebildet hatte, begann die Basis zu entstehen, mit der jede Tasche durch einen Schlauch in Verbindung gesetzt ist. Nie sieht man

in oder an der Basis kleine Stilette, die Entstehungsherde sind die Seitentaschen. Wohl aber habe ich vereinzelt in den Schläuchen Stilette jedenfalls auf dem Wege zur Basis begriffen, constatiert.

Auch diese meine Beobachtungen stützen mit den Befunden Schultzes, die sie ergänzen können, nur den Satz: Die Hauptstilette kommen aus den Seitentaschen. Die Stilette der Seitentaschen sind Reservestilette und nicht Gebilde, die im Lauf der Stammesgeschichte der Nemertinen außer Funktion gesetzt sind und nunmehr, obwohl zwecklos geworden, als Ballast mitgeschleppt werden.

In wenigen Jahren hoffe ich die Neapler Repräsentanten der Nemertinen, dieser merkwürdigen Thiergruppe, von welcher Haller bei Gelegenheit seiner Studien über die Textur des Centralnervensystems höherer Würmer die Anneliden, Arthropoden, Mollusken und Vertebraten ableitet, den Fachgenossen in Wort und Bild vorführen zu können.

Göttingen, im November 1891.

Ueber einige neue Kohlenwasserstoffe mit ringförmiger Bindung der Kohlenstoffatome.

Von

Otto Wallach.

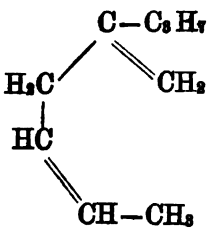
Die Eigenschaften der Kohlenwasserstoffe und ihrer Derivate sind bekanntlich in hohem Grade abhängig von der Art der Bindung der in ihnen enthaltenen Kohlenstoffatome. Bei den organischen Verbindungen mit kettenförmiger Anordnung der Atome sind die Eigenschaftsänderungen, welche mit dem Vorhandensein mehrfacher oder bloß einfacher Kohlenstoffbindungen Hand in Hand gehen, bereits sehr eingehend studirt. Dasselbe gilt für die Kohlenwasserstoffe mit ringförmiger Kohlenstoffbindung vom Typus des Benzol, Naphtalin u. s. w. Weniger gut sind diejenigen Substanzen bekannt, welche durch theilweise oder vollständige Hydrirung von Verbindungen des letztgenannten Typus entstehen. Neuere Arbeiten, vorzüglich von v. Baeyer und von Bamberger, haben unsere Kenntniß auch nach dieser Richtung zwar sehr erweitert, doch ist es bei dem großen theoretischen Interesse, welches die hier ins Spiel kommenden Verhältnisse bieten, er-

wünscht, die diesbezügliche Forschung auch nach neuen Richtungen hin auszudehnen.

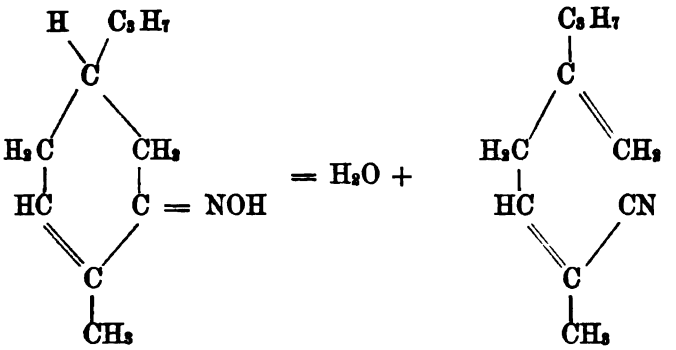
Ich bin nun gelegentlich meiner Arbeiten über die Terpene, von denen einige unzweifelhaft als hydrirte, jedoch ungesättigte Kohlenwasserstoffe mit ringförmiger Bindung der Atome angesprochen werden müssen, auch zu gesättigten, vollkommen hydrirten Kohlenwasserstoffen mit ringförmiger Bindung gelangt. Dieselben dürften z. Th. einem neuen Verbindungstypus angehören. Ueber diese Substanzen und den Weg zu ihrer Darstellung möchte ich mir erlauben kurz zu berichten.

Den Campher $C_{10}H_{16}O$ hat man in eigenthümlicher Weise zu Verbindungen mit geringerem Kohlenstoffgehalt abzubauen gelernt. Man stellt durch Umsetzung des Camphers mit Hydroxylamin das Campheroxim, $C_{10}H_{16}NOH$, dar. Es gelingt dann leicht aus dieser Verbindung 1 Mol Wasser abzuspalten. Der so resultirende Körper $C_{10}H_{15}N$ verhält sich wie ein Säurenitril, also wie $C_9H_{15}.CN$. Durch Kochen mit Alkali kann man aus ihm das dem Campheroxim isomere Amid $C_9H_{15}.CONH_2$ und dann die Campholensäure $C_9H_{15}.COOH$ erhalten. Die Campholensäure ihrerseits verliert unter geeigneten Bedingungen Kohlensäure und verwandelt sich in das Campholen, C_9H_{16}.

Für das Campholen, dessen Siedepunkt von Goldschmidt (Ber. d. chem. Ges. XX, 484) zu 130° — 140° angegeben wird, hat Bamberger (l. c. XXI, 1131) die Formel aufgestellt:

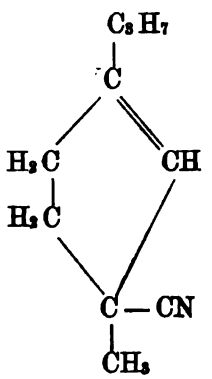


Danach wäre also das Campholen ein Fettkohlenwasserstoff mit zwei Aethylenbindungen. Diese Annahme hat die andere zur Voraussetzung, daß bei dem Uebergang von Campheroxim in sein Anhydrid eine Sprengung des im Campher anzunehmenden Kohlenstoffringes eintritt. Bamberger denkt sich den Vorgang in folgender Weise:



Campheroxim Nitril

Die sehr merkwürdige Reaction kann indeß, meiner Ansicht nach, auch ganz anders aufgefaßt werden. Es ist allerdings wahrscheinlich, daß bei dem Uebergang des Campheroxims in das Nitril der durch sechs Kohlenstoffatome gebildete Ring sich vorübergehend öffnet. Aber in demselben Augenblick könnte [unter Eintritt einer Bindungsverschiebung, falls man die Bredt'sche Campherformel der Betrachtung zu Grunde legt] eine erneute Ringschließung zwischen fünf Kohlenstoffatomen sich vollziehen. Es würde dann der Nitril-artigen Verbindung etwa die Formel zukommen:



Auch an das Vorhandensein eines Rings von vier Kohlenstoffatomen könnte man denken, doch soll das eben außer Betracht bleiben.

Sonach ergeben sich zwei ganz verschiedene Auffassungen bezüglich der Natur der Campholensäure und des Campholens. Nach Bamberger würde der Kohlenwasserstoff zwei Aethylenbindungen enthalten, der ihm zugehörige gesättigte Kohlenwasserstoff hätte die Formel C_9H_{20} und wäre nichts anderes als ein

Nonylwasserstoff. Meiner Ansicht nach enthielte indeß das Campholen nur eine Aethylenbindung, sein Hydrirungsproduct hätte die Formel C_9H_{18} und ihm zu Grunde würde ein Kohlenwasserstoff von eigenthümlichem Typus mit ringförmiger Bindung von fünf (oder auch von vier) Kohlenstoffatomen liegen.

Es ist mir nun in sehr einfacher Weise gelungen durch einen Versuch die Richtigkeit der letztentwickelten Ansicht wahrscheinlich zu machen.

Freie Campholensäure wurde in Portionen von je 5 Gr mit 6 Gr Jodwasserstoffsäure vom spec. Gew. 1,96 8 Stunden auf 200° erhitzt. Das entstandene Product wurde dann mit Wasserdampf abdestillirt, mit Natronlauge gewaschen, mit festem Kali getrocknet und fractionirt. Die Hauptmenge des erhaltenen flüssigen Kohlenwasserstoffs ging zwischen 135° — 140° über. Analysirt wurde eine Mittelfraction vom Siedepunkt 134° — 136°.

0.1005 Gr Substanz gaben

0.3150 CO_2 = 85.48% C
0.1302 H_2O = 14.40 „ H

	Berechnet für				Gefunden
	C_9H_{20}	$C_{10}H_{22}$	C_9H_{18}	$C_{10}H_{20}$	
C	84.34	84.47	85.68	85.72	85.48
H	15.66	15.53	14.32	14.28	14.40

Die Dampfdichtebestimmung ergab:

0.0512 Gr lieferten 9.8 ccm V bei 17° und 751mm B.

	Berechnet für				Gefunden
	C_9H_{20}	$C_{10}H_{22}$	C_9H_{18}	$C_{10}H_{20}$	
D =	4.43	4.91	4.36	4.84	4.45 (2)

Die analytisch gefundenen Daten schließen demnach für den Kohlenwasserstoff die Formeln C_9H_{20} und $C_{10}H_{22}$ aus, nach den Dampfdichtebestimmungen wäre weiter die Formel C_9H_{18} wahrscheinlicher als $C_{10}H_{20}$. Für die Formel C_9H_{18} spricht auch der niedrige Siedepunkt der Verbindung (c. 135°) und das specif. Gewicht, das bei 20° = 0.773 ermittelt wurde.

Der Brechungsexponent für Natriumlicht wurde gefunden

$$n_D = 1.42491$$

Setzt man nun in die bekannte Lorenz'sche Formel

$$\frac{(n^2-1)p}{(n^2+2)d}$$

den eben angegebenen Werth von n_D ein, einmal aber p = 126 (C_9H_{18}), das andere Mal p = 140 ($C_{10}H_{20}$), so ergiebt sich als Molecularrefraction (M)

$$\text{für } C_9H_{18} : M = 41.66$$

$$\text{für } C_{10}H_{20} : M = 46.29$$

Es würde aber verlangen:

ein gesättigter Kohlenwasserstoff $\begin{cases} C_9H_{18} : M = 41.43 \\ C_{10}H_{20} : M = 46.03 \end{cases}$

ein ungesättigter Kohlenwasserstoff $\begin{cases} C_9H_{18}f : M = 43.13 \\ C_{10}H_{20}f : M = 47.74 \end{cases}$

Der gefundene Werth zeigt demnach an, daß eine gesättigte Verbindung vorliegt, die Bestimmung des Refractionswerthes giebt aber ebensowenig wie die Analyse sichere Auskunft darüber, ob der vorliegende Kohlenwasserstoff die Formel C_9H_{18} oder $C_{10}H_{20}$ besitzt.

Die wichtige Thatsache, daß man es jedenfalls mit einer völlig gesättigten Verbindung zu thun hat, wird durch das chemische Verhalten des Kohlenwasserstoffs ganz außer Zweifel gestellt. Er ist nicht im Stande Brom zu entfärben, dagegen entwickelt er in Berührung mit dem Halogen alsbald sehr lebhaft Bromwasserstoffgas und es entsteht ein Substitutionsproduct.

Diese Thatsachen genügen nun, um die Unrichtigkeit der von Bamberger für das Campholen und die Campholensäure entwickelten Formeln zu erweisen. Aus Verbindungen, denen jene Formeln zukommen, könnten als gesättigte Reductionsproducte nur Kohlenwasserstoffe der Formel C_9H_{20} oder $C_{10}H_{22}$ entstehen. Ist hingegen im Campholen und in der Campholensäure eine ringförmige Schließung von Kohlenstoffatomen — etwa in der oben von mir angegebenen Weise — enthalten, so muß bei der Reduction der Campholensäure, ganz der gemachten Beobachtung entsprechend, ein Kohlenwasserstoff C_9H_{18} oder $C_{10}H_{20}$ sich bilden. Das letztere wird der Fall sein, wenn die Carboxyl-Gruppe der Säure bei der Reduction in eine Methylgruppe CH_3 übergeht, das erstere, wenn die Säure bei der hohen während der Reduction herrschenden Temperatur gleichzeitig Kohlensäure abspaltet.

Ob also dem neuen Kohlenwasserstoff die Formel eines Bihydrocampholens, C_9H_{18}, oder eines Bihydromethylcampholens, $C_{10}H_{20}$, zukommt, ist für die theoretische Frage, die hier entschieden werden sollte, ganz gleichgültig. Jedenfalls liegt eben ein neuer gesättigter Kohlenwasserstoff mit ringförmiger Bindung vor,

dessen weiteres Studium großes Interesse beanspruchen und auch Rückschlüsse auf die Constitution des Camphers erlauben dürfte.

Die eben beschriebenen Versuche sind im Gefolge von Erfahrungen angestellt worden, welche ich gelegentlich anderer Untersuchungen gesammelt hatte.

Vor einiger Zeit habe ich den Nachweis geliefert, daß eine im Fenchelöl vorkommende Verbindung $C_{10}H_{16}O$, das Fenchon, mit Campher isomer und auch in Hinsicht auf fast alle ihre Reactionen jener Verbindung unmittelbar an die Seite zu stellen ist. Auch aus dem Fenchon läßt sich leicht ein Oxim $C_{10}H_{16}NOH$ und aus diesem eine Nitril-artige Verbindung, $C_9H_{15}CN$, gewinnen. Letztere verseift sich sehr viel schwerer als die entsprechende Campherverbindung. Es entsteht daraus bei mehrtägigem Erwärmen mit alkoholischem Kali nur wenig Säure und ganz überwiegend das s. g. α-Isoxim $C_9H_{15}CONH_2$, dessen Schmelzpunkt bei 114° liegt. Nach einer neuerlich gemachten Beobachtung verwandelt sich diese Substanz beim Ermärmen mit verdünnter Schwefelsäure in eine isomere, schön krystallisirende, erst bei 137° schmelzende Verbindung, welche als β-Isoxim bezeichnet werden soll. Auch durch andere Säuren als Schwefelsäure kann man das α-Ixosim in das β-Ixosim umwandeln. Das β-Isoxim krystallisirt besonders gut aus Alkohol, ist aber auch in Wasser verhältnißmäßig löslich. Er hat einen ausgeprägt basischen Character. Leitet man in seine ätherische Lösung Salzsäuregas, so fällt ein Chlorhydrat aus, welches mit Platinchlorid ein Doppelsalz scheint geben zu können. Beim Kochen mit alkoholischem Kali oder mit Säuren wird das β-Ixosim nicht leichter angegriffen als das α-Isoxim. Erwärmt man es aber mit Phosphorsäure-Anhydrid, so wird Wasser abgespalten und es entsteht ein Oel von den Eigenschaften des aus dem α-Oxim unter dem Einfluß selbst verdünnter wäßriger Säuren sich so leicht bildenden nitrilartigen Körpers.

Von Wichtigkeit war es zu wissen, ob bei dem Uebergang von Fenchon in das α- und β-Isoxim sich vielleicht eine ganz durchgreifende Aenderung der Atomconfiguration im Molecül vollzogen habe. Um darüber Aufschluß zu erhalten, wurde das β-Isoxim in schwefelsaurer Lösung mit Kaliumpermanganat oxydirt. Als Oxydationsproduct wurde eine reichliche Menge Dimethylmalonsäure gewonnen, also dieselbe Säure, welche nach früheren Versuchen auch bei der Oxydation des Fenchon selbst entsteht.

Die bezüglich der Umwandlungsfähigkeit des α-Fenchon-Isoxims in die β-Verbindung gemachten Erfahrungen haben beiläufig

Veranlassung gegeben, auch das Iso-Campheroxim nach dieser Richtung zu untersuchen. Beim Kochen der letztgenannten Verbindung mit verdünnter Schwefelsäure wurden bisher aber nur ölförmige Producte erhalten.

Wenn es, wie erst bemerkt, auch Schwierigkeiten bietet, das aus dem α-Oxim des Fenchons entstehende Anhydrid $C_9H_{15}CN$ zu verseifen, so gelingt doch immerhin bei tagelangem Kochen mit alkoholischem Kali eine theilweise Ueberführung in die Fencholensäure $C_9H_{15}COOH$. Der Versuch, aus dieser durch Kohlensäure-Abspaltung glatt das Fencholen C_9H_{16} darzustellen, hat bisher nicht ganz den gewünschten Erfolg gehabt, da ein Gemenge zwischen weiten Grenzen siedender Kohlenwasserstoffe erhalten wurde. Hingegen ließ sich sehr scharf der Nachweis führen, daß die Fencholensäure eine ungesättigte Säure ist. Sie addirt nämlich Halogenwasserstoffsäure und geht dabei in krystallisirte Producte über. Die Hydrochlorfencholensäure, $C_{10}H_{16}ClCO_2H$, schmilzt bei 97°—98°, giebt in Berührung mit Alkali aber leicht wieder Salzsäure ab, unter Rückbildung der flüssigen Fencholensäure.

Beim Erhitzen mit Jodwasserstoffsäure und Phosphor wird die Fencholensäure, ebenso wie die Campholensäure, leicht reducirt und in einen Kohlenwasserstoff übergeführt, dessen Hauptmenge zwischen 138°—145° siedete. Zur näheren Untersuchung gelangte eine zwischen 141°—142° siedende Fraction, deren Analyse folgende Werthe ergab:

0.1335 Gr gaben	0.4191 CO_2	= 85.62 %	C
	0.1726 H_2O	= 14.40 „	H
0.1395 „ „	0.4368 CO_2	= 85.40 „	C
	0.1788 H_2O	= 14.28 „	H
0.1368 „ „	0.4284 CO_2	= 85.41 „	C.

Bei einer Dampfdichtebestimmung lieferten

0.048 Gr Substanz 9.4 ccm V bei 18° und 748mm B,

woraus sich ergiebt

$$D = 4.38.$$

Das specif. Gewicht des flüssigen Kohlenwasserstoffs wurde bei 20° = 0.7900 gefunden, als Brechungsexponent

$$n_D = 1.43146.$$

Die analytischen Werthe zeigen eine große Uebereinstimmung mit denjenigen, welche für das Reductionsproduct aus Campholensäure ermittelt wurden. Auch die Siedepunkte der aus den ana-

logen Säuren gewonnenen Kohlenwasserstoffe stimmen überein. Nur das specifische Gewicht der Verbindung der Fenchonreihe liegt etwas höher. Daß die Ursache dafür in zufälligen Verunreinigungen gesucht werden müßte, ist nicht wahrscheinlich. Eher wäre wohl anzunehmen, daß hier ein Gemenge eines Kohlenwasserstoffs C_9H_{18} mit dem höheren Homologen $C_{10}H_{20}$ vorliegt, da, wie erst auseinander gesetzt wurde, beide Kohlenwasserstoffe aus der Säure $C_9H_{15}CO_2H$ sich bilden können. Die Entscheidung dieser Frage muß zukünftigen Untersuchungen überlassen bleiben. Für den Augenblick ist noch der Versuch angestellt worden, ob man nicht, direct von dem Nitril $C_9H_{15}CN$ ausgehend, ebensogut zu dem Kohlenwasserstoff gelangen könne, als wenn man erst das Nitril in die schwerer zugängliche Säure überführt. Zu dem Zweck wurde die durch Wasserabspaltung aus dem Fenchonoxim gewonnene Verbindung mit Jodwasserstoffsäure und Phosphor erhitzt. Aus dem Reactionsproduct konnte leicht ein Kohlenwasserstoff isolirt werden, der dem erst beschriebenen, aus Fencholensäure erhaltenen, sehr ähnelt. Die Hauptmenge siedete von 135°—145°. Von Einzelfractionen zeigte die von 136°—138° siedende ein specif. Gewicht = 0.775 bei 18°, die vom Siedepunkt 140°—142° ein specif. Gewicht = 0.7785 bei 19°. Auch hier könnte also ein Gemenge von Kohlenwasserstoffen vorliegen, falls die Schwankungen im specif. Gewicht nicht einer Verunreinigung durch Jod-haltige Verbindungen zuzuschreiben sind.

Ob das aus der Fencholensäure durch Reduction dargestellte Product die Formel $C_{10}H_{20}$ oder C_9H_{18} besitzt, ist noch nicht sicher zu entscheiden gewesen. Man mußte aber einen gesättigten Kohlenwasserstoff $C_{10}H_{20}$ aus dem Fenchon jedenfalls auch in anderer Weise herstellen können, durch Reduction nämlich des Fenchylalkohols oder des Fenchons selbst. Die entsprechenden Versuche hat nun auf meine Veranlassung Hr. Wicke angestellt. Sie sollen hier nicht eingehender beschrieben und nur erwähnt werden, daß der aus dem Fenchylalkohol $C_{10}H_{17}OH$, durch Reduction sehr leicht entstehende gesättigte Kohlenwasserstoff $C_{10}H_{20}$ folgende Eigenschaften hat:

Siedepunkt = 160°—465°, specif. Gewicht = 0,7945 bei 22°,
Brechungsexponent n_D = 1.43701 bei 22°.

Der Siedepunkt dieses Kohlenwasserstoffs liegt also um etwa 25° höher als die Siedepunkte der aus der Fencholensäure und Campholensäure gewonnenen Verbindungen. Entsprechend höher ist auch das specifische Gewicht. Man hat es demnach unzweifelhaft mit ganz verschiedenartigen Producten zu thun. Bei directer Reduc-

tion des Fenchons entsteht ein Kohlenwasserstoff, der dieselben physikalischen Eigenschaften besitzt, wie der zuletzt beschriebene.

Auf einen noch anderen Wege, den ich in Gemeinschaft mit Herrn A. Berkenheim aus Moskau eingeschlagen habe, ist es gelungen zu einem weiteren isomeren gesättigten Kohlenwasserstoff $C_{10}H_{20}$ zu gelangen.

Pinenhydrochlorid, $C_{10}H_{17}Cl$, wurde mit Jodwasserstoff und Phosphor auf 200° erhitzt, das Reactionsproduct durch Destillation mit Wasserdampf, Waschen mit Alkali und Trocknen mit metallischem Natrium gereinigt und dann sorgfältig fractionirt. Die Hauptmenge siedete von 162°—163°. Von einem genau bei 162° übergehenden Antheil wurden Analysen ausgeführt und die physikalischen Constanten bestimmt.

0.1334 Gr Substanz lieferten 0.11397 CO_2 = 85.46 % C
0.1740 H_2O = 14.46 „ H

0.2784 „ „ „ 0.8579 CO_2 = 85.77 „ C
0.3584 H_2O = 14.30 „ H.

Für $C_{10}H_{20}$ berechnet sich C = 85.72 %, H = 14.28 %.

0.0547 Gr lieferten bei der Dichtebestimmung 9,6 ccm V, bei 17°,2 und 751mm B. D = 4.86, berechnet = 4,83.

Das specifische Gewicht ergab sich zu 0,795 bei 20°, der Brechungsexponent n_D = 1.43703 bei 20°; berechnet M = 46,03, gefunden = 46.13.

Die physicalischen Eigenschaften stimmen demnach für die beiden aus dem Fenchon und aus dem Pinen erhaltenen Kohlenwasserstoffe $C_{10}H_{20}$ sehr nahe überein und beide weichen, namentlich in den Siedepunkten, erheblich von den aus Fencholensäure und Campholensäure erhaltenen ab.

Alle neu beschriebenen Kohlenwasserstoffe sind gesättigt und müssen daher ihrer Zusammensetzung gemäß eine ringförmige Verknüpfung von Kohlenstoffatomen enthalten. Sie sind selbst in der Wärme durch Kaliumpermanganat ganz ungemein schwer oxydirbar. Brom wirkt substituirend. Rauchende Salpetersäure ist in der Kälte ohne Wirkung, erst beim Erhitzen erfolgt lebhafte Reaction.

Eine nähere Erforschung des chemischen Verhaltens der hier vorliegenden neuen Verbindungen wird den Gegenstand weiterer Arbeiten bilden.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

August, September und Oktober 1890.

(Fortsetzung.)

Archivum Rákóczianum. Sectio I. Tom. X. Ebd. 1889.

Ováry Lipót: A történelmi bizottságának oklevél-másolatai. (Abschriften der Urkunden der historischen Commission d. Ungar. Akad.). Füz. I. Ebd. 1890.

Archaeologiai Ertesitö. (Archäolog. Anzeiger. Neue Folge). IX. Köt. 3.—5. Szám. X. Köt. 1. 2. Szám. Ebd. 1889. 90.

Természettudományi Értekezések. (Naturwissenschaftl. Abhandlungen). XVIII. Köt. 6. 7. Szám. XIX. Köt. 1.—10. Szám. Ebd. 1889. 90.

Mathematikai Értekezések. (Mathematische Abhandlungen). XIV. Köt. 2. 3. Szám. Ebd. 1889.

Mathematikai és természettudományi Értesitö. (Mathematischer und naturwissenschaftl. Anzeiger). VII. Köt. 4/5. 6/7. 8/9. Szám. VIII. Köt. 1. 2. 3/4/5. Szám. Ebd. 1889. 90.

Mathematikai és természettudományi Közlemények. (Mathematische und naturwissenschaftl. Mittheilungen). XXIII. Köt. 4. Szám. Eb . 1889.

A magyar. Tud. Akadémia kiadásában megjelent munkák és folyóiratok betürendes czim- és tartalomjegyzéke. 1830—1889. (Alphabetische Zusammenstellung der Werke, welche im Verlage der Ungar. Akad. der Wissenschaften erschienen sind. 1830—1889). Ebd. 1890.

Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. VII. Bd. Berlin u. Budapest 1890.

Λογοδοσία τῶν κατὰ τὸ κδ' ἔτος γενομένων (1888—1889) *ὑπὸ Σ. Μπαλανοῦ. Ἐν Ἀθήναις* 1890.

November 1890.

Sitzungsberichte der Kön. Pr. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. XLI. XLII u. XLIII. 1890.

Sitzungsberichte der philos.-philol.- u. historischen Classe d. k. B. Akademie d. Wissensch. zu München. 1890. Bd. II. Heft II.

Berichte über die Verhandlungen d. K. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig. Philologisch historische Classe. 1890. I. Leipzig. 1890.

Deutsches Meteorologisches Jahrbuch für 1888. Beobachtungssystem des Königr. Sachsen. Bericht über die Thätigkeit im K. sächsischen meteorol. Institut f. d. J. 1888. II. Hälfte oder Abth. III des Jahrbuches des Königl. sächs. meteorolog. Inst. VI. Jahrg. 1888. Chemnitz 1890.

Zeitschrift für Naturwissenschaften. 63. Band. (5. Folge 1. Band). 4/5 Heft. Halle-Saale 1890.

Mitteilungen der Pollichia. XLVII. Jahresbericht 1888. Nr. 1/2. XLVIII. Jahresber. 1889/90. Nr. 3. 4. Dürkheim a/H.

Leopoldina. Heft XXVI. Nr. 19—20. Oktober 1890. Halle a/S.

Sitzungsberichte der Naturforschenden Gesellschaft zu Leipzig. 15. u. 16. Jahrg. 1888/1889 u. 1890. (Bis Febr.). Leipzig 1890.

(Fortsetzung folgt.)

Inhalt von Nr. 9.

Franz Meyer, über ein Trägheitsgesetz für algebraische Gleichungen. — *Otto Bürger*, vorläufige Mittheilungen über Untersuchungen an Nemertinen von Neapel. — *Otto Wallach*, über einige neue Kohlenwasserstoffe mit ringförmiger Bindung der Kohlenstoffatome. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Stauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

23. December. **№ 10.** 1891.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 5. December.

Riecke spricht zum Gedächtniß von Wilhelm Weber.

Wieseler kündigt einen Aufsatz „über Stierdienst“ an.

Voigt legt a. einen Aufsatz von den Herrn Prof. W. Nernst und Herrn Privatdocenten Dr. P. Drude vor: „über die Fluorescenzwirkungen stehender Lichtwellen“.

b. einen Aufsatz von Herrn Dr. A. Sella in Rom „Beitrag zur Kenntniß der specifischen Wärme der Mineralien“.

Klein legt vor a. eine Mittheilung von Herrn Prof. Dr. G. Frobenius in Zürich, Korrespondenten der Math. Klasse: „über Potentialfunctionen, deren Hessesche Determinante verschwindet“.

b. einen Aufsatz von Herrn Privatdocenten Dr. Schönflies: „Bemerkung zu Hilberts Theorie der algebraischen Formen“.

Bericht des Beständigen Sekretärs über das J. 1891.

Beitrag zur Kenntniß der specifischen Wärme der Mineralien.

Von

Alfonso Sella in Rom.

Einleitung. — Nur gering ist die Zahl der physikalischen Eigenschaften der Mineralien, welche mit unseren jetzigen Beobachtungsmitteln genauen Messungen unterworfen werden können. Obwohl nun die Bestimmung der specifischen Wärme für die meisten Mineralien durchführbar ist, liegen doch noch verhältniß-

mäßig wenige Beobachtungen darüber vor und die bezüglichen Data werden in der Mehrzahl der Lehrbücher der Mineralogie nicht einmal angegeben; so geringes Interesse wurde daran geknüpft.

Die erste und größte Schwierigkeit, welche bei der Bestimmung der spec. Wärme sich darbietet, liegt in der Beschaffung eines reinen Materials. Dabei stellen sich als bedenklich heraus nicht bloß die mikroskopischen Einschlüsse, welche nicht zu entfernen sind und doch niemals fehlen, sondern auch die makroskopischen, deren Nichtvorhandensein in opaken Mineralien schwer festzustellen ist, da das Untersuchungsmaterial in nicht zu kleinen Stücken angewandt werden muß, damit nicht andrerseits wegen der Beobachtungsmethode neue Fehlerquellen eintreten, welche das Resultat noch mehr beeinflussen könnten. Bei den vielen Mineralclassen, bei welchen Isomorphismus auftritt, wäre ferner eine directe chemische Analyse des untersuchten Materiales sehr erwünscht. Die chemische Zusammensetzung nämlich ist zweifellos in erster Linie bestimmend für die specifische Wärme, da die über die Aenderung der letzteren mit der physikalischen Beschaffenheit der Mineralien angestellten Untersuchungen diese Aenderung als ziemlich gering erweisen. Ich will hierfür nur die bekannten Beispiele von Pyrit und Strahlkies, Kalkspath und Aragonit, Rutil und Brookit[1]) anführen.

Die subtilen Speculationen von Joly (On the specific heat of Minerals. Proc. Royal Soc. Vol. XLI, 1886) über einige Variationen der spec. Wärme bei chemisch und krystallographisch durchaus identischen Mineralien beziehen sich auf zu wenige Fälle, als daß ihnen eine allgemeine Bedeutung beigelegt werden könnte; außerdem würde es schwer zu erklären sein, wie in Körpern, die in den übrigen chemischen und physikalischen Eigenschaften übereinstimmen, die Molekeln eine verschiedene „thermische Freiheit" (nach der Joly'schen Ausdrucksweise) besitzen könnten.

Großes Interesse würde die Bestimmung der specifischen Wärme bei verschiedenen Temperaturen darbieten; die sehr bedeutenden Aenderungen, welche in dieser Hinsicht für die Elemente Kohlenstoff, Bor, Silicium und Beryllium gefunden worden sind, führen uns zur Vermuthung, daß etwas ähnliches auch bei zusammengesetzten Körpern stattfinden könnte. Vielleicht mag dadurch ein Theil der Abweichungen der von verschiedenen Be-

1) Ich habe mich durch besondere Bestimmung überzeugt, daß Anatas (gelbe Krystalle vom Binnenthal) denselben Werth wie die beiden anderen Modificationen von TiO_2 liefert.

obachtern angegebenen Werthe zu erklären sein. Jedenfalls ist es zu bedauern, daß so wenige Untersuchungen in dieser Richtung vorliegen.

Ich habe im physikalischen Institut zu Göttingen während des Winters 1889/90 die specifische Wärme einer Reihe von Mineralien aus der Classe der Sulfide bestimmt und werde die erhaltenen Werthe vom Gesichtspunkt des Woestyn'schen Gesetzes discutiren. Leider hat die Bestimmung der spec. Wärme als Unterscheidungsmerkmal für die hier in Betracht kommenden Mineralien einen geringen Werth, da die Differenzen zwischen den den verschiedenen Mineralien zukommenden Werthen oft so gering sind, daß sie bei einer approximativen Bestimmung nicht zu Tage treten, und andererseits eine Bestimmung von der erforderlichen Genauigkeit umständliche Vorarbeiten verlangt. —

Beschreibung der Beobachtungsmethode.

Die Bestimmungen wurden nach der Mischungsmethode ausgeführt; ich werde hier über den Apparat und die Beobachtungsmethode nur dasjenige berichten, was mir als neu einiges Interesse zu haben scheint.

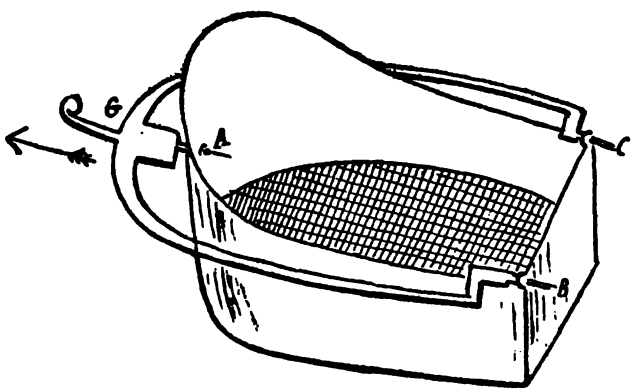
Der angewandte Erhitzungs-Apparat ist im Wesentlichen mit dem „Neumann'schen Hahn" identisch, von welchem er sich insofern unterscheidet, daß statt des inneren Kegels der äußere Mantel beweglich ist. Der Raum, in welchen der zu erwärmende Körper hineingebracht wird, ist von einem verticalen Cylinder[1]) begrenzt, welcher den inneren Kegel durchbricht. Die Einfüllung der zu untersuchenden Stücke geschieht dadurch leichter als bei der alten Einrichtung: man braucht dazu nur den äußeren Mantel so weit zu drehen, bis seine Oeffnung auf die obere Oeffnung des verticalen Cylinders zu liegen kommt. Die untere Oeffnung des Cylinders ist mit einer Klappe versehen, welche den Körper vor dem Fett schützen soll, mit welchem man die zwei Kegelflächen schmieren muß, damit sie dampfdicht auf einander gleiten.

Es wurde ferner versucht, eine Fehlerquelle zu eliminiren, welche in der That ziemlich bedeutend erscheint. Wenn nämlich auch die Fallhöhe des Körpers bis ins Calorimeter gering ist, ist es doch nicht gänzlich zu vermeiden, daß der fallende Körper ein Ausspritzen des Wassers bewirkt. Nun können die herausfallen-

1) Es wäre zu empfehlen, statt eines Cylinders einen nach unten sich verbreitenden Kegel zu gebrauchen, da sonst manchmal die Stücke durch die Wärmeausdehnung sich klemmen und nicht mehr herausfallen.

den Wassertropfen in Berührung mit dem Körper gewesen sein, daher eine hohe Temperatur angenommen haben und dadurch einen merklichen Wärmeverlust verursachen, welcher nicht abgeschätzt werden kann. Diesen Nachtheil zu vermeiden, wurde in mancherlei Weise versucht. Ein Blatt von sehr feinem Papier auf dem Wasser schwimmend erwies sich als nicht dazu geeignet. In der That ist das Spritzen meist nicht dem Schlag des fallenden Körpers auf das Wasser zuzuschreiben: die Stücke fallen vielmehr auf das Papier und sinken wie in einem Sack unter; das Wasser stürzt herum um den hinterlassenen Luftraum zu erfüllen und an der Spitze des dabei entstandenen Wasserbergs nimmt es eine sehr große Geschwindigkeit an, welche das Spritzen verursacht. Aus anderen Gründen erwies es sich nicht als zweckmäßig, ein feines metallisches Drahtnetz dicht auf der Oberfläche durch Korkstücken schwimmen zu lassen, welches durch ein geringes Uebergewicht untersinken sollte.

Die endgültig angewandte Einrichtung war die folgende, welche aus der beigegebenen Figur leicht verständlich sein wird.



Die Gabel *G* trägt durch die 3 Spitzen *A*, *B*, *C* ein Körbchen, dessen Wand aus feinem Kupferblech und dessen Boden aus Drahtnetz besteht. Die Gabel allein stützt sich auf den Rand des Calorimeters und das Drahtnetz liegt dicht über der Oberfläche des Wassers. Sobald nun der Körper in's Körbchen gefallen ist, wird die Gabel in der Richtung des Pfeiles zurückgezogen. Das frei gewordene Körbchen sinkt alsdann mit dem Körper ins Wasser.

Freilich bleibt eine gewisse persönliche Unsicherheit bei der Aufgabe, die Gabel genau in dem Augenblick zu verschieben, in welchem der Körper gefallen ist; und es entsteht dadurch in der That eine Fehlerquelle in der Operation, da eine genaue Correc-

tion nicht möglich ist. Da aber die verschiedenen mit derselben Substanz erhaltenen Werthe untereinander und in besonderen dazu ausgewählten Fällen mit den von anderen Beobachtern angegebenen in befriedigender Weise übereinstimmen, so scheint ein störender Einfluß ausgeschlossen zu sein.

Das Calorimeter wurde mittelst seitlich befestigter Seidenfäden aufgehängt und mit einer metallischen polirten Hülle umgeben, welche sich als vollkommen genügend erwies, um die äußere Strahlung abzuhalten.

Ein Vortheil scheint mir auch die Einrichtung zur Umrührung des Wassers zu sein, welche aus einer kleinen im Calorimeter befindlichen Turbine besteht, die von einer anderen durch die Wasserleitung getriebenen Turbine mittelst eines Transmissionsfadens in Bewegung gesetzt wird. Der Abstand zwischen den beiden Turbinen betrug etwa 2 m; dadurch war ermöglicht, daß die Bewegung auch stattfinden konnte, während das Calorimeter unter den Hahn und zurück gebracht wurde. Diese Einrichtung ermöglicht zweifellos die vollkommenste Umrührung, wie durch die sehr regelmäßige Wärmeabgabe des Körpers an die Flüssigkeit erwiesen wurde; es zeigten sich dabei nicht jene Temperaturschwankungen, welche sonst stattfinden, je nachdem eine Welle von heißem oder kaltem Wasser mit dem Thermometer in Berührung kommt. Außerdem bildet sich das thermische Gleichgewicht zwischen Körper und Flüssigkeit sehr schnell aus; dies bewirkt, daß die Correctionen wegen des Wärmeverlustes nach außen äußerst gering sind (bei günstigen Verhältnissen der anfänglichen Temperatur des Wassers und der Zimmertemperatur erreichten diese kaum 0,02 Grad); ferner waren dieselben gleich, je nachdem die eine oder die andere der dazu vorgeschlagenen Correctionsmethoden gebraucht wurde.

Es sei mir gestattet, an dieser Stelle eine Bemerkung über diese Correctionen zu machen. Die sämmtlichen Correctionsmethoden, welche man nach der Régnault'schen und der Neumann'schen classificiren kann, beruhen auf der Annahme, daß die Flüssigkeit überall dieselbe Temperatur besitze, d. h. daß das Thermometer genau die Temperatur der ausstrahlenden Oberfläche zeige. Da dies schwer ohne eine sehr vollkommene Umrührung der Fall sein kann, so folgt, daß die Correctionen, die man angebracht hat, oft illusorisch gewesen sein müssen. Ich kann daher nicht genügend die Anwendung der Turbine empfehlen.

Das oben besprochene Körbchen konnte nur bis etwa auf die Mitte der Höhe des Calorimeters sinken, da dort zwei horizontale

Kupferdrähte von einer Seite der Wand des letzteren zur anderen gezogen waren. Das Thermometer lag mit seinem Quecksilbergefäß unmittelbar darunter und war mittelst eines Korkes horizontal befestigt. Die bewegte Flüssigkeit strömte vom Körper zum Thermometer, also von oben nach unten, während sie im Turbinenrohr emporgehoben wurde.

Das Thermometer wurde durch ein Fernrohr abgelesen, und die Zeit der Ablesungen nach einer Uhr, welche 15 Sekunden schlug, notirt. Das Thermometer (von Müller in Bonn) war in Zehntel Grade getheilt und corrigirt.

Während sich das Calorimeter unter dem Hahn befand, wurde es vor der Strahlung des Hahnes durch einen doppelwandigen kupfernen Schirm geschützt. Der Körper wurde mehrere Stunden im Hahn gelassen, obwohl ich mich durch besondere Versuche überzeugt hatte, daß der Körper eine constante Temperatur viel früher annahm. Es wurde angenommen, daß die Mineralstücke, welche ja direct in Berührung mit den allseitig von Wasserdampf umgebenen Wänden standen, dann die Temperatur des Dampfes, also die dem herrschenden Luftdruck entsprechende Siedetemperatur des Wassers, besaßen.

Die anfängliche Temperatur des Calorimeters war ungefähr 10^0; demnach sind die gefundenen specifischen Wärmen die Mittelwerthe für das Intervall von 10 bis 100^0. Das Wasseräquivalent des gefüllten Calorimeters nebst Körbchen, Turbine, sowie Thermometerkugel betrug durchschnittlich circa 114 gr.

Beobachtungsresultate.

Manganblende von Nagyag, Siebenbürgen. Derbe krystallinische Stücke von unebenem Bruch; eisenschwarz. Mittel aus 4 Versuchen (angewandte Menge 16 bis 36 Gramm): $c = 0{,}1392$.

Arsenkies von Freiberg in Sachsen. Isolirte Krystalle [(110), (014), auch Zwillinge] lichtstahlgrau, mit kleinen fremden Einschlüssen. $c = 0{,}1030$.

Arseneisen von Breitenbrunnen in Sachsen. Derbe, etwas stängelige Stücke; zinnweiß, von Epidot durchwachsen. Mittel aus 3 Versuchen (angew. Menge Gr. 51 bis 61): $c = 0{,}0864$.

Kobaltglanz von Tunaberg in Schweden. Isolirte Krystalle [(111), (110)]. Mittel aus 4 Versuchen (angew. M. Gr. 30 bis 32): $c = 0{,}0991$.

Speiskobalt von Schneeberg in Sachsen, Grube Kurfürst Wilhelm. Derbe Stücke, zinnweiß bis blaugrau; ursprünglich mit

Kalkspath verunreinigt. Mittel aus 3 Versuchen (angew. M. Gr. 43 bis 57): $c = 0{,}0866$.

Speiskobalt von Frauenbreitungen in Sachsen-Meiningen. Derbe krystallinische zinnweiße Stücke, fast frei von Einschlüssen. Mittel aus 3 Versuchen (angew. M. Gr. 34 bis 59): $c = 0{,}0830$.

Silberglanz von Schneeberg in Sachsen, Grube Wolfgang Massen. Derbe krystallinische Stücke von hackigem Bruch; schwärzlich blaugrau. Mittel aus 4 Versuchen (angew. M. Gr. 15 bis 44): $c = 0{,}0746$.

Antimonsilber von Andreasberg im Harz, Grube Samson. Ziemlich große, prismatische, längsgestreifte, unregelmäßig ausgebildete Krystalle; silberweiß; in Kalkspath eingewachsen, mit verdünnter warmer Essigsäure isolirt. Mittel aus 5 Versuchen (angew. M. Gr. 72): $c = 0{,}0558$.

Arsenkupfer vom Loake Superior, Nordamerika. Derbe Stücke von feinkörnigem Gefüge, auf frischem Bruch zinnweiß, Oberfläche leicht und stark anlaufend. Mittel aus 3 Versuchen (Gr. 57 bis 61): $c = 0{,}0949$.

Buntkupfererz von Bristol, Connecticut. Derbe Stücke von der charakteristischen Farbe. Mittel aus 3 Versuchen (angew. M. Gr. 53 bis 55): $c = 0{,}1177$.

Bournonit von Neudorf im Harz. Bruchstücke von großen Krystallen von stahlgrauer Farbe und muscheligem stark glänzendem Bruch. Mittel aus 3 Versuchen (angew. M. Gr. 20 bis 97): $c = 0{,}0730$.

Proustit von Joachimsthal in Böhmen. Durchscheinende rothe krystallinische Aggregate. Mittel aus 3 Versuchen (angew. M. Gr. 17): $c = 0{,}0807$.

Pyrargyrit von Freiberg in Sachsen. Krystallinische Aggregate von metallischem Diamantglanz. Mittel aus 3 Versuchen (angew. M. Gr. 27): $c = 0{,}0757$.

id. von Andreasberg im Harz. Krystallinische, röthlich eisengraue Stücke; halb metallischer Glanz. Mittel aus 2 Versuchen (angew. M. Gr. 47 bis 81): $c = 0{,}0754$.

Fahlerz von Clausthal im Harz. Auf Eisenspath aufgewachsene Krystalle, ursprünglich mit Kupferkies überzogen, Bruch muschelig, eisengrau, stark glänzend. Mittel aus 3 Versuchen (angew. M. Gr. 47): $c = 0{,}0987$.

Enargit von Famatina, Kioja, Argentinische Republik, San Pedro mina. Krystallinische stängelige Aggregate, bläulich eisengrau. Mittel aus 3 Versuchen (angew. M. Gr. 20 bis 31): $c = 0{,}1202$.

Zinnkies von Whealrock St. Agnes. Cornwall. Derbe Stücke, Bruch stahlgrau und metallglänzend; geringe Verunreinigungen aus Kupferkies. Mittel aus 3 Versuchen (angew. M. Gr. 27): $c = 0{,}1088$.

Die Dimensionen der angewandten Stücke betrugen bei den meisten durchschnittlich $^1/_2$ bis 2 Centimeter; beim Kobaltglanz und Pyrargyrit aus Freiberg waren die Stücke etwas kleiner.

In einem einzigen Falle habe ich eine freilich sehr geringe der Temperatur zuzuschreibenden Zersetzung des Minerals beobtet, und zwar beim Mangansulfid, welches die inneren Wände des Cylinders schwarz anlaufen ließ.

Discussion.

Das Woestyn'sche Gesetz:

$$c = \frac{\Sigma u_h a_h c_h}{\Sigma a_h} \quad \text{oder} \quad c = \frac{\Sigma p_h c_h}{\Sigma p_h},$$

drückt die spec. Wärme c eines zusammengesetzten Körpers durch die spec. Wärme c_h, das Atomgewicht a_h, die Zahl der vorhandenen Atome u_h der einzelnen Elemente, oder durch c_h und die Procente p_h der einzelnen Bestandtheile aus.

Zur Berechnung der theoretischen Werthe nach jener Formel wurden folgende Werthe zu Grunde gelegt.

	a_h	c_h	Temp.	Beobachter.
As	74.90	0,0830	2°—68°	Bettendorff u. Wüllner
Sb	119,60	0,0495	0—10	Bunsen
S	31,98	0,1764	15—97	Régnault
Bi	207,50	0,0298	9—102	Béde
Mo	95,90	0,0659	5—15	Delarive u. Marcet
Zn	64,88	0,0929	50	Naccari
Mn	54,80	0,1217	14—97	Régnault
Fe	55,88	0,1113	50	Naccari
Co	58,60	0,1067	„	„
Ni	58,60	0,1090	„	„
Cu	63,18	0,0932	„	„
Pb	206,39	0,0304	„	„
Ag	107,66	0,0556	„	„
Hg	199,80	0,0331	„	„
Sn	117,35	0,0545	0—100	Bunsen.

Nach der Woestyn'schen Formel wurde für die obigen Mineralien die spec. Wärme berechnet. Die chemischen Analysen wurden aus der Mineralchemie von Rammelsberg entnommen; dabei steht der Name des betreffenden Analytikers.

Analysen.

Manganblende, Nagyag.

	S	Mn		Spec. Wärmen ber.	gef.
Arfvedson	37,9	62,1		0,1424	0,1392

Arsenkies, Freiberg.

	S	As	Fe		
Stromeyer	21,08	42,88	36,04	0,1129	0,1030
Behnke	20,38	44,83	34,32	0,1119	
Arzruni	20,83	44,11	35,06	0,1124	

Arseneisen, Breitenbrunnen.

	S	As	Sb	Fe		
Behnke	1,10	69,85	1,05	27,41	0,0915	0,0864
M'Cay	6,73	61,40	—	31,20	0,0982	

Kobaltglanz, Tunaberg.

	Co As S		
		0,1094	0,0991

Speiskobalt, Schneeberg.

	S	As	Co	Ni	Fe	Cu		
Jäckel	0,49	66,06	21,21	—	11,60	8,41	0,0919	0,0866
Kobell	—	72,08	9,44	—	18,48	—	0,0905	
M'Cay	1,38	71,53	18,07	1,02	7,31	0,01	0,0910	
id.	0,73	75,40	3,42	11,90	7,50	0,39	0,0898	
id.	1,32	76,00	12,61	3,05	5,22	0,60	0,0896	
id.	1,80	74,35	13,80	3,60	5,05	1,20	0,0905	
Bull	—	75,85	3,32	12,04	6,52	0,94	0,0899	

Speiskobalt, Frauenbreitungen.

	—	0,0830

Silberglanz, Schneeberg.

	Ag_2S		
		0,0712	0,0746

Antimonsilber, Andreasberg.

	Ag_6Sb	0,0546	0,0558
	Ag_3Sb	0,0540	

Arsenkupfer, Lake Superior.

	As	Cu	Ag		
Genth	12,28	87,48	0,04	0,0919	0,0949
id.	16,72	82,35	0,30	0,0914	
id.	29,25	70,68	—	0,0902	
Frenzel	28,39	72,02	—	0,0903	

Buntkupfererz, Bristol (Connecticut)

	S	Cu	Fe		
Bodemann	25,59	62,64	11,67	0,1167	0,1177

Bournonit, Neudorf

	S	Sb	Pb	Cu	Spec. Wärmen ber.	gef.
Rose	20,31	26,28	40,84	12,65	0,0730	0,0730
Linding	19,63	25,68	41,38	12,68	0,0722	
Bromeis	18,99	24,82	40,04	15,16	0,0728	
id.	19,49	24,60	40,42	13,06	0,0728	
Rammelsberg	20,15	24,54	41,83	13,48	0,0730	

Proustit, Joachimsthal.

	S	As	Sb	Ag		
Rose	19,51	15,09	0,69	64,67	0,0833	0,0807

Pyrargyrit, Freiberg.

	S	Sb	As	Ag		
Rethwisch	17,95	18,58	2,62	60,63	0,0769	0,0757

Pyrargyrit, Andreasberg.

	S	Sb	As	Ag		
Bonsdorff	17,78	23,26	—	58,96	0,0757	0,0754
Petersen	17,70	22,35	1,01	58,03	0,0761	
Rethwisch	17,65	22,36	—	59,73	0,0756	
id.	17,99	18,63	3,01	60,78	0,0769	

Fahlerz, Clausthal.

	S	Sb	Ag	Cu	Fe	Zn		
Sander	24,10	26,80	8,90	35,70	4,50	0,90	0,0989	0,0987
Schindling	25,63	28,52	5,13	33,14	2,73	5,77	0,1016	
Rose	24,73	28,24	4,97	34,48	2,27	5,55	0,0999	
Kuhlemann	25,54	27,64	3,18	34,59	6,23	3,43	0,1032	

Enargit, Sierra Famatina.

	S	As	Sb	Cu	Fe	Zn	Pb		
Tschermak	13,80	16,59	2,51	47,75	1,21	0,44	0,70	0,1158	0,1202

Zinnkies, Whealrock St. Agnes.

	S	Sn	Cu	Fe	Cu		
Klaproth	30,50	26,50	30,00	12,00	—	0,1104	0,1088
Kudernatsch	29,95	25,81	29,69	12,57	1,79	0,1110	
Mallet	29,51	26,90	29,23	6,74	7,27	0,1086	
Rammelsberg	29,83	27,34	29,83	5,08	7,71	0,1084	

Aus der vorstehenden Tabelle folgt, daß das Woestyn'sche Gesetz ziemlich gut der Wahrheit entspricht, wenigstens mit jener Annäherung, mit welcher ähnliche physikalische Gesetze als geltend angesehen werden. In den Fällen, wo ein größerer Werth gefunden worden ist, kann man wohl eine eventuelle Unreinheit

des Materials in Betracht ziehen, welche in unserem Falle, wo wir es mit Sulfiden zu thun haben, beinahe stets auf eine Zunahme des Werthes der spec. Wärme führt (z. B. wenn Oxydation oder Beimengung von Gangmineralien, d. h. Silicaten, Kalkspath etc. oder noch ein kleiner Wassergehalt vorhanden ist). Auffallend kleiner als die berechneten sind aber die gefundenen Werthe für Speiskobalt, Kobaltglanz, Arseneisen, Arsenkies. Stellt man damit zusammen den für den Pyrit von Jolly gefundenen Werth, welcher dem Régnault'schen sehr nahe kommt, so würde man folgende Reihe erhalten:

FeS_2	0,131
$FeAs_2$	0,0864
CoAsS	0,0991
$FeCoNi(As_6)$	0,0866
FeAsS	0,103.

Nimmt man aber an, daß dem Eisen, Kobalt und Nickel in den Zusammensetzungen dieselbe specifische Wärme wie im freiem Zustande zukommt und berechnet aus den gefundenen specifischen Wärmen von Pyrit und Arseneisen den sozusagen theoretischen Werth der spec. Wärme für Schwefel und Arsen, so erhält man für die übrigen von den obigen Verbindungen:

	ber.	gef.
FeAsS	0,1028	0,103
CoAsS	0,1013	0,0991
$FeCoNiAs_6$	0,0860	0,0866.

Dadurch wird also die Uebereinstimmung befriedigend; dieses Ergebniß besagt übrigens nichts anders als das Neumann'sche Gesetz.

Zum Schluß theile ich eine Tabelle der bisher beobachteten spec. Wärmen der zur Classe der Sulfide gehörenden Körper mit. Die berechneten Werthe folgen aus den den Mineraliennamen beigefügten Formeln, außer für Geokronit, Fahlerz, Enargit, für welche die Analysen von Nordenskiöld, Rose, Tschermak benutzt worden sind.

	Formel	Régnault	Neumann	Kopp	Jolly	Oeberg	Sella	ber.
Realgar	AsS		0,1111					0,1109
Auripigment	As_2S_3		0,1132					0,1195
Antimonit	Sb_2S_3	0,0840	0,0907					0,0858
Bismutit	Bi_2S_3	0,0600						0,0573
Molybdaenit	MoS_2	0,1233	0,1067					0,1101
Sphalerit	ZnS	0,1230	0,1145	0,1200	0.1154			0,1205
Manganblende	MnS						0,1392	0,1419
Troilit	FeS	0,1357						0,1350
Schwefelkobalt	CoS	0,1251						0,1313
Millerit	NiS	0,1281						0,1328
Magnetkies	Fe_7S_8	0,1602	0,1533					0,1370
Eisenkies	FeS_2	0,1301	0,1275	0,126	0,1315			0,1460
Strahlkies	FeS_2		0,1332					0,1460
Arsenkies	$FeAsS$		0,1012			0,121	0,103	0,1111
Arseneisen	$FeAs_2$						0,0864	0,0907
Kobaltglanz	$CoAsS$		0,107			0,097	0,0991	0,1094
	$FeCoAs_2S_2$							0,1102
	$CoAs_2$		0,0920					0,0897
Speiskobalt	$NiAs_2$							0,0900
	$FeCoNiAs_6$						0,0848	0,0902
Kupferglanz	Cu_2S	0,1212		0,120				0,1100
Bleiglanz	PbS	0,0509	0,053	0,049	0,0520			0,0500
Silberglanz	Ag_2S	0,0746					0,0746	0,0712
Antimonsilber	Ag_2Sb						0,0558	0,0534
Arsenkupfer	Cu_3As						0,0919	0,0903
Zinnober	HgS	0,0512	0,0520	0,0517				0,0529
Kupferkies	$CuFeS_2$		0,1289	0,131	0,1271	0,1291		0,1278
Buntkupfererz	Cu_3FeS_3						0,1177	0,1195
Bournonit	PbS_2CuSb						0,0730	0,0722
Proustit	Ag_3AsS_3						0,0807	0,0832
Pyrargurit	Ag_3SbS_3						0,0755	0,0758
	SnS	0,0837						0,0806
	SnS_2	0,1793						0,0975
Geokronit						0,066		0,0660
Fahlerz							0,0987	0,0999
Enargit							0,1202	0,1158
Zinnkies	Cu_2FeSnS_4						0,1088	0,1086

Es sei mir zum Schluß gestattet, Herrn Prof. Voigt, welcher mich mit Rat und That unterstüzt hat, und Herrn Prof. Liebisch, welcher mir das Material für die Beobachtungen freundlichst zur Verfügung gestellt hat, meinen innigsten Dank auszusprechen.

Rom, November 1891.

Ueber Potentialfunctionen, deren Hesse'sche Determinante verschwindet.

Von

G. Frobenius in Zürich.

(Vorgelegt von Herrn F. Klein).

Sind die drei partiellen Ableitungen erster Ordnung einer Potentialfunction nicht von einander unabhängig, so stellt die zwischen ihnen bestehende Gleichung, falls man jene Ableitungen selbst als Coordinaten betrachtet, eine Minimalfläche dar. Für diesen interessanten Satz, welchen Herr Weingarten vor kurzem (1890) in diesen Nachrichten hergeleitet hat, will ich hier einen anderen Beweis entwickeln uud zugleich einige weitere mit dieser Untersuchung zusammenhängende Ergebnisse mittheilen.

§ 1.

Seien x_1, x_2, x_3 drei von einander unabhängige Veränderliche, s eine Function derselben, $s_\alpha = \frac{\partial s}{\partial x_\alpha}$ und $s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha} = \frac{\partial^2 s}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$. Wenn die Hesse'sche Determinante von s verschwindet

$$|\, s_{\alpha\beta} \,| = 0, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \tag{1}$$

so besteht zwischen s_1, s_2, s_3 eine Gleichung

$$\Phi(s_1, s_2, s_3) = 0. \tag{2}$$

Betrachtet man dieselbe als die Gleichung einer Fläche, so bezeichne ich die Richtungscosinus ihrer Normale im Punkte s_1, s_2, s_3 mit r_1, r_2, r_3 und setze $r_{\alpha\beta} = \frac{\partial r_\alpha}{\partial x_\beta}$. Da die Coordinaten s_α der Punkte dieser Fläche als Funktionen von drei unabhängigen Variabeln x_β dargestellt sind, so wird die Veränderlichkeit der Größen s_α im allgemeinen nicht beschränkt, wenn man zwischen den Größen x_β eine willkürliche Gleichung annimmt, z. B. eine derselben als constant betrachtet. Ist nun $s_\alpha + ds_\alpha$ der unendlich nahe Punkt von s_α auf einer Krümmungslinie der Fläche (2), und ist ϱ der zugehörige Hauptkrümmungsradius, so bestehen die Gleichungen

$$\varrho\, dr - ds_\alpha = 0, \quad \sum_\beta (\varrho\, r_{\alpha\beta} - s_{\alpha\beta})\, dx_\beta = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{3}$$

Da man diesen drei homogenen linearen Gleichungen zwischen

den Differentialen dx_β auch dann genügen kann, wenn das Differential einer willkürlichen Function der Größen x_β verschwindet, so müssen in dem System ihrer Coefficienten alle Determinanten zweiten Grades Null sein. Es muß also auch die Summe der drei Hauptunterdeterminanten verschwinden

$$\begin{aligned}&(\varrho r_{22}-s_{22})(\varrho r_{33}-s_{33})-(\varrho r_{23}-s_{23})(\varrho r_{32}-s_{32})\\+&(\varrho r_{33}-s_{33})(\varrho r_{11}-s_{11})-(\varrho r_{31}-s_{31})(\varrho r_{13}-s_{13})\\+&(\varrho r_{11}-s_{11})(\varrho r_{22}-s_{22})-(\varrho r_{12}-s_{12})(\varrho r_{21}-s_{21})=0.\end{aligned}$$

Bezeichnet man die linke Seite dieser Gleichung mit

$$a'\varrho^2-c'\varrho+b'=0, \tag{4}$$

so ist

$$\begin{aligned}c'&=r_{11}(s_{22}+s_{33}+s_{11})-r_{11}s_{11}-r_{12}s_{21}-r_{21}s_{12}+\cdots\\&=(r_{11}+r_{22}+r_{33})(s_{11}+s_{22}+s_{33})-\sum_{\alpha,\beta}r_{\alpha\beta}s_{\beta\alpha}.\end{aligned}$$

Setzt man also zur Abkürzung

$$a=r_{11}+r_{22}+r_{33},\quad b=s_{11}+s_{22}+s_{33}, \tag{5}$$

so ist

$$\sum_{\alpha,\beta}r_{\alpha\beta}s_{\beta\alpha}=ab-c'. \tag{6}$$

Differentiirt man aber die Gleichung

$$\sum_{\beta,\alpha}r_\alpha s_{\alpha\beta}=0 \tag{7}$$

nach x_β, so erhält man

$$\sum_{\alpha}r_{\alpha\beta}s_{\alpha\beta}+\sum_{\alpha}r_\alpha s_{\alpha\beta\beta}=0,$$

also weil $s_{\alpha\beta}=s_{\beta\alpha}$ ist,

$$\sum_{\alpha,\beta}r_{\alpha\beta}s_{\beta\alpha}=-\sum_{\alpha}r_\alpha\frac{\partial b}{\partial x_\alpha}$$

und mithin

$$c'=\Sigma r_\alpha\frac{\partial b}{\partial x_\alpha}+b\Sigma\frac{\partial r_\alpha}{\partial x_\alpha}$$

oder

$$c'=\Sigma\frac{\partial(br_\alpha)}{\partial x_\alpha}. \tag{8}$$

Ist nun s eine Potentialfunction, also $b=0$, so ist auch $c'=0$, und folglich stellt nach Formel (4) die Gleichung $\Phi=0$ eine

Minimalfläche dar. Es können nämlich in diesem Falle nicht etwa alle Coefficienten der Gleichung (4) verschwinden. Denn da

$$(9) \qquad a' = r_{22}r_{33} - r_{23}r_{32} + r_{33}r_{11} - r_{31}r_{13} + r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21},$$
$$b' = s_{22}s_{33} - s_{23}^2 + s_{33}s_{11} - s_{31}^2 + s_{11}s_{22} - s_{12}^2$$

ist, so ist

$$(10) \qquad b^2 - 2b' = \sum_{\alpha,\beta} s_{\alpha\beta}^2.$$

Ist also s reell, so kann b' nicht zugleich mit b verschwinden.

Damit aber die Fläche (2) eine Minimalfläche sei, ist nicht nothwendig, daß $b = 0$ ist, sondern wenn man

$$(11) \qquad D\varphi = \Sigma r_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}$$

setzt, nur daß b der partiellen Differentialgleichung $D\varphi = -a\varphi$ genügt. Diese kann man so integriren: Nach Gleichung (7) sind, weil $s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha}$ ist, die Functionen s_β drei particuläre Integrale der Differentialgleichung $D\varphi = 0$, von denen zwei unabhängig sind, und mithin ist ihr allgemeines Integral eine willkürliche Funktion der Größen s_β. Z. B. ist, da r_β eine Function der Coordinaten s_α ist, $Dr_\beta = 0$ oder

$$(12) \qquad \sum_\alpha r_\alpha r_{\beta\alpha} = 0.$$

Bezeichnet man die Unterdeterminanten der Determinante (1) mit $S_{\alpha\beta}$, so ist den Gleichungen (7) zufolge $S_{\alpha\beta} = k r_\alpha r_\beta$, und weil

$$(13) \qquad \sum_\alpha r_\alpha^2 = 1$$

ist, $b' = \Sigma S_{\alpha\alpha} = k$, also

$$(14) \qquad S_{\alpha\beta} = b' r_\alpha r_\beta.$$

Nun sind aber S_{11}, S_{21}, S_{31} die drei Determinanten, welche sich aus den partiellen Ableitungen erster Ordnung der beiden Functionen s_2 und s_3 bilden lassen, und mithin besteht zwischen ihnen die Gleichung $\Sigma \frac{\partial S_{\alpha 1}}{\partial x_\alpha} = 0$ oder $\Sigma \frac{\partial (b' r_\alpha r_1)}{\partial x_\alpha} = 0$; also weil nach Gleichung (12) $\Sigma r_\alpha \frac{\partial r_1}{\partial x_\alpha} = 0$ ist, ergiebt sich

$$\Sigma \frac{\partial (b' r_\alpha)}{\partial x_\alpha} = 0, \quad Db' = -ab'.$$

Daher ist

$$\Sigma r_\alpha \frac{\partial\left(\frac{b}{b'}\right)}{\partial x_\alpha} = \frac{c'}{b'} = \frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''}$$

die Summe der beiden Hauptkrümmungen. Soll nun b der Bedingung $c' = 0$ oder $Db = -ab$ genügen, so ist $D\left(\frac{b}{b'}\right) = 0$, und mithin ist $\frac{b}{b'}$ eine Function der Coordinaten s_α. Setzt man also $e_{\alpha\beta} = 0$ oder 1, je nachdem $\alpha = \beta$ ist, oder nicht, so erhält man den Satz:

Verschwindet die Hesse'sche Determinante $|\, s_{\alpha\beta} \,|$ einer Function s von drei Parametern, so besteht zwischen ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung s_α eine Gleichung. Damit dieselbe eine Minimalfläche darstelle, ist nothwendig und hinreichend, daß die Summe der reciproken Werthe der beiden Wurzeln der Gleichung $\frac{1}{\lambda} \,|\, s_{\alpha\beta} - \lambda e_{\alpha\beta} \,|\, = 0$ eine Function der Coordinaten s_α ist.

Der Coefficient a' in der Gleichung (4) läßt sich in ähnlicher Weise darstellen, wie nach Formel (8) der Coefficient c'. Mit Hülfe der Gleichung (12) erhält man nämlich

$$Da = \sum_{\alpha,\beta} r_\alpha \frac{\partial r_{\beta\beta}}{\partial x_\alpha} = \Sigma r_\alpha \frac{\partial r_{\beta\alpha}}{\partial x_\beta} = -\Sigma r_{\alpha\beta} r_{\beta\alpha} = -a^2 + 2a'$$

und demnach

$$\sum_\alpha \frac{\partial(a r_\alpha)}{\partial x_\alpha} = 2a', \quad Da = 2a' - a^2.$$

Da endlich der Gleichung (4) zufolge $\frac{a'}{b'}$ und $\frac{c'}{b'}$ Functionen der Coordinaten s_α sind, so ist $D\left(\frac{a'}{b'}\right) = 0$ und $D\left(\frac{c'}{b'}\right) = 0$, und mithin ergeben sich die Formeln

$$(15) \qquad \begin{aligned} Da' &= -aa', \quad Db' = -ab', \quad Dc' = -ac', \\ Da &= 2a' - a^2, \quad Db = c' - ab, \quad Dc = -ac. \end{aligned}$$

Die letzte, welche ich der Vollständigkeit wegen mit aufgeführt habe, bezieht sich auf eine Größe c, die ich erst später benutzen werde, und die so definirt ist: Aus der Gleichung (13) folgt

$$(16) \qquad \sum_\alpha r_\alpha r_{\alpha\beta} = 0$$

und daraus in Verbindung mit (12) $\Sigma r_\alpha (r_{\alpha\beta} - r_{\beta\alpha}) = 0$, also [1])

1) Sind die Größen r_α drei beliebige Functionen der Variabeln x_β, so hat

$$(17) \qquad \frac{r_{23}-r_{32}}{r_1} = \frac{r_{31}-r_{13}}{r_2} = \frac{r_{12}-r_{21}}{r_3} = c,$$

so daß

$$(18) \qquad \begin{aligned} c &= r_1(r_{23}-r_{32}) + r_2(r_{31}-r_{13}) + r_3(r_{12}-r_{21}), \\ c^2 &= (r_{23}-r_{32})^2 + (r_{31}-r_{13})^2 + (r_{12}-r_{21})^2 \end{aligned}$$

ist. Aus der identischen Gleichung

$$\frac{\partial(r_{23}-r_{32})}{\partial x_1} + \frac{\partial(r_{31}-r_{13})}{\partial x_2} + \frac{\partial(r_{12}-r_{21})}{\partial x_3} = 0$$

ergiebt sich daher die Relation $Dc = -ac$. Aus den Gleichungen (15) leitet man die wichtigen Beziehungen ab

$$(19) \qquad D\left(\frac{a}{2a'}\right) = 1, \quad D\left(\frac{b}{c'}\right) = 1.$$

Der nämlichen Differentialgleichung $D\varphi = 1$ genügt auch jede der beiden Wurzeln der Gleichung $a'\lambda^2 - a\lambda + 1 = 0$, sowie auch der Ausdruck $\Sigma r_\alpha x_\alpha$.

§ 2.

Da man aus der Gleichung $c' = 0$ nicht schließen kann, daß $b = 0$ ist, so genügt der entwickelte Satz noch nicht zur Lösung der Aufgabe, alle Potentialfunctionen zu finden, deren Hesse'sche Determinante verschwindet. Um dies Ziel zu erreichen, stellt Herr Weingarten folgenden weiteren Satz auf:

Ist $\Delta\varphi$ der zweite Differentialparameter der Function $\varphi(s_1, s_2, s_3)$ für die Fläche $\Phi = 0$, so ist

$$(1) \qquad t = \Sigma s_\alpha x_\alpha - s$$

eine Function der Coordinaten s_α, welche der Gleichung $\Delta t = 0$ genügt.

Für den zweiten Differentialparameter hat Herr Beltrami (Math. Ann. Bd. 1, S. 581) den Ausdruck

$$\Delta\varphi = \Sigma\frac{\partial^2\varphi}{\partial s_\alpha^2} - \Sigma r_\alpha r_\beta \frac{\partial^2\varphi}{\partial s_\alpha \partial s_\beta} - \left(\frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''}\right)\Sigma r_\alpha \frac{\partial\varphi}{\partial s_\alpha}$$

---

der Pfaff'sche Differentialausdruck $\Sigma r_\alpha dx_\alpha$ die Klasse 1, wenn die drei Größen $r_{\alpha\beta}-r_{\beta\alpha}$ verschwinden, die Klasse 2, wenn dies nicht der Fall ist, aber die Größe $c = r_1(r_{23}-r_{32}) + r_2(r_{31}-r_{13}) + r_3(r_{12}-r_{21}) = 0$ ist, und die Klasse 3, wenn c von Null verschieden ist. Der Gleichung (17) zufolge hat der oben untersuchte Ausdruck niemals die Klasse 2.

angegeben. Benutzt man die drei linearen Differentialparameter

$$\Delta_\alpha \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial s_\alpha} - r_\alpha \sum_\beta r_\beta \frac{\partial \varphi}{\partial s_\beta}, \tag{2}$$

so kann man diese Gleichung auf die elegante Form

$$\Delta \varphi = \sum \Delta_\alpha^2 \varphi \tag{3}$$

bringen, wie ich nächstens in einer ausführlicheren Arbeit darlegen werde. Das Zeichen $\Delta_\alpha^2 \varphi$ bedeutet hier $\Delta_\alpha(\Delta_\alpha \varphi)$, d. h. die Operation Δ_α soll auf den Ausdruck $\Delta_\alpha \varphi$ angewendet werden. Der Beweis des oben ausgesprochenen Satzes beruht auf der folgenden identischen Gleichung (vgl. Borchardt, Crelle's Journ. Bd. 30, Seite 44, (9)):

Ist $|\lambda e_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}| = \lambda^3 - a\lambda^2 + a'\lambda - a''$ die charakteristische Determinante der bilinearen Form $f = \sum a_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta$, und ist $f^0 = \sum u_\lambda v_\lambda$, $f' = \sum \frac{\partial f}{\partial v_\lambda} \frac{\partial f}{\partial u_\lambda}$, so ist die adjungirte Form von f

$$-\begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ v_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ v_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = f' - af + a'f^0. \tag{4}$$

Wendet man diesen Satz auf die quadratische Form $\sum s_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta$ an, deren adjungirte Form $\sum S_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = b'(\sum r_\alpha u_\alpha)^2$ ist, und setzt man

$$s'_{\alpha\beta} = \sum_\lambda s_{\alpha\lambda} s_{\beta\lambda}, \tag{5}$$

so erhält man

$$\sum s'_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = \sum_\alpha \Big(\sum_\beta s_{\alpha\beta} u_\beta\Big)^2 = b \sum s_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta - b' \sum u_\alpha^2 + b' (\sum r_\alpha u_\alpha)^2, \tag{6}$$

oder wenn man u_α durch dx_α ersetzt,

$$\sum ds_\alpha^2 = b \sum ds_\alpha dx_\alpha - b' \sum dx_\alpha^2 + b' (\sum r_\alpha dx_\alpha)^2. \tag{7}$$

Setzt man nun $\frac{\partial t}{\partial s_\alpha} = t_\alpha$, so folgt aus $dt = \sum x_\alpha ds_\alpha = \sum t_\alpha ds_\alpha$ und $\sum r_\alpha ds_\alpha = 0$, daß $x_\alpha - t_\alpha = p r_\alpha$ ist, wo p ein Proportionalitätsfactor ist. Daher ist

$$\Delta_\alpha t = t_\alpha - r_\alpha \sum r_\beta t_\beta = x_\alpha - p r_\alpha - r_\alpha \sum r_\beta (x_\beta - p r_\beta),$$

also

$$\Delta_\alpha t = x_\alpha - r_\alpha \sum_\beta r_\beta x_\beta. \tag{8}$$

Zu demselben Resultat gelangt man mittelst der Formel

$$(9) \qquad b' \Delta_\alpha \varphi = b \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} - \sum_\beta s_{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta},$$

die sich aus der Gleichung (6) und den Relationen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} = \sum_\beta s_{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial s_\beta}, \quad \sum_\beta s_{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} = \sum_\beta s'_{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial s_\beta}$$

ergiebt.

Setzt man $\Sigma r_\beta x_\beta = r$, so ist, wie oben bemerkt $Dr = \Sigma r_\alpha \frac{\partial r}{\partial x_\alpha} = 1$. Da ferner $\sum_\alpha r_\alpha s_{\alpha\beta} = 0$ ist, so ist

$$b' \Delta t = \Sigma b' \Delta_\alpha (\Delta_\alpha t) = b \sum_\alpha \frac{\partial (x_\alpha - r r_\alpha)}{\partial x_\alpha} - \sum_{\alpha,\beta} s_{\alpha\beta} \frac{\partial (x_\alpha - r r_\alpha)}{\partial x_\beta} =$$

$$3b - b - br \Sigma r_{\alpha\alpha} - \Sigma s_{\alpha\alpha} + r \Sigma s_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta},$$

also nach (5) und (6) § 1

$$(10) \qquad b' \Delta t = b - c' (\Sigma r_\alpha x_\alpha), \quad -\frac{b' \Delta t}{r^3} = \Sigma \frac{\partial \left(\frac{b r_\alpha}{r} \right)}{\partial x_\alpha}.$$

Ist also $b = 0$ und demnach auch $c' = 0$, so ist auch $\Delta t = 0$.

Nunmehr lassen sich die Sätze des Herrn Weingarten umkehren. Seien s_1, s_2, s_3 rechtwinklige Coordinaten, sei $\Phi(s_1, s_2, s_3) = 0$ die Gleichung einer Fläche und t eine beliebige Function der Coordinaten s_α. Berechnet man dann aus den vier Gleichungen $t_\alpha + p r_\alpha = x_\alpha$ und $\Phi = 0$ die vier Größen s_α und p, und setzt man die erhaltenen Werthe in den Ausdruck $s = \Sigma s_\alpha x_\alpha - t$ ein, so wird s eine Function der Variabeln x_α, deren partielle Ableitungen $\frac{\partial s}{\partial x_\alpha} = s_\alpha$ sind, und der Gleichung $\Phi = 0$ zufolge verschwindet die Determinante $| s_{\alpha\beta} |$. Stellt nun die Gleichung $\Phi = 0$ eine Minimalfläche dar, so ist $c' = 0$, und genügt ferner t der Differentialgleichung $\Delta \varphi = 0$, so ist nach Formel (10) auch $b = 0$, also ist s eine Potentialfunction.

Will man allgemein die Transformation des zweiten Differentialparameters durchführen, so ergiebt sich aus der Formel (9)

$$b' \Delta(\varphi) = \sum_\alpha b \frac{\partial \Delta_\alpha(\varphi)}{\partial x_\alpha} - \sum_{\alpha,\beta} s_{\alpha\beta} \frac{\partial \Delta_\beta(\varphi)}{\partial x_\beta}$$

$$= \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(b \Delta_\alpha \varphi - \sum_\beta s_{\alpha\beta} \Delta_\beta(\varphi) \right),$$

weil

$$\sum_\alpha \frac{\partial s_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial \Sigma s_{\alpha\alpha}}{\partial x_\beta} = \frac{\partial b}{\partial x_\beta}$$

st. Nun ist aber

$$bb'\Delta_\alpha\varphi - b'\sum_\beta s_{\alpha\beta}\Delta_\beta(\varphi) = b^2\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha} - 2b\sum_\beta s_{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta} + \sum_\beta s'_{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta},$$

also nach Formel (6) gleich

$$(b^2 - b')\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha} - b\sum_\beta s_{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta}.$$

Denn weil φ eine Function der Coordinaten s_α ist, so ist

$$\Sigma r_\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha} = 0.$$

Demnach ergiebt sich

$$(11)\qquad \Delta(\varphi) = \frac{1}{b'}\Sigma\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{1}{b'}\Big((b^2-b')\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha} - b\Sigma s_{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta}\Big).$$

§ 3.

Die Transformation des zweiten Differentialparameters läßt sich auch durch einen besonderen Kunstgriff auf den bekannten Satz von Jacobi (Gesammelte Werke, Bd. 2, Seite 196) zurückführen:

Ist $\Sigma a_{\alpha\beta}\,dx_\alpha\,dx_\beta$ ein quadratischer Differentialausdruck, dessen Determinante $A = |a_{\alpha\beta}|$ von Null verschieden ist, und ist $A_{\alpha\beta}$ der Coefficient von $a_{\alpha\beta}$ in dieser Determinante, so ist

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\sum_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\Big[\frac{1}{\sqrt{A}}\sum_\beta A_{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta}\Big]$$

eine dem Ausdruck zugeordnete Form, welche bei jeder Transformation desselben invariant bleibt.

Da die Coordinaten s_α der Gleichung $\Phi = 0$ genügen, so lassen sie sich durch zwei unabhängige Variabeln p_1 und p_2 ausdrücken, welche Functionen der Größen x_β sind. Sei p_3 eine dritte von jenen unabhängige Function dieser Größen und

$$(1)\qquad \Sigma r_\alpha\,dx_\alpha = \Sigma q_\alpha\,dp_\alpha.$$

Dann ist, weil p_1 und p_2 Functionen der Coordinaten s_α sind,

$$\Sigma\frac{\partial p_1}{\partial x_\alpha}r_\alpha = 0,\quad \Sigma\frac{\partial p_2}{\partial x_\alpha}r_\alpha = 0,\quad \Sigma r_\alpha r_\alpha = 1,$$

$$\Sigma\frac{\partial p_1}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\alpha}{\partial p_3} = 0,\quad \Sigma\frac{\partial p_2}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\alpha}{\partial p_3} = 0,\quad \Sigma r_\alpha\frac{\partial x_\alpha}{\partial p_3} = q_3$$

und mithin

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial p_s} = q_s r_\alpha. \tag{2}$$

Daher ist, weil r_α von p_s unabhängig ist,

$$\frac{\partial q_s}{\partial p_1} - \frac{\partial q_1}{\partial p_s} = \frac{\partial}{\partial p_1}\left(\Sigma r_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial p_s}\right) - \frac{\partial}{\partial p_s}\left(\Sigma r_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial p_1}\right) =$$

$$\Sigma \frac{\partial r_\alpha}{\partial p_1}\frac{\partial x_\alpha}{\partial p_s} = q_s \Sigma r_\alpha \frac{\partial r_\alpha}{\partial p_1} = 0,$$

also

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_s} = \frac{\partial q_s}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial q_2}{\partial p_s} = \frac{\partial q_s}{\partial p_2}, \tag{3}$$

$\left(\text{aber nicht nothwendig } \frac{\partial q_1}{\partial p_2} = \frac{\partial q_2}{\partial p_1}\right)$. Um aber die Darstellung noch mehr zu vereinfachen, wähle ich p_s so, daß $Dp_s = 1$ ist[1]), setze also z. B. $p_s = \frac{a}{2a'}$ (vgl. (19) § 1). Dann wird

$$q_s = q_s \Sigma r_\alpha \frac{\partial p_s}{\partial x_\alpha} = \Sigma \frac{\partial p_s}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\alpha}{\partial p_s} = \frac{\partial p_s}{\partial p_s} = 1,$$

und mithin sind den Gleichungen (3) zufolge q_1 und q_2 von p_s unabhängig[2]).

Ist nun $\Sigma ds_\alpha^2 = a_{11}dp_1^2 + 2a_{12}dp_1 dp_2 + a_{22}dp_2^2$, so geht der ternäre quadratische Differentialausdruck

$$a_{11}dp_1^2 + 2a_{12}dp_1 dp_2 + a_{22}dp_2^2 + (\Sigma q_\alpha dp_\alpha)^2 \tag{4}$$

durch Einführung der Variabeln x_β in

$$\Sigma s'_{\alpha\beta}dx_\alpha dx_\beta + (\Sigma r_\alpha dx_\alpha)^2 \tag{5}$$

über. Die Determinante des Ausdrucks (4) ist

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}+q_1^2 & a_{12}+q_1q_2 & q_1 \\ a_{21}+q_2q_1 & a_{22}+q_2^2 & q_2 \\ q_1 & q_2 & 1 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2,$$

ihre Unterdeterminanten sind

---

1) Die Größe p_s ist von Herrn Weingarten mit r, von mir im vorigen § mit p bezeichnet worden. Durch die Annahme $p_s = \frac{a}{2a'}$ wird die von Herrn Weingarten, S. 322, aufgestellte Bedingung (16) erfüllt.

2) Die Klasse des Differentialausdrucks $\Sigma r_\alpha dx_\alpha$ ist also gleich 1 oder 3, je nachdem $q_1 dp_1 + q_2 dp_2$ ein vollständiges Differential ist, oder nicht, und kann folglich nie gleich 2 sein.

$$A_{11} = a_{22}, \quad A_{12} = -a_{12}, \quad A_{22} = a_{11}$$
$$A_{13} = a_{12}q_2 - a_{22}q_1, \quad A_{23} = a_{12}q_1 - a_{11}q_2.$$

Demnach sind A, A_{13} und A_{23} von p_3 unabhängig Setzt man nun

$$(6) \quad \sqrt{A}\,\Delta\varphi = \frac{\partial}{\partial p_1}\frac{1}{\sqrt{A}}\left[a_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial p_1} - a_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\right] + \frac{\partial}{\partial p_2}\frac{1}{\sqrt{A}}\left[-a_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial p_1} + a_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\right],$$

so ist die dem Ausdruck (4) zugeordnete Form gleich

$$\Delta\varphi + \frac{1}{\sqrt{A}}\left[\frac{\partial}{\partial p_1}\left(\frac{A_{13}}{\sqrt{A}}\frac{\partial\varphi}{\partial p_3}\right) + \frac{\partial}{\partial p_2}\left(\frac{A_{23}}{\sqrt{A}}\frac{\partial\varphi}{\partial p_3}\right) + \frac{\partial}{\partial p_3}\left(\frac{A_{33}}{\sqrt{A}}\frac{\partial\varphi}{\partial p_3}\right)\right] +$$
$$+ \frac{1}{A}\left[A_{31}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_1\partial p_3} + A_{32}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_2\partial p_3}\right],$$

also wenn φ von p_3 unabhängig ist, gleich $\Delta\varphi$.

Um die Determinante und die adjungirte Form des Ausdrucks (5) zu berechnen, bemerke ich, daß

$$|\,\lambda u_\alpha,\ r_\alpha,\ s_{\alpha 1},\ s_{\alpha 2},\ s_{\alpha 3}\,|^2 = |\,s'_{\alpha\beta} + r_\alpha r_\beta + \lambda^2 u_\alpha u_\beta\,|$$
$$= -\begin{vmatrix} -1 & \lambda u_1 & \lambda u_2 & \lambda u_3 \\ \lambda u_1 & s'_{11}+r_1^2 & s'_{12}+r_1r_2 & s'_{13}+r_1r_3 \\ \lambda u_2 & s'_{21}+r_2r_1 & s'_{22}+r_2^2 & s'_{23}+r_2r_3 \\ \lambda u_3 & s'_{31}+r_3r_1 & s'_{32}+r_3r_2 & s'_{33}+r_3^2 \end{vmatrix}.$$

Daher ist die gesuchte Determinante das constante Glied und die adjungirte Form der Coefficient von λ^2 in diesem Ausdruck. Die Determinante ist folglich die Summe der Quadrate von 4 Determinanten, von denen eine $|\,s_{\alpha\beta}\,| = 0$ ist. Eine der drei andern ist

$$|\,r_\alpha,\ s_{\alpha 1},\ s_{\alpha 2}\,| = \Sigma S_{\alpha 3} r_\alpha = b' r_3 \Sigma r_\alpha^2$$

und die Summe ihrer Quadrate ist b'^2.

Die adjungirte Form aber ist die Summe der Quadrate von 6 Determinanten. Drei derselben haben die Form

$$|\,u_\alpha,\ s_{\alpha 1},\ s_{\alpha 2}\,| = \Sigma S_{\alpha 3} u_\alpha = b' r_3 \Sigma r_\alpha u_\alpha,$$

die Summe ihrer Quadrate ist $b'^2(\Sigma r_\alpha u_\alpha)^2$. Das Quadrat einer der drei übrigen Determinanten ist

$$\begin{vmatrix} u_1 & r_1 & s_{11} \\ u_2 & r_2 & s_{21} \\ u_3 & r_3 & s_{31} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \Sigma u_\alpha^2 & \Sigma u_\alpha r_\alpha & \Sigma u_\alpha s_{\alpha 1} \\ \Sigma u_\alpha r_\alpha & 1 & 0 \\ \Sigma u_\alpha s_{\alpha 1} & 0 & \Sigma s_{\alpha 1}^2 \end{vmatrix}$$

und ihre Summe ist nach (10) § 1

$$(b^2 - 2b')\left[\Sigma u_\alpha^2 - (\Sigma \tau_\alpha u_\alpha)^2\right] - \sum_\beta\left(\sum_\alpha s_{\alpha\beta} u_\alpha\right)^2,$$

also nach Formel (6) § 2 gleich

$$(b^2-b')[\Sigma u_\alpha^2-(\Sigma r_\alpha u_\alpha)^2]-b\,\Sigma s_{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta.$$

Mithin ist die Determinante des Ausdrucks (5) gleich b'^2 und ihre Unterdeterminanten sind die Coefficienten der Form

$$(7)\qquad (b^2-b')\,\Sigma u_\alpha^2-b\,\Sigma s_{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta+(b'^2+b'-b^2)(\Sigma r_\alpha u_\alpha)^2.$$

Ist nun φ von p_3 unabhängig, so ist $\Sigma r_\alpha \frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}=0$, und mithin ist die Form (11) § 2 die dem Ausdruck (5) zugehörige Form.

§ 4.

Die vorangehenden Entwicklungen hängen, wie schon die Gleichung (4) § 2 zeigt, auf's engste mit der Theorie der Matricen zusammen oder der Formen, wie ich sie in meiner Arbeit Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen (Crelle's Journal Bd. 84) genannt habe. Ist

$$|\lambda E-A|=\lambda^3-a\lambda^2+a'\lambda-a''=\varphi(\lambda)$$

die charakteristische Function einer ternären Form $A=\Sigma a_{\alpha\beta}u_\alpha v_\beta$, so genügt A der Gleichung

$$(1)\qquad \varphi(A)=0,\quad A^3-aA^2+a'A-a''E=0.$$

Den Coefficienten a, den ich im Folgenden oft gebrauche, will ich nach dem Vorgange des Herrn Dedekind die Spur der Form A nennen. Da a'' die Determinante der Form A ist, so ist $a''A^{-1}$ ihre adjungirte Form, die ich mit $\bar{A}$ bezeichnen will. Aus der Gleichung (1) ergiebt sich dann, wenn a'' von Null verschieden ist,

$$(2)\qquad \bar{A}=A^2-aA+a'E.$$

Da aber beide Seiten dieser Gleichung, welche mit der Formel (4) § 2 übereinstimmt, ganze Functionen der Coefficienten $a_{\alpha\beta}$ sind, so gilt sie auch, wenn $a''=0$ ist.

Im Folgenden handelt es sich nun um die Beziehungen zwischen den drei Formen

$$R=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13}\\ r_{21} & r_{22} & r_{23}\\ r_{31} & r_{32} & r_{33}\end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13}\\ s_{21} & s_{22} & s_{23}\\ s_{31} & s_{32} & s_{33}\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix} 0 & r_3 & -r_2\\ -r_3 & 0 & r_1\\ r_2 & -r_1 & 0\end{pmatrix}$$

und denen, welche durch Zusammensetzung aus ihnen entstehen. Von diesen Formen ist S symmetrisch und T alternirend. Bezeichnet man die conjugirte Form von R mit R', so ist nach (17) § 1

$$R - R' = cT. \tag{3}$$

Nach Satz (1) genügen diese Formen den Gleichungen

$$R^3 - aR^2 + a'R = 0, \quad S^3 - bS^2 + b'S = 0, \quad T^3 + T = 0. \tag{4}$$

Die adjungirte Form von T ist

$$E + T^2 = \begin{pmatrix} r_1^2 & r_1 r_2 & r_1 r_3 \\ r_2 r_1 & r_2^2 & r_2 r_3 \\ r_3 r_1 & r_3 r_2 & r_3^2 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Nach den Formeln (7), (12) und (16) § 1 verschwinden die Producte $R(E+T^2)$, $(E+T^2)R$, $S(E+T^2)$ und $(E+T^2)S$. Demnach ist

$$RT^2 = T^2R = -R, \quad ST^2 = T^2S = -S. \tag{6}$$

Denselben Gleichungen zufolge können sich die Unterdeterminanten der Form R von den Elementen (5) nur um einen gemeinsamen Factor k unterscheiden, und mithin ist die adjungirte Form von R

$$\bar{R} = R^2 - aR + a'E = k(E + T^2).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $E + T^2$, so erhält man nach (4) und (6) $a' = k$. Auf diesem Wege findet man die Gleichungen

$$R^2 = aR + a'T^2, \quad S^2 = bS + b'T^2. \tag{7}$$

Die nämliche Methode kann man auch auf die Form

$$X = \varrho R + \sigma S + \tau T + \vartheta T^2 \tag{8}$$

anwenden, wo ϱ, σ, τ, ϑ willkürliche Constanten sind. Ihre Spur ist

$$f = \varrho a + \sigma b - 2\vartheta. \tag{9}$$

Mithin ist

$$X^3 = fX + gT^2, \tag{10}$$

und ich werde zeigen, daß

$$g(\varrho, \sigma, \tau, \vartheta) = a'\varrho^2 + b'\sigma^2 + \tau^2 + \vartheta^2 + c'\varrho\sigma + c\varrho\tau - a\varrho\vartheta - b\sigma\vartheta \tag{11}$$

ist. Daß in dieser quadratischen Form die Coefficienten von ϱ^2, σ^2, τ^2, ϑ^2, $\varrho\vartheta$, $\sigma\vartheta$, $\tau\vartheta$ richtig bestimmt sind, ergiebt sich aus den Gleichungen (6) und (7). Es ist also nur noch nachzuweisen, daß in den Gleichungen

$$\begin{aligned} RS + SR &= aS + bR + c'T^2 \\ RT + TR &= aT + cT^2 \\ ST + STT &= bT \end{aligned} \tag{12}$$

die Coefficienten von T^2 die angegebenen Werthe haben. Dies folgt für die letzte daraus, daß $ST + TS$ eine alternirende Form ist, weil die conjugirte Form von AB gleich $B'A'$ ist, und für die vorletzte daraus, daß nach (3) $RT + TR' = RT + TR - cT^2$ eine alternirende Form ist. Um endlich die erste Gleichung darzuthun, genügt die Bemerkung, daß die Spur [1]) von RS und von SR nach (6) § 1 gleich $\Sigma r_{\alpha\beta} s_{\beta\alpha} = ab - c'$ und die von T^2 nach (5) gleich -2 ist. Ein specieller Fall der Formel (10) ist die Gleichung

$$(\varrho R - S)^2 = (a\varrho - b)(\varrho R - S) + (a'\varrho^2 - c'\varrho + b')T^2,$$

welche die Grundlage des in § 1 geführten Beweises bildet.

Nach Gleichung (10) haben sämmtliche Formen der Schaar $\varrho R + \sigma S + \tau T + \vartheta T^2$ (von einem scalaren Factor abgesehen) dieselbe adjungirte Form $E + T^2$, und eine leichte Abzählung zeigt, daß umgekehrt alle Formen, die den Bedingungen $X(E + T^2) = (E + T^2)X = 0$ genügen, in dieser Schaar enthalten sind. Die Unterdeterminanten der Derminante dieser Formenschaar sind alle durch die quadratische Form $g(\varrho, \sigma, \tau, \vartheta)$ theilbar, und unterscheiden sich von einander nur durch Factoren, die von $\varrho, \sigma, \tau, \vartheta$ unabhängig sind. Da aber ein Product von beliebig vielen der Formen R, S, T den nämlichen Bedingungen genügt, so lassen sich alle diese Producte aus vier unter ihnen linear zusammensetzen. Die dazu nöthigen Formeln kann man so erhalten.

Differentiirt man die Gleichung $\sum_\lambda s_{\alpha\lambda} r_\lambda = 0$ nach x_β, so erhält man $\sum_\lambda s_{\alpha\lambda} r_{\lambda\beta} = -\sum_\lambda s_{\alpha\beta\lambda} r_\lambda$. Mithin ist die Form SR symmetrisch

$$SR = R'S \tag{13}$$

Ebenso ist $ST - TS$ symmetrisch und auch $RT - TR$, weil nach (3) $RT - TR = -TR' + R'T$ ist. Nach (12) ist

$$(ST - TS)^2 = (2ST - bT)(-2TS + bT) = 4(S^3 - bS) - b^2 T^2,$$

und auf diesem Wege findet man die Gleichungen

$$(ST - TS)^2 = -(b^2 - 4b')T^2, \quad (RT - TR)^2 = -(a^2 + c^2 - 4a')T^2. \tag{14}$$

---

1) Die Formen AB und BA haben immer dieselbe Spur. Sind nämlich zunächst die Coefficienten von B willkürliche Größen, so sind die Formen BA und $AB = B^{-1}(BA)B$ ähnlich, haben also beide dieselbe charakteristische Function. Da aber deren Coefficienten ganze Functionen der Coefficienten von B sind, so haben AB und BA auch dann dieselbe charakteristische Function, wenn die Determinante von B verschwindet.

Da die Wurzeln der Gleichungen

$$|s_{\alpha\beta} - \lambda e_{\alpha\beta}| = 0 \quad \text{und} \quad |r_{\alpha\beta} + r_{\beta\alpha} - \lambda e_{\alpha\beta}| = 0$$

reell sind, so sind $b^2 - 4b'$ und $a^2 + c^2 - 4a'$ positiv. Ferner ergiebt sich mittelst der Formeln (12) und (13)

$$(RT-TR)(ST-TS) = (2RT-aT-cT^2)(-2TS+bT) =$$
$$2(2R-cT)S-2(aS+bR)+bcT-abT^2$$
$$= 2(R+R')S-2(RS+SR-c'T^2)+bcT-abT^2 = bcT-(ab-2c')T^2$$

und mithin, indem man auch zu den conjugirten Formen übergeht,

$$(15) \qquad \begin{aligned}(RT-TR)(ST-TS) &= bcT-(ab-2c')T^2\\ (ST-TS)(RT-TR) &= -bcT-(ab-2c')T^2.\end{aligned}$$

Endlich ist

$$T(ST-TS) = T(-2TS+bT) = 2S+bT^2,$$

und indem man auch zu den conjugirten Formen übergeht, erhält man die Relationen

$$(16) \qquad \begin{aligned}T(ST-TS) &= -(ST-TS)T = 2S+bT^2\\ T(RT-TR) &= -(RT-TR)T = 2R-cT+aT^2.\end{aligned}$$

Multiplicirt man also die erste der Gleichungen (15) links mit T und rechts mit $ST-TS$, so findet man

$$(17) \quad bc(ST-TS) = -(b^2-4b')(2R-cT+aT^2)+(ab-2c')(2S+bT^2).$$

Multiplicirt man die zweite jener Gleichungen links mit T und rechts mit $RT-TR$, so findet man

$$(18) \quad bc(RT-TR) = -(ab-2c')(2R-cT+aT^2)+(a^2+c^2-4a')(2S+bT^2).$$

Ferner ist

$$2SR = SR+R'S = (SR+RS)-cTS$$

und mithin nach (12) und (17)

$$(19) \qquad bSR = b'(2R-cT+aT^2)+(ab-c')S.$$

Endlich ist $R'R = R^2-cTR$ und folglich nach (7), (12) und (18)

$$(20) \qquad bR'R = c'(2R-cT+aT^2)+(a^2+c^2-4a')S-ba'T^2.$$

Aus der identischen Gleichung

$$(S^2-bS)R'R+S^2(R^2-aR) = S(SR'+SR-aS-bR')R$$

ergiebt sich mittelst der Formeln (3), (7), (12) und (13) die Relation

$$(21) \qquad b'R'R-c'SR+a'S^2 = 0.$$

Da die Spur von TR nach (12) gleich $-c$ ist, so ist die von

$$R'R = R^2 - cTR = aR + a'T^2 - cTR \text{ gleich } a^2 + c^2 - 2a'.$$

Die Spur von $S^2 = bS + b'T^2$ ist $b^2 - 2b'$, und die von SR, wie schon oben erwähnt, gleich $ab - c'$. Daher ergiebt sich aus der letzten Formel die merkwürdige Relation

$$\begin{aligned} &c'^2 - 4a'b' + b^2a' - bac' + (a^2 + c^2)b' = 0, \\ &(b^2 - 4b')(a^2 + c^2 - 4a') - (ab - 2c')^2 = b^2c^2. \end{aligned} \tag{22}$$

Betrachtet man die symmetrischen Formen als quadratische Formen mit den Variabeln dx_α, so erkennt man in der symbolischen Beziehung (21) die für die Theorie der Flächen wichtige Gleichung (vgl. Weingarten, Sitzungsberichte der Berl. Akad. 1886, S. 83)

$$b' \Sigma dr_\alpha^2 - c' \Sigma dr_\alpha ds_\alpha + a' \Sigma ds_\alpha^2, \tag{23}$$

in welcher die Coefficienten dieselben sind, wie in der Gleichung (4) § 1.

Mit Hülfe der entwickelten Formeln lassen sich nun die Formen R, S, T und die Producte von beliebig vielen derselben alle durch vier unter ihnen linear ausdrücken. Setzt man

$$U = 2S + bT^2, \quad V = ST - TS, \quad k = b^2 - 4b', \tag{24}$$

so erhält man für jene Beziehungen die besonders einfachen Formeln

$$\begin{aligned} U^2 = \quad V^2 \quad &= -kT^2, \quad UV = -VU = kT, \\ TV = -VT = \quad U \quad &, \quad UT = -TU = V, \end{aligned} \tag{25}$$

oder es bestehen zwischen den vier Formen

$$J_0 = -T^2, \quad J_1 = T, \quad J_2 = \frac{1}{\sqrt{-k}} U, \quad J_3 = \frac{1}{\sqrt{-k}} V$$

dieselben Relationen, wie zwischen den Einheiten der Quaternionen. Da

$$2S = U - bT^2, \quad 2kR = k(cT - aT^2) + (ab - 2c')U - bcV \tag{26}$$

ist, so läßt sich die quadratische Form (11) durch eine reelle Substitution in eine Summe von 2 positiven und 2 negativen Quadraten transformiren

$$(27)\quad 4g(\varrho,\sigma,\tau,\vartheta)=[a\varrho+b\sigma-2\vartheta]^2+[c\varrho+2\tau]^2-\frac{1}{k}[(ab-2c')\varrho+k\sigma]^2-\frac{1}{k}b^2c^2\varrho^2,$$

oder sie hat den Trägheitsindex 2 (während die analoge quadratische Form in der Theorie der Quaternionen eine Summe von 4 Quadraten ist). Die nämlichen Formeln (25) erhält man, wenn man

$$(28)\quad U = 2R-cT+aT^2,\quad V = RT-TR,\quad k = a^2+c^2-4a'$$

setzt. Daß die 4 Formen T, T^2, U, V linear unabhängig sind, ist leicht zu sehen. Denn ist $\alpha T+\beta T^2+\gamma U+\delta V = 0$, so muß, weil T alternirend, T^2, U und V symmetrisch sind, $\alpha = 0$ sein. Multiplicirt man nun die Gleichung mit T, V oder U, so erkennt man durch denselben Schluß, daß auch β, γ und δ verschwinden.

Der Relation (10) zufolge genügt die Form X der Gleichung

$$(29)\qquad X^3-fX^2+gX = 0$$

und hat demnach die charakteristische Function

$$(30)\quad |\varrho R+\sigma S+\tau T+\vartheta T^2+\lambda E| = \lambda^3+f\lambda^2+g\lambda = \lambda g(\varrho,\sigma,\tau,\vartheta-\lambda).$$

Bildet man daraus die Gleichung, der die Form $X+\lambda E$ genügt, so findet man nach (2) für ihre adjungirte Form den Ausdruck

$$(31)\qquad \overline{X+\lambda E} = g(E+T^2)-\lambda(X-fE)+\lambda^2E.$$

Z. B. hat die Form

$$S^2+E+T^2 = bS+(b'+1)T^2+E$$

die Determinante b'^2 und die adjungirte Form

$$(b'^2+b'-b^2)T^2-bS+b'^2E,$$

wie in § 3 direct durch Rechnung gezeigt worden ist.

Bemerkung zu Hilbert's Theorie der algebraischen Formen.

Von

A. Schönflies.

(Vorgelegt von F. Klein).

Die folgende Note bezieht sich auf die unlängst von Herrn Hilbert aufgestellten fundamentalen Theoreme über Systeme algebraischer Formen [1]). Wie Herr Hilbert nachgewiesen hat, führt die Aufgabe, alle linear von einander unabhängigen Formen einer bestimmten Ordnung zu finden, welche in Bezug auf einen gegebenen Modul $(F_1, F_2 \ldots F_m)$ der Null congruent sind, d. h. also der Gleichung

$$F_1 X_1 + F_2 X_2 + \cdots + F_m X_m = 0$$

genügen, auf eine stets endliche Kette von ähnlich gebildeten Gleichungssystemen, deren Zahl höchstens gleich der Zahl der in den homogenen Formen $F_1, F_2 \ldots F_m$ auftretenden Variabeln $x_1, x_2 \ldots x_n$ ist. Die Gesammtheit der von einander linear unabhängigen Lösungen eines solchen Gleichungssystems, durch welche sich jede andere Lösung linear so ausdrücken läßt, daß die Coefficienten beliebige Formen von $x_1 \ldots x_n$ sind, heißt ein volles Lösungssystem. Zur Kennzeichnung dieses Satzes behandelt Herr Hilbert im besondern den einfachen Modul $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ und beweist für ihn den folgenden Satz:

Wird für die Gleichung

$$x_1 X_1 + x_2 X_2 + \cdots + x_n X_n = 0$$

die Kette der abgeleiteten Gleichungssysteme aufgestellt, so besteht allgemein das $s$te Gleichungssystem dieser Kette aus $\binom{n}{s-1}$ Gleichungen, während für dasselbe die Zahl der zu bestimmenden Formen gleich $\binom{n}{s}$ und die Zahl der Lösungen des vollen Lösungssystems gleich $\binom{n}{s+1}$ ist. Die Coefficienten der abgeleiteten Gleichungen sind sämmtlich lineare Formen.

Der Beweis dieses Satzes wird in der Hilbertschen Arbeit unter Benutzung desselben Gedankens geführt, welcher für den

1) Ueber die Theorie der algebraischen Formen, Math. Annalen, Bd. 36, S. 473.

Beweis des grundlegenden Theorems III, das sich auf einen beliebigen Modul bezieht, benutzt worden ist, nämlich durch den Schluß von $n-1$ auf n. Es scheint bisher nicht bemerkt worden zu sein, daß sich in diesem Fall die gesammte Kette der abgeleiteten Gleichungen in expliciter Form direct angeben läßt. Da dieses Beispiel eine gewisse principielle Bedeutung besitzt, so erscheint es ganz erwünscht, die volle Kette der zugehörigen abgeleiteten Gleichungssysteme unmittelbar übersehen zu können; dieselbe möge daher hier mitgetheilt werden. Uebrigens unterscheiden sich diese Gleichungssysteme auch insofern von denjenigen, welche im Hilbertschen Beweis auftreten, als die in der Aufgabe liegende Symmetrie nach den Variabeln $x_1, x_2 \ldots x_n$ den abgeleiteten Gleichungssystemen ausnahmslos erhalten bleibt. Die Coefficienten dieser Gleichungssysteme, welche nach obigem Satz immer lineare Formen sind, reduciren sich dabei auf die Variabeln $x_1, x_2 \ldots x_n$ selber, wie dies auch in dem von Herrn Hilbert behandelten Beispiel $n = 4$ der Fall ist.

Sind λ und μ irgend zwei der Zahlen $1, 2 \ldots n$ und ist $\lambda < \mu$, so können die sämmtlichen $\binom{n}{2}$ linear unabhängigen Lösungen, welche das volle Lösungssystem von

$$1) \qquad x_1 X_1 + x_2 X_2 + \cdots + x_n X_n = 0$$

bilden, durch Gleichungen von der Form

$$X_1 = 0,\ X_2 = 0,\ \ldots\ X_\lambda = x_\mu,\ \ldots\ X_\mu = -x_\lambda,\ \ldots\ X_n = 0$$

dargestellt werden. Daraus folgt, daß sich jede Lösung der Gleichung 1) in die Gestalt

$$2) \qquad \begin{aligned} X_1 &= 0 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ X_2 &= a_{21}x_1 + 0 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + 0 \end{aligned}$$

bringen läßt, mit der Maßgabe, daß die Coefficienten a_{ik} homogene ganze Functionen von $x_1, x_2 \ldots x_n$ von gleicher Dimension sind und daß

$$a_{ik} + a_{ki} = 0$$

ist. Jede Lösung ist nämlich aus obigen $\binom{n}{2}$ Lösungen mittelst der gleichen $\binom{n}{2}$ Coefficienten zu bilden. Nun leuchtet ein, daß von Null verschiedene Beiträge in jede Form X_l nur aus solchen Lösungen eingehen, in denen X_l nicht Null ist; es können daher in ihr auch nur diejenigen Coefficienten a_{ik} auftreten, die einen Index l enthalten.

Das abgeleitete Gleichungssystem nimmt daher, wenn wir außer den in dasselbe eingehenden $\binom{n}{2}$ Formen $X_{\lambda\mu}$ $(\lambda < \mu)$ im Interesse der Symmetrie auch die Formen

$$X_{\mu\lambda} = -X_{\lambda\mu}$$

in die Gleichungen aufnehmen, folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} 0 \quad &+ x_2 X_{12} + \cdots + x_n X_{1n} = 0 \\ x_1 X_{21} + \quad &0 \quad + \cdots + x_n X_{2n} = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1 X_{n1} + x_2 X_{n2} &+ \cdots + \quad 0 \quad = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Diesem Gleichungssystem genügt man nun in allgemeinster Weise durch folgende $\binom{n}{2}$ Gleichungen

$$X_{ik} = a_{ik1} x_1 + a_{ik2} x_2 + \cdots + a_{ikn} x_n \tag{4}$$

mit der Maßgabe, daß die Coefficienten von x_i und x_k Null sind, und daß alle Coefficienten a_{ikl}, welche in den Indices übereinstimmen, dem absoluten Werthe nach einander gleich sind, während das Vorzeichen in bekannter Weise davon abhängt, ob die bezügliche Permutation der Indices eine gerade oder eine ungerade ist. Um dies einzusehen, betrachte man die $l$te der Gleichungen 3), also

$$x_1 X_{l1} + x_2 X_{l2} + \cdots + x_{l-1} X_{l,l-1} + x_{l+1} X_{l,l+1} + \cdots + x_n X_{ln} = 0,$$

denke sich die Werthe 4) eingesetzt, und betrachte diejenigen Glieder, welche explicite den Factor $x_i x_k$ enthalten, deren Coefficienten also, absolut genommen, gleich a_{ikl} sind. Diese Glieder stammen nur aus X_{ik} und X_{ki}, und zwar ist

$$\begin{aligned} X_{ik} &= a_{ik1} x_1 + a_{ik2} x_2 + \cdots + a_{ikk} x_k + \cdots + a_{ikn} x_n \\ X_{ki} &= a_{ki1} x_1 + a_{ki2} x_2 + \cdots + a_{kii} x_i + \cdots + a_{kin} x_n. \end{aligned}$$

Hieraus folgt nun, daß in dem Ausdruck

$$x_k X_{ik} + x_i X_{ki}$$

ein Glied mit $x_i x_k$ nicht auftreten kann. Denn welches auch immer die natürliche Reihenfolge der Indices i, k, l ist, so haben die Permutationen lik und lki stets verschiedenes Vorzeichen. Damit ist die obige Behauptung erwiesen.

Die Gleichungen 4) geben diejenige Form an, in welche sich jede Lösung des Gleichungssystems 3) bringen läßt. Diese Lösung läßt sich nämlich, wie leicht ersichtlich, aus $\binom{n}{2}$ einfachen Lösungen zusammensetzen, von denen diejenige, welcher man das Symbol $(\lambda\, \mu\, \nu)$ ertheilen kann, durch

5) $$X_{\mu\nu} = \pm x_\lambda, \quad X_{\nu\lambda} = \pm x_\mu, \quad X_{\lambda\mu} = \pm x_\nu$$

characterisirt ist, während alle übrigen Größen X_{ik} den Werth Null haben, und zwar ist das Vorzeichen wiederum positiv oder negativ, je nachdem die in der bezüglichen Lösung enthaltene Reihenfolge der Indices einer geraden oder ungeraden Permutation entspricht. In der That können ja in dem Ausdruck einer jeden Lösung X_{ik} von Null verschiedene Beiträge nur aus solchen Lösungen 5) stammen, in denen X_{ik} nicht selbst Null ist, es können daher in ihm auch nur diejenigen Coefficienten $a_{\lambda\mu\nu}$ auftreten, welche die Indices ik enthalten. Was endlich das Vorzeichen dieser Coefficienten betrifft, so muß es infolge der vorstehenden Bestimmungen genau dasjenige sein, welches den oben getroffenen Festsetzungen entspricht.

In dieser Weise können die weiteren Gleichungs- und Lösungssysteme ebenfalls direct angegeben werden. Das nächste Gleichungssystem ist durch die $\binom{n}{3}$ Gleichungen von der Form

6) $$x_i X_{ik1} + x_2 X_{ik2} + \cdots + x_n X_{ikn} = 0$$

in denen x_i und x_k fehlen, dargestellt, und man genügt ihm durch Lösungen, welche sich in analoger Weise, wie oben, aus $\binom{n}{4}$ Lösungen

$$X_{\mu\nu\varrho} = \pm x_\lambda, \quad X_{\nu\varrho\lambda} = \pm x_\mu, \quad X_{\varrho\lambda\mu} = \pm x_\nu, \quad X_{\lambda\mu\nu} = \pm x_\varrho$$

zusammensetzen, wo die Vorzeicheu wieder von der Art der bezüglichen Indicespermutation abhängen u. s. w. Das vorletzte Gleichungssystem ist, wenn wir zur Abkürzung alle Formen, welche aus $X_{12\cdots i-1,\,i+1\cdots n}$ durch Permutation der Indices entstehen, durch X_i' bezeichnen, von der Form

$$x_i X_k' + x_k X_i' = 0$$

und zwar ist jedes X_i' wiederum als positiv oder negativ zu wählen, je nachdem die bezügliche Permutation der Indices gerade oder ungerade ist. Das Gleichungssystem besteht aus $\binom{n}{2}$ Gleichungen, enthält n Formen, und läßt nur noch eine einzige Hauptlösung zu, nämlich

$$X_1' = x_1, \quad X_2' = x_2 \ldots X_n' = x_n$$

so daß jede Lösung derselben in die Form

$$X_1' = Ax_1, \quad X_2' = Ax_2 \ldots X_n' = Ax_n$$

gebracht werden kann. Das letzte Gleichungssystem ist

$$x_1 X' = 0, \quad x_2 X' = 0 \ldots x_n X' = 0$$

und läßt keine Lösung mehr zu.

Beispielsweise ergiebt sich für $n = 4$ folgende Kette von Gleichungen. Der Gleichung

$$x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3 + x_4 X_4 = 0$$

genügen sechs linear unabhängige Lösungen, so daß die allgemeinste Lösung folgende Form hat

$$\begin{aligned}
X_1 &= 0 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 \\
X_2 &= a_{21} x_1 + 0 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 \\
X_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + 0 + a_{34} x_4 \\
X_4 &= a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + 0.
\end{aligned}$$

Diese Lösung führt zu folgendem Gleichungssystem für die sechs Formen $X_{\lambda\mu}$

$$\begin{aligned}
0 + x_2 X_{12} + x_3 X_{13} + x_4 X_{14} &= 0 \\
x_1 X_{21} + 0 + x_3 X_{23} + x_4 X_{24} &= 0 \\
x_1 X_{31} + x_2 X_{32} + 0 + x_4 X_{34} &= 0 \\
x_1 X_{41} + x_2 X_{42} + x_3 X_{43} + 0 &= 0
\end{aligned}$$

Die allgemeinste Lösung dieses Gleichungssystems ist

$$\begin{aligned}
X_{12} &= 0 + 0 + a_{123} x_3 + a_{124} x_4 \\
X_{13} &= 0 + a_{132} x_2 + 0 + a_{134} x_4 \\
X_{14} &= 0 + a_{142} x_2 + a_{143} x_3 + 0 \\
X_{23} &= a_{231} x_1 + 0 + 0 + a_{234} x_4 \\
X_{24} &= a_{241} x_1 + 0 + a_{243} x_3 + 0 \\
X_{34} &= a_{341} x_1 + a_{342} x_2 + 0 + 0
\end{aligned}$$

und demgemäß ergiebt sich für die Formen $X_{\lambda\mu\nu}$ folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
x_3 X_{123} + x_4 X_{124} &= 0 \qquad x_1 X_{231} + x_4 X_{234} = 0 \\
x_2 X_{132} + x_4 X_{134} &= 0 \qquad x_1 X_{241} + x_3 X_{243} = 0 \\
x_2 X_{142} + x_3 X_{143} &= 0 \qquad x_1 X_{341} + x_2 X_{342} = 0.
\end{aligned}$$

Diesem System genügt man nun durch

$$X_{123} = a_{1234} x_4, \quad X_{124} = a_{1243} x_3, \quad X_{134} = a_{1342} x_2, \quad X_{234} = a_{2341} x_1$$

so daß als letztes Gleichungssystem, das keine Lösung mehr zuläßt

$$X_{1234} x_4 = 0, \quad X_{1234} x_3 = 0, \quad X_{1234} x_2 = 0, \quad X_{1234} x_1 = 0$$

resultirt.

Hiermit ist die oben ausgesprochene Behauptung dargethan. Ich bemerke übrigens, daß man auf Grund der vorstehenden Entwickelungen auch den im Eingang dieser Note angegebenen Satz selbst erweisen kann. Man überzeugt sich nämlich leicht, daß die $\binom{n}{s+1}$ Lösungssysteme des $s$ten Gleichungssystems in allen Fällen linear unabhängig sind, und daß weitere von einander linear unabhängige Lösungen nicht existiren können. Zu letzterem Behuf könnte man übrigens auch die von Herrn Hilbert für jeden Modul angegebene characteristische Function $\chi(R)$ benutzen. Da nämlich offenbar jede Form der Rten Ordnung nach dem Modul $(x_1 \ldots x_n)$ der Null congruent ist, so ist $\chi(R) = 0$; andererseits kann der allgemeinen Gestalt von $\chi(R)$, deren Beschaffenheit sich auf Grund des allgemeinen Theorems III direct angeben läßt, nur durch diejenigen Coefficienten genügt werden, welche mit den im obigen Satz figurirenden Zahlen identisch sind. Dies ist auch dann noch der Fall, wenn der Grad R der bezüglichen Formen kleiner als n ist; in diesem Fall bricht zwar die Kette der abgeleiteten Gleichungen vor dem $n$ten Gleichungssystem ab, die auf dasselbe bezüglichen Schlüsse werden aber dadurch in keiner Weise tangirt.

Bemerkung über die Auflösung quadratischer Congruenzen.

Von

Alberto Tonelli in Rom.

(Vorgelegt von Ernst Schering am 7. November.)

Auszug aus Briefen vom 18. April und 15. Juni 1891.

Das bekannte Verfahren zur allgemeinen Auflösung einer quadratischen Congruenz für einen Modul, welcher eine von der Form $4h + 1$ verschiedene Primzahl ist, habe ich in der Weise verallgemeinert, daß es auch auf Primzahlen dieser letzteren Form anwendbar wird.

Wenn die Congruenz

$$xx \equiv c \pmod{p}$$

zur Auflösung vorgegeben ist und noch ein beliebiger quadratischer Nichtrest $g \pmod{p}$ bekannt ist, so besteht dies Verfahren im Folgenden.

Es sei $p = \alpha 2^s + 1$, worin α ungerade $s \geqq 1$ ist, dann wird nach dem Eulerschen Satze

$$c^{\alpha 2^{s-1}} \equiv +1, \quad g^{\alpha 2^{s-1}} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Wenn noch $s \geqq 2$ ist, folgt aus der ersteren dieser beiden Congruenzen die neue

$$c^{\alpha 2^{s-2}} \equiv \pm 1 \pmod{p}.$$

Es sei nun $\varepsilon_0 = 0$ wenn das obere (+)Zeichen, $\varepsilon_1 = 1$ wenn das untere (—)Zeichen stattfindet, so daß immer

$$g^{\varepsilon_0 \alpha 2^{s-1}} c^{\alpha 2^{s-2}} \equiv +1 \pmod{p}$$

wird. Wenn nun noch $s \geqq 3$ ist, so folgt hieraus

$$g^{\varepsilon_0 \alpha 2^{s-2}} c^{\alpha 2^{s-3}} \equiv \pm 1 \pmod{p}.$$

Gilt hier das obere (+)Zeichen, so setze ich $\varepsilon_1 = 0$, gilt das unter (—)Zeichen, so setze ich $\varepsilon_1 = 1$, so daß immer

$$g^{\varepsilon_1 \alpha 2^{s-1}} g^{\varepsilon_0 \alpha 2^{s-2}} c^{\alpha 2^{s-3}} \equiv +1 \pmod{p}$$

wird. Auf diese Weise erhält man die Congruenz

$$g^{\alpha 2^{s-k}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 2 + \cdots + \varepsilon_{k-1} 2^{k-1})} c^{\alpha 2^{s-k-1}} \equiv 1 \pmod{p}$$

so lange noch $k < s$ ist; also für $k = s - 1$ wird

$$g^{\alpha 2(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 2 + \cdots + \varepsilon_{s-2} 2^{s-2})} c^{\alpha} \equiv 1 \pmod{p}$$

und demnach

$$x \equiv \pm g^{\alpha(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 2 + \cdots + \varepsilon_{s-2} 2^{s-2})} c^{\frac{\alpha+1}{2}} \pmod{p}$$

gesetzt, gibt die Wurzeln der Congruenz

$$x x \equiv c \pmod{p}.$$

Aus dieser Lösung erhält man durch

$$x_1 \equiv x^{p^{\lambda-1}} \; c^{\frac{p^\lambda - 2p^{\lambda-1} + 1}{2}} \pmod{p^\lambda}$$

eine allgemeine Auflösung der Congruenz

$$x_1 x_1 \equiv c \pmod{p^\lambda},$$

wie man sich leicht mit Anwendung des verallgemeinerten Fermatschen Satzes und des Satzes überzeugt, daß wenn

$a \equiv b \pmod{p}$ ist, auch $a p^{\lambda-1} \equiv b p^{\lambda-1} \pmod{p^\lambda}$ wird.

Diese Formeln für die Wurzeln sind nicht nur theoretisch bemerkenswerth, sondern sie können auch in Fällen, wo andere besondere Methoden ihren Dienst versagen, von praktischer Bedeutung zur Berechnung der Wurzel der quadratischen Congruenzen sein.

Ueber die Fluorescenzwirkungen stehender Lichtwellen.

Von

P. Drude und **W. Nernst.**

Es bietet ein erhebliches Interesse, die bekannten Untersuchungen Hrn. Wiener's[1]) über die photographische Wirksamkeit stehender Lichtwellen auch auf andere Erscheinungen, durch welche Lichtbewegung objektiv zur Darstellung gebracht werden kann, auszudehnen, und für möglichst verschiedene Arten derselben folgende beiden Fragen zu beantworten:

1) Giebt es bei stehenden Lichtwellen Maxima und Minima der Wirkungsweise?

2) Fallen bei ein und derselben stehenden Lichtwelle die Maxima der Wirkung für die verschiedenen, zur Untersuchung gelangten Erscheinungsklassen zusammen?

Wirkungen des Lichtes sind auf vielen, recht verschiedenartigen Gebieten beobachtet; außer der durch Belichtung hervorgebrachten Erwärmung, Fluorescenz, und der Erscheinung der Hauchbilder, wie von Wiener erwähnt ist, möchten wir hier noch die durch Belichtung hervorgerufene Entladung negativ elektrisch geladener Körper, die Widerstandsänderungen des Selen's oder Chlorsilbers[2]), den Einfluß des Lichtes auf elektrische Funkenentladung[3]) und die photoelektrischen (Becquerel'schen[4])) Ströme nennen.

Die Schwierigkeit der Untersuchung stehender Lichtwellen beruht hauptsächlich in zwei Punkten: einmal muß der Körper, durch dessen Verhalten die Wirkung der Bäuche und Knoten der stehenden Lichtwelle untersucht werden soll, dünn sein im Vergleich

---

1) O. Wiener, Wied. Ann. 40, p. 203, 1890.
2) Sr. Arrhenius, Wiener Ber. 96, p. 831. 1887.
3) H. Hertz, Wied. Ann. 31, p. 983, 1887.
4) Ed. Becquerel, La lumière, T. 2, p. 121, Paris 1868.

zur Wellenlänge des angewandten Lichtes, damit bei dem benutzten lichtempfindlichen Körper nicht die Wirkung von Schwingungsbauch und Schwingungsknoten gleichzeitig vorhanden ist; eine andere Schwierigkeit wird durch die Herstellungsart stehender Lichtwellen hervorgebracht. Eine stehende Lichtwelle wird erzeugt durch die Interferenz zweier in entgegengesetzter Richtung sich fortpflanzender Wellenzüge von gleicher Amplitude. Dies wird mit großer Annäherung durch Reflexion des Lichtes an einem Silberspiegel erreicht, da über 90 % des einfallenden Lichtes am Silber reflectirt werden. Das lichtempfindliche Häutchen, wie kurz der Körper genannt werden möge, an welchem irgend eine Art der Wirkung stehender Lichtwellen untersucht werden soll, muß nun nahezu dem Silberspiegel parallel liegen, damit sich genügend weit räumlich auf dem Häutchen der Wellenbauch von dem Wellenthal trennt und zwar in einem Abstand von dem Spiegel, welcher um so kleiner sein muß, je weniger homogen die zur Wirkung gelangende Lichtsorte ist, damit nicht der Schwingungsbauch und Schwingungsknoten für zwei Lichtstrahlen verschiedener Wellenlänge auf dem lichtempfindlichen Häutchen zusammenfallen und dadurch die Wirkung von Bauch und Knoten gar nicht getrennt werden kann. Man wird daher das einfallende Licht spectral zerlegen müssen, falls man den Abstand des Häutchens vom Spiegel nicht beliebig klein machen kann. Enthält jede Stelle im erzeugten Spectrum Licht von streng einerlei Wellenlänge und Richtung so würde man den Abstand des Häutchens vom Spiegel beliebig groß wählen können. Indeß kann man ein derartiges Spectrum nicht mit genügender Lichtintensität herstellen, vor Allem bei Erscheinungen, welche nicht, wie die photographische Wirkung, durch längere Exposition verstärkt werden können. Denn bei der gewöhnlichen Herstellungsart des Spectrums durch Spalt, Collimatorlinse, Prisma und Sammellinse ist das Spectrum nur für einen sehr schmalen Spalt hinreichend rein. Man wird dem Spalt meist eine gewisse Breite geben, um überhaupt deutliche Lichtwirkung zu bekommen und daher das lichtempfindliche Häutchen in sehr kurzen Abstand vom Silberspiegel bringen müssen. Die große Nähe desselben verursacht experimentelle Schwierigkeiten hauptsächlich für die Beobachtung der elektrischen Lichtwirkungen, während die Herstellung eines genügend dünnen lichtempfindlichen Körpers auch für diese Klasse von Erscheinungen wohl möglich zu sein scheint. — Man könnte ferner stehende Lichtwellen erzeugen durch Reflexion an zwei Spiegeln, (am besten totalreflectirenden Prismen), welche unter 45° gegen einen einfallenden

Wellenzug geneigt sind und sich einander zuwenden. In dem Zwischenraum zwischen beiden Spiegeln würden sich stehende Lichtwellen bilden. Bringt man das lichtempfindliche Häutchen nahezu in die Ebene, zu welcher beide Spiegel symmetrisch liegen, so würden auf ihm Schwingungsbauch und Schwingungknoten genügend weit räumlich getrennt werden können und zwar wäre ihre Lage unabhängig von der Wellenlänge des angewandten Lichtes. Letzteres brauchte daher nicht homogen zu sein, wohl aber sehr streng von einerlei Richtung und daher wird auch diese Methode zunächst auf Schwierigkeiten stoßen. — Eine dritte Untersuchungsmethode der Wirkung stehender Wellen bietet sich in der Totalreflexion, bei der man die Nähe eines Metallspiegels vermeidet; es wird davon weiter unten näher die Rede sein.

Von den erwähnten Lichtwirkungen haben wir zunächst nur bei der Fluorescenz Resultate erhalten, welche für die Beobachtung die bequemste ist und wobei wir uns in allen wesentlichen Punkten an die Wiener'sche Versuchsanordnung anschlossen. Als Lichtquelle diente das elektrische Bogenlicht, welches, namentlich wenn man die Kohlenspitzen in eine größere Distanz (etwa $^1/_2$ cm) von einander bringt, sodaß ein großer Lichtbogen entsteht, die kräftigsten Fluorescenzwirkungen der zu Gebote stehenden Lichtquellen besitzt. Das Bogenlicht wurde durch eine Dynamomaschine geliefert, die Stromstärke auf 15 bis 20 Amp. regulirt, für großen Abstand der Kohlenspitzen war durch Veränderung der Regulirgewichte der Lampe Sorge getragen. Letztere befand sich in einem anderen Zimmer, als der Beobachtungsraum, welcher völlig verdunkelt werden konnte. Das Spaltrohr eines Spektrometers war lichtdicht durch ein Loch in der Thüre des Beobachtungsraumes geschoben, der Spalt empfing die Strahlen der Kohlenspitzen meist direkt, ohne dazwischen geschaltete Linse. Es zeigte sich, daß man so durch Annäherung der Kohlenspitzen an den Spalt eine größere Intensität des Fluorescenzlichtes im Beobachtungsraum erhielt, als wenn das Bogenlicht durch ein Glaslinsensystem auf den Spalt concentrirt wurde.

In dem Spaltrohr befand sich als Collimaterlinse eine Quarzlinse, das durch diese parallel austretende Licht wurde durch ein auf dem Spektrometertischchen im Minimum der Ablenkung aufgestelltes Flintglasprisma von 45° brechenden Winkel spectral zerlegt, und fiel dann auf die ebenfalls aus Quarz bestehende Objektivlinse des Spektrometerfernrohrs, dessen Ocular herausgenommen war. In der Brennebene der Objektivlinse entsteht dann ein Spektrum des Bogenlichtes, und durch einen in der Ebene liegenden

Spalt (Ocularspalt) konnte ein beliebiger Theil des Spektrums ausgeblendet werden. Das zerlegende Flintglasprisma fluorescirte unter der Wirkung des Bogenlichtes und mußte daher die wirksamen Strahlen etwas absorbiren. Indeß erwies sich durch direkte Versuche, indem das Glasprisma durch ein Quarzprisma ersetzt wurde, die Absorption als so gering, daß ersterem wegen des Fehlens der Doppelbrechung der Vorzug vor letzterem gegeben wurde. — Sehr verschiedenartige Substanzen (auch Papier, Holz, Gelatine) fluoresciren mehr oder weniger stark, wenn auf sie das Spektrum des Bogenlichtes geworfen wurde. Für alle lag das Maximum des Fluorescenzlichtes in zwei breiteren violetten Banden, welche ziemlich nahe an der Stelle, wo die H-Linien des Sonnenspektrums auftreten, sich befinden und zwar von diesen aus nach dem brechbareren Ende des Spektrums hin. Besonders die den H-Linien zunächst benachbarte Bande zeichnet sich durch sehr starke Fluorescenzwirkung aus und wurde daher allein bei den schließlichen Versuchen benutzt. Beide Banden liegen noch im sichtbaren Theil des Spectrums, wenn auch das Licht der brechbareren Bande nur noch wenig intensiv ist. Die mittlere Wellenlänge der benutzten Bande ergab sich mit Hülfe eines Glasgitters von 0,0045 mm Strich-Abstand zu 0,000386 mm. Die Messung wurde in der Weise vorgenommen, daß eine Glasplatte, auf welcher eine gelatinöse wässrige Lösung von Fluorescein zu einer etwa 1/100 mm dicken Haut eingetrocknet war, in der Brennebene des Objectivs befestigt wurde. Die beiden wirksamen Banden kennzeichnen sich durch zwei hellglänzende grüne Linien, welche man bei schiefer Durchsicht auf der Glasplatte wahr nimmt. Indem man das Fernrohr des Spektrometers so dreht, daß die der zu untersuchenden ersten Bande angehörige Linie auf eine bestimmte Marke der Glasplatte fällt, erhält man den durch das Gitter erzeugten Ablenkungswinkel der Bande und daher auch ihre Wellenlänge.

Eine nach der beschriebenen Art hergestellte fluorescirende Platte ist für alle Versuche über Fluorescenz sehr bequem, einerseits der Handlichkeit wegen, andrerseits weil wegen der geringen Dicke der fluorescirenden Schicht die wirksamen Banden des Spektrums sich scharf auf der Platte abzeichnen.

Es handelte sich nun um Herstellung einer Haut von der Dicke eines Bruchtheils der Wellenlänge, welche noch deutliche Fluorescenz aufwies. Dazu muß eine Substanz gewählt werden, welche in wässriger Lösung ein starkes Fluorescenzvermögen aufweist und welche eine hinreichend große Löslichkeit in Wasser besitzt, weil die in wässriger Lösung wirksamen Stoffe im krystallisirten

Zustande nicht fluoresciren. — Den genannten Anforderungen genügte in ausreichenden Maße das Natronsalz des Fluoresceins.

Es wurde eine Reihe von verschieden concentrirten wässrigen Lösungen dieser Substanz hergestellt, diesen Lösungen Gelatine im Verhältniß 1 : 600 zugesetzt und Glasplatten mit ihnen benetzt. Nach dem Eintrocknen der Lösung blieb auf ihnen eine Haut zurück, welche ungefähr den 600sten Theil der Dicke der ursprünglichen Wasserhaut besitzt. Man erhält so leicht Häute, welche im reflectirten weißen Lichte die eisengraue Farbe der Newton'schen Skala zeigen und welche eine Dicke von 1/20 bis 1/30 der mittleren Wellenlänge des weißen Lichtes besitzen. Diese Dicke wurde auch direkt gemessen, indem auf der Glasplatte mit der Spitze eines Messers eine schmale Partie der Haut weggeschabt, und dann eine andere Glasplatte fest gegen die erste angedrückt wurde. Die Dicke der Gelatine-Haut bestimmt sich dann leicht durch die Gestalt der Interferenzstreifen, welche bei homogener Beleuchtung an der zwischen beiden Platten befindlichen Luftschicht erzeugt werden und an der geschabten Stelle eine Discontinuität zeigen.

Gleichdicke Stellen der verschiedenen Häute, welche aus den einzelnen Lösungen hergestellt waren, wurden dann auf ihr Fluorescenzvermögen hin geprüft, indem man sie in die wirksame Bande des Bogenlicht-Spektrums brachte. Es erwieß sich eine Lösung, welche das Fluorescein in der Concentration 1 : 500 ursprünglich (vor dem Eintrocknen) enthalten hatte, am günstigsten; mit dieser sind die weiteren Versuche angestellt.

Zum Zweck größerer Lichtintensität wurde der Spalt des Collimatorrohrs etwa 2 mm breit gemacht. Das Fluorescenzlicht erwieß sich dann auf einigen Platten so stark, daß es auch im nicht verdunkelten Beobachtungszimmer deutlich wahrzunehmen war. Die erste wirksame Bande im Spectrum des Bogenlichtes zeichnete sich als fast 3 mm breites grünes Lichtband auf den fluorescirenden Substanzen ab. Es konnte ein Ocularspalt von dieser Breite eingesetzt werden, welcher also das unwirksame Licht abblendete.

Auf einer ungefähr 3 mm dicken planparallel geschliffenen Glasplatte, welche im Bogenlicht nicht merklich fluorescirte, wurde eine fluorescirende Haut auf die beschriebene Weise hergestellt, und diese dann auf eine andere ebengeschliffene chemisch versilberte Glasplatte gelegt, deren Silberbelegung durch einen weichen Lederlappen, auf welchem sich ein wenig Pariser Roth befand, gut polirt war. Die fluorescirende Haut war dem Silberspiegel

zugewandt. Zunächst rief die wirksame Bande des Bogenlichtes nur eine gleichmäßige Fluorescenz in der Haut hervor. Dies war eine Folge der mangelnden Homogenität des Spektrums, welche durch die beträchtliche Breite des Collimatorspaltes verursacht war. Denn als durch Hin- und Herschieben der Glasplatte der Abstand der Haut vom Silberspiegel so verringert wurde, daß im reflectirten weißen Lichte die Newton'schen Farben der höheren Ordnungen sichtbar wurden, erschien das grüne Lichtband des Fluorescenzlichtes deutlich von schwarzen Minimis durchzogen. Die Lage derselben entsprach der Lage der im weißen reflectirten Lichte auftretenden Newton'schen Farben, nur war der Abstand ersterer (entsprechend der kleineren Wellenlänge der wirksamen Bande des Bogenlichtes) kleiner, als der der letzteren. Die Fluorescenz-Minima wanderten auf der Platte, falls man durch Drücken mit dem Finger ihren Abstand vom Silberspiegel änderte, ein Beweis dafür, daß die Streifung nicht durch ungleichmäßige Dicke der fluorescirenden Haut hervorgebracht sein konnte. Die Erscheinung zeigte sich um so mehr in grüner Farbe, unter je schieferem Winkel man die Platte betrachtete. Falls sich die Lage des Auges dem Reflexionswinkel näherte, schlug die Erscheinung mehr in die der wirksamen Bande angehörige violette Farbe um, offenbar, weil das vom Silberspiegel diffus reflectirte violette Licht mit ins Auge gelangte. Daß dieses nicht etwa allein eine Interferenzfigur aufwies, welche scheinbar auch die Interferenzfigur der Fluorescenz hervorgebracht hätte, konnte deutlich durch folgenden Versuch nachgewiesen werden. Die fluorescirende Haut war in einer Breite von 2 mm auf der Glasplatte entfernt. Dieser Streifen war dem Ocularspalt parallel, während die Platte auf den Silberspiegel so angedrückt und festgebunden wurde, daß die Interferenzstreifen senkrecht zu dem Ocularspalt und dem geschabten Streifen verliefen. Sowie nun bei unveränderter Stellung des Auges des Beobachters die Plattenkombination so bewegt wurde, daß der Streifen, auf welchem die fluorescirende Haut weggeschabt war, in den belichteten Theil trat, erschien derselbe in gleichmäßigen violetten Lichte ohne durchziehende schwarze Streifen, während die unmittelbar angrenzenden Stellen, auf welchem sich Fluorescein befand, dieselben deutlich aufwiesen.

Daß schließlich die Erscheinung wirklich lediglich durch die Einwirkung der stehenden Lichtwellen auf die Fluorescenz hervorgebracht wurde, ergab sich auch daraus, daß, wenn man den Ocularspalt entfernte, sodaß ein breiteres Spektrum des Bogen-

lichtes auf die Platten-Kombination fiel, das grüne von schwarzen Streifen durchzogene Lichtband nur an der Stelle der wirksamen Bande des Spektrums auftrat, während an den unmittelbar anliegenden Theilen desselben, welche fluorescirend nicht wirken, Dunkelheit oder gleichmäßig diffuses blaues Licht herrschte. — Zur weiteren Controlle wurde auch eine Plattencombination hergestellt, bei der die hintere Glasplatte nicht mit Silber belegt war. Es traten im reflectirten Lichte sehr scharf Newton'sche Ringe auf, weit deutlicher, als bei der vorigen Plattencombination mit Silberspiegel. Die Lichterscheinung der fluorescirenden dünnen Haut der vorderen Glasplatte war aber kaum merklich von dunkleren Partieen durchzogen, welche fast ganz verschwanden, als die Plattencombination umgekehrt wurde, sodaß die fluorescirende Haut sich auf der hinteren Glasplatte befand. Alles dies erklärt sich vollständig aus der geringen Reflexion des Lichtes am Glase, welche nur in sehr unvollkommender Weise stehende Lichtwellen zu Stande kommen läßt.

Es ist also durch diese Versuche als erwiesen anzusehen, daß stehende Lichtwellen Maxima und Minima der Fluorescenzwirkung haben.

Es handelte sich nun darum, die zweite der oben genannten Fragen zu entscheiden, ob nämlich die Maxima der Fluorescenz mit den Maximis der photographischen Wirkung zusammenfielen. Schon durch Betrachtung der Plattenkombination unter verschiedenen Einfallswinkeln ließ sich diese Frage entscheiden. Denn falls man die Platten so gegen die Fernrohraxe des Spektrometers neigte, daß direkt reflectirte Strahlen ins Auge des Beobachters gelangten, waren, wenn auch nur undeutlich, Newton'sche Interferenzfransen zu sehen. Die Maxima des direkt reflectirten Lichtes fielen zusammen mit den Maximis des Fluorescenzlichtes, wie sie am besten bei recht schiefer Betrachtung der Platten gesehen wurden. Dasselbe Resultat ergiebt sich aus den Wiener'schen Untersuchungen, d. h. die Maxima der Fluorescenzwirkungen stehender Lichtwellen fallen mit den Maximis ihrer photographischen Wirkung zusammen.

Um dieses Resultat völlig sicher zu erhalten, wurden Versuche mit rechtwinklig sich schneidenden Wellen gemacht, analog wie sie Wiener für die photographische Wirkung angestellt hat. Abweichend von der Wiener'schen Anordnung war nur, daß erst hinter dem (vertikalen) Ocularspalt ein etwa 3 cm dickes, wasserhelles Kalkspath-Parallelepiped mit horizontal liegendem

Hauptschnitt aufgestellt wurde. Durch eine dahinter befindliche Linse von kurzer Brennweite wurden in einer Distanz von ungefähr 20 cm vom Ocularspalt zwei nebeneinander liegende reelle Bilder desselben erzeugt, deren Polarisationsebene bezw. vertikal und horizontal lagen. Es wurde dann auf die zu den bisherigen Versuchen benutzte Plattencombination ein rechtwinkliges Glasprisma mit seiner Hypothenusenfläche aufgesetzt, dessen eine Kathetenfläche senkrecht gegen die einfallenden Lichtstrahlen gestellt wurde. Behufs Vermeidung von Totalreflexion ließen wir zwischen fluorescirender Haut und Silberspiegel einen Tropfen Benzol einsaugen (welches die Gelatine-Haut nicht auflöst[1]), und etwas Wasser zwischen Prisma und vorderer Glasplatte (Kanadabalsam ist nicht anzuwenden wegen seiner starken Fluorescenz). Von den beiden auf der Gelatinehaut hervorgerufenen Streifen Fluorescenzlichtes erschien nur der eine von schwarzen Minimis durchzogen, während der andere gleichförmig hell war. Dabei wechselten die beiden vom Ocularspalt entworfenen reellen Bilder ihre Rollen, wenn einmal die Einfallsebene der Gelatinehaut horizontal, und wenn sie ein zweites Mal vertikal lag, und zwar rief immer dasjenige Bild Streifung im Fluorescenzlicht hervor, dessen Polarisationsebene mit der Einfallsebene zusammmenfiel. Diese Erscheinung ist am besten zu sehen bei Betrachtung der Plattencombination durch die dem einfallenden Lichte zugekehrte Kathetenfläche des rechtwinkligen Prismas, da dadurch alle Spuren diffus vom Silber reflectirten violetten Lichtes vermieden werden. Die Betrachtung der Platten in beiden Lagen (mit horizontaler und vertikaler Einfallsebene) geschah deshalb, um dadurch den Einwand gegen die Beweiskraft der Versuche zu vermeiden, daß die beiden reellen Bilder des Ocularspaltes infolge der durch Brechung im zerlegenden Prisma hervorgerufenen Polarisation des Bogenlichtes nicht völlig gleiche Intensität besitzen.

Da die Fluorescenz im angewandten rechtwinkligen Glasprisma die Deutlichkeit der Erscheinung beeinflußte, haben wir auf einer Seite eines gleichzeitigen Quarzprismas, dessen brechende Kanten der optischen Axe parallel lag, eine etwa 1/15 Wellenlänge dicke fluorescirende Haut hergestellt, und diese dicht gegen einen Silberspiegel gedrückt, sodaß im reflectirten weißen Lichte

1) Um sicher zu sein, daß dies Vorhandensein des Benzols die Fluorescenz nicht modificirte, wurde auch die Plattencombination ohne rechtwinkliges Glasprisma mit eingesogenem Benzol bei senkrechter Incidenz des einfallenden Lichtes untersucht. Es traten ebenfalls deutliche schwarze Minima im Streifen des Fluorescenzlichtes auf.

Newton'sche Farben der höheren Ordnungen auftraten. Die Fluorescenz dieser Haut ist so stark, daß sie schon im diffusen Tageslichte als grüner Schimmer wahrnehmbar ist. Läßt man zwischen Silberspiegel und Quarzprisma einen Tropfen Benzol einsaugen und bringt eine Fläche des Quarzprismas in eine solche Lage gegen das einfallende Licht, daß es ungefähr unter 45° gegen die Hinterfläche des Prismas gebrochen wird, so traten die beschriebenen Erscheinungen sehr deutlich auf und sind auch im nicht verdunkelten Zimmer gut zu beobachten[1]).

Diese Versuche beweisen vollständig, daß die Maxima der Fluorescenz mit den Maximis der photographischen Wirkung zusammenfallen, da für letztere Wiener ganz analoge Resultate erhalten hat.

Mit den gewonnenen Resultaten steht ein anderer, einfacher Versuch im Einklang: Eine Quarzplatte wurde zum Theil versilbert und dann mit einer fluorescirenden Haut überzogen, welche in Richtungen, die senkrecht zur Trennungslinie des versilberten vom unversilberten Theil lagen, nahezu gleiche Dicke besaß. Es konnte dies erreicht werden, indem beim Eintrocknen der auf die Quarzplatte gebrachten fluorescirenden Lösung erstere schräg gestellt wurde, sodaß obige Trennungslinie am stärksten gegen den Horizont geneigt war. Es wurde die so präparirte Quarzplatte in die wirksame Bande des Spektrums des Bogenlichtes senkrecht zu den Lichtstrahlen gebracht, und zwar derart, daß die Trennungslinie des versilberten Theiles der Quarzplatte von dem unversilberten Theil senkrecht zum Ocularspalt verlief, sodaß gleiche dicke Stellen der fluorescirenden Haut dem Lichte ausgesetzt wurden, welche theils auf Silber, theils auf Quarz lagen; unter diesen Bedingungen fluorescirten letztere Stellen deutlicher als erstere, solange die Haut dünn (kleiner als die halbe Wellenlänge) war. An Stellen der Haut, welche dicker als eine halbe Wellenlänge des einfallenden Lichtes waren, kehrte sich die Erscheinung um, indem die Stellen auf der Silberbelegung stärker fluorescirten, als die auf der Quarzfläche. Dies Phänomen erklärt sich vollständig dadurch, daß die Fluorescenz einer dünnen auf

1) Diese Fluorescenzerscheinung bietet so ein bequemeres Mittel zur Demonstration der Wirkung stehender Wellen, als die Photographie, da die Plattencombination für alle Zeit brauchbar bleibt. Vielleicht kann sie daher zum Vorlesungsexperiment verwandt werden. Bei geringer Dicke der zwischenlagernden Luftschicht sind die Erscheinungen auch bei Beleuchtung mit nicht spektral zerlegten Bogenlicht wahrnehmbar. — Auch im violetten Theil des Sonnenspectrums war eine allerdings undeutliche Streifung des Fluorescenzlichtes wahrzunehmen.

Silber liegenden Haut durch die Wirkung der in ihr zu Stande kommenden stehenden Lichtwelle zerstört wird, da nach den Versuchen am Spiegel selbst ein Minimum der Wirkung liegt.

Belegt man die eine Fläche eines Prismas einer durchsichtigen Substanz (Glas, oder Quarz) mit einer fluorescirenden Haut, welche dünn im Vergleich zur Wellenlänge ist, und dreht man das Prisma, indem die Seite mit der überziehenden Haut den einfallenden Lichtstrahlen abgewandt ist, so daß man allmählig von partieller Reflexion derselben an der Hinterfläche des Prismas zur Totalreflexion gelangt, so tritt bei letzteren eine bedeutende Verstärkung der Fluorescenz der Haut gegenüber der bei partieller Reflexion der einfallenden Lichtstrahlen hervorgerufenen ein[1]).

Läßt man auf die Vorderfläche des Prismas die beiden senkrecht zu einander polarisirten Bilder fallen, welche man nach der beschriebenen Anordnung mit Hülfe des Doppelspaths erhält, und wählt die Einfallsebene der Hinterfläche des Prismas mit der einen der Polarisationsebenen der beiden Bilder zusammenfallend, so läßt sich aus dem Verhältniß der Intensität, mit welcher in beiden Bildern bei der Totalreflexion Fluorescenz erregt wird, auf die Wirkungsweise der stehenden Wellen schließen, und zwar nach folgender Ueberlegung:

Nehmen wir der Einfachheit halber an, das Licht fiele im Innern des Prismas unter 45° auf seine Hinterfläche und es wäre der Brechungsexponent der dünnen Gelatinehaut dem des Prismas gleich, sodaß auch in dieser durch Reflexion zwei senkrecht sich kreuzende Wellenzüge für jeden der beiden vom Ocularspalt gebildeten Lichtstreifen sich fortpflanzen. Setzt man voraus, daß ein Maximum von Fluorescenzwirkung eintritt im Schwingungsbauche einer gewissen Vectorgröße, die infolge der Lichtbewegung periodische Aenderungen erleidet, so wird die Intensität der Fluorescenz in demjenigen Lichtstreifen, in welchem jener Vector parallel zur Einfallsebene gerichtet ist, proportional der doppelten Summe des Quadrates der Amplitude des betreffenden Lichtvectors sein: in demjenigen Lichtstreifen indessen, in welchem der Vector senkrecht zur Einfallsebene schwingt, ist die Intensität der

1) Diese Thatsache, welche auch bei dickeren Häutchen vorhanden ist, kann daher zur Konstruktion eines fluorescirenden Oculars benutzt werden, wenn man mit Hülfe desselben die Fluorescenzwirkungen verschiedener Spektralbereiche bei direkter Durchsicht studiren will. Abgesehen von der Verstärkung der Fluorescenz durch Totalreflexion ist die letztere noch deshalb nützlich, weil sie alles Licht, welches nicht Fluorescenz hervorruft, völlig vom Auge des Beobachters abschneidet.

Fluorescens proportional der vierfachen Amplitude des Vectors oder gleich Null, je nachdem für denselben bei der Totalreflexion an der reflectirenden Fläche ein Schwingungsbauch oder Schwingungsknoten liegt. Dabei ist abgesehen von Phasenänderungen, welche durch Totalreflexion im Allgemeinen herbeigeführt werden, welche aber beliebig klein gemacht werden können, wenn man den Einfallswinkel des Lichtes im Prisma genügend nahe am Grenzwinkel der Totalreflexion wählt.

Nun liegt aber für den zuletzt genannten Lichtvector an der totalreflectirenden Fläche selbst ein Schwingungsbauch, wie dies sowohl die Reflexionsformeln der Fresnel'schen als auch der Neumann'schen Theorie zeigen, und um einen der in jenen Formeln auftretenden Lichtvectoren muß es sich hier handeln. — Es folgt daher, daß wenn der Einfallswinkel 45° genügend nahe am Grenzwinkel der Totalreflexion liegt, einer der beiden Fluorescenzstreifen auf der Hypothenusenfläche des Prismas die doppelte Helligkeit haben muß, als der andere, und zwar derjenige, dessen Lichtvector (im obigen Sinne) senkrecht zur Einfallsebene schwingt.

Dies Resultat haben wir durch die Beobachtung bestätigen können. Wenn man ein Glasprisma, welches einen niederen Brechungsexponenten besaß, sodaß der Grenzwinkel der Totalreflexion nicht sehr von 45° verschieden war, gegen das einfallende Licht allmählich so drehte, daß an der Hypothenusenfläche des Prismas, welches mit einer dünnen fluorescirenden Haut überzogen war, zunächst keine Totalreflexion und dann solche eintrat, so war für letztere Stellungen des Prismas die Fluorescenz in demjenigen der beiden Lichtstreifen die hellere, für welchen die Polarisationsebene mit der Einfallsebene zusammenfiel. Dies Resultat wurde erhalten, sowohl wenn die Einfallsebene der Hypothenusenfläche horizontal, wie wenn sie vertikal stand. — Vom quantitativen Messungen der Helligkeit der Fluorescenz konnte bei der beschriebenen Anordnung nicht die Rede sein. Denn das einfallende Licht war nicht genügend parallel, da es zuletzt eine Linse von kurzer Brennweite passirt hatte und die absoluten Phasenänderungen durch Totalreflexion variiren sehr schnell mit dem Einfallswinkel. Auch hätte, weil der Einfallswinkel nicht genau 45° war, eine kleine Korrektion an dem Helligkeitsverhältniß der beiden Fluorescenzbilder angebracht werden müssen.

Jedenfalls stand aber diese Beobachtung qualitativ im Einklang mit den bisherigen, daß nämlich der Lichtvector, in dessem Schwingungsbauche das Maximum der Fluorescenz liegt, senkrecht zur Polarisationsebene

schwingt. Außerdem bietet letztere Beobachtung einen Fingerzeig, wie man vielleicht die Wirkungsweise stehender Wellen bei anderen lichtempfindlichen Phänomenen, wie z. B. beim Elektricitätsverlust durch Bestrahlung, oder bei den Becquerel'schen Strömen untersuchen kann.

Was übrigens die eingangs erwähnten anderen zur Untersuchung der Wirkung stehender Wellen geeigneten Phänomene anlangt, so haben wir bisher betreffs der Becquerel'schen Ströme nur vorläufige Messungen gemacht, welche uns bewiesen, daß diese Beobachtungen mit Schwierigkeiten verknüpft sein werden, wenn man zu zuverlässigen Resultaten gelangen will. Dieselben liegen einerseits daran, daß die kleinste Erschütterung schon merklich die elektromotorische Kraft einer lichtempfindlichen Zelle verändert, und andererseits daran, daß das Licht in gewissen Bereichen des Spektrums, welche je nach der Beschaffenheit der angewandten lichtempfindlichen Elektroden (Silber, Jodsilber, Chlorsilber, Bromsilber, auch je nachdem sie einmal auf hohe Temperatur gebracht sind, oder nicht) verschieden sind, sensibilatorisch wirken für ein gewisses anderes Spektralbereich, daß aber nach einmaligen Belichten der Elektrode mit letzterem seine Lichtempfindlichkeit wieder verloren geht, sie aber durch Bestrahlung mit dem sensibilatorischem Theile des Spektrums wieder gewonnen werden kann.

Bei Vorversuchen, welche wir behufs bolometrischer Prüfung der Wärmewirkungen stehender Lichtwellen anstellten, stießen wir insofern auf Schwierigkeiten, als dünnes auf Glas niedergeschlagenes Silber oder auf Glas aufgeklebtes Blattgold ein mit der Temperatur sehr wenig und dabei unregelmäßig variirendes Leitungsvermögen aufwiesen; Gelatinhäute von der erforderlichen Dünne leiteten auch bei reichlichem Zusatz guter Elektrolyte überhaupt nicht nachweisbar, sobald sie eingetrocknet waren, während sie nach schwachem Anhauchen infolge rascher Verdunstung eine sehr inkonstante Leitfähigkeit besaßen. Wegen des unvergleichlich viel größeren Temperaturkoefficienten würden sich natürlich Leiter zweiter Klasse besonders empfehlen. — Es ist in gewisser Weise plausibel, daß die Wärmewirkung stehender Wellen an denselben Stellen liegt, wie ihre Fluorescenzwirkung. Denn man kann die Erwärmung eines Körpers durch Lichtstrahlen als eine Art Fluorescenz auffassen, indem die Lichtstrahlen absorbirt werden und der Körper Strahlen größerer Wellenlänge wieder aussendet. Bei der wirklichen Fluorescenz fallen diese in den sichtbaren Theil des Spektrums, bei der Erwärmung in den

unsichtbaren, ultrarothen. Aus dem angeführten Grunde halten wir es für wahrscheinlich, daß die Wärmewirkungen stehender Lichtwellen mit den Fluoreswirkungen (und den photographischen) zusammenfallen.

Wir versuchten auch, die Erscheinung der Diffusion des Lichtes an unregelmäßigen Partikelchen zum Studium stehender Wellen zu verwerthen. Es scheinen aber bei diesem Phänomen nicht gegeneinander gerichtete Wellenzüge in gegenseitigen Einfluß gesetzt zu werden, sondern sie scheinen durch das alleinige Verhalten eines in einer Richtung (und zwar ins Auge des Beobachters) sich fortpflanzenden Wellenzuges bestimmt zu sein, gerade wie z. B. die Newton'schen Ringe im reflectirten Licht. — Man kann eine Fläche, welche das Licht diffundirt, durch Behauchen einer kalten Glasplatte herstellen. Legt man eine solche, sehr dünn behauchte, auf eine warme, so setzen sich die im direkten Licht gebildeten Newton'schen Interferenzstreifen (bei homogener Beleuchtung) weit fort in den Theil, von welchem direktes Licht nicht mehr ins Auge reflectirt wird. Dreht man die Plattencombination um, sodaß nur die Hinterfläche behaucht ist, so sind Interferenzstreifen im diffusen Licht nicht wahrnehmbar, sondern nur eine gleichmäßige Helligkeit[1]). — Ersetzt man die hintere (unbehauchte) Glasplatte durch einen angewärmten Silberspiegel, so werden die Interferenzstreifen im diffusen Licht nicht deutlicher, sondern undeutlicher als vordem; dies zeigt zur Genüge, daß nicht das Verhalten stehender Wellen bei dieser Erscheinung maßgebend ist und daß die Lage der Interferenzstreifen denselben Gesetzen unterworfen ist, wie die Lage der im direkt reflectirten Lichte sichtbaren Newton'schen Streifen. Aus letzterem kann man ja aber bekanntlich nicht eine Entscheidung dafür treffen, welcher Lichtvector für sie maßgebend ist, wenn man unter dem Worte „maßgebend" versteht, daß bei stehender Wellenbewegung der betreffende Lichtvector im Schwingungshauche ein Maximum der Wirkung besitzen soll.

1) Diese Erscheinungen zeigen sich nur bald nach dem Aufeinanderlegen der Platten, da nach längerer Zeit sich ihre Temperaturen ausgleichen und Wassertröpfchen auf beiden Flächen haften.

Bericht des Beständigen Sekretärs der Königl. Ges. d. Wiss. über das Jahr 1891.

Zur Geschichte unserer Gesellschaft geben wir zunächst die wissenschaftlichen Mittheilungen an, welche in den 8 Sitzungen gemacht worden sind.

Am 7. Februar 1891. Riecke legte eine Abhandlung des Privatdocenten Dr. Nernst vor: „Ueber das Henrysche Gesetz".

Voigt legt „Beiträge zur Hydrodynamik" vor.

Klein legt die Abhandlung des Herrn Prof. Franz Meyer in Clausthal vor: „Ueber Discriminanten und Resultanten von Singularitätengleichungen". 4. Mittheilung.

de Lagarde spricht über Inhalt und Bedeutung seiner Septuagintastudien II und III, die im 38. Band der Abhandlungen erscheinen werden.

Frensdorff legt einen Aufsatz vor: „Eine Krisis in der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften.

Am 7. März: Voigt legt: „Beiträge zur Hydrodynamik. 2. Theil." vor.

Klein legt vor: Abhandlung des Herrn Prof. Franz Meyer in Clausthal: „Realitäteneigenschaften von Raumcurven".

Schering legt von Dr. Heun in Berlin vor: „Die Schwingungsdauer des Gaussschen Bifilarpendels".

Am 2. Mai: Schwarz legt einen Aufsatz des Herrn Julius Petersen in Kopenhagen vor: „Ueber Normalformen mehrfach zusammenhängender Flächen".

Voigt legt einen Aufsatz des Herrn Dr. O. Venske vor: „Ueber einen neuen Apparat zur Bestimmung der innern Wärmeleitungsfähigkeit schlecht leitender Körper in absolutem Maasse.

de Lagarde kündigt schriftlich für die Nachrichten an:

a. Thevenots Kaffarre.

b. Ueber das aramäische Evangeliar des Vatikans.

c. Neue Ausgabe der *διατάξεις τῶν ἀποστόλων* und der drei Gestalten der Clementinen.

und für die Abhandlungen (Bd. 38): Septuagintastudien, 4. Stück.

Am 6. Juni: Klein legt eine Arbeit von Dr. Fr. Schilling vor: „Ueber die geometrische Bedeutung der Formeln der sphärischen Trigonometrie im Falle complexer Argumente".

Riecke legt a. eine eigne Arbeit vor: „Zur Theorie der piëzoëlectrischen und pyroëlectrischen Erscheinungen.

b. eine Arbeit des Herrn Dr. Tammann: „Ueber die Permeabilität von Niederschlags-Membranen.

c. eine Arbeit des Herrn Dr. Tammann und des Privatdocenten Dr. Nernst: „Ueber die Maximaltension, mit welcher Wasserstoff aus Lösungen durch Metalle in Freiheit gesetzt wird".

Kielhorn legt vor:

a. die Vikrama-Aera.

b. die Nîtimanjarî des Dyâ Dviveda.

de Lagarde: 1. Arabes mitrati. 2. Samech. 3. Ueber den Inhalt des 4. Stücks der Septuagintastudien, die er in der Sitzung vom 2. Mai angekündigt hatte.

Weiland legt für die Abhandlungen durch den beständigen Sekretär vor: „Die Wiener Handschrift der Chronik des Matthias von Neuenburg". (Gedruckt im 37. Band der Abhandlungen.)

Am 4. Juli. Schering legt eine neue Lösung der Kepplerschen Gleichung vor.

Schwarz macht eine Mittheilung über ein nächstens zu veröffentlichendes Verzeichniß aller (oder wenigstens der Mehrzahl) derjenigen Schriften, welche seit dem J. 1761 veröffentlicht sind und mit der Theorie der Flächen kleinsten Flächeninhalts sich beschäftigen.

Riecke legt eine Abhandlung vor: „Ueber eine mit den elektrischen Eigenschaften des Turmalins zusammenhängende Fläche 4. Ordnung".

Klein legt eine Arbeit des Herrn Dr. Hilbert in Königsberg vor: „Ueber die Theorie der algebraischen Invarianten".

Wüstenfeld legt eine Abhandlung vor: „Die gelehrten Schâfi'îten des V. Jahrhunderts der H. (Gedruckt im 37. B. der Abhandlungen.)

de Lagarde legt einen Aufsatz des Herrn Dr. Rahlfs vor: „Ueber Lehrer und Schüler bei Junilius Africanus".

Am 1. August. Riecke kündigt eine Arbeit von sich und Voigt an: „Bestimmung der elektrischen Konstanten des Turmalins und Quarzes".

Voigt kündigt eine Abhandlung an: „Bestimmung der Konstanten der innern Reibung für einige Krystalle".

Kielhorn kündigt „Tafeln aus indischen Inschriften und Handschriften" an.

Am 7. November. de Lagarde zeigte schriftlich Mittheilungen an: 1. Worterklärungen: Cicisbeo, Caparra, Σατράπης.

2. über den dritten Brief des Paulus an die Korinther.

Schering theilt eine Notiz von Alberto Tonelli mit: „Ueber die Auflösung quadratischer Congruenzen".

Klein legt einen Aufsatz von Herrn Prof. Franz Meyer in Clausthal vor: „Ueber ein Trägheitsgesetz für algebraische Gleichungen".

Ehlers legt einen Aufsatz des Herrn Privatdocenten Dr. Bürger vor: „Vorläufige Mittheilungen über Untersuchung an Nemertinen von Neapel".

Wallach legt eine Abhandlung vor: „Ueber einige neue Kohlenwasserstoffe mit ringförmiger Bindung der Kohlenstoffatome".

Alle diese Arbeiten sind oder werden, wenn nicht Anderes ausdrücklich angegeben ist, in den Nachrichten gedruckt. Von diesen sind, soweit sie bis zum 15. November gedruckt werden konnten, 7 Nummern erschienen, mit 246 Seiten.

Außer den Nachrichten und Abhandlungen haben auch die Gelehrten Anzeigen in gewohnter Weise ihre Fortsetzung gefunden.

Auch dies Jahr hat das Kön. Staatsministerium der Geistlichen, Unterrichts- und Medizinalangelegenheiten die geringen Mittel, über die wir zur Förderung wissenschaftlicher Zwecke verfügen können, durch eine außerordentliche Bewilligung von 3000 Mk. (Reskr. vom 1. April) vermehrt und uns dadurch zum lebhaftesten Dank verpflichtet.

Von dem, was sonst in den Sitzungen verhandelt worden ist, möge ferner erwähnt werden:

Die Gesellschaft fühlte sich verpflichtet, die Aufzeichnungen ihres früh verstorbenen ordentlichen Mitgliedes, Karl von Seebach, Professors der Palaeontologie, über seine wissenschaftliche Reise in Mittelamerika zum Druck zu bringen und beschloß deshalb am 7. Februar sie im 38. Band der Abhandlungen herauszugeben.

Sie betrachtet es ferner als eine ehrenvolle Pflicht, für eine vollständige, mit größter Sorgfalt vorbereitete, äußerlich würdig ausgestattete Ausgabe der Werke ihres großen Genossen, Wilhelm Weber, zu sorgen. Dieselbe wird in fünf Bänden unter der Aufsicht des Herrn Professor Heinrich Weber in Braunschweig und Geheimen Raths Braune in Leipzig erscheinen. Dies aber auszuführen, würde uns nicht möglich gewesen sein, wenn nicht die Königlich Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig auf unser Ersuchen sich auch bereit erklärt hätte, uns die in ihren Veröffentlichungen erschienenen Abhandlungen Webers zum

Abdruck in den Werken zu überlassen. Wir sind überzeugt, daß alle Freunde der Wissenschaft im aufrichtigsten Dank für dies Zugeständniß mit uns übereinstimmen. In Folge unseres Beschlusses vom 7. März ist über den Verlag der Ausgabe ein Kontrakt mit der Springerschen Buchhandlung in Berlin abgeschlossen worden.

Auf den Wunsch des Herrn Professor Dr. Schur hat die Gesellschaft am 7. November beschlossen, daß der 2. Theil der astronomischen Mittheilungen der Kön. Sternwarte zu Göttingen „Sternkatalog enthaltend 6900 Sternörter für 1860.0. Nach den von Professor Klinkerfues in den Jahren 1858 bis 1863 angestellten Zonen-Beobachtungen abgeleitet von Professor Dr. Schur" auf ihre Kosten gedruckt werden soll. Die Kosten sind von der Druckerei auf 808 Mark angeschlagen worden.

Die Gesellschaft beschließt am 7. März dem Wunsch der K. Akad. der Wiss. in Berlin und der Académie des Sciences zu Paris zu entsprechen und ihnen einige Briefe von Jacobi und Lagrange an Gauss wissenschaftlichen Inhaltes aus den Gaussschen Sammlungen zum Abdruck in den bezüglichen Gesammtausgaben der genannten Mathematiker mitzutheilen.

Die Gesellschaft beschließt am 4. Juli gegen die von Herrn Dr. Rud. Wackernagel in Basel in Nr. 9 der G. G. Anz. d. J erschienene Anzeige des züricher Urkundenbuches eine Erklärung zu veröffentlichen, die in Nr. 15 der G. G. Anz. gedruckt ist.

In den Tauschverein ist die Gesellschaft den gegen sie ausgesprochenen Wünschen zufolge eingetreten

1) mit der mathematischen Gesellschaft in Moskau (10. Februar),

2) mit der Universität Cincinnati, U. St. A., Journal of comparative Neurologie (4. Juli).

3) mit dem naturwissenschaftlichen Verein für Schleswig-Holstein (1. August).

4) mit der Rassegna delle scienze geologiche in Rom (7. Novbr.).

Am 2. Mai beschloß die Gesellschaft, daß der beständige Sekretär Herrn GRR. Hanssen am 13. Mai zu seinem sechzigjährigen Doctorjubiläum ihre herzlichen Glückwünsche darbringen solle.

Am 9. August feierte Herr GRR. A. von Hofmann in Berlin, auswärtiges Mitglied in der Physikalischen Klasse, sein fünfzigjähriges Professorenjubiläum. Die Gesellschaft beschloß ihm ihre freudige Theilnahme und lebhaften Glückwünsche in einer deutschen Zuschrift auszusprechen. Herr Wallach übernahm die Abfassung.

Se. Excellenz Herr Hermann von Helmholtz wurde am 31. September 70 Jahr alt, aber die Feier war auf den 2. November verlegt worden. Auch unsere Gesellschaft beschloß am 4. Juli sich durch eine deutsche Zuschrift an dieser Feier zu betheiligen und ihre tiefe Verehrung und herzlichen Glückwünsche auszusprechen. Herr Prof. Riecke übernahm die Abfassung und überreichte sie dem Jubilar selbst.

An Stelle des Herrn GRR. Schering trat am 1. Oktober der Senior der Historisch-philologischen Klasse, Herr Wüstenfeld, und wurde durch das Kuratorialreskript vom 7. Oktober bestätigt.

Für dies Jahr hatte die Mathematische Klasse die Preisaufgabe gestellt:

Die Aufgabe der conformen Abbildung eines ebenen Bereiches auf ein Stück einer krummen Fläche, deren Krümmungsmaß überall den constanten Werth k besitzt, hängt zusammen mit der Aufgabe, die partielle Differentialgleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2k \cdot e^u$$

vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen gemäß zu integriren.

Für diese Aufgabe kommen zunächst die von Riemann in seiner Theorie der Abelschen Functionen angegebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen in Betracht.

Die Königliche Gesellschaft wünscht die Frage, ob es möglich ist, die angegebene partielle Differentialgleichung für einen gegebenen Bereich unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen der angegebenen Art zu integriren, vorausgesetzt, daß der Constanten k negative Werthe beigelegt werden, vollständig beantwortet zu sehen.

Insbesondere wünscht die Königliche Gesellschaft den Fall der angeführten Aufgabe behandelt zu sehen, in welchem der betrachtete ebene Bereich eine geschlossene mehrfach zusammenhängende Riemannsche Fläche ist, während die Function u keine anderen als logarithmische Unstetigkeiten annehmen soll.

Zur Bewerbung um den Preis der Mathematischen Klasse für das J. 1891 war am 28. September eine Arbeit mit dem Spruche bezeichnet: „Der schönste Lohn der Arbeit ist die Arbeit selbst“ eingegangen. Nach dem Urtheil der mathematischen Klasse genügt die

eingereichte Abhandlung weder hinsichtlich ihrer Form, noch hinsichtlich ihres Inhalts den an eine Preisbewerbungsschrift zu stellenden Anforderungen, enthält auch überbaupt keine Lösung der gestellten Preisaufgabe. Die Gesellschaft kann also der Abhandlung den Preis nicht zuerkennen.

Die Aufgabe der Historisch-philologischen Klasse für 1892 ist folgende:

Für die älteste Geschichte Athens ist es von außerordentlicher Bedeutung zu wissen, an welchen Orten sich Heiligthümer der verschiedenen Götter und Heroen fanden, sowol in Athen selbst, als in der gesammten Landschaft, soweit es nach dem jetzigen Stande der topographischen, epigraphischen, genealogischen Forschungen möglich ist. Die Historisch-philologische Klasse stellt daher für 1892 die Aufgabe, daß eine sorgfältige Uebersicht der Kultstätten in Attika nach den Oertlichkeiten, in denen sie sich fanden, gegeben und, was sich daraus für die älteste Geschichte Attikas folgern lasse, dargestellt werde.

Für das Jahr 1893 stellte die Gesellschaft nach dem Vorschlag der Physikalischen Klasse die Aufgabe:

Aus den Untersuchungen von W. C. Röntgen und A. Kundt über die Aenderungen der optischen Eigenschaften des Quarzes im elektrischen Felde ergiebt sich ein enger Zusammenhang zwischen den elektrooptischen Erscheinungen und den elastischen Deformationen, welche jene piëzoelektrische Substanz unter der Einwirkung elektrostatischer Kräfte erfährt. Eine Ausdehnung dieser Forschungen auf eine größere Reihe piëzoelektrischer Krystalle von verschiedenen Symmetrieeigenschaften erscheint in hohem Grade erwünscht. Gleichzeitig würde die Untersuchung darauf zu richten sein, ob die elektrooptischen Erscheinungen in piëzoelektrischen Krystallen ausschließlich durch die im elektrischen Felde eintretenden Deformationen oder außerdem durch eine direkte Einwirkung der elektrostatischen Kräfte auf die Lichtbewegung hervorgerufen werden.

Für das Jahr 1894 stellt die Mathematische Klasse folgende neue Aufgabe:

„Zwischen dem Zustand eines harten elastischen Körpers und dem einer Flüssigkeit liegt eine Reihe von Zwischenzuständen; durch geeignete Mischung von festen Körpern mit flüssigen kann man alle möglichen Grade von Weichheit oder Zähflüssigkeit, einen ganz allmähligen Uebergang von einem festen Körper zu einem flüssigen erzeugen. Unsere Kenntnisse von den Eigenschaften jenes Zwischenzustandes sind aber noch sehr unvollständig und es wird

daher verlangt, dieselben durch erneute Experimentaluntersuchungen zu fördern. Insbesondere soll ermittelt werden, wie sich bei zähflüssigen Körpern die Gesetze solcher Bewegungen verändern, welche bei Flüssigkeiten von geringer Viscosität zur Bestimmung der innern Reibung verwandt werden können."

Die zur Bewerbung um einen der Preise bestimmten Arbeiten müssen, mit einem Spruch versehen, vor Ablauf des Septembers des bestimmten Jahres an die Kön. Gesellschaft der Wissenschaften portofrei eingesandt werden und von einem versiegelten Zettel begleitet sein, welcher außen den Spruch trägt, der die Arbeit bezeichnet und innen Namen und Wohnort des Verfassers angiebt.

Der Preis für jede Aufgabe beträgt 500 Mk.

Die von der Wedekindschen Preisstiftung für deutsche Geschichte zur Lösung im fünften Verwaltungszeitraum, der am 14. März 1886 begonnen hat, gestellten Aufgaben sind in den Nachrichten 1887 S. 69 f. bekannt gemacht, dann 1888 S. 134 ff., 1889 S. 403 ff., 1890 S. 217 ff., 1891 S. 127 ff. wiederholt worden. Gern erwähnen wir, daß der Verein für hansische Geschichte in dem Vorwort zum Band VI der Hansischen Geschichtsquellen (Hansaakten aus England 1275 bis 1412) Halle 1891 und der Historische Verein für Niedersachsen im Vorwort seiner Ausgabe der ebstorfer Weltkarte, die von Ernst Sommerbrodt besorgt ist (Hannover 1891), der Unterstützung erwähnen, durch welche unsere Gesellschaft ihre trefflichen Bemühungen zu fördern im Stande gewesen ist. — Die Arbeiten für die Herausgabe der Kornerschen Chronik sind regelmäßig fortgesetzt worden und sehen baldiger Vollendung entgegen.

Durch den Tod wurde der Gesellschaft im Laufe des Jahres am 23. Juni der Mann entrissen, der fast zwei Menschenalter ihr Stolz und ihre Zierde gewesen war und dessen Andenken sie in Treue bewahren wird, der Wirkl. Geheime Rath Wilhelm Ernst Weber, Excellenz, geboren am 24. September 1804, Ehrenmitglied seit 1887, vorher ordentliches Mitglied der mathematischen Klasse seit 1831.

Ferner sind gestorben die auswärtigen Mitglieder

1. der Historisch-philologischen Klasse:

George Bancroft in Washington, den 17. Januar. Geboren den 3. Oktober 1800. Ausw. Mitglied seit 1868.

Franz Miklosich in Wien, den 7. März. Geboren 1813. Ausw. Mitglied seit 1868.

2. der Physikalischen Klasse:

Karl W. von Nägeli in München, den 11. Mai. Geboren den 30. März 1817. Ausw. Mitglied seit 1877.

Ferner die Korrespondenten

1. der Historisch-philologischen Klasse:

Ludwig Müller in Kopenhagen, den 6. Sept., Korrespondent seit 1871.

Xavier Heuschling in Brüssel, Korrespondent seit 1874. (Sein Tod ist erst seit kurzem zu unserer Kenntniß gekommen.)

An die erledigten Stellen wurden am 4. November einstimmig gewählt: L. Duchesne in Paris, Mitglied des Instituts, und

Max Müller, Professor in Oxford, seit 1861 Korrespondent, zu auswärtigen Mitgliedern der Historisch-Philologischen Klasse.

Dr. Karl Gegenbaur, Professor, Geh. Hofrath, in Heidelberg, zum auswärtigen Mitglied der Physikalischen Klasse, ferner

Wilhelm Fröhner in Paris, und

Dr. Charles Groß in Cambridge (Mass. U. St. A.) zu Korrespondenten der Philol. Historischen Klasse.

F. Fouqué, Mitglied des Instituts, Professor am College de France, in Paris, zum Korrespondenten in der Physikalischen, und

Dr. Friedrich Prym, Professor der Universität Würzburg, zum Korrespondenten in der Mathematischen Klasse.

Wilhelm Fraatz aus Göttingen ist am 15. Februar als Diener der Gesellschaft angenommen und verpflichtet worden.

Inhalt von Nr. 10.

Alfonso Sella, Beitrag zur Kenntniss der specifischen Wärme der Mineralien. — *G. Frobenius*, über Potentialfunctionen, deren Hesse'sche Determinante verschwindet. — *A. Schönflies*, Bemerkung zu Hilbert's Theorie der algebraischen Formen. — *Alfonso Tonelli*, Bemerkung über die Auflösung quadratischer Congruenzen. — *P. Drude und W. Nernst*, über die Fluorescenzwirkungen stehender Lichtwellen. — Bericht des Beständigen Sekretärs der Königl. Ges. d. Wiss. über das Jahr 1891.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

30. December. **№ 11.** 1891.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 5. December.

Ueber den Stierdionysos.

Von

Friedrich Wieseler.

Ueber den Stierdionysos ist mehrfach im Zusammenhange gehandelt, am eingehendsten von Stephani im Compte rendu de la commission imp. archéol. pour l'ann. 1863, p. 110 fg., und Robert Schneider „Ueber zwei Bronzebilder des gehörnten Dionysos" in den Jahrb. der Kunstsammlungen des allerhöchsten Kaiserhauses Bd. II, S. 41 fg., zuletzt von A. W. Curtius „Der Stier des Dionysos" Inaugural-Dissertation der phil. Fac. zu Jena, 1882, und Thraemer „Dionysos in der Kunst" in W. H. Roschers Lexikon der Griech. u. Röm. Mythologie, von beiden ohne auf Stephani und Schneider Rücksicht zu nehmen.

Dionysos erscheint nach den bisherigen Annahmen 1) als vollständiger Stier, 2) als Stier mit Menschengesicht, 3) in menschlicher Gestalt mit Stierkopf, 4) in menschlicher Gestalt mit Stierhörnern und Stierohren, und 5) ganz besonders mit Stierhörnern allein, endlich 6) auch ohne Hörner mit großen Ohren oder ohne diese, mit anderen Theilen vom Stiere und mit angedeuteten oder verhüllten Hörnern.

1.

Die Auffassung des Gottes in der Gestalt eines vollständigen Stieres erhellt deutlich aus Schriftstellen, namentlich aus dem Gebet der Elischen Frauen bei Plutarch Quaest. Gr. 36 und de Isid. et Osir. 35. Der an erster Stelle vorkommende Umstand, daß Dionysos mit den Chariten kommen möge, macht es durchaus wahrscheinlich, daß der Stier auf dem schönen geschnittenen Steine in den Denkm. d. a. Kunst II, 33, 383, den Gott selbst darstellen solle. Dieses gilt ebenfalls wohl von dem ebenda unter n. 382 wiederholten geschnittenen Steine und den entsprechenden von Stephani a. a. O. S. 123, A. 1 angeführten. Wenn dann Stephani meint, daß der auf Münzen von Kyzikos „zwar ohne bakchische Attribute, aber doch in der Stellung des ὑβριστής“ angebrachte Stier wohl den Dionysos selbst darstellen könne, wie Panofka Ann. dell' Inst. T. V, p. 282 vermuthet, so ist diese Beziehung auch von Thraemer a. a. O. S. 114 für wahrscheinlich gehalten, und gewiß mit Recht. Auch auf der von Head Hist. num. p. 344 beschriebenen Drachme von Phlius, welche von ihm ungefähr zwischen 430—322 v. Chr. gesetzt wird, ist der ohne ein Bakchisches Attribut dargestellte Stier mit gesenktem Haupte sicherlich als Dionysos zu fassen. Der Flußgott Asopos, an den Head auch denkt, kann gegen jenen nicht in Betracht kommen. Münzen von Phlius aus der Kaiserzeit zeigen auf der Vorderseite den Kopf des Dionysos und auf der Rückseite einen stoßenden Stier und den Thyrsos oder auf der Vorderseite einen stoßenden Stier und auf der Rückseite Epheu und Trauben (Imhoof-Blumer und Percy Gardner Numism. commentary on Pausanias reprinted from the journal of Hellenic studies I, 1885, p. 32, n. 5). Für den letzteren Fall scheint es, daß der Stier als der Gott selbst zu fassen sei, hinsichtlich des ersten wird man wohl nicht anstehen den Stier als Attribut des Gottes zu fassen, wie auch den stoßenden Zebu auf dem Revers der Münze den Kibyraten mit der Büste des Dionysos auf dem Avers bei Imhoof-Blumer Griech. Münzen, in den Abhandlungen der philos.-philol. Classe der K. Bayer. Akad. d. Wissensch., München 1890, n. 72. Zu den Darstellungen des Dionysos in vollständiger Stiergestalt hat man auch den bekannten βοῦς θούριος auf den Münzen von Thurium gerechnet (auch Welcker Griech. Götterlehre II, S. 599). Aber die gehörige Aufmerksamkeit auf die Nebentypen (vgl. namentlich das in Catal. of the Greek coins in the Brit. Mus., Italy, p. 293, 70 beschriebene Exemplar) zeigt deutlich, daß es sich um den Flußgott Krathis

handelt. Vgl. auch Head Hist. num. p. 72. Als vollständiger Stier oder als Stier mit menschlichem Gesichte wurde er nach Plutarch de Iside et Osir. 35 zu urtheilen noch in späterer Zeit von den Hellenen gebildet; denn wenn es hier heißt *ταυρόμορφα Διονύσου ποιοῦσι ἀγάλματα πολλοὶ τῶν Ἑλλήνων*, so läßt sich das erste Wort unmöglich als nur „stierhörnige" fassen, wie Thraemer a. a. O. S. 1151 will, und schon Welcker A. Denkm. V, S. 37 und Griech. Götterlehre II, S. 598 annahm, dem R. Schneider im Jahrb. a. a. O. S. 45, 6 sich anschließt.

2.

Ueber den Stier mit dem Menschengesichte auf den Münzen von Unteritalien und Sicilien hat in neuerer Zeit besonders ausführlich gesprochen Streber in den Abhandlungen der philos.-philol. Classe der K. Bayerischen Akademie der Wissenschaften Bd. II, S. 453 fg., und später kürzer H. Nissen „Das Templum", 1869, S. 132 fg., A. W. Curtius a. a. O. S. 23 fg. und Andere; vgl. Thraemer a. a. O. S. 1150. Es steht fest, daß die meisten Darstellungen dieser Art sich auf Flußgottheiten beziehen, namentlich die auf den Münzen Unteritaliens. So urtheilte schon O. Jahn in der Arch. Ztg. 1862, S. 313 fg. und nicht anders Stephani a. a. O. S. 115. Dennoch hat man noch in neuester Zeit betreffs der Darstellungen auf Münzen Campaniens, namentlich der Stadt Neapolis, an den Bachus Hebon gedacht, vgl. Head Hist. num. p. 33[1]). Selbst Stephani, der übrigens die in Rede stehende Bildung dem Dionysos nur als Wassergott zustehend betrachtet, ist a. a. O. S. 118 geneigt den Averstypus einer Münze von Katane auf diesen Gott zu beziehen. Die Münze ist die in der ersten Ausgabe der Denkm. d. a. Kunst II, 33, 380 nach Streber a. a. O. wiederholte. Der Typus wurde schon von Anderen auf den Stierdionysos bezogen,

1) Die von Head gegebene Deutung bezieht sich zunächst auf die von ihm abbildlich mitgetheilten Darstellungen des schreitenden Stiers mit Menschengesicht. Aber sollte dieser Stier eine andere Beziehung haben wie der schwimmende (Catal. of the Gr. coins in the Brit. Mus., Italy, p. 95, 104, 109, 112, 398), der einmal nicht bloß schwimmend, sondern auch Wasser speiend vorkommt (Arch. Ztg. 1862, Taf. CLXVIII, n. 7) und ohne Zweifel als Flußgott zu betrachten ist? Der Stern, welchen der im Catal. p. 109 abgebildete auf den angegebenen Wogen schwimmende Stier am Körper trägt, findet sich auch über dem p. 119 des Catal. abbildlich mitgetheilten schreitenden Stier. Daß bei Hebon Stierbildung nicht nachweisbar ist, hat Jahn in der Arch. Ztg. 1862, S. 326, A. 47 bemerkt. Vgl. über denselben auch Welcker Griech. Götterl. II, S. 66, A. 135.

von Eckhel, von Streber, zuletzt noch von Curtius a. a. O. S. 27. Eine ganz ähnliche Münze beschreibt Percy Gardner Cat. of the Greek coins in the Brit. Museum, Italy, p. 42, n. 4, der p. 41 fg. auch Abbildungen von entsprechenden Münztypen derselben Stadt giebt, vgl. auch Head Hist. num. p. 114. Ueber dem Stier gewahrt man den knieenden Silen, unterhalb des Stieres nach Gardner eine pistrix. Andere Nebentypen bestehen in dem Zweig einer Flußpflanze, einem Flußfisch, einem Wasservogel. Der Silen bezieht sich nicht auf einen Stierdionysos, sondern geht nur das Wasser an. Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß es sich um den Flußgott Amenanos handelt, wenn auch Head diese Beziehung nur als der auf den tauriform Dionysos vielleicht vorzuziehende betrachtet.

Ein anderes Bildwerk, hinsichtlich dessen es wahrscheinlich ist, daß auf ihm ein Stier mit Menschengesicht dargestellt sei, welcher sich auf den Wassergott Dionysos beziehe, ist das Gemälde auf der aus Nola stammenden Vase, welche aus der Sammlung Blacas in das Britische Museum übergegangen ist. Sie ist in Musée Blacas pl. 32 abgebildet und von Ch. Newton in den Guide to the second vase room P. I, p. 8, n. 46 so beschrieben: A female figure holding a hydria and sitting on a bull with human face, which approaches a large marble laver; an Androgynous winged figure is crowning the female figure; on the left, another female figure, with a mirror and an oinochoè; in the upper right-hand cornes, a veiled female figure looking through a window. Leider hat Stephani nicht gesagt, welche Umstände ihm die Beziehung des Stieres auf Dionysos wahrscheinlich machten. Newton läßt dahingestellt sein, ob man den Dionysos oder einen Flußgott zu erkennen habe. Es kann schwerlich zur Erklärung beitragen, daß der Stier mit Menschengesicht auch auf Nolanischen Münzen vorkommt. Auch die Beziehung der ganzen Darstellung ist schwer zu ergründen. Daß ein gewöhnlicher nicht sagenberühmter Flußgott gemeint sei, ist nicht wohl glaublich. Unter den Flußgottheiten würde nur Acheloos passen. Der Platz der Handlung ist der Vorplatz eines Palastes, welcher durch das Fenster mit dem herausschauenden Weibe angedeutet wird. Es scheint sich um eine Liebesgeschichte zu handeln. Liebschaften hatte Acheloos mehrere.

Ein sicheres Beispiel des Dionysos als Stier mit Menschengesicht erkennt Stephani S. 115 fg. auf einem auch von Streber a. a. O. S. 533 fg. auf Dionysos als Herrn der feuchten Natur bezogenen Carneol der Florentiner Sammlung, der mehrfach, auch

in unsern Denkm. d. a. K. II, 45, 578, abgebildet ist, s. Stephani a. a. O., A. 8. „Man sieht einen Stier mit menschlichem Antlitz in wilder Wuth durch die Fluthen galoppiren. Eine Maenade mit flatterndem Gewand sitzt auf seinem Rücken und sucht ihn mit der Spitze ihres Thyrsos zu noch größerer Hast aufzustacheln". Stephani glaubt diese Darstellung auf den Argivischen Cult des Dionysos zurückführen zu müssen. Es ist mir aber geradezu unglaublich, daß die Mänade den Dionysos so behandeln solle, während es durchaus nicht unglaublich ist, daß sie einen Flußdämon so behandeln könne. Diese Dämonen können aber ebensowohl als zum Bacchischen Thiasos gehörend betrachtet werden wie Silen und die Nymphen. Man vergleiche auch den von einer Mänade zu wilder Eile angetriebenen Kentauren in den Denkm. d. a. K. II, 46, 594.

Dagegen könnte man recht wohl in Betreff des Vordertheils eines Stiers mit Menschenantlitz auf Münzen von Kyzikos an Dionysos denken, welche Darstellung Head Hist. num. p. 452 erwähnt, indem er sie mit der auf Münzen von Gela p. 121, Fig. 75 vergleicht. Warum auf den Münzen von Kyzikos ein Flußgott dargestellt wurde, ist schwer einzusehen. Dagegen paßt Dionysos auf diese Münzen vortrefflich, s. oben S. 368. Wenn man sich aber daran erinnert, daß auf denselben Münzen manche rein Attische Typen vorkommen, so wird man es nicht für unmöglich halten, daß der bei den Athenern so hoch verehrte Flußgott Kephissos oder auch der dort gleichfalls einen Cultus habende Acheloos gemeint sein könne.

3.

Stephani meint, daß Dionysos auch als Mensch mit Stierkopf gebildet sei und führt als entscheidend für diese Ansicht zwei nur durch Beschreibung bekannte Bildwerke an S. 119 fg.: 1) eine früher im Palazzo Grimani befindliche, jetzt verschollene Marmorbasis, welche von Fr. Thiersch Reisen in Italien S. 257 verzeichnet ist. Man gewahrte an der einen Nebenseite, umgeben von vier Frauen, ein Kind mit Stierhaupt. Thiersch bezeichnete es als Minotauros. Dagegen bemerkt Stephani, daß die Geburt und Pflege des Minotauros von der Sage nirgends betont werde. Als n. 2 erwähnt er das Gemälde im Inneren einer Kylix, welche sich früher im Besitze des Duc de Luynes befand, jetzt in der Nationalbibliothek zu Paris aufbewahrt wird. Das Gemälde ist beschrieben von E. Braun im Bullett. arch. 1847, p. 121, vgl. Gerhard's Arch. Anzeiger 1847, S. 9*, von Panofka ebenda S. 22*,

n. 15, nach welchem die Pasiphae „mit Strahlenkrone geschmückt“ ist, und nach J. de Witte in der Arch. Zeitung 1850, S. 213, n. 9. Hier heißt es über das Innenbild: „Pasiphaë sitzend, mit dem kleinen stierköpfigen Minotaur auf ihrem Schoß; sie ist myrthenbekränzt und langbekleidet und drückt in Gesicht und Bewegung ihr Entsetzen über den Neugeborenen aus. Aufgehängt ist eine Cista; zu Pasiphae's Füßen ein Schwan“. Später ist das Innenbild abbildlich mitgetheilt und ausführlich besprochen von Fr. Lenormant in der Gazette archéol. cinq. année 1879, pl. 3 als naissance de Zagreus, wo auch die Außenbilder der Schale mitgetheilt sind auf pl. 4 und 5 p. 18 fg.[1]). Er folgt also der Deutung von Stephani. Dieser findet es unbegreiflich, daß in diesem Bilde allgemein die Geburt des Minotauros vorausgesetzt sei, nicht die des Dionysos; „denn nicht nur ist dem kleinen Gott eine Gans oder ein Schwan beigesellt, sondern es sind auch die in den Bildern der Außenseite auftretenden Personen sämmtlich vollkommen deutlich bezeichnete Satyrn und Maenaden, welche Thyrsos-Stäbe und Glieder eines Menschen in den Händen halten, den sie in wilder Raserei zerrissen haben“. Auch Rob. Schneider äußert im Jahrb. a. a. O. S. 45 in Bezug auf das Innenbild der Kylix: „man gab ihm (dem Dionysos) vielleicht auch die Form des Minotauros, auf dem Menschenleib das Stierhaupt“. Es ist allerdings aus mehreren Gründen wahrscheinlich, daß Dionysos Zagreus, nicht der Minotauros, gemeint sei. Das wesentlichste Bedenken gegen jenen erregt der Stierkopf. Doch glaubt Stephani diesen bei Dionysos auch durch Schriftstellen belegen zu können. Er bemerkt, daß von Dionysos bei Tzetzes z. Lykophr. 1237 gesagt werde: *ταυροκέφαλος φαντάζεται καὶ ζωγραφεῖται καὶ ἐν Εὐριπίδῃ· καὶ σῷ κέρατα κρατὶ προσπεφυκέναι*, und weiter: *ταυρόκρανος δὲ ζωγραφεῖται καὶ φαντάζεται ἢ κερασφόρος*. Aber die Worte des Euripides sind ohne Zweifel von menschlicher Gestalt mit Stierhörnern zu verstehen und an der zweiten Stelle soll das *ἤ* gewiß

1) Außer den obigen beiden Darstellungen giebt es noch eine dritte, welche auf den Minotauros als Kind bezogen ist. Dieselbe befindet sich auf einem Etruskischen Relief von einer Todtenkiste, über welches schon O. Jahn Arch. Beitr. S. 240 nach der Sammlung von Zeichnungen im Berliner Museum Mittheilung gemacht hat. Stephani meint aber S. 120, A. 4, man könne sich über das Relief gar keine Meinung bilden, so lange nicht einmal gewiß sei, ob das Kind einen Stierkopf habe oder nicht. Das ist sehr verwunderlich, da Jahn denselben ausdrücklich bezeugt. Auch Gerhard im Arch. Anz. 1847, S. 9* zweifelt nicht an dem Stierkopfe und bemerkt, daß schon Inghirami das Kind auf Minotauros gedeutet habe.

nicht so zu fassen sein als sei κερασφόρος von ταυρόκρανος verschieden. Vgl. auch Tzetzes zu Lykophr. 209: Ταύρῳ· τῷ Διονύσῳ, ὅτι κερατοφόρον αὐτὸν γράφουσιν, ὡς καὶ Εὐριπίδης καὶ σφ κέρατα u. s. w. Die Stellen des Nonnos Dion. VII, 321 u. XVIII, 95, in denen Dionysos βούκραιρος genannt wird, will Stephani nicht auch veranschlagen, obgleich „man meinen sollte, daß Nonnos von einem vollständigen Stierkopf spreche", weil dieser Dichter bei der Wahl seiner Ausdrücke mit so wenig Sorgfalt zu Werke gegangen sei, daß man nichts daraus schließen könne (was doch gewiß zu viel gesagt ist). Das Wort βούκραιρος ist ohne Zweifel von Stierhörnern zu verstehen, vgl. Nonn. Dion. XXVII, 24 ἰσόκραιρος. In dem Hymn. Orph. XLV (44) Herm. wird Dionysos als ταυρομέτωπος bezeichnet. Damit ist gewiß nicht gemeint, daß der Gott einen Stierkopf habe, sondern nur, daß er mit Stierhörnern an der Stirn versehen sei, und wesentlich dasselbe bedeutet auch ταυρόκρανος. Inzwischen steht es doch fest, daß Zagreus mit Hörnern am Kopfe gedacht wurde, vgl. Orph. hymn. XXX, 3, Nonn. Dion. VI, 165, 209. Außerdem heißt er ταῦρος Clemens Alexandr. Protrept. II, p. 14 Potter, vgl. auch Lycophr. Al. 209 und Nonn. Dion. V, 564, und ταυρόμορφος Clem. Al. Prot. II, p. 14; vgl. auch Arnobius adv. gentes V, 21.

4.

Außer den Hörnern erscheinen als einziger thierischer Bestandtheil am menschlich gebildeten Kopfe des Dionysos die Ohren.

Diese finden sich nicht bloß bei dem bärtigen Dionysos, sondern auch bei dem unbärtigen.

Bärtige Köpfe a) in Hermen: Ammon und Dionysos im Berliner Mus. (Conze Verzeichn. der ant. Skulpt. n. 11), abgebildet in Mon. inedit. inst. arch. IV, 49 und Ann. 1848, tav. J, jetzt auch in der Beschr. der ant. Skulpt. des Kgl.. Mus. zu Berlin S. 9 zu n. 11. Archaistische Herme im Lateranens. Mus. (vgl. Benndorf u. Schöne S. 402, n. 599). b) auf Etruskischen Bronzeschildern wie dem in den Denkm. a. Kunst I, 60, 303, in Betreff deren O. Jahn Ber. d. K. Sächs. Ges. d. Wissenschaften 1854 S. 49 an eine Satyrmaske denkt, während Stephani a. a. O. S. 114 fg. gewiß wahrscheinlicher eine Dionysosmaske annimmt, sowie an einem Bronzekopf bei E. v. Sacken die ant. Bronzen des K. K. Münz- und Ant.-Cab. in Wien Taf. XXVI, n. 6, in Betreff dessen Thraemer a. a. O. die Beziehung auf Dionysos abweist. Ein ähnlicher Kopf auf einer Münze stellt Acheloos dar (Arch. Ztg. 1862, T. CLXVIII, n. 10). c) in Terracotten wie die bei Pa-

nofka Terracotten des Berl. Mus. Taf. 47 und im Bull. arch. Napol. T. III, t. 5, vgl. Stephani a. a. O. d) auf geschnittenen Steinen: Raspe Cat. n. 4179, Toelken Erkl. Verz. III, 3, 927 = Denkm. d. a. K. II, 33, 379. Diese Köpfe sind von Raspe und Toelken für die eines Dionysos gehalten. Winckelmann bezieht jedoch den Berliner in der Descr. d. pierr. grav. de Stosch. p. 327 zu Cl. III, n. 75 auf den Minotauros und Stephani bemerkt gegen die Deutung auf Dionysos a. a. O., S. 114, daß man wenigstens mit gleichem Rechte auch an einen Flußgott denken könnte. Das ist allerdings richtig. Auch H. Blümner erklärt sich gegen einen Dionysos zu Lessing's Laokoon S. 121. Er ist wegen des Gesichtsausdruckes und des struppigen Bartes eher geneigt ein „satyrhaftes Wesen" anzuerkennen, was minder wahrscheinlich ist. Desgleichen lehnt Thraemer a. a. O. S. 1150 die Beziehung auf Dionysos ab, weil der Kopf rohen Gesichtsausdruck und Stierohren zeige, die seines Wissens auf Doppelköpfe des Dionysos und Ammon beschränkt seien, von welchen beiden Gründen der erste unzulänglich, der andere irrig ist. Die Möglichkeit daß es sich um einen Dionysos handele, wird ebenso wenig in Abrede gestellt werden können wie die, daß ein Flußgott gemeint sei. — Wir erwähnen schließlich hier eine nur etwas bärtige Bronzebüste mit eigenthümlichem wilden Gesichtsausdruck zu Neapel (Bronzi d' Ercolano T. I, t. V) mit Stierhörnern und Stierohren. Sie wird von Welcker A. Denkm. V, S. 38 fg. ohne Bedenken auf Dionysos bezogen. Nach R. Schneider, Jahrb. a. a. O. S. 46, ist sie unter allen bekannten Bildern des Dionysos dasjenige, welches die Charakteristik desselben nach dem Thierischen hin am weitesten durchführt. „Der Kopf, welchem das mystische Attribut der um Rücken und Schultern sich ringelnden, von der erhobenen Rechten gefaßten Schlange noch phantastischeres Aussehen verleiht, ist nach rechts geneigt, heftig zurückgeworfen und richtet den Blick in die Höhe. Außer den aus dem struppigen Haupthaar hervorstehenden Hörnern und den schräg abstehenden Thierohren erinnert der Hals noch weit entschiedener als an der Maske aus Gizeh (s. u. S. 382 fg.) an die Wamme des Stiers; des ungeachtet setzt sich ein menschliches Bruchstück daran. Haar wächst auf der Stirn über der dicken Nasenwurzel, als kurzer Backenbart unter den Ohren, auf der Brust und um den Brustwarzen". Stephani äußert im Compte rend. p. 1863, p. 103, minder bestimmt, man werde die Büste in Folge der als Attribut hinzugefügten Schlange vielleicht auf den jugendlichen Dionysos beziehen können [1]).

1) Daß gerade die Schlange für diesen beweiskräftig sein soll, erscheint be-

Unbärtige Köpfe. a) Doppelherme des Ammon und des jugendlichen Stier-Bacchus im Palazzo Giustiniani Orsato Recanati sulle Zattere in Venedig, 19 cm hoch („die Hörner des Dionysos liegen in dem aufstehenden mit der corona tortilis geschmückten Haare und sind gleich den Thierohren abgestoßen", wie R. Schneider „Ueber eine Bacchische Maske aus Cilli" in den Mitteilungen der K. K. Central-Commission zur Erhaltung und Erforschung der Kunst- und historischen Denkmäler. Jahrg. 1885, S. 86, A. 2 bemerkt). Doppelbüste beider Gottheiten früher im Besitz des Ritters Azara, jetzt unbekannten Aufbewahrungsortes, abgebildet im Mus. Pio-Clem. Vol. V, tav. A, n. 3. Desgleichen in Madrid, s. Overbeck Griech. Kunstmythol. I, S. 287 fg. n. 37. Drei Doppelhermenköpfe im Berliner Mus. (Conze Verzeichn. d. ant. Skulpt. n. 13. 14. 15). Der eine bärtige Kopf stellt ohne Zweifel den Ammon dar, der andere unbärtige mit thierischen Ohren und kurzen Stierhörnern nach den Meisten Dionysos, nach Einigen den Triton. Diese letztere Deutung wurde von K. Böttticher aufgestellt im Nachtrag zum Verz. der Bildhauerwerke in Berlin 1867 n. 985 fg. bes. 987. Overbeck, der im Atlas zur Kunstmyth. III, 12 Abbildung von einem Exemplare gegeben hat, bemerkt im Texte a. a. O. S. 287, wenngleich für diese neue Deutung auch keine zwingende Nothwendigkeit vorzuliegen scheine, so lasse sich nicht verkennen, daß Manches für dieselbe spreche. Auch Conze läßt unbestimmt, ob Dionysos oder Triton gemeint sei. Al. Thiele führt in dem Verz. der Sammlung Bergau mit vertieft geschnittenen Steinen die „Doppelherme des unbärtigen jugendlichen Ammon und des unbärtigen stiergehörnten Triton an, von welcher er auf Tafel I, n. 1 eine Abbildung giebt. Vermuthlich rührt die Benennung „Triton" von den drei eben erwähn-

denklich, wenn Thraemer a. a. O. S. 1111 mit Recht behauptet, daß die Schlange neben der Gestalt des Dionysos keine Rolle spiele. Aber diese Behauptung ist irrig, wenn es auch wahr ist, daß die Schlange als Attribut des Gottes nur selten vorkommt. Als solches erscheint sie auf Vasenbildern (vgl. Gerhard Auserl. Vasenb. I, 63 = Denkm. d. a. K. II, 37, 433, und Fröhner Les musées de France pl. 6, welches in der zweiten Ausgabe der Denkm. II, 433 wiederholt ist), denn daß es sich hier um eine Andeutung der Verwandlung des Dionysos handele (Thraemer S. 1095 nach Robert), ist gewiß irrig. Auf einem Berliner geschnittenen Steine richtet sich nach Toelken Erkl. Verz. Kl. III, 3, 960 neben dem Bacchus am Boden eine Schlange auf. Die Marmorstatuette des Dionysos mit der Stierhaut bei Welcker A. Denkm. V, Taf. II hat eine Schlange neben sich, die sich um einen Baumstamm windet. Ich zweifle nicht daran, daß die Herculanensische Bronze sich auf Dionysos bezieht; an einen Sabazios wird schwerlich zu denken sein.

ten Doppelhermenköpfen her. Für die Beziehung der Berliner Köpfe auf Dionysos spricht sich aus einleuchtenden Gründen auch R. Schneider Jahrb. S. 47 aus. Der beste der Köpfe n. 14 ist nach Kekulé Beschr. S. 10 „von edlem Typus pathetisch erregt aufwärts blickend". Auch die Gemme Bergau stellt nach der Abbildung zu urtheilen gewiß nicht den Triton sondern den Dionysos dar. — Desgleichen in der Galler. geogr. des Vatican, vgl. Gerhard Beschr. d. Stadt Rom Th. II, 2, S. 281, n. 33, Stephani Compte rend. pour 1862, p. 77 fg., Overbeck a. a. O., S. 289 fg., ungenügende Abbildung bei Pistolesi Il Vaticano descr. ed illustr. Vol. VI, t. 103. Während Gerhard und Stephani an dem Dionysos nicht zweifeln, meint Overbeck, daß die Doppelbüste ganz aus diesem Kreise zu entfernen sei, gewiß mit Unrecht. Der stiergehörnte Kopf ist, wie R. Schneider Jahrb. a. a. O. S. 47 bemerkt, der auch an der Hiehergehörigkeit der Doppelherme nicht zweifelt, sehr breit, mit stark hervortretenden Backenknochen, von finsterem Ausdrucke; seine Ohren stehen aufrecht, seine Hörner sind im weiten Abstande von einander im struppigen Haare angebracht, nach vorne gerichtet und etwas gewunden; die Stirnleiste zwischen denselben scheint angedeutet zu sein. b) Bronzekopf: „Kopf des sehr jugendlichen gehörnten Dionysos mit Thierohren und mit einem Diadem geschmückt, oben ein Henkel", (R. Gaedechens die Antiken des Fürstl. Waldeck'schen Museums zu Arolsen n. 113. c) Antefix aus Terracotta aus Tarent: Journal of Hellenic studies IV, pl. 32. d) Geschnittener Stein und Paste: Catal. du mus. Fol, Antiq. P. II. Genève 1875, p. 156 fg., n. 1957 u. 1960.

5.

Viel häufiger wird Dionysos nur mit Hörnern versehen auf den Bildwerken gefunden, wenn auch lange nicht so oft als man nach den Schriftstellern erwarten sollte, und zwar namentlich der unbärtige und jugendliche, aber auch der bärtige.

Dieser letztere findet sich in der Doppelherme des Mus. Chiaramonti des Vaticans, welche bei Nibby Mus. Chiaram. Vol. III, t. VIII nicht eben getreu abgebildet ist und als „Zagreo e Dionysio" gefaßt wird.

Man findet den bärtigen gehörnten Dionysos ferner in Doppelmasken auf Gemmen. So auf einer Paste und einem Iaspis zu Göttingen, vgl. G. Hubo Originalwerke der arch. Abt. d. arch.-numism. Instituts der Georg-Augusts-Universität n. 1528 u. 396

und Bernhard Müller Dreizehn Gemmen der Göttinger Universitätssamml., Abbild. n. 2 u. 1. Von Al. Thiele Die Samml. Bergau S. 11, n. 206 wird ein „Doppelkopf des Silen und des bärtigen gehörnten Bacchus" angeführt; doch nimmt sich der letztere Kopf in der Abbildung auf Taf. III eher als der des Pan aus.

Auch Münztypen gehören hierher. Freilich hat man einige früher mit Unrecht in Anschlag gebracht. Wenn Welcker A. Denkm. V, S. 39, A. 18 schrieb: „der bärtige Dionysos soll gehörnt nur auf Münzen von Naxos vorkommen", so irrte er zwiefach. Bisher ist keine derartige Münze von Naxos bekannt geworden. S. auch Stephani im Compte rend. p. 1863, p. 113. A. W. Curtius nahm an dem bärtigen gehörnten Dionysos einer Boeotischen Münze, die nach Pellerin Rec. T. I, pl. 24, 8 in den Denkm. d. a. K. II, 33, 378 abgebildet ist, keinen Anstoß. Aber schon Stephani bemerkte a. a. O., es bleibe sehr ungewiß, in wie weit jener Abbildung Pellerin's Glauben beizumessen sei. Thraemer vermuthet a. a. O. S. 1150 mit größter Wahrscheinlichkeit, daß man das Horn in der Abbildung Pellerins nur für ein verkanntes (weil schlecht erhaltenes) Epheublatt (resp. Ranke) halten kann. Ohne Zweifel gehört diese Münze nicht hierher. Erst in neuester Zeit ist der bärtige gehörnte Dionysos mit Sicherheit auf Münzen nachgewiesen worden von Imhoof-Blumer „Griech. Münzen" in den Abhandl. der K. Bayer. Akad. der Wissensch., München 1890, der S. 628 fg. sein Vorkommen auf Münzen von Skepsis dargethan und solche auf Taf. VIII, n. 6 fg. abbildlich mitgetheilt hat.

Ungemein viel größer ist die Zahl der Darstellungen des gehörnten unbärtigen Dionysos selbst nach Abzug der fälschlich oder unsicher hierhergezogenen Beispiele. Ueber alle ihm bekannten Fälle, deren Zahl aber von uns bedeutend vermehrt werden wird, hat Stephani a. a. O. p. 111 fg. gesprochen. Hier sind auch die verdächtigen oder unsicheren Beispiele als solche bezeichnet, doch hat auch er manche mit Unrecht hierhergezogen. So — um hier nur ein sicheres anzuführen — p. 111, A. 1 die ithyphallische Herme auf dem Vasenbilde bei Gerhard Hermenbilder Taf. V, n. 2 = Ges. Abhandl. LXXVII, 2, in welcher Gattung der Kunstübung überall kein stiergehörnter Dionysos nachzuweisen ist (vgl. auch Thraemer S. 1151). Die betreffende Herme stellt den Hermes dar, wie ich schon vorlängst einsah und nachher auch bei Thraemer a. a. O. S. 1122 u. 1151 bemerkt fand. Ueber einige andere vermuthlich auch nicht hierhergehörende Bildwerke wird besser im Folgenden gehandelt werden können.

Wir betrachten zunächst die Werke aus Marmor oder anderem Stein. Einen Kopf, „der vermuthlich einer Statue angehört hat und dessen Züge einen dem Apoxyomenos verwandten Typus tragen", verzeichnen Benndorf und Schöne „Die ant. Bildw. des Later. Mus." S. 153, n. 236*. Eine „Doppelherme des bärtigen und des gehörnten unbärtigen Dionysos in der Galleria dei Candelabri des Vatican (n. 360)" erwähnt mit dem Zusatze „das Gesicht des Letzteren ist breit, aber nicht satyresk; vom Haare hängen Lemnisken auf die Brust herab; das linke Horn ist ergänzt" R. Schneider Jahrb. a. a. O. S. 48. Eine Doppelherme aus Marmor in Pompeji wird im Bull. dell' inst. arch. 1847 p. 138 = Arch. Ztg. 1847, S. 148 bezeichnet als „Bacchus Hebon und der jugendliche mit Stierhörnern". Eine Marmorherme mit Stierhörnern zwischen den Haaren im Vatican ist nach Mus. Pio-Clement. T. VI, t. 6, n. 1 abgebildet in den Denkm. d. a. K. II, 33, 376 = 379 d. zweit. Ausg. Eine andere Abbildung in Hirt's Bilderbuch Taf. X, n. 3. Durch R. Schneider Jahrb. a. a. O. S. 48 erfahren wir: „der Mund ist etwas geöffnet, so daß die obere Reihe der Zähne sichtbar wird". Schneider äußert ferner, in dem freundlich lächelnden Gesicht vermöge er nicht „fast satyrartige" Züge zu erkennen und glaube, daß E. Q. Visconti a. a. O. p. 10 das Werk im Ganzen genommen getreuer charakterisiere, wenn er sage: il volto del dio di Nisa mantiene la sua bellezza e la sua gioventù, ma le sembianze di lui non han nulla di femminile ed una maschia venustà si diffonde sul suo volto e sulle sue forme, qual conviene a quella mescolanza di toro; della quale non solo ritiene le picciole corna, ma i capelli irti in mezzo alla fronte, e'l collo toroso e largo simigliante assai a quello d'Ercole: oltredicciò le labbra tumide alquanto, e rilevate più del dovere; acorescono anch' esse, senza altrarne gran fatto la beltà, quella rassomiglianza e il carattere di quel misto sì artificioso. Hirt erwähnt S. 79 nach Visconti eine ganz ähnliche Herme, an welcher die Hörner ursprünglich aus anderem Material eingesetzt gewesen zu sein scheinen. Er meint die in der Descr. de la Villa Albani aujourd'hui Torlonia, Rome 1869, p. 22, n. 119 (vgl. Beschr. der Stadt Rom III, 2, 460) als die d'un personnage inconnu bezeichnete Herme von „Griechischem Marmor". Eine andere Wiederholung sah ich im Jahre 1846 zu Poggio Imperiale, über welche sich bei Dütschke Ant. Bildw. in Oberitalien II, S. 47 fg. keine Auskunft findet. Ich notirte mir „Büste des stiergehörnten Bacchus mit der corona tortilis, Haar vor der Stirn ganz gleich wie bei der in den Denkm. d. a. K. II, 33, 376, die Neigung des Hauptes nach links noch

etwas tiefer, das Gesicht (mit tief ausgeführten Augensternen) noch finstrer, die Hörner abgestoßen. Eine vierte Wiederholung fand ich im J. 1873 im Varvakion zu Athen, vgl. Fr. Wieseler Arch. Bericht über seine Reise nach Griechenland S. 52, welche im Sybel'schen Catalog nicht erwähnt ist. Auch der oben an erster Stelle der Marmorwerke aufgeführte Kopf des Lateran. Mus. gehört sicherlich hierher. Eine anscheinend ähnliche Herme des Lateran. Mus. beschr. von Benndorf und Schöne S. 348, n. 489* zeigt über der Stirn aus dem Haar statt der Hörner Epheutrauben hervorstehend. Auch an der früher als Ariadne, jetzt mit Recht als Dionysos gefaßten Büste des Capitolin. Mus. (Denkm. d. a. K. II, 33, 375 = 377 d. zw. Ausg.) aus hellenistischer Zeit wird noch jetzt das Vorhandensein von Hörnern als sicher angenommen, obgleich schon C. Friedrichs an dem Berliner Gipsabgusse die Hörner vergebens suchte, vgl. Bausteine zur Gesch. d. Griech.-Röm. Plastik I, n. 628. In der Ausgabe dieses Werkes von Wolters wird n. 1490 für möglich, wenn auch nicht sicher gehalten, daß der Künstler unter dem Haare versteckt kleine Stierhörner angebracht habe. Eine genaue Untersuchung des Originals, die ich im Anfang des J. 1846 in Gemeinschaft mit einem Freunde unternahm, zeigte, daß von Hörnern keine Spur vorhanden ist. Die Büste eines jugendlichen Dionysos mit Hörnern, die über der Stirn hervorsprießen (nicht „am Diadem befestigt" sind, wie Blümner Lessing's Laokoon S. 104 angiebt) aus grünem Basalt im Berliner Mus. (Conze Verz. d. ant. Skulpt. S. 28 n. 120), abgebildet in Beger's Thes. Brandenburgicus III, p. 240, bei Hirt Bilderbuch S. 23, Vign. 2 und danach in der zw. Ausg. der Denkm. d. a. K. IV, 33, 378, so wie eben in der Beschr. d. ant. Skulpt. des K. Mus. zu Berlin zu n. 120, ist nach Conze „vielleicht moderner Arbeit", wie auch Puchstein bei R. Schneider Jahrb. S. 48 sie als „des modernen Ursprungs nicht ganz unverdächtig" bezeichnet, und Kekulé als „vielleicht moderne Arbeit". Eine Marmorbüste des jugendlichen gehörnten Dionysos befindet sich in der Marciana zu Venedig, vgl. Nachrichten von der K. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen 1874, S. 587. Ein kleiner mit Epheu und Weintrauben bekränzter, mit Stierhörnern versehener Kopf zu Turin ist in denselben Nachrichten 1877, S. 671 verzeichnet, in dem Dütschke'schen Verzeichniß habe ich ihn aber nicht finden können.

Auch in Reliefs kommt der jugendliche Dionysos gehörnt vor, wenn auch nur sehr selten. So, wie es scheint, auf dem Felsrelief von Philippi bei Heuzey et Daumet Mission arch. de Macédoine pl.

III, 2, Rev. arch. nouv. sér., Vol. XI, 1865, p. 450, einer spätern Griechischen Arbeit, vgl. Mission p. 79 fg. = Rev. arch. p. 449 fg., Thraemer a. a. O. S. 1111 fg.; vielleicht auch der in Hautrelief ausgearbeitete Kopf des Lateranens. Mus. bei Benndorf u. Schöne n. 240.

Ferner bringt man hierher mehrere Werke aus Thon. Stephani erwähnt im Compte rend. p. 1863, p. 111 ein Thongefäß, welches die Form eines jugendlichen mit Stierhörnern versehenen Kopfes habe, und bezieht diesen auf Dionysos. Es handelt sich um das in der Arch. Ztg. 1851, Taf. 32 abgebildete Gefäß. E. Gerhard hielt den Kopf für entschieden weiblich und war besonders geneigt ihn auf Kora zu beziehen (Arch. Ztg. 1851, S. 369 fg.). Aber wenn auch das Gesicht sich ganz weiblich ausnimmt, so erscheint doch das Haar mehr männlich und der Kalathos nebst anderem Kopfschmuck würde wohl zu einem Dionysos passen. Die Hauptsache ist, daß bei Annahme eines Weibes keine wahrscheinliche Deutung möglich ist. Das Gefäß soll nach Gerhard aus Unteritalien stammen. Dann glaubt Stephani a. a. O., daß die an den Voluten der unteritalischen großen Amphoren so häufig wiederkehrenden kleinen Köpfe mit weißen Stierhörnern den Dionysos darstellen, vgl. Stephani Vasensammlung der K. Ermitage Th. I, n. 351, S. 166, n. 354, S. 173, n. 423, S. 223, n. 778, S. 306, n. 787, S. 316, Th. II, n. 1286, S. 116. Die Köpfe sind regelmäßig dem Beschauer zugewendet. Uns scheinen Medusenköpfe gemeint zu sein, die in jenen späteren Zeiten auch mit Hörnern dargestellt wurden. Endlich nimmt Stephani im Compte rend. a. a. O. an, daß ein an einem kleinen schwarzen Thongefäße der Ermitage in flachem Relief dargestellter jugendlicher mit Weinlaub bekränzter und mit Stierhörnern versehener Kopf den Dionysos darstelle. Aber in dem später erschienenen Verzeichn. der Vasensammlung Th. I, n. 505 heißt es „ein jugendlicher Kopf mit reichem Haar, spitzen Ohren und kleinen Hörnern (Satyr)“. Sicher stehen folgende von Stephani meist nicht erwähnten Beispiele. Auf einer Lampe in den Lucernae fict. Mus. Passer. II, 37 ist die Büste des unbärtigen gehörnten Dionysos mit etwas in die Stirn herabfallendem Haare und finsterem Gesichtsausdruck dargestellt. Ein aus Kleinasien stammendes Terracottaköpfchen des jugendlichen gehörnten Dionysos im K. Antiquarium zu Berlin erwähnt nach Furtwängler R. Schneider a. a. O. S. 46, Anm. Eine Terracottenstatuette des gehörnten jugendlichen Dionysos mit Stierhörnern ist bei J. de Witte Rec. de terres cuites de Janzé pl. 23 abgebildet.

Mehr ist uns von hierhergehörenden Bronzen erhalten. Stephani erwähnt zwei Statuen Compte rend. p. 1863, p. 111 nebst

Anm. 4. „Die eine ist bei Clarac Mus. de sculpt. pl. 684, n. 1603“ oder vielmehr 1601, „die andere, an welcher sich die Hörner fast der Form von Ziegenhörnern nähern, in den Bronzi d' Ercolan. T. II, p. 203 und bei Piroli Ant. d' Hercul. T. V, pl. 27, Kayser Hercul. und Pomp. Th. V, 1, Taf. 101, Clarac Mus. de sc. pl. 770 A, n. 1919“, vielmehr 1909, „D abgebildet“. Aber die letztere betrachtet R. Schneider Jahrbuch a. a. O. S. 45 fg. A. 5 als entschieden nicht hierhergehörig; auch die andere wagt er nicht als sicher auf den gehörnten Dionysos bezüglich zu betrachten, „da in den beiden andern Abbildungen Bronzi di Ercolano Vol. II, t. XXXVI, Roux und Bouchet Herculanum et Pompêi T. V, Ser. 1, pl. XLVI die angeblichen Hörner wie zwei Haarlocken aussehen“. Dagegen kommt jedenfalls die Sitzfigur in der K. Ant.-Sammlung zu Wien aus der früheren Diadochenzeit in Betracht, welche E. v. Sacken in den arch.-epigraph. Mittheil. aus Oesterr. Jahrg. III, S. 128 fg., n. 2 auf den Stierdionysos bezieht, nachdem sie Furtwängler in den Mittheilungen des Deutschen arch. Instituts in Athen Bd. III, S. 294 Anm. für einen Diadochenkönig als Dionysos gehalten hatte. Die von Robert Schneider in dem Jahrb. a. a. O. S. 42 u. Taf. IV abbildlich mitgetheilte Figur wurde um 1877 im Peloponnes gefunden. „Sie zeigt uns den jugendlichen Gott, wie er sich auf ein Felsstück niedergelassen hat. Er ist nackt. Das um den linken Vorderarm gewickelte Gewand dient als weiche Unterlage auf dem rauhen Sitze und hängt über den nackten Oberschenkel herab. Der nach rechts gewendete Kopf, den gewohnten Bildungen des Dionysos wenig ähnlich, ist von breit und kräftig gebautem Knochengerüste und düsterem Ausdrucke. Eine tiefe von Schläfe zu Schläfe sich hinziehende Furche theilt die fleischige Stirne in zwei Hälften, deren untere ungefähr wie an den Köpfen des Zeus über der Nasenwurzel stark ausgebaucht ist. Die Nase ist klein, der Mund groß, die Lippen dick. Das Haar, aus dem rechts und links die kleinen Hörner des jungen Stiers hervorragen, schmiegt sich dem flachen, verhältnißmäßig kleinen Hinterhaupte an, umgiebt dasselbe mit den wirr durcheinander geworfenen Enden gleich einem Kranze, fließt rechts und links vom Gesichte in reicher Fülle über den starken Nacken herab und verleiht dem Kopfe, den es größer erscheinen läßt als er wirklich ist, ein fast majestätisches Ansehen. Blick und Wendung des Kopfes gelten offenbar der Figur, welche auf dem nach rechts sich fortsetzenden jetzt leeren Theile der Basis angebracht war. Am nächsten liegt es hier, an das Lieblingsthier des Dionysos, den Panther zu denken, der nach dem Becher oder nach der Traube

aufschaut, Dinge die vielleicht mit mehr Wahrscheinlichkeit in der erhobenen Rechten des Gottes vorausgesetzt werden dürften als Thyrsos oder Zepter". Sehr interessant ist das auf einem Throne sitzende Cultusbild des Dionysos aus vergoldeter Bronze, mit den Ansätzen (punte) zweier Hörner auf der Stirne (Sogliano Le pitt. murali Campane n. 241, in Pompei e la regione sotterrata dal Vesuvio Napoli 1879, P. 2, p. 131. Außerdem führt R. Schneider S. 48 an ein „Brustbild aus Bronze gefunden bei Essek um 1870, im Besitze des Herrn Julius Herz, 24 cm hoch und 26 cm breit. Es gehört der derberen Charakteristik des Weingottes nach sichtlich einer späteren Kunstepoche an. Der freundlichlächelnde Kopf ist nach rechts geneigt. Wangen und Kinn sowie die Brust sind von fast weiblicher Fülle. Das in der Mitte gescheitelte und mit einer Corona tortilis geschmückte Haar fällt in aufgelösten Strähnen auf die Schulter und ist mit Trauben schwer behangen. Winzige Hörnchen wachsen aus beiden Stirnhöckern heraus, und über dieselben zieht sich eine schmale Binde hin, welche sich jederseits im Haare verbirgt. Auf der linken Schulter ist das quer über die Brust laufende, mit besonderem Fleiß ausgeführte Ziegenfell geknüpft. Die Bronze ist vortrefflich erhalten, mit schöner Patina überzogen und obwohl nachhadrianischer Zeit angehörig, von guter, freilich etwas trokkener Arbeit. Sie ist hohl und war als Zierrath in senkrechter Lage an irgend einem Geräthe befestigt". Ein halblebensgroßer Kopf von Bronze mit sehr kleinen Stierhörnchen wird in dem Jahrb. d. K. Deutschen arch. Inst. Bd. V, Arch. Anz. 1890, 3, S. 91 erwähnt und abbildlich mitgetheilt von Furtwängler, der bemerkt, daß der Kopf in Kleinasien gefunden sei und eine Arbeit späterer hellenistischer oder frührömischer Zeit zu sein scheine. Zwei schöne Köpfchen auf einem durch die Künstlerinschrift interessanten Bronzeplättchen erwähnt Overbeck Pompeji S. 430 der vierten Aufl. Schönes Köpfchen aus der Gegend von Corneto Bull. d. inst. arch. 1866, p. 232. Besonders interessant ist der von R. Schneider im Jahrb. a. a. O. S. 44 abbildlich mitgetheilte und S. 43 fg. besprochene Bronzehenkel eines Gefäßes aus Aegypten im K. Mus. zu Wien: „Auf dem massiv gegossenen und trefflich erhaltenen, 25,5 cm hohen Henkel, erhebt sich in hohem Relief als ein ursprünglich in dem weichen Stoffe gesondert modellirtes Stück eine 9 cm hohe Maske des gehörnten Dionysos. Der nach rechts gewendete Kopf, dessen Bedeutung das Weinblatt außer Zweifel setzt, entnimmt außer den beiden Hörnern, welche spitziger und größer als an der peloponnesischen Figur, auch morpho-

logisch richtiger aus den Stirnhöckern hervorsprießen, dem Stiere noch die freilich nicht naturalistisch abstehenden, sondern mit der Spitze nach aufwärts gekehrten Ohren. Auch der Hals ahmt mit seiner schlaffen faltenreichen Haut entschieden die hängende Wamme des Stieres nach. In vollem Einklang mit der weitergehenden Aufnahme thierischer Formen sind auch die etwas finsteren Züge der Maske weit weniger edel als an dem Kopfe der Statuette. Im Gesichte überwiegen die unteren Theile, die Wangen sind voll, die Nase ist stumpf und fleischig. Die niedere Stirne ist zwar gleichfalls über Brauen und Nasenwurzel stark angeschwollen, giebt aber dem Kopf keineswegs das zeusartige Gepräge der peloponnesischen Figur. Das Haar ist spärlich und hinter Hörnern und Ohren unter Epheublättern verborgen [1]). „Masken des gehörnten Bacchus, wie es scheint" am Schlusse der Henkel eines eimerförmigen Bronzegefäßes nach Friederichs Berlins ant. Bildw. II, S. 163, n. 679.

Von den hierher gehörenden Münzen ist sicher und belangreich die aus Bronze mit dem Brustbild des epheubekränzten unbärtigen Dionysos mit Stierhörnern an den Schläfen mit eigenthümlichem an die Marmore oben S. 374 fg. und die Lampendarstellung S. 380 erinnernden Gesichtsausdruck unter Seleukos I von Syrien geprägte, welche Percy Gardner The types of Gr. coins pl. XIV, n. 11 und Catal. of Gr. coins in the Brit. Mus., Seleucid. kings of Syria, pl. XXVIII, n. 1 herausgegeben hat und die zweite Ausg. d. Denkm. d. a. K. II, 33, 380 wiedergeben wird. Andere hierhergezogene Münztypen hat schon Stephani Compte rend. p. 1863, p. 112 fg. als nicht hierher gehörig oder unsicher bezeichnet. Anlangend die hier S. 113 erwähnten Bruttischen Münzen, so sind dieselben noch öfter besprochen oder abgebildet als er angiebt; zuerst von Eckhel Numi anecd. p. 41 u. t. III, 20, ferner von R. Stuart Poole Catal. of Gr. coins in the Brit. Mus., Italy, p. 321, welcher der betreffenden Figur in der Linken eine lange Fackel zuschreibt, von Friedländer und Sallet Münzkab. zu Berlin n. 548 = 752 d. 2. Aufl., welche angeben, daß die Figur in der Linken ein Scepter halte, von Garrucci, Mon. dell' Italia ant. t. CXXIV, n. 13 u. 14. Alle schreiben der Figur Hörner zu, Stephani bemerkt dagegen: „einige sehr wohl erhaltene Exemplare der kais. Eremitage lassen die vermeintlichen Hörner vielmehr als eine Zackenkrone erscheinen und so sind sie

1) Die obigen Beschreibungen R. Schneider's zeigen, daß die Angabe bei Friedrichs und Wolters a. a. O. n. 1730 irrig ist.

auch in den von Carelli gegebenen Abbildungen aufgefaßt". Das Attribut in der Linken ist weder als Fackel noch als Scepter aufzufassen, sondern als Speer. Die Figur ist früher theils als Dionysos theils als Flußgott aufgefaßt. Wenn Stephani äußert, es erscheine ihm sehr zweifelhaft, ob überhaupt an Dionysos zu denken sei, so kann ich nur zustimmen; vermuthlich ist Pan gemeint. Außer diesem Münztypus bezieht A. W. Curtius a. a. O. S. 20 den auf einer Münze von Gela (Streber a. a. O. S. 474. 477 und Kupfertaf.) dargestellten gehörnten jugendlichen Kopf, den Streber für den Flußgott Gelas ausgebe, für den jugendlichen Stierdionysos, während er den „Stiermenschen auf der Aversseite" für den Fluß Gelas hält. Aber das ist durchaus irrig, auch abgesehen davon, daß der Kopf gar nicht so aussieht, wie der eines Dionysos. Der unbärtige gehörnte Kopf kommt mehrfach auf der Vorderseite der Silber- und Kupfermünzen von Gela vor und ist als der Flußgott durch die Attribute und selbst durch Inschrift als Gelas bezeichnet. Der Typus auf der Rückseite der Kupfermünzen ist ausnahmsweise ein Stier mit menschlichem Gesicht, während sonst ein schreitender Stier vorkommt. Die Inschrift *ΓΕΛΣ* findet sich allerdings einige Male auf der Rückseite bei dem Stiere, aber dennoch ist dieser auch als der Flußgott Gelas zu betrachten, der also zwei Male, einmal als Mensch mit Stierhörnern, das andere Mal als vollständiger Stier dargestellt ist. Die Bildung als vollständiger Stier bezeugt Timäos in den schol. Pindar. Pyth. I, 135: *τὸν γὰρ ἐν τῇ πόλει δεικνύμενον (ταῦρον) μὴ εἶναι τοῦ Φαλάριδος, — ἀλλ' εἰκόνα Γέλα τοῦ ποταμοῦ.*

Von hierher gehörenden geschnittenen Steinen giebt es kein sicheres Beispiel. Vgl. Stephani Compt. rend. 1863, p. 113 fg. Wenn es hier p. 114, A. 1 heißt: „ein roh gearbeiteter Sard der Sammlung in Berlin (Toelken Verz. p. 186, n. 928) stellt vielleicht den jugendlichen Dionysos dar, allein die ihm gegebenen Hörner gleichen mehr den Ziegenhörnern als denen der Stiere", so erkannte schon Winckelmann Descr. d. pierr. grav. Stosch Cl. II, n. 1487, p. 239 die Ziegenhörner und bezog deshalb die Darstellung auf eine tête d'un Faune. Toelken, der von der Art der Hörner nichts sagt, zweifelt nicht an einem „Kopf des Bacchus". Er bemerkt indessen, daß der mit Epheu bekränzte Kopf einen strengen, fremdartigen Ausdruck habe und über der einen Schulter der Thyrsos, über der andern das Pedum erscheine. Dieses konnte allerdings auch dem Dionysos gegeben werden. Die Ziegenhörner sind aber unzweifelhaft. Stephani hat die oben S. 381 besprochene Bronzestatue aus Herculaneum, trotz seiner Wahrneh-

mung, „daß sich die Hörner fast der Form von Ziegenhörnern nähern“ unbedenklich als Dionysos gefaßt. Eine prächtige bärtige Bronzemaske aus Macedonien mit Ziegenohren bei Froehner Collect. J. Gréau, Catal. des bronzes ant. p. 36, n. 167 wird von dem Herausgeber p. 37 auf Dionysos bezogen. Er bemerkt, daß die Ziegenohren ein détail peu commun sei. Ich kenne es bei keinem anderen sicheren Dionysoskopf. Freilich hat Head Hist. num. p. 457 einen auf p. 456, F. 282 abgebildeten epheubekränzten unbärtigen Kopf mit Ziegenohren auf den jugendlichen Dionysos bezogen, aber er denkt auch an eine Bacchante und von Percy Gardner Types of Gr. coins zu pl. X, 40, wo derselbe Typus abgebildet ist, wird er nur auf eine Maenade bezogen. Man hat an eine Satyra zu denken, vgl. Nachr. der Kgl. Ges. d. Wissensch. 1890, S. 388. Die in Rede stehende früher im Besitz von Gréau befindliche Maske hat manche Aehnlichkeit mit der früher Milanischen und der von Cilli, welche R. Schneider zusammen herausgegeben hat. Auch diese haben thierische Ohren und sind wegen des Gesichtsausdrucks nicht auf Dionysos, sondern zunächst auf den Silen zu beziehen [1]). — Indessen wird im Cat. du mus. Fol. Ant., P. II, n. 1935 eine Paste als mit zwei kleinen Stierhörnern versehen bezeichnet, mit dem Zusatze la figure est rieuse, und n. 1941 das Fragment eines Onyx, an welchem man sur les tempes deux petites cornes gewahre.

Wie Philostratos Imag. I, 15 in der Beschreibung eines Gemäldes mit der Darstellung des Dionysos und der Ariadne jenem als sein Kennzeichen Hörner ἐκ τῶν κροτάφων (gewiß des Stieres) beilegt, so sehen wir auf einem Wandgemälde mit demselben Gegenstande (Bullett. Napol. nuov. ser. T. II, p. 67, Helbig Wandgem. d. verschütt. Städte v. 1239) den jugendlichen gehörnten Gott dargestellt. Ein anderes Pompejanisches Wandgemälde, das ihn als Cultusbild zeigt, ist schon oben S. 382 erwähnt. Auch Albricus Phil. de deor. imag. CXIX beschreibt ein Gemälde des Dionysos mit gehörntem Kopfe.

Auch ein aus Rom stammendes Mosaikbild ist bekannt durch die Abbildung bei Bartoli Le pitture ant. delle grotte di Roma tav. XX.

Darstellungen des Dionysos bloß mit Stierhörnern werden bei den Schriftstellern etwa seit der Mitte des fünften Jahrhunderts v. Chr. erwähnt. In Bildwerken sind sie vor der Zeit Alexanders des

1) Mit Unrecht werden diese beiden Masken bei Friedrichs-Wolters n. 2032 u. 2033 auf Dionysos bezogen.

Großen nicht nachzuweisen. Sie scheinen im Peloponnesos aufgekommen und namentlich durch Lysippos und dessen Schule ausgebildet zu sein, vgl. R. Schneider Jahrb. a. a. O. S. 50 fg., auch oben S. 378 fg.

In der Zeit der Diadochen finden wir auch diese mit Stierhörnern dargestellt, ohne Zweifel um sie als neue Dionysen zu bezeichnen. So zuerst Seleukos I von Syrien, vgl. die Münze in den Denkm. d. a. K. I, 49, 220 m = Catal. of the Gr. coins in the Brit. Mus., Seleucid. kings, pl. I, n. 6, und die ebenda n. 11 u. 13, die erste auch bei Head Hist. num. p. 638, F. 336. Dann Demetrios Poliorketes auf der Münze D. a. K. I, 50 p. 221 b, Head H. num. p. 202, F. 144, dem geschnittenen Steine des Brit. Mus. (Murray Cat. of engrav. gems pl. I. n. 1526, vgl. p. 171, und in der Bronzestatuette D. d. a. K. I, 50, 221 a, wenn dieselbe ihn wirklich darstellen soll. Ein gewiß nicht mit Recht auf Alexander bezogener Hermenkopf aus Herculaneum, abgebildet bei Comparetti e de Petra La villa dei Pisoni tav. XX, 3, stellt jedenfalls das heroisirte Porträt eines Diadochenkönigs dar. Dazu kommt noch der Marmorkopf eines gleichfalls unbestimmbaren Diadochen, zuletzt besprochen von Helbig „Die öffentlichen Sammlungen klassischer Alterthümer in Rom“ I, S. 173 fg., n. 247.

Von besonderem Interesse ist die Tetradrachme Seleukos' I. Der König trägt einen Helm von Stierleder mit dem Ohr und dem Horn eines Stieres daran (also auch hier wie oben S. 373 fg. die Verbindung von Stierhörnern und Stierohren). Wie kam der Künstler dazu, ihn so darzustellen? Nicht bloß A. W. Curtius a. a. O. S. 30, sondern noch Head a. a. O. S. 638 ist der Meinung, daß es geschehen sei in Rücksicht auf die Kraftprobe, welche Seleukos einst bei einem Opfer Alexanders ablegte, als er einen wilden den Fesseln entsprungenen Stier ganz allein aufhielt und mit den Händen tödtete (Appian. Syr. 57). Allerdings giebt Appian ausdrücklich an, daß deshalb der Statue des Seleukos Hörner beigegeben seien. Aber wer will das glauben? Alexanders siegreicher Zug nach Indien hatte die Sage von Dionysos' Siegen ebendort in Schwang gebracht. Dionysos wurde Kriegsgott und Triumphator, ein Schützer und Vorbild sieghafter Herrscher. Wie Alexander hatte auch Seleukos in Indien gesiegt. Daß er den Stierdionysos als seinen Schutzgott betrachtete, zeigt die oben S. 383 aufgeführte Münze, deren Revers den Seleukos darstellt, wie er zu Roß sitzend einen Feind niedergestoßen hat. Nun wurde auch Seleukos selbst als neuer Dionysos dargestellt. Auch Herrscher, die nicht in Indien gesiegt hatten, erhielten von den

Künstlern die Dionysischen Stierhörner. War doch der Gott überall siegreich und Verleiher des Sieges.

6.

E. von Sacken glaubt „Die ant. Bronzen des K. K. Münz- u. Ant.-Cab." in Wien S. 60, daß auch das Taf. XXIX, F. 14 abgebildete archaische Bronzewerk, welches ein Menschenantlitz mit Stiernacken zeigt, außerdem aufrechtstehende Ohren, aber ungehörnt ist, den Stierdionysos angehe. Ich kann unmöglich beistimmen, sondern bin überzeugt, daß ein Silen mit *ὦτα μεγάλα ὄρθια* gemeint ist.

Besonders interessant ist eine Münze von Skepsis, beschrieben und herausgegeben von Imhoof-Blumer in den Griech. Münzen, Abhandl. d. K. Bayer. Akad. d. Wissensch. München 1890, S. 629, n. 235 und Taf. VIII, n. 9. Während sonst auf den Münzen dieser Stadt der Kopf des bärtigen Dionysos gehörnt erscheint, trifft man das thronende Cultbild des Gottes dort nicht gehörnt, aber von zwei Stieren umgeben. Die Hörner am Kopfe des Gottes sind doch wohl nur deshalb weggelassen, weil die Beigabe der beiden Stiere auf den Stierdionysos hinwies.

Schon vorlängst ist darauf aufmerksam gemacht, daß in einer Berliner Marmorstatuette (Conze Verz. n. 93) die symbolische Beziehung des Stiers zu Dionysos dadurch bezeichnet wird, daß dem Gott als Anzug eine Stierhaut gegeben wird, vgl. Welcker Ann. d. inst. arch. 1857 p. 146 fg. = A. Denkm. V, S. 36 fg., Mon. ined. VI, t. VI, 1. 2 = A. Denkm. a. a. O. Taf. II.

Weiter hat man auch einen mit Wein bekränzten Kinderkopf aus rothem Marmor im Berliner Museum, der hinten in einen kleinen Stierkopf ausläuft, hierhergezogen; vgl. Arch. Ztg. 1851, Taf. XXXII, Welcker A. D. a. a. O., S. 39, Gaz. archéol. 1879, p. 27, Conze Verz. d. ant. Skulpturen d. Berl. Mus. n. 134, Kekulé Beschr. ders. n. 134.

Die Veranschlagung von Bildern des Dionysos mit angedeuteten oder verhüllten Hörnern rührt von R. Schneider Jahrb. a. a. O. S. 49 fg. her. Er führt unter dieser Kategorie auf die oben S. 379 erwähnte Herme des Lateranens. Mus. bei Benndorf und Schöne n. 489*, die oben S. 379 besprochene Büste des Capitol. Mus. [1]), die

1) Schon A. W. Curtius bemerkte a. a. O. S. 20 gegen Welcker's Ansicht: „Mit demselben oder mit noch mehr Recht könnte man dann auch den gelagerten Dionysos im Louvre Bouillon Mus. III, 9 und den Dionysos Mon. dell' Inst. VI, 6 für den gehörnten Dionysos ausgeben".

Herme des Dionysos Psilax im Berliner Mus.: „Die Buckel über der Stirne sollen zwar nach der Versicherung E. Brauns Kunstvorst. des gefl. Dionysos S. 3 nichts Anderes als die unter dem Tuche verborgenen Trauben des Epheukranzes sein, haben aber wie derselbe selbst zugesteht, fast „das Ansehen von Hörnern". Conze spricht in den ant. Skulpt. des Berl. Mus. n. 119 von Resten einer Bekränzung von Epheu. Auch anderweitig wird die Braun'sche Angabe nicht bestätigt. Endlich veranschlagt R. Schneider das oben S. 379 fg. erwähnte Reliefbrustbild an der Felswand von Philippi, in welchem es sich aber um ein eigentliches Verhüllen der Hörner nicht handelt. Warum überall das Verhüllen der Hörner?

Die Hörner sind nicht stets und durchaus nöthig, sie können auch durch Gesichtsausdruck und sonstwie ersetzt werden.

Schließlich noch die Bemerkung, daß die Darstellungen des gehörnten Dionysos in Betreff des Gesichtsausdruckes und auch der Formen mannigfach wechseln. Der Ausdruck ist ein aufgeregter und mehr noch ein finsterer, aber nicht selten auch der gewöhnliche, ja auch ein freundlich lächelnder wie an dem Bronzebrustbilde aus der Gegend von Essek (oben S. 382) und vielleicht auch an der Paste Fol (oben S. 385). Vgl. dazu Schriftstellen, wie namentlich Ovid. Fast. III, 789: Mite caput, pater, huc placata que cornua vertas. Beispiele eigenthümlicher Formen oben S. 374, 378, 381, 382 fg.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

November 1890.

(Fortsetzung.)

XV. Bericht der Naturforschenden Gesellschaft in Bamberg. Bamberg 1890.

Jahresbericht des Direktors des Kön. Geodätischen Instituts für April 1889 bis April 1890. Berlin 1890.

Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät in Erlangen. 22. Heft. 1890. München 1890.

Jahrbücher der K. K. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus. Officielle Publication. Jahrg. 1888. Neue Folge XXV. Bd. Wien 1889.

Die Wahrheit. Entwurf zu einer transcendentalen Logik von Anton Ganser. Graz 1890.

Skizzen zu einem werthvollen Luftschiff von J. Fr. Schön le Jeune in Wien. (2 Exempl.).

Anzeiger der Akademie d. Wissensch. in Krakau. 1890. Oktober. Krakau 1890.
Ungarische Revue. IX. Heft. 1890. Nov. 10. Jahrg. Budapest 1890.
Myriopoda Regni Hungariae. Elabor. Dr. Eugenius Daday de Deées. Budapest 1889.
Adatok a bor-és mustelemzés módszeréhez irta Dr. Ulbricht Richárd. Budapest 1889.
Jahrbuch für Schweizerische Geschichte. Band 15. Zürich 1890.
Nature. Vol. 43. Nr. 1096. 1100. (London 1890).
Proceedings of the London Mathematical Society (vol. XXI). Nos 388—390.
Collected mathematical papers of Arthur Cayley. Vol. III. Cambridge 1890.
Monthly notices of the R. Astronomical Society
a. Vol. L. N. 9. Supplementary number.
b. Appendix to Vol. L. London 1890.
Proceedings of the Cumbridge Philosophical Society. Vol. VII. Part. II. Cambridge 1890.
Proceedings ef the scientific meetings of the Zoological Society of London. Part. III. Mai and June 1890. October 1890.
Natural History of Victoria. Prodromus of the zoology of Victoria. Decade XX. by Fr. Mecoy. Melbourne & London 1890.
Académie Impériale de St.-Petersbourg. St.-Petersbourg 1890.
a. Bulletin Nouvelle série. I. (XXXIII). No. 4 et dernier.
b. Mémoires. Tome XXXVII. No. 11, 12, 13. Tome XXXVIII. No. 1.
Bidrag till kännedom of Finlands natur och folk. H. 48. Helsingfors 1889.
Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens förhandlingar. XXXI. 1888 — 1889. Helsingfors 1889.
Bulletin de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique 60e année, 3e série, tome 20. N. 9—10. Bruxelles 1890.
Tijdschrift voor Nederlandsche Taal- en Letterkunde. 9. deel. Nieuwe Reeks, 1. deel. 4. Aflevering. Leiden 1890.
Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas. Vol. IX. No. 6. Coimbra 1889.
Note sur deux algues de la Méditerannée Fauchea et Zosterocarpus par M. Ed. Bornet. (Extrait de Bulletin de la Société botanique de France. Tome XXXVII, séanee du 28 mars 1890).
Acta mathematica 13: 1 ei. 2. Stockholm (Berlin, Paris) 1890.
Kongl. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademiens Månadsblad. 17 u. 18 Argången 1888 u. 1889. Stockholm 1886—90.
Bergens Museums Aarsberetning for 1889. Bergen 1890.
Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Milano, Napoli, Pisa 1889. 90.
a. Rendiconti. Serie II. Vol. XXII.
b. Memorie. Classe di lettere e scienze storiche e morali. Vol. XVII — VIII della serie III. Fasc. II. Vol. XVIII — IX della serie III. Fasc. II.
c. Atti della Fondazione scientifica Cagnola dalla sua istituzione in poi. Vol. 9. 1889. Milano 1890.
Memorie di matematica e di fisica della Società italiana delle scienze. Serie 3. Tomo VII. Napoli 1890.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Anno CCLXXXVII. 1890. Serie quarta. Rendiconti. Vol. VI. 2. semestre. fasc. 5, 6. Roma 1890.
Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze. Bollettino delle pubblicazioni italiane. 1890. N. 116. 118. Nebst Indice. Bogen 7 u. 9. Firenze 1890.
Biblioteca Nazionale Centrale Vittorio Emanuele di Roma. Bollettino delle opere moderne straniere. Vol. V. N. 2. Febbr. 1890. Roma 1890.
Smithsonian Institution:
a. Proceedings of the United States National Museum. Vol. 12. 1889. Washington 1890.
b. Bulletin of the U. St. National Museum N. 38. Washington 1890.
Bulletin of the American Geographical Society. Vol. XXII. N. 3. Sept. 1890. New York.
Johns Hopkins University Circulars. Vol. X. N. 88. Baltimore Nov. 1890.
Resultados del Observatorio national Argentino en Cordoba. Vol. XII. Observaciones del año 1879. Buenos Aires 1890.

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Oct. de 1890. Entrega IV. Tomo XXX. Buenos Aires 1890.

The Journal of the College of science, Imp. University, Japan. Vol. III, part. IV. Tōkyō Japan 1890.

Nachträge.

Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Bericht Nr. 10 — 13 vom 31. Juli, 31. August, 30. Sept., 31. Okt. 1890.

Dezember 1890 und Januar 1891.

Sitzungsberichte d. K. Preuß. Akademie d. Wissensch. zu Berlin. XLIX, L und Register von 1899. Berlin.

Jacobi, C. G. J., Gesammelte Werke. Herausgeg. auf Veranlassung d. K. Preuß. Akad. d. Wissensch. Band 5. Herausgeg. v. K. Weierstraß. Berlin 1890.

K. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig:

a. Berichte über die Verhandlungen. Mathematisch-physische Classe 1890. II. Leipzig 1890.

b. Abhandlungen der philolog.-histor. Classe. Bd. XII. Nr. 1. Causa Nicolai Winter v. Friedr. Zarncke. Leipzig 1890.

Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. 25. Jahrg. 3. Heft. Leipzig 1890.

Leopoldina. Heft XXVI. N. 21/22, 23/24 nebst Titel und Register zu Heft XXVI. Jahrg. 1890. Halle 1890.

Neues Lausitzisches Magazin. 66. Bd. 2. Heft. Görlitz 1890.

Mittheilungen aus dem naturwissenschaftlichen Verein für Neu-Vorpommern und Rügen in Greifswald. 22. Jahrg. 1890. Berlin 1891.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik begr. v. C. Ohrtmann. Band XX. Jahrg. 1888. Heft 1. (Bog. 1—32). Berlin 1890.

Kölliker, A.: Zur feineren Anatomie des centralen Nervensystems. (Separatabdruck aus: Zeitschrift für wissenschaftl. Zoologie. LI, 1. Leipzig 1890).

Jahrbücher d. Nassauischen Vereins f. Naturkunde. Jahrg. 43. Wiesbaden 1890.

Schriften der Naturforschenden Gesellschaft in Danzig. Neue Folge. 7. Bd. 3. Heft. Danzig 1890.

Vorlesungen über Geometrie unter besond. Benutzung der Vorträge von Alfred Clebsch. Bearb. v. Dr. F. Lindemann. 2. Bd. 1. Theil. Leipzig 1891.

Catalog der Astronomischen Gesollschaft. 1. Abth. Catalog der Sterne bis zur neunten Größe zwischen 80° nördl. und 2° südlicher Declination für das Aequinoctium 1875. 3. Stück. Zone + 65° bis + 70°. Beob. a. d. Sternwarte in Christiania. Leipzig 1890.

Neue Annalen d. K. Sternwarte in Bogenhausen bei München. Auf Kosten der K. Bayer. Akademie d. Wissensch. herausgeg. von Hugo Seeliger. Bd. I. München 1890.

Acta mathematica. Hrsg. von G. Mittag-Leffler. 13, 3 u. 4. Stockholm, Berlin, Paris 1890.

Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. Band IX. Heft 1.

Brachiopoden der alpinen Trias von A. Bittner. Abhandlungen der K. K. Geologischen Reichsanstalt. Band XIV. Wien 1899.

Verhandlungen der K. K. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Jahrg. 1890. XL. Band. III. u. IV. Quartal. Wien 1890.

Lotos. Jahrbuch für Naturwissenschaft. Neue Folge XI. Bd. (der ganzen Reihe 39. Bd.). Prag, Wien, Leipzig 1891.

Separatabdruck aus Tschermak's Mineralogischen und Petrologischen Mittheilungen. Herausgeg. v. F. Becke.

M. Hunter und H. Rosenbusch: Ueber Monchiquit . . . Wien (1890).

Mittheilungen d. historischen Vereines f. Steiermark. XXXVIII. Heft. Graz 1890.

Ungarische Revue. 1890 (X. Jahrg.) X. Heft Dez.
1891 (XI. Jahrg.) I. Heft. Jan. Budapest 1890 u. 91.

Értesitö ar Erdélyi Muzeum-Egylet Orvos-természettudományi szakosztályából. 1890. XV. Évfolyam.

a. I. Orvosi szak. II. III. Füzet.
b II. Természettudo mányi szak. III. Füzet.
c. III. Népszerü szak. II. Füzet. Kolosvárt 1890.

Das Datum auf den Philippinen. Von Jerolim Freiherrn v. Benko. Wien 1890. Seperatabdruck des 32. Capitels aus dem auf Befehl des k u. k. Reichskriegsministeriums verfaßten Werke „Die Schiffsstation der Kuk. Kriegsvereine in Ostasien".

Nature. Vol. 43. N. 1101—1109.

Memoirs and proceedings of the Manchester literary and philosophical Society. Fourth Series. Vol. III. XXXIII. Old. Manchester 1890.

Monthly notices of the R. Astronomical Society. Vol. LI. Nr. 1. 2. Nov. u. Dez. 1890. (London 1890).

Proceedings of the Royal Society London. Vol. XLVIII. N. 295. (London 1891).

Journal of the R. Microscopical Society. 1890. Part 6. Dec. London and Edinburgh (1890).

Records of the Geological Survey of India. Vol. XXIII. Part 4. Calcutta 1890.

Proceedings of the R. Society of Victoria. Vol. II (New Series). (Melbourne) 1890.

Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden:
a. Handelingen en mededeelingen over het jaar 1888—1889.
b. Levensberichten der afgestorvene Medeleden. Bijlage tot de Handelingen van 1889. Leiden 1889.

Annales de l'École Polytechnique de Delft. Tome VI. 1890. 1. Livr. Leiden 1890.

De Badoej's door Jul. Jacobs en J. J. Meijer. Uitgegeven door het Kön. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 's Gravenhage 1891.

Bijdragen tot de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 5. Volgreeks. 6. Deel. (Deel 40). 1. Aflev. 's Gravenhage 1891.

Annalen der Sternwarte in Leiden. Herausgeg. v. H. G. van de Sande Bakhuyzen. 5. u. 6. Band. Haag 1890.

Verslag van den Staat der Sternenwacht te Leiden. 1886—88 u. 1888/89. Leiden 1888 u. 1889.

Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen:
a. Tijdschrift voor Indische Taal-, Land- en Volkenkunde. Deel XXXIV. Aflev. I. Batavia, 's Hage 1890.
b. Notulen van de algemeene en bestuars-vergaderingen. Deel XXVIII. 1890. Aflevering I. Batavia 1890.

Nederlandsch-indisch Plakaatboch 1692—1811, door J. A. van der Chijs. 7. Deel. 1755—1764. Batavia, 's Hage 1890.

Académie Royale de Copenhague:
a. Mémoires. 6me série. Classe des lettres. Vol. I. No. 1. Classe des sciences. Vol. V, No. 3. Vol. VII, No. 1. 2. Copenhague 1890.
b. Oversigt over d. Forhandlinger og dets Medlemmers Arbejder i Aaret 1890. Kobenhavn (1890).

Aktstykker ag Oplysninger til Rigsraadets ag Staendermødernes Historie i Kristian IV's Tid udgivne ved Kr. Erslev af Selskabet for Udgivelse af Kilder til dansk Historie. 1. Bind 1. 2. Haefte. 2. Bind 1. 2. Haefte. 3. Bind 1. 2. Häfte. Kjøbenhavn 1883—90.

Repertorium für Meteorologie herausgeg. v. d. Kaiserl. Akademie der Wissensch. Redigirt von Heinr. Wild. Band XIII. St. Petersburg 1890.

Bulletin de la Société imp. des naturalistes de Moscou. Année 1890. N. 2. Moscou 1890.

Запуску новороссінскаго одшесмва есмесмвоусуымамелеы. Томч XI, XV, 1. 2. Одесса 1890.

Memoires de la société des naturalistes de la Nouvelle-Russie (Odessa). Tom. XI (Section mathem.), XV, 1. 2. Odessa 1890.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:
a. Anzeiger. 1890. November, Dezember. Krakau 1890.
b. Rozprawy i Sprawozdania z Posiedzeń wydziatu matematyczno-przyrodniczego Akademii Unniejętności. Tom. XV, XVI. W Krakowie 1887.

c. Acta historica res gestas Poloniae illustrantia. Tom. IX. Cardinalis Hosii Epistolarum Tom. II. 1551 — 1558. Pars II. W Krakowie 1888.
d. Ibiór Wiadomości do Antropólogii Krajowej wydawany staraniem Komisyi Antropólogicznej . . . Tom. XI. Kraków 1887.
e. Pamiętnik. Wydziat matematyczmo-przyrodniczy. Tom. XIII. W Krakowie 1887.

Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino. Serie seconda. Tomo XL. Torino 1890.

Atti e rendiconti della Accademia medico-chirurgica di Perugia. Vol. II. Fasc. 3°. Perugia 1890.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tomo IV. Anno 1890. Fasc. VI. Nov. — Dec.. Palermo.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Anno CCLXXXVII. 1890. Serie Quarta. Rendiconti. Vol. VI°. 2° Semestre. Fasc. 7 — 12. Roma 1890.

Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze:
a. Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. 1889. 1. Titel und Index, 2. Tavola sinottica, 3. Indice alfabetico. Bogen 10.
b. 1890. N. 119, 120.
c. 1891. N. 121, 122. Firenze.

Biblioteca Nazionale Centrale Vittorio Emanuele di Roma. Bollettino delle opere moderne straniere acquistate dalle biblioteche pubbliche governative del regno d'Italia. Vol. V. N. 3, 4. Roma 1890.

Vicissitudes onomastiques de la globulaire vulgaire par Saint-Lager. Paris 1889.

La priorité des noms de plantes par Saint-Lager. Paris 1890.

Académie Royale de Belgique:
a. Bulletin. 60e année, 3e série, tome 20. N. 11. Bruxelles 1890.
b. Annuaire. 1891. Ibid. 1891.

Academia Real des sciencias de Lisboa:
a. Memorias. 1) Classe de sciencias mathematicas, physicas e naturales. Nova serie tomo VI, parte II. 2) Classe de sciencias moraes, politicas e bellas-lettras. Nova Serie tomo V, parte II; tomo VI, parte 1.
b. Jornal de sciencias mathematicas, physicas e naturaes. Segunda serie tom. I. No. II—IV.
c. Elogio historico de Sua Magestade El-Rei o Senhor D. Fernando II. recitado pelo socio Visconde de Benalcanfor. Lisboa 1886.
d. Historia dos estabelecimentos scientificos litterarios.
e. artisticos de Portugal por José Silvestre Ribeiro. Tomo X — XVI. Lisboa 1882—89.
f. A electricidade. Estudo de algumas dastnas principaes applicações por Virgilio Machado. Lisboa 1887.
g. Estudos sobre as provincias ultramarinas por João de Andrade Corvo. Vol. 1—4. Lisboa 1883—87.
h. Curso de silvicultura por Antonio Xavier Pereira Coutinho. Tomo I Botanica florestal. Tomo II Esboço de uma flora lenhosa Portugneza. Lisboa 1886—87.
i. Lições de pharmacologia e therapeutica geraes por Eduardo Augusto Motta. Lisboa 1888.
k. Portugaliae monumenta historica. Inquisitiones. Volumen I. Fasc. 1 e 2. Olisipone 1888. Lisboa.

U. S. Department of agriculture. Division of ornithology and mammalogy. North American Fauna. N. 3. 4. Washington 1890.

Astronomical Papers. Printed by authority of the congress. Vol. II. Part. V. Discussion of transits of Venus 1761—69 u. Vol. IV. Washington 1890.

The Boston Society of Natural History:
a. Memoirs. Vol. IV. Number VII—IX. Boston 1890.
b. Proceedings. Vol. XXIV, parts III and IV. Mai, 1889 — April, 1890. Boston 1890.

Museum of Comparative Zoölogy at Harvard College:
a. Bulletin. Vol. XX. No. 3—6. Cambridge U. S. A. 1890.
b. Annual report of the curator for 1889—90. Cambridge U. S. A. 1890.

Johns Hophins University Circulars. Vol. X. No. 84. Baltimore. Dec. 1890.

Bulletin of the scientific laboratories of Denison University edited by W. G. Tight. M. S. Vol. V. Granville, Ohio, June 1890.
Report of the superintendent of the U. S. Naval Observatory for the year ending 1890 June 30. Washington 1890.
Bulletin of the American Geographical Society. Vol. XXII. No. 4. Dec. 31, 1890. New-York.
Report for the year 1889—90, presented by the board of managers of the Observatory of Yale University to the president and fellows 1890.
Anales de la Sociedad científica Argentina. Tomo XXX, Entrega V, VI. Buenos Aires 1890.
Boletin mensual del Museo de productos Argentinos. Año III. No. 31. Dic. 1890. Buenos Aires 1890.

Februar 1891.

Sitzungsberichte der Kön. Preuss. Akademie der Wissensch. in Berlin. I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX.
Deutschlands Leistungen und Aussichten auf technischem Gebiete. Rede zum Geburtsfeste S. M. Wilhelm II. in der K. Technischen Hochschule zu Berlin geh. am 26. Jan. 1891 von F. Reuleaux. Berlin 1891.
Königl. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Des XII. Bandes der Abhandlungen der philologisch-historischen Classe N. II. (Anganische Inschriften von F. H. Weissbach). Leipzig 1891.
K. b. Akademie der Wissenschaften zu München. Sitzungsberichte der math.-physikal. Classe 1890. Heft IV. München 1891.
Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1889. Beobachtungssystem des Königr. Sachsen. 1. Hälfte, Abtheilungen 1 u. 2. VII. Jahrg. 1889. Herausgeg. von Prof. Dr. Paul Schreiber. Chemnitz 1890.
Leopoldina. Heft XXVII. N. 1—2. Januar 1891. Halle a. S.
Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg. Neue Folge. 4. Bd. 4. Heft. Heidelberg 1891.
Acta Mathematica 14: 3. Berlin, Stockholm, Paris 1891.
Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. 35. Jahrgang. 2. Heft. Zürich 1890.
Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien:
a. Denkschriften. 1) Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. 56. Band. 2) Philosophisch-historische Classe. 37. Band.
b. Sitzungsberichte. 1) Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. Abtheil. I Band XCVIII. IV.—X. Heft. 1889. April—Dezember. Band XCIX. I—III. Heft. 1890. Jan.—März. 2. Abtheilung IIa. XCVIII. Band. IV—X. Heft. 1889. April—Dezember. XCIX. Band. I.—III. Heft. Jahrg. 1890. Jan.—März. 3. Abtheil. IIb. Band XCVIII. IV.—X. Heft. Jahrg. 1889. April—December. XCIX. Band. I.—III. Heft. Jahrg. 1890. Jan.—März. 4. Abtheilung III. XCVIII. Band. V.—X. Heft. Jahrg. 1889. Mai—December. XCIX. Band. I.—III. Heft. Jahrg. 1890. Jan.—März. 2) Philosophisch-historische Classe. CXIX. Bd. CXX. Bd. Jahrg. 1889. CXXI. Bd. 1890.
c. Archiv für österreichische Geschichte. 75. Bd. 1. u. 2. Hälfte. Wien 1889.
d. Fontes rerum austriacarum. 2. Abth. Diplomataria et acta. XLV. Band. 1. Hälfte. Wien 1890.
Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. 1890. N. 14—18. 1891. N. 1. Wien.
Publicationen für die internationale Erdmessung. Astronomische Arbeiten des k. k. Gradmessungs-Bureau. II. Bd. Längenbestimmungen. Prag, Wien, Leipzig 1890.
Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau 1891. Januar. Krakau 1891.
Ungarische Revue. II. Heft. Februar. 1891. 11. Jahrg. Budapest 1891.
Földtani Közlöny. XX Kötet. 5—12 Füzet. Budapest 1890.
Mittheilungen aus dem Jahrbuche der Kön. Ungarischen geologischen Anstalt:
a. Die Pontische Stufe und deren Fauna bei Nagy Mányok im Comitate Tolna v. Dr. E. Lörenthey. Budapest 1890.

b. Das Delta des Nil v. Dr. J. Jankó. Budapest 1890.
Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. Tome XXIV. 4me et 5me livraisons. Harlem 1891.
Tijdschrift voor Nederlandsche Taal- en Letterkunde, uitg. van wege de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden. 10. Deel. Nieuwe Reeks. 2. Deel. 1. Aflever. Leiden 1891.
Programme de la Société Batave de Philosophie expérimentale de Rotterdam. 1890.
Annales de l'École polytechnique de Delft. Tome VI, 1890. 2. livraison. Leide 1890.
Académie Royale de Belgique. Bulletin. 60e année. 3e série. tome 20. N. 12, 61e année. 3e série. tome 21. N. 1. Bruxelles 1890. 91.
Annales de la Société géologique de Belgique. Tome XVI. 2e livr. Tome XVII. 4e livr. Liège 1890.
Den Norske Nordhavs-Expedition 1876—1878. XX. Zoologi. Pycnogonidea ved G. O. Sars. Christiania 1891.
Annalen des physikalischen Central-Observatoriums herausgegeben v. H. Wild. Jahrgang 1889. Theil II. St. Petersburg 1890.
Nature. Vol. 43. N. 1110—1114.
Proceedings of the London mathematical society. N. 391—394.
Monthly notices of the R. astronomical society. Vol. LI. N. 3. London 1891.
Proceedings of the Royal society. Vol. XLIX. N. 296. London 1891.
Journal of the R. microscopical society 1891. Part 1. February. London and Edinburgh.
Memoirs and proceedings of the Manchester literary and philosophical society. Fourth series. Vol. 4. N. 1, 2. 1890—91. Manchester.
Reports from the laboratory of the R. college of physicians. Edinburgh. Vol. III. Edinburgh and London 1891.
Royal Irish Academy:
a. Proceedings. Third series. Vol. I. N. 4. Dublin 1891.
b. Transactions. Vol. XXIX. Part XIV. Dublin 1891.
Historia do Infante D. Duarte Irmão de El-rei D. João IV por José Ramos-Coelho. Tomo II. Lisboa 1890.
Annales du Musée Guimet:
Revue de l'histoire des religions. 11me année. Tome XXI. N. 2, 3. Tome XXII. N. 1, 2. Paris 1890.
Travaux et mémoires du Bureau international des poids et mesures. Tome VII. Paris 1890.
Mémoires de la société nationale des sciences naturelles et mathématiques de Cherbourg. Tome XXVI. (Troisième série. Tome VI). Paris, Cherbourg 1889.
La société des antiquaires de Picardie:
a. Mémoires. Tome XII. Histoire de l'abbaye de Saint-Acheul-lez-Amiens. Amiens 1890.
b. Bulletin. Année 1889. N. 4. 1890. N. 1, 2. Amiens 1890.
Atti della R. Accademia dei Lincei. Anno CCLXXXVIII. 1891. Serie IV. Rendiconti. Vol. VII. 1° sem. fasc. 1, 2. Roma 1891.
Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. XXVI. Disp. 1, 2, 3. 1890—91. Torino.
Revista di matematica diretta da G. Peano. Fasc. 1. Gennaio 1891. Torino.
Annuario della società R. di Napoli. 1891. Napoli 1891.
Biblioteca nazionale centrale di Firenze:
a. Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. N. 123—124. 1891.
b. Indici del Bollettino 1890. I. Indice alfabetico delle opere. Bogen A—C.
Biblioteca nazionale centrale Vittorio Emanuele di Roma. Firenze 1891:
a. Bollettino delle opere moderne straniere. Vol. VI. N. 1. Gen. 1891. Roma 1891.
U. S. Geological Survey:
a. Mineral resources of the United States by David T. Day. 1888. Washington 1890.
b. Monographs. Vol. I. Lake Bonneville by Grove Karl Gilbert. Ebd. 1890.

c. Ninth annual report. 1887—88 by J. W. Powell. Ebd. 1889.
d. Bulletin. N. 58, 59, 60, 61, 63, 64, 66. Ebd. 1890.
Proceedings of the American pharmaceutical association. 38. annual meeting. Philadelphia 1890.
Bulletin of the Museum of comparative zoölogy at Harvard college. Vol. XX. N. 7. Cambridge, U.-S.-A. 1890.
Transactions of the Connectient Academy of arts and sciences. Vol. VIII. Part. 1. New Haven 1890.
Johns Hopkins University circulars. Vol. X. No. 85. Baltimore 1891.
Anales de la sociedad cientifica argentina. Enero de 1891. Entrega 1. Tomo XXXI. Buenos Aires 1891.

Nachträge.

Bulletin de la société mathématique de France. Tome XVIII. N. 5 et 6. Paris 1890.
Physikalisch-medicinische Gesellschaft zu Würzburg. Würzburg 1880:
a. Sitzungsberichte. Jahrg. 1890. N. 8, 9, 10.
b. Verhandlungen. N. F. XXIV. Band. N. 6.
Journal and proceedings of the Royal society of New South Wales. Vol. XXIII. 1889. Part II. Sidney, London.
The humming bird. Vol. I. N. 3. March 1. 1891. London.
Geological Survey of India:
a. Memoirs. 1) Ser. XIII. Salt-range fossils. Vol. IV. Part. 1. Geological results. 2) Vol. XXIV. Part. II. Middemiss: Physical Geology of the Sub-Himalaya of Garhwál and Kumann. Calcutta.
Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen:
a. Notulen van de Algemeene en Bestuurs-Vergaderingen. Deel XXVIII. 1890. Aflever. II. Batavia 1890.
b. Tijdschrift voor Indische Taal-, Land- en Volkenkunde. Deel XXXIV. Aflevering II. Batavia, s'Hage 1890.
Königl. böhmische Gesellschaft der Wissenschaften:
a. Sitzungsberichte 1890. 1) Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. II. 2) Philos.-histor.-philolog. Classe.
b. Jahresbericht für 1890. Prag 1891.

März und April 1891.

Sitzungsberichte der K. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. X—XVIII. Berlin 1891.
Separatabzüge von Aufsätzen von L. Kronecker:
a. Ueber eine summatorische Function. (Aus den Sitzungsberichten d. K. Pr. Ak. d. W. zu Berlin 1889. XLII).
b. Zur Theorie der elliptischen Functionen (Art. XII—XXI). (Ebendaher. 1889. VI. X. XIV. XVIII. XIX. 1890. VI. VII. XIV. XVI).
c. Die Decomposition der Systeme von n^2 Grössen und ihre Anwendung auf die Theorie der Invarianten. Ueber orthogonale Systeme. Ueber die Composition der Systeme von n^2 Grössen mit sich selbst. (Ebendaher. 1889. XXX. XXXI. 1890. XXVI. XXVIII. XXX. XXXVI. XL).
d. Algebraische Reduction der Schaaren bilinearer Formen. Algebraische Reduction der Schaaren quadratischer Formen. (Ebendaher. 1890. XLVIII. LIII. 1891. II. III).
e. Ueber die arithmetischen Sätze, welche Lejeune Dirichlet in seiner Breslauer Habilitationsschrift entwickelt hat. Bemerkungen über Dirichlet's letzte Arbeiten. (Ebendaher. 1888. XVI. XVIII).
f. Ein Fundamentalsatz der allgemeinen Arithmetik. Aus dem Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 100. Heft 4
g. Première partie du chapitre XIII de la Note sur la théorie des résidus quadratiques par A. Genocchi.
Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste von L. Kronecker, Paul du Bois-Reymond. (Ebendaher. Bd. 104. Heft 4).

h. Bemerkungen über die Jacobischen Thetaformeln. (Ebendaher. Bd. 102. Heft 3).
i. Ueber den Zahlbegriff. (Ebendaher. Bd. 101. Heft 4).
k. Bemerkungen über die Darstellung von Reihen durch Integrale. (Ebendaher. Bd. 105. Heft 2).

Kgl. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig:
a. Mathematisch-physische Classe:
1. Berichte über die Verhandlungen. 1890. III. IV. Leipzig 1891.
2. Abhandlungen. Bd. XVI. N. III. Bd. XVII. N. 1 u. 2. Ebd. 1891.
b. Philologisch-historische Classe:
Berichte über die Verhandlungen. 1890. II. III. Ebd. 1891.

K. b. Akademie der Wissenschaften zu München:
Sitzungsberichte der philosophisch-philologischen u. historischen Classe. 1890. Bd. II. Heft III. München 1891.

Germanisches Nationalmuseum zu Nürnberg.
a. Anzeiger. Jahrg. 1890. Nürnberg 1890.
b. Mitteilungen. Jahrg. 1890. Ebd. 1890.
c. Katalog der im german. Museum befindl. Originalskulpturen. Ebend. 1890.

Festschrift hrsg. v. d. Mathematischen Gesellschaft in Hamburg anlässlich ihres 200jährigen Jubelfestes 1890. Sonderabzug: Ueber die Dirichletsche Methode der Wertbestimmung der Gaussschen Reihen. Von L. Kronecker. Leipzig 1890.

Mitteilungen des Vereins für Geschichte der Stadt Meissen. 2. Bd. 4. Heft. Meissen 1890.

Das Ausland. Wochenschrift für Erd- und Völkerkunde von Karl v. Steinen. 1891. N. 8. Stuttgart.

Leopoldina. Heft XXVII. N. 3–4. N. 5–6. Halle a. S. 1891.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Band XX. Jahrgang 1888. Heft 2. Berlin 1891.

Kriegsberichte des Königl. Dänischen General-Feldmarschalls Ernst Albrecht von Eberstein aus dem zweiten schwedisch-dänischen Kriege. Herausgeg. v. L. F. Freiherrn von Eberstein. 2. Ausg. Berlin 1891.

Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft. 44. Band. IV. Heft. Leipzig 1890.

Societatum litterae. Hrsg. v. E. Huth. Jahrbuch 1890. Berlin 1891.

Monatliche Mittheilungen aus dem Gesammtgebiete der Naturwissenschaften. Organ des Naturwissenschaftl. Veseins des Reg. Bez. Frankfurt, hrsg. v. E. Huth. 6. Jahrg. 1888/89. Berlin 1889.

Reale Accademia dei Lincei. Roma:
a. Atti. Anno 288. 1891. Ser. IV. Rendiconti. Vol. VII. 1. Semestre fasc. 3, 4, 5, 6. Roma 1891.
b. Atti. Ser. IV. Classe di scienze morali, stor. e filologiche. Anno 283. 1886. Vol. II. Anno 284. 1887. Vol. III. Parte I. II. Anno 285. 1888. Vol. IV. Parte II. Memorie. Anno 285. 1888. Vol. V. Roma 1886–88.

Reale Accademia delle scienze di Torino:
a. Atti. Vol. XXVI. disp. 4ª, 5ª, 6ª, 7ª e 8ª. 1890–91 u. Elenco degli accademici al 1° Marzo 1891. Torino 1891.
b. Osservazioni meteorologiche fatte nell' anno 1890. Calcolate dal Dott. G. B. Rizzo. Torino 1891.

Le stazioni sperimentali agrarie italiane. Volume XX, fasc. II. Febbraio. Asti 1891.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tomo V. Anno 1891. Fasc. I e II. Palermo 1891.

Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli.
Rendiconto. Serie 2ª. Vol. IV. Anno XXIX. fasc. 1°–12°. Genn. Dic. 1890. Napoli 1890.

Biblioteca nazionale centrale di Firenze.
Bollettino delle pubblicazioni italiane. 1891. N. 125, 126, 127 u. Indice 1890. Bog. II. E. Firenze 1891.

Biblioteca nazionale centrale Vittorio Emanuele di Roma.
Bollettino delle opere moderne straniere. Vol. VI. N. 2. 3. 1891. Roma 1891

Société mathématique de France. Bulletin. Tome XIX. N. 1. 2. Paris 1891.
Académie Royale de Belgique.
a. Bulletin. 61e année, 3e série, tome 21. N. 2, 3. Bruxelles 1891.
b. Classe des sciences. Programme de concours pour 1892. (Ibid. 1891).
Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas. Vol. X. No. 1. Coimbra 1891.
Société Impériale des naturalistes de Moscou:
a. Bulletin. Année 1890. N. 3. Moscou 1891.
b. Beilage: Meteorologische Beobachtungen ausgef. am Meteorologischen Observatorium der landwirthschaftlichen Akademie bei Moskau. (1890. Erste Hälfte). Moskau 1890.
Mémoires de l'Académie Imp. des sciences de St. Pétersbourg. Tab. IV. VI e VII zu Maximowiczii Diagnoses plantarum Asiatic. VII. 1890.
Proceedings of the Royal Society. Vol. XLIX. N. 297, 298. London 1891.
Monthly notices of the R. Astronomical Society. Vol. LI. N. 4, 5. London 1891.
Proceedings of the London Mathematical Society. No. 395 398, No. 399—403. London 1891.
Nature. Vol. 43. N. 1115—1121. London 1891.
Memoirs and proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society. 1890—91. Manchester 1891.
The humming bird. Vol. 1. No. 3. London 1891.
The Cambridge Philosophical Society:
a. Proceedings. Vol. VII. Part. III. 1890. Cambridge 1891.
b. Transactions. Vol. XV. Part. 1. Ibid. 1891.
Journal of the Royal Microscopical Society. 1891. Part 2. London and Edinburgh 1891.
Proceedings of the Royal Physical Society. Session 1889—1890. Edinburgh 1891.
Transactions of the Royal Society of South Australia. Vol. XIII. Part II. Adelaide 1890.
Bijdragen tot de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 5de Volgreeks. 6de Deel (Deel XL der geheele Reeks). 2e aflev. s'Gravenhage 1891.
Regenvaarnemingen in Nederlandsch-Indië. 11de Jaargang 1889, door Dr. J. P. van der Stok. Batavia 1890.
Observations made at the magnetical and meteorological observatory at Batavia. Published by order of the government of Netherlands India, under the direction of Dr. J. P. van der Stok. Vol. XII. 1889. Batavia 1890.
Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden:
a. Handelingen en Mededeelingen. 1889—1890. Leiden 1890.
b. Levensberichten. Bijlage tot de Handelingen van 1890. Ibid. 1890.
Oeuvres complètes de Christiaan Huygens publiées par la Société hollandaise des sciences. Tome III. Correspondance 1660—1661. La Haye 1890.
Flora Batava 291. 292. Aflev. Leiden.
Christiania Videnskabs-Selskab:
a. Forhandlinger 1889. No. 1—12. Christiania 1889.
b. Oversigt over Videnskabs-Selskabets chøder i 1889. Ibid. 1890.
Acta Universitatis Lundensis. Tom. XXVI. 1889—90. I. II. Afdelningen. Lund 1889—90.
Norges gamle love indtil 1387. 5te Binds. 1ste Hefte ved Gustav Storm. Christiania 1890.
U. S. Coast and Geodetic Survey:
a. Report. June 1888. Part I. Text. Part II. Sketches. Washington 1889.
b. Bulletin. No. 19. March 1890. Ibid. 1891.
Pennsylvania geological survey:
a. Dictionary of Fossils of Pennsylvania. Vol. II. N—R. Vol. III. S—Z. Harrisburg 1889. 90.
b. Atlas Southern authracite field. Part III. A A. 1—12. 1889.
c. Seventh report on the oil and gas fields for 1887, 1888. Ibid. 1890.
The California Academy of Sciences.
Occasional papers I. II. San Francisco 1890.
Proceedings of the Academy of Natural Sciences of Philadelphia. Part. II. April—Sept. 1890. Philadelphia 1890.

Publications of the Washburn Observatory of the University of Wisconsin. Vol. VII. Part. 1. Madison, Wis. 1890.
Journal of Comparative Neurology. Vol. 1. March 1891. Cincinnati Ohio. 1891.
Bulletin of the Museum of Comparative Zöology at Harvard College. Vol. XX. N. 8. Cambridge U.-S.-A. 1891.
Bulletin of the American Geographical Society. Vol. XXII. Supplement. 1890. Vol. XXIII. No. 1. 1891. New-York.
Proceedings of the American Philosophical Society. Vol. XXVIII. No. 134. Philadelphia.
Johns Hopkins Circulars. Vol. X. No. 86. Baltimore 1891.
Johns Hopkins University studies in historical and political science:
a. Eigth series V—VI, VII—VIII—IX. X, XI—XII. Ibid. 1890. [In je 2 Exempl.]
b. Studies from the Biological Laboratory. Vol. IV. No. 6. Ibid. 1890.
c. American Journal of mathematics. Vol. XIII. No. 1. 2. [In 2 Exempl.] Baltimore 1890. 91.
Revista Argentina de historia natural. Tomo I. Entrega 1, 2. 1891. Buenos Aires 1891.
Anales de la Sociedad cientifica Argentina. 1891. Tomo XXXI. Entrega 2. 3. Buenos Aires 1891.
Mittheilungen der Deutschen Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokio. 45. Heft. Band 5. Seite 191—234. Yokohama 1891.
Mitteilungen aus der Medicinischen Fucultät der Kaiserlich-Japanischen Universität. Band I. No. 4. Tokyo 1891.

Nachträge.

Astronomische Mittheilungen von Rud. Wolf. Januar 1891. S. 249—280. (Zürich 1891).
„Fauna". Verein Luxemburger Naturfreunde. Mittheilungen aus den Vereinssitzungen. Jahrg. 1891. Heft 1. Luxemburg.
Bulletin de l'Académie Imp. des sciences de St. Pétersbourg. Nouvelle série II. (XXXIV). No. 1. Feuilles 1-12. St. Pétersbourg 1891.
Tifliser physikalisches Observatorium:
a. Meteorologische Beobachtungen im Jahre 1889. Tiflis 1890.
b. Magnetische Beobachtungen im Jahre 1888—89. Ebd. 1890.
Ungarische Revue. 1891. Elfter Jahrgang. Heft III. IV. Budapest 1891.
Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau. 1891. Februar. März. Krakau 1891.
Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. 1891. No. 2, 3, 4. (Wien 1891).
Verein für siebenbürgische Landeskunde:
a. Archiv. Neue Folge. 23. Bd. 2. Heft. Hermanstadt 1891.
b. Jahresbericht für 1889/90. Ebd. 1890.
Die Freiheit des Willens, die Moral und das Uebel von Anton Ganser. Graz 1891.
The Canadian Institute. Transactions. Oktober 1890. Vol. 1. Part 1. Toronto 1890.
Математическій Сборникъ издаваемый Московскимъ математическимъ обществомъ.
[Sammlung mathemat. Arbeiten hrsg. v. d. Moskauer mathemat. Gesellschaft.]
Tom. (1.) 2—14. 15. No. 1—3. Москва 1866—91.

Inhalt von Nr. 11.

Friedrich Wieseler, über den Stierdionysos. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Stuppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

Aus dem Jahre 1892.

Nro. 1—16.

Göttingen,
Dieterichsche Verlags-Buchhandlung.
1892.

Man bittet die Verzeichnisse der Accessionen zugleich als Empfangsanzeigen für die der Königl. Societät übersandten Werke betrachten zu wollen.

Register

über

die Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

und

der Georg-Augusts-Universität

aus dem Jahre 1892.

Bericht des Beständigen Secretärs der K. Ges. d. Wiss. über das Jahr 1892. 573.

Bodländer, G., Das Verhalten von Molekularverbindungen bei der Auflösung. 327.

Bürger, O., Zur Systematik der Nemertinenfauna des Golfs von Neapel. 137.

Burkhardt, H., Zur Reduction des Problems der 27 Geraden der allgemeinen Fläche dritter Ordnung auf das Transformationsproblem der hyperelliptischen Functionen $p = 2$. 1.

Disse, J., Ueber die Veränderungen der Epithelien in der Niere bei der Harnsekretion. 120.

Drude, P., In wie weit genügen die bisherigen Lichttheorieen den Anforderungen der praktischen Physik? 366. 393.

Ehlers, E., Zur Kenntnis von Arenicola marina L. 413.

Frensdorff, F., Eine Krisis in der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 53.

Fricke, R., Ueber discontinuirliche Gruppen, deren Substitutionscoëfficienten ganze Zahlen eines biquadratischen Körpers sind. 268.

— — Zur Theorie der Modularcorrespondenzen. 272.

Fricke, R., Ueber die zur Verzweigung (2, 3, 7) gehörende s-Function. 279.
— — Ueber ein allgemeines arithmetrisch-gruppentheoretisches Princip in der Theorie der automorphen Functionen. 453.

Hallwachs, H., Ueber die Lichtgeschwindigkeit in verdünnten Lösungen. 302.
Hartlaub, Cl., Zur Kenntnis der Anthomedusen. 17.
Hecht, B., Beiträge zur geometrischen Krystallographie. 239.
Hilbert, D., Ueber die Theorie der algebraischen Invarianten. II. 6; III. 439.
Hurwitz, A., Zur Theorie der Abelschen Functionen. 247.

Kallius, E., Ueber Neurogliazellen in peripherischen Nerven. 513.
Kielhorn, F., Jacobis Tafeln zur Berechnung Indischer Daten und Mâdhavâchârya's Kâlanirṇaya. 105.
— — Malayagiri's Sanskrit-Grammatik. 318.
Klein, F., Ueber Realitätsverhältnisse im Gebiete der Abelschen Functionen. 310.
Kohlrausch, F., Ueber Lösungen von Natrium-Silikaten. 461.
Krebs, F., Altchristliche Texte im Berliner Museum. 114.
— — Griechische Steininschriften aus Aegypten. 532.
Kröker, K., Ueber die Abhängigkeit der specifischen Wärme des Boracits von der Temperatur. 122.

Lindemann, F., Ueber die Auflösung algebraischer Gleichungen durch transscendente Functionen. II. 292.

Marmé, W., Ueber die Wirkung der Pinyl-, Fenchyl-, Carvyl-, Menthyl- und Thujolamine auf den thierischen Organismus. 237.
Meyer, Leo, Etymologische Mittheilungen. 313.
Meyer, Wilhelm, Die Göttinger Handschrift von Thomas Basins Geschichte Karls VII und Ludwigs XI. 469.

Nernst, W., Ueber die mit der Vermischung konzentrirter Lösungen verbundene Aenderung der freien Energie. 428.

Peter, A., Botanische Untersuchungen im Sommer 1892. 488.
Preise:
Benekestiftung. 129.
Gesellschaft der Wissenschaften. 577.

Petschestiftung. 341.
Wedekindstiftung. 343.

Rhumbler, L., Eisenkiesablagerungen im verwesenden Weichkörper von Foraminiferen, die sogenannten Keimkugeln Max Schultzes u. A. 419.
Ritter, E., Die eindeutigen automorphen Formen vom Geschlechte Null. 283.

Schönflies, A., Ueber gewisse geradlinig begränzte Stücke Riemannscher Flächen. 257.
Sella, A., und Voigt, W., Beobachtungen über die Zerreißungsfestigkeit von Steinsalz. 494.

Traube, H., Ueber die Krystallformen optisch-einaxiger Substanzen, deren Lösungen ein optisches Drehungsvermögen besitzen. I. 362.

Usener, H., Unser Platontext. 25. 181.

Verzeichnisse der Accessionen. 8. 23. 51. 133. 178. 215. 255. 299. 392. 449. 468. 515. 539. 582.
Voigt, W., Bewegung eines Flüssigkeitsstromes über einem gewellten Grunde. 490.
— — sieh Sella.

Wagner, H., Die Kopien der Weltkarte des Museum Borgia. 349.
— — Die dritte Weltkarte Peter Apians v. J. 1530 und die Pseudo-Apianische Weltkarte von 1551. 541.
Wallach, O., Ueber neue chemische Verbindungen aus Pflanzenstoffen. 230.
†Wieseler, F., Zu den Attributen und Symbolen des Dionysos. 218.
— — Ueber die aus dem Bereiche der Vögel hergenommenen Attribute des Dionysos und seiner Thiasoten. 517.

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

27. Januar. **№ 1.** 1892.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 9. Januar.

Klein legt vor a. einen Aufsatz des Herrn Privatdoc. Dr. Burkhardt: „Zur Reduktion des Problems der 27 Geraden der allgemeinen Fläche dritter Ordnung auf das Transformationsproblem der hyperelliptischen Funktionen $p = 2$“.

b. von Herrn Privatdocenten Dr. Hilbert in Königsberg i. Pr.: „Ueber die Theorie der algebraischen Invarianten. Zweite Note“.

Ehlers legt vor den Aufsatz des Herrn Assistenten Dr. Hartlaub: „Zur Kenntniß der Anthomedusen“.

Zur Reduction des Problems der 27 Geraden der allgemeinen Fläche dritter Ordnung auf das Transformationsproblem der hyperelliptischen Functionen $p = 2$[1]).

Von

Heinrich Burkhardt.

(Vorgelegt von F. Klein.)

Die nachfolgenden Entwicklungen schließen an an meine beiden früher in diesen Nachrichten erschienenen Noten „über eine hyperelliptische Multiplicatorgleichung“ (1889) und „zur Theorie der Jacobi'schen Gleichungen 40. Grades“ (1890)[2]), aus welchen man Bezeichnungen und Litteraturangaben entnehmen möge.

1) Vgl. die Abhandlung des Hrn. Klein im Journal von Liouville sér. 4 t. 4 p. 169 ff. (1887).

2) Die ausführlichere Darstellung des Inhalts der letzteren Note ist inzwischen in Bd. 38 der mathem. Annalen erschienen.

I. Seien die vier für $k = 3$ vorhandenen Functionen $Z_{\alpha\beta}$ kurz mit Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 bezeichnet. Bei den linearen Transformationen der Perioden, welche die Charakteristik festlassen, erfahren diese 4 Functionen eine Gruppe von 51840 linearen Substitutionen. Dieselbe stellt sich am übersichtlichsten dar, wenn man sie aus folgenden vier Operationen erzeugt:

	B	C	D	S_2
$Z_1' =$	Z_1	Z_1	$-Z_2$	$\varepsilon^2 Z_1$
$Z_2' =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(Z_2 + Z_3 + Z_4)$	Z_4	$-Z_1$	Z_2
$Z_3' =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(Z_2 + \varepsilon Z_3 + \varepsilon^2 Z_4)$	Z_3	$-Z_3$	$\varepsilon^2 Z_3$
$Z_4' =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(Z_2 + \varepsilon^2 Z_3 + \varepsilon Z_4)$	Z_3	$+Z_4$	$\varepsilon^2 Z_4$.

Dabei steht ε für $e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

Bildet man aus zwei Reihen cogredienter Veränderlicher Z, $\bar{Z}$ die zweireihigen Determinanten:

$$a_{ik} = Z_i \bar{Z}_k - Z_k \bar{Z}_i,$$

so erfahren diese ebenfalls eine Gruppe linearer Substitutionen, wenn man die Z wie die $\bar{Z}$ in der angegebenen Weise substituirt; diese Gruppe kann aus folgenden Operationen erzeugt werden:

	B	C	D	S_2
$a_{12}' =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(a_{12} + a_{13} + a_{14})$	a_{14}	$-a_{12}$	$\varepsilon^2 a_{12}$
$a_{13}' =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(a_{12} + \varepsilon a_{13} + \varepsilon^2 a_{14})$	a_{12}	a_{23}	εa_{13}
$a_{14}' =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(a_{12} + \varepsilon^2 a_{13} + \varepsilon a_{14})$	a_{13}	a_{42}	εa_{14}
$a_{34}' =$	$+\frac{i}{\sqrt{3}}(a_{34} + a_{42} + a_{23})$	a_{23}	$-a_{34}$	εa_{34}
$a_{42}' =$	$+\frac{i}{\sqrt{3}}(a_{34} + \varepsilon^2 a + \varepsilon a_{23})$	a_{34}	a_{14}	$\varepsilon^2 a_{42}$
$a_{23}' =$	$+\frac{i}{\sqrt{3}}(a_{34} + \varepsilon a_{42} + \varepsilon^2 a_{23})$	a_{42}	a_{13}	$\varepsilon^2 a_{23}$

Diese Gruppe enthält übrigens nur 25920 Substitutionen, indem sich bei ihr schon $(B^2D)^3$ (nicht erst $(B^2D)^4$) auf die Identität reducirt.

II. Deutet man die Z als Punktcoordinaten, die a_{ik} als die entsprechenden Linniencoordinaten des gewöhnlichen Raumes, so wird durch diese Substitutionen eine Configuration festgelegt, deren geometrische Verhältnisse von Herrn Witting in seiner Dissertation[1]) untersucht worden sind; er hat in ihr 40 Pole und ebensoviele ihnen einzeln entsprechende Polarebenen, 40 Polartetraeder (deren Ecken Pole, deren Seiten Polarebenen sind), 45 Paare von Hauptgeraden, 27 ausgezeichnete Fünfen von solchen Paaren aufgezeigt. Dem kann man weiter beifügen: Durch jedes solche Geradenpaar ist eine lineare Strahlencongruenz bestimmt; und die 5 Congruenzen, welche durch die Paare einer der genannten Fünfen bestimmt sind, gehören jedesmal einem und demselben linearen Complex an. So erhält man siebenundzwanzig lineare Complexe; die Gleichungen derselben sind:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{\lambda} a_{12} - \varepsilon^{\mu} a_{13} - \varepsilon^{-\lambda} a_{34} + \varepsilon^{-\mu} a_{42} = 0, \\ &\varepsilon^{\lambda} a_{13} - \varepsilon^{\mu} a_{14} - \varepsilon^{-\lambda} a_{42} + \varepsilon^{-\mu} a_{23} = 0, \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, 2). \\ &\varepsilon^{\lambda} a_{14} - \varepsilon^{\mu} a_{12} - \varepsilon^{-\lambda} a_{23} + \varepsilon^{-\mu} a_{34} = 0. \end{aligned}$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen werden bei den Operationen unserer Gruppe ohne zutretende Factoren unter sich vertauscht.

III. Es ist auf 72 Arten möglich, je 6 von diesen linearen Complexen so auszuwählen, daß die dreißig in ihnen enthaltenen Congruenzen der genannten Art alle von einander verschieden werden. Eine solche Sechs ist z. B.:

$$1) \qquad \begin{aligned} \xi_1 &\equiv \varepsilon\, a_{12} - a_{13} - \varepsilon^2 a_{34} + a_{42} = 0, \\ \xi_2 &\equiv \varepsilon\, a_{12} - \varepsilon\, a_{13} - \varepsilon^2 a_{34} + \varepsilon^2 a_{42} = 0, \\ \xi_3 &\equiv \varepsilon\, a_{12} - \varepsilon^2 a_{13} - \varepsilon^2 a_{34} + \varepsilon\, a_{42} = 0, \\ \xi_4 &\equiv a_{14} - \varepsilon^2 a_{12} - a_{23} + \varepsilon\, a_{34} = 0, \\ \xi_5 &\equiv \varepsilon\, a_{14} - \varepsilon^2 a_{12} - \varepsilon^2 a_{23} + \varepsilon\, a_{34} = 0, \\ \xi_6 &\equiv \varepsilon^2 a_{14} - \varepsilon^2 a_{12} - \varepsilon\, a_{23} + \varepsilon\, a_{34} = 0. \end{aligned}$$

Die dreißig in ihr enthaltenen Congruenzen lassen sich noch auf eine zweite Art in 6 unserer Complexe $\eta_i = 0$ anordnen. Diese η drücken sich durch die ξ aus wie folgt:

1) Ueber eine Configuration im Raume etc. (Göttingen 1887).

2) $$\eta_i = \xi_i - \tfrac{1}{6}(\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4+\xi_5+\xi_6), \qquad (i = 1, 2 \ldots 6)$$

die linken Seiten der Gleichungen der 15 noch übrigen ξ_{ik} durch:

3) $$\xi_{ik} = -\xi_i - \eta_k = -\xi_k - \eta_i.$$

Solcher „Doppelsechsen" enthält unsere Configuration 36; zu jeder derselben steht ein linearer „Complex II. Art" in bestimmter Beziehung, so zu der angegebenen der Complex:

4) $$\sum_{i=1}^{6} \xi_i \equiv -\sum_{i=1}^{6} \eta_i \equiv 3i\sqrt{3}\,(a_{12}+a_{34}) = 0.$$

IV. Setzt man in den Z ungerader Charakteristik die Argumente gleich Null und multiplicirt sie mit $\sqrt[8]{D^3}$, so gehen sie in Modulformen (s) über. Die von Herrn Maschke[1]) berechneten Invarianten der Gruppe der Z werden dabei Modulformen zweiter Stufe und drücken sich rational aus durch die Coefficienten der der Charakteristik zugehörigen Weierstrass'schen Normalform des hyperelliptischen Gebildes:

$$(x, \sqrt{4x^5 - g_2x^3 - g_3x^2 - g_4x - g_5 - g_6}).$$

Man findet in der That, von rein numerischen Factoren abgesehen:

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{f}_{12}) &= g_2 D^{\frac{1}{2}} \\
(\mathfrak{f}_{16}) &= g_3 D^{\frac{3}{4}} \\
(\mathfrak{f}_{24}) &= (80 g_4 - 3g_2^2) D \\
(\mathfrak{f}_{30}) &= (200 g_5 - g_2 g_3) D^{\frac{5}{4}} \\
(\mathfrak{f}_{40}) &= D^2.
\end{aligned}$$

D bedeutet dabei die Discriminante der Form 5. Grades unter dem Wurzelzeichen.

V. Von den Invarianten der senären Gruppe der a_{ik} seien hier nur die drei einfachsten angeführt:

$$J_2 = a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23};$$

$$J_5 = a_{12}a_{34}(a_{13}^2 - a_{14}^2 - a_{42}^2 + a_{23}^2) + \cdots;$$

$$\begin{aligned}
J_6 = {} & a_{12}^6 + \cdots + a_{34}^6 + \cdots + 10(a_{12}^3 a_{13}^3 + \cdots - a_{12}^3 a_{42}^3 + \cdots - a_{12}^3 a_{23}^3 - \cdots + a_{23}^3 a_{42}^3 + \cdots) \\
& + 10(a_{12}^3 a_{34}^3 + \cdots) + 180\, a_{12}a_{13}a_{14}a_{34}a_{42}a_{23}.
\end{aligned}$$

Durch die Punkte sind in diesen Formeln Glieder angedeutet,

1) Dieser Nachr. Jahrg. 1888 p. 78; math. Ann. Bd. 33 p. 317.

welche aus den vorhergehenden durch cyclische Vertauschung der Indices 2, 3, 4 sich ergeben.

VI. Wenn irgend eine Gleichung 27. Grades vorgelegt ist, deren Gruppe zu der Gruppe der a_{ik} holoedrisch isomorph ist, so werden nach Adjunction einer Wurzel derselben die 26 übrigen in $10+16$ zerfallen, von denen die ersteren zu der genannten Wurzel conjugirt, die letzteren nicht conjugirt heißen mögen. Hr. Klein hat auseinandergesetzt, daß es Functionen dieser Wurzeln geben muß, welche bei den zur Gruppe der Gleichung gehörigen Vertauschungen derselben sich genau wie die a_{ik} in der Tabelle (II) substituiren. Die Entwicklungen unter (III) zeigen, daß man solche Functionen durch Umkehrung der Formeln (1) erhalten kann, sobald man 27 Functionen der Wurzeln zu bilden im Stande ist, zwischen welchen die Relationen (2) und (3) bestehen. In der That findet man lineare Functionen, welche diese Eigenschaft besitzen; sei nämlich allgemein x_i $(i = 1, 2 \cdots 27)$ eine Wurzel der vorgelegten Gleichung, C_i die Summe der zu ihr conjugirten, N_i die Summe der zu ihr nicht conjugirten Wurzeln, so sind:

$$\xi_i = 4x_i - 2C_i + N_i$$

Functionen der verlangten Art, und es ist jedes x_i rational durch das entsprechende ξ_i und die bekannten Größen ausdrückbar. Damit ist die Lösung jeder solchen Gleichung auf das Problem der a_{ik} (und dadurch wenn man will auf das der Z) zurückgeführt.

VII. Insbesondere gilt das von derjenigen Gleichung, von welcher die Bestimmung der 27 Geraden einer Fläche dritter Ordnung abhängt. Zwei Lösungen der letzteren sind dabei conjugirt oder nicht conjugirt, je nachdem sie sich schneidenden oder windschiefen Geraden der Fläche entsprechen.

Göttingen, den 31. Dezember 1891.

Ueber die Theorie der algebraischen Invarianten.

(Zweite Note.)

Von

David Hilbert.

(Vorgelegt von F. Klein.)

Die allgemeinen Sätze, welche ich in meiner ersten Note »über die Theorie der algebraischen Invarianten« [1]) kurz dargelegt habe, geben Aufschluß über die hauptsächlichsten Eigenschaften desjenigen Funktionenkörpers, welcher aus den sämmtlichen Invarianten einer Grundform oder eines Grundformensystems besteht. Im Falle einer binären Grundform gestattet dieser Funktionenkörper unter Zuhülfenahme der Cayley-Sylvesterschen Abzählungssätze eine ausführlichere Behandlung und in einem Vortrage auf der Naturforscherversammlung in Halle September 1891 habe ich insbesondere für den Grad dieses Funktionenkörpers einen Ausdruck aufgestellt. Die hierbei angewandten Methoden führen zugleich zu einem neuen und verallgemeinerungsfähigen Beweise für die Möglichkeit einer typischen Darstellung der binären Grundform. Um dies kurz zu zeigen, nehmen wir erstens an, es sei die Ordnung n der Grundform eine ungerade Zahl. Es bezeichne dann $\varphi(\varrho)$ die Anzahl der Invarianten, deren Grad in den Coefficienten der Grundform die Zahl ϱ nicht überschreitet und zwischen denen keine lineare Relation mit constanten Coefficienten stattfindet; ferner sei $\psi(\varrho)$ die Anzahl der im selben Sinne linear unabhängen Covarianten, deren Grad in den Coefficienten der Grundform ebenfalls die Zahl ϱ nicht überschreitet und deren Grad in den Verändlichen gleich 1 ist. Um nun die typische Darstellung der Grundform auszuführen, bedarf es zweier linearer Covarianten p und q, zwischen denen keine Relation von der Gestalt

$$Ap + Bq = 0$$

besteht, wo A, B Invarianten sind. Durch einfache Ueberlegungen erkennt man, daß es zwei solche Covarianten nothwendig geben muß, sobald nachgewiesen ist, daß $\frac{\psi(\varrho)}{\varphi(\varrho)}$ in der Grenze für $\varrho = \infty$ den Werth 2 annimmt. Der Nachweis hiefür läßt sich

1) Diese Nachrichten, Juli 1891.

aber in der That führen, wenn man die Sylvestersche Darstellung der Funktionen $\varphi(\varrho)$ und $\psi(\varrho)$ als Coefficienten der erzeugenden Funktion

$$\frac{(1-x^{\sigma+1})(1-x^{\sigma+2})\cdots(1-x^{\sigma+n})}{(1-x)\quad(1-x^2)\quad\cdots(1-x^n)}$$

benutzt. Dabei ist jedoch n größer als 3 vorausgesetzt. Es sei zweitens n eine gerade Zahl, so bezeichnen wir mit $\chi(\varrho)$ die Anzahl der in den Veränderlichen quadratischen Covarianten, deren Grad in den Coefficienten der Grundform die Zahl ϱ nicht überschreitet und zwischen denen keine lineare Relation mit constanten Coefficienten stattfindet. Um dann die typische Darstellung der Grundform auszuführen, bedarf es dreier quadratischer Covarianten p, q, l, zwischen denen keine Relation von der Gestalt

$$Ap + Bq + Cl = 0$$

besteht, wo A, B, C Invarianten sind. Es zeigt sich, daß drei solche Covarianten nothwendig existiren, falls $\frac{\chi(\varrho)}{\varphi(\varrho)}$ in der Grenze für $\varrho = \infty$ den Werth 3 annimmt. Der Nachweis hierfür läßt sich in der That unter der Voraussetzung $n > 4$ führen, wenn man ebenso wie vorhin verfährt.

Auf dem eingeschlagenen Wege erhält man zugleich einen Beweis dafür, daß die Zahlen

$$\sum(-1)^i\binom{n}{i}\left(\frac{n}{2}-i\right)^{n-s} \qquad \left(i = 0, 1, 2, \cdots, \frac{n-1}{2}\right)$$

bezüglich

$$\sum(-1)^i\binom{n}{i}\left(\frac{n}{2}-i\right)^{n-s}, \qquad \left(i = 0, 1, 2, \cdots, \frac{n}{2}-1\right)$$

welche in dem von mir aufgestellten Ausdrucke für den Grad des Invariantenkörpers den wesentlichen Bestandtheil bilden, nothwendig von 0 verschieden sind und hiermit ist, wie man aus den Entwicklungen meines vorhin erwähnten Vortrages ersieht, auf rein zahlentheoretischem Wege und ohne Benutzung eines Eliminationsverfahrens der strenge Beweis dafür erbracht, daß es nothwendig $n-2$ Invarianten geben muß, zwischen denen keine algebraische Relation besteht.

Nach den Entwickelungen meiner ersten Note bedarf es zum Studium des vollen Invariantensystems vor Allem der Kenntniß der nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die Invarianten der Grundform oder des Grundformensystems sämmt-

lich gleich 0 sind. Für den Fall einer binären Form sind diese Bedingungen durch den Satz auf Seite 241 meiner ersten Note vollständig gegeben. Auf Grund dieser Bedingungen gelingt es für eine binäre Grundform durch bloße Resultantenbildungen ein System von Invarianten aufzustellen, durch welche sich alle anderen Invarianten ganz und algebraisch ausdrücken lassen. Um dies zu zeigen, bilden wir für die vorgelegte Grundform

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots + a_n x_2^n$$

die folgenden Ueberschiebungen

$$F_1 = [a_0 a_2 - a_1^2] x_1^{2(n-2)} + \cdots$$

$$F_2 = [a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2] x_1^{2(n-4)} + \cdots$$

. . . . . .

$$F_\nu = \left[a_0 a_{2\nu} - \binom{2\nu}{1} a_1 a_{2\nu-1} + \cdots \pm \tfrac{1}{2}\binom{2\nu}{\nu} a_\nu^2\right] x_1^{2(n-2\nu)} + \cdots$$

wo ν die Zahl $\frac{n-1}{2}$ bezüglich $\frac{n}{2}$ bezeichnet, je nachdem die Ordnung n ungerade oder gerade ist. Wir stellen jetzt die Bedingungen dafür auf, daß die Formen $f, F_1, \cdots, F_\nu$ bezüglich $f, F_1, \cdots, F_{\nu-1}$ sämmtlich die nämliche Linearform als Faktor gemein haben, was etwa auf folgende Weise geschehen kann. Es sei M das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen n, $2(n-2)$, $2(n-4)$, $\cdots$, $2(n-2\nu)$ und man setze

$$M = m n = 2 m_1 (n-2) = \cdots = 2 m_\nu (n-2\nu),$$

bezüglich

$$M = m n = 2 m_1 (n-2) = \cdots = 2 m_{\nu-1} (n-2\nu+2);$$

je nachdem n eine ungerade oder eine gerade Zahl ist. Dann bilde man die beiden Formen

$$U = u f^m + u_1 F_1^{m_1} + \cdots + u_\nu F_\nu^{m_\nu},$$

$$V = v f^m + v_1 F_1^{m_1} + \cdots + v_\nu F_\nu^{m_\nu},$$

bezüglich

$$U = u f^m + u_1 F_1^{m_1} + \cdots + u_{\nu-1} F_{\nu-1}^{m_{\nu-1}},$$

$$V = v f^m + v_1 F_1^{m_1} + \cdots + v_{\nu-1} F_{\nu-1}^{m_{\nu-1}},$$

wo $u, u_1, \cdots, u_\nu$ und $v, v_1, \cdots, v_\nu$ unbestimmte Parameter sind. Die Resultante dieser beiden Formen U, V ist von der Gestalt

$$R(U, V) = J_1 P_1 + \cdots + J_\mu P_\mu,$$

wo $P_1, \cdots, P_\mu$ gewisse Potenzen und Produkte der unbestimmten Parameter u, v und $J_1, \cdots, J_\mu$ Invarianten der Grundform sind. Die Gleichungen

$$J_1 = 0, \cdots, J_\mu = 0$$

stellen die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür dar, daß die Formen f, $F_1, \cdots, F_\nu$ bezüglich die Formen f, F_1, $\cdots, F_{\nu-1}$ sämmtlich die nämliche Linearform als Faktor enthalten. Denn wenn das letztere nicht der Fall wäre, so könnte man stets den Parametern u, v solche numerische Werthe ertheilen, daß die beiden Formen U, V keinen gemeinsamen Faktor enthielten und dieser Umstand würde der Bedingung $R(U, V) = 0$ wiedersprechen. Wir transformiren jetzt die binäre Grundform f mittelst der Substitution

$$y_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$
$$y_2 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2,$$

wo $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$ diejenige Linearform bezeichnet, welche eben in jenen Formen als gemeinsamer Faktor enthalten ist und wo α_1, α_2 so gewählt sind, daß die Determinante $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$ von 0 verschieden ausfällt. Die Coefficienten der transformirten Form g bezeichnen wir mit $b_0, b_1, \cdots, b_n$. Da nun die transformirte Form g und ihre Ueberschiebungen sämmtlich den Faktor y_2 besitzen, so müssen ihre Coefficienten nothwendig folgende Gleichungen befriedigen

$$b_0 = 0,$$
$$b_0 b_2 - b_1^2 = 0,$$
$$\cdots\cdots$$
$$b_0 b_{2\nu} - \binom{2\nu}{1} b_1 b_{2\nu-1} + \cdots \pm \tfrac{1}{2}\binom{2\nu}{\nu} b_\nu^2 = 0$$

bezüglich

$$b_0 = 0,$$
$$b_0 b_2 - b_1^2 = 0,$$
$$\cdots\cdots$$
$$b_0 b_{2\nu-2} - \binom{2\nu-2}{1} b_1 b_{2\nu-3} + \cdots \pm \tfrac{1}{2}\binom{2\nu-2}{\nu-1} b_{\nu-1}^2 = 0.$$

Fügen wir im Falle eines geraden n noch die Gleichung $F_\nu = 0$ hinzu so folgen für ein ungerades sowie für ein gerades n die Gleichungen

$$b_0 = 0, b_1 = 0, \cdots, b_\nu = 0$$

und hieraus ergiebt sich, daß die Form g den Faktor y_2 wenigstens $\nu+1$ fach enthält. Nach dem Satze auf Seite 241 meiner ersten Note folgt nunmehr, daß die Invarianten $J_1, \cdots, J_\mu$ bezüglich $J_1, \cdots, J_\mu, F_\nu$ ein System von Invarianten der Grundform f darstellen von der Art, daß das Verschwinden dieser Invarianten nothwendig das Verschwinden aller Invarianten der Grundform zur Folge hat und nach dem Satze auf Seite 237 jener Note sind mithin sämmtliche Invarianten der Grundform f ganze algebraische Funktionen jener eben gefundenen Invarianten. Es ist selbstverständlich, daß in besonderen Fällen die Berechnung der Bedingungen dafür, daß $f, F_1, \cdots, F_\nu$ einen gemeinsamen Faktor haben, sich erheblich abkürzen läßt.

Wenn f und g zwei binäre Grundformen von der nämlichen Ordnung n sind derart, daß die Invarianten von $\lambda f+\mu g$ für alle Parameterwerte λ und μ verschwinden, so muß die Form $\lambda f+\mu g$ einen $\nu+1$ fachen Linearfaktor besitzen, was für Werte auch die Parameter λ und μ annehmen mögen und hieraus folgt leicht, daß f und g selber die nämliche Linearform als $\nu+1$ fachen Faktor enthalten müssen, ein Umstand, welcher seinerseits zur Folge hat, daß auch sämmtliche Simultaninvarianten der beiden Formen f und g gleich 0 sind d. h. Wenn $J_1, J_2, \cdots, J_\mu$ solche Invarianten der einen Grundform f sind, durch welche sich alle übrigen Invarianten dieser Grundform ganz und algebraisch ausdrücken lassen, so gelangt man von diesen Invarianten $J_1, J_2, \cdots, J_\mu$ durch wiederholte Anwendung des Aronholdschen Processes

$$g\frac{\partial}{\partial f}=b_0\frac{\partial}{\partial a_0}+b_1\frac{\partial}{\partial a_1}+\cdots+b_n\frac{\partial}{\partial a_n}$$

zu einem System von Simultaninvarianten, welches die Eigenschaft besitzt, daß jede Simultaninvariante der beiden Formen f und g eine ganze algebraische Funktion der Simultaninvarianten dieses Systems ist. Besondere Fälle dieses Satzes findet man bereits auf Seite 238 meiner ersten Note erörtert. Durch den Satz tritt eine merkwürdige Eigenschaft des Aronholdschen Processes zu Tage.

Auf demselben Wege erkennt man, daß sich aus den Invarianten $J_1, J_2, \cdots, J_\mu$ der Grundform f durch wiederholte Anwendung des Processes

$$x_2^n\frac{\partial}{\partial a_0}-x_1x_2^{n-1}\frac{\partial}{\partial a_1}+\cdots\pm x_1^n\frac{\partial}{\partial a_n}$$

ein System von Covarianten ergiebt, welches die Eigenschaft besitzt, daß alle übrigen Covarianten der Grundform ganze algebraische Funktionen der Covarianten des erhaltenen Systems und der Invarianten $J_1, J_2, \cdots, J_\mu$ sind. Beispielsweise erhält man für die binäre cubische Grundform f durch ein- und zweimalige Anwendung jenes Processes auf ihre Diskriminante D die beiden Covarianten $t = (f,h)_1$ und f^2; in der That ist die Hessesche Covariante $h = (f,f)_2$ eine ganze algebraische Funktion von D, t und f, da ja ihre dritte Potenz eine ganze rationale Funktion dieser invarianten Bildungen wird. Wenden wir ferner auf die Invarianten i und j einer biquadratischen binären Form f jenen Proceß an, so gelangen wir zu den Covarianten f und $h = (f,f)_2$ und in der That ist das Quadrat der allein wohl übrigen Covariante $t = (f,h)_1$ eine ganze rationale Funktion von i, j, f und h.

Sämmtliche Ueberlegungen lassen sich leicht auf die Theorie der Combinanten von zwei oder mehr binären Grundformen übertragen. So gilt beispielsweise der Satz:

Eine jede Combinantinvariante zweier binärer Formen f, g ist eine ganze algebraische Funktion der Invarianten ihrer Funktionaldeterminante $(f, g)_1$. Denn wie sich leicht zeigt, verschwinden die sämmtlichen Combinantinvarianten der beiden Formen f und g dann und nur dann, wenn unter den Formen des Formenbüschels $\lambda f + \mu g$ sich zwei Formen befinden, von denen die eine einen r-fachen Linearfaktor besitzt und die andere diesen nämlichen Linearfaktor $n + 1 - r$-fach enthält.

Die Ausdehnung der bisherigen Entwicklungen auf die Theorie der Formen mit mehr Veränderlichen ist ohne weiteres nur in dem Maaße möglich, als man die Besonderheit derjenigen Formen anzugeben weiß, welche die Eigenschaft besitzen, daß alle ihre Invarianten 0 sind. So ist beispielsweise im Falle einer ternären Form dritter Ordnung das Verschwinden aller Invarianten die Bedingung für das Auftreten eines Rückkehrpunktes in der durch Nullsetzen der Form dargestellten Curve. Im Falle einer ternären Form 4ter Ordnung besteht die Bedingung darin, daß die entsprechende biquadratische Curve einen 3-fachen Punkt oder eine höhere Singularität besitzt. Auf dem angegebenen Wege läßt sich insbesondere auch die Theorie der quadratischen und bilinearen Formen mit beliebig vielen Veränderlichen behandeln. Wie ich noch bemerken möchte, tritt in allen bisher von mir untersuchten Fällen der merkwürdige Umstand auf, daß die betreffenden „Nullformen“ d. h. diejenigen Formen, deren sämtliche

Invarianten gleich 0 sind, dadurch charakterisirt werden können, daß man gewisse Coefficienten der Form gleich 0 setzt, während man die übrigen Coefficienten willkürlich läßt.

Nach den Entwicklungen meiner ersten Note bedarf es zur Aufstellung des vollen Invariantensystems vor Allem der Kenntniß eines endlichen Systems von Invarianten, deren Verschwinden das Verschwinden sämmtlicher Invarianten zur Folge hat. Diese letztere Aufgabe ist oben für eine binäre Grundform f gelöst, jedoch auf einem Wege, welcher wegen der Schwierigkeit der Aufstellung der Nullformen zunächst keiner Ausdehnung auf Grundformen von mehr Veränderlichen fähig ist. Zwar die Existenz eines solchen Systems von Invarianten, deren Verschwinden das Verschwinden aller übrigen zur Folge hat, folgt unmittelbar aus dem Theorem I in Abschnitt I meiner Arbeit „Ueber die Theorie der algebraischen Formen“[1]); aber dieses allgemeine Theorem gibt durchaus kein Mittel in die Hand, ein solches System von Invarianten durch eine endliche Anzahl schon vor Beginn der Rechnung übersehbarer Prozesse aufzustellen in der Art, daß beispielsweise eine obere Grenze für die Zahl der Invarianten dieses Systems oder für ihre Grade in den Coefficienten der Grundform angegeben werden kann. Die hierin liegende Schwierigkeit wird nun vollständig überwunden durch die nachfolgenden Entwicklungen, bei denen wir uns der Kürze halber auf das ternäre Formengebiet beschränken.

Ist eine ternäre Grundform $f(x_1, x_2, x_3)$ von der n^{ten} Ordnung vorgelegt, deren $N = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Coefficienten $a_1, a_2, \cdots, a_N$ sämmtlich bestimmte numerische Werte besitzen mögen; dann entsteht die Aufgabe, zu entscheiden, ob es noch eine Invariante J gibt, welche für die vorgelegte besondere Grundform f von 0 verschieden ist, oder ob alle Invarianten von f gleich 0 sind. Diese Entscheidung ist nun stets auf Grund der folgenden Betrachtung möglich. Man transformire die Form f der drei Veränderlichen x_1, x_2, x_3 mittelst der linearen Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \alpha_{13} y_3, \\ x_2 &= \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 + \alpha_{23} y_3, \\ x_3 &= \alpha_{31} y_1 + \alpha_{32} y_3 + \alpha_{33} y_3, \end{aligned} \qquad \delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} \alpha_{12} \alpha_{13} \\ \alpha_{21} \alpha_{22} \alpha_{23} \\ \alpha_{31} \alpha_{32} \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

wo die Substitutionscoefficienten $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots, \alpha_{33}$ unbestimmte Größen sind. Die Coefficienten der transformirten Form $g(y_1, y_2, y_3)$ be-

1) Mathematische Annalen Bd. 36 S. 474.

zeichnen wir mit $b_1, b_2, \cdots, b_N$; dieselben sind ganze rationale Funktionen vom n-ten Grade in $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots, \alpha_{ss}$, mit bestimmten numerischen Coefficienten. Nehmen wir nun an, es gebe eine Invariante J, welche für die besondere Grundform f verschieden von 0 ist, so wäre

$$J(g) = \delta^p J(f),$$

wo p das Gewicht der Invariante J bedeutet und $J(f)$ eine von 0 verschiedene Zahl ist. Nach der Division durch diese Zahl lehrt die letztere Gleichung, daß die Substitutionsdeterminante δ einer Gleichung genügt, deren erster Coefficient gleich 1 ist und deren übrige Coefficienten ganze rationale Funktionen von $b_1, b_2, \cdots, b_N$ sind, d. h. die Substitutionsdeterminante δ ist unter jener Annahme eine ganze algebraische Funktion der Coefficienten $b_1, b_2, \cdots, b_N$.

Es ist nun sehr wesentlich, daß der hierin ausgesprochene Satz auch umgekehrt gilt. Um dies zu zeigen, nehmen wir an, es sei δ eine ganze algebraische Funktion von $b_1, b_2, \cdots, b_N$ und genüge etwa der Gleichung

$$\delta^p + G_1(b)\delta^{p-1} + \cdots + G_p(b) = 0,$$

wo $G_1, G_2, \cdots, G_p$ ganze rationale Funktionen von $b_1, b_2, \cdots, b_N$ mit numerischen Coefficienten sind. Wie sich leicht zeigt, können wir annehmen, daß in der obigen Gleichung diejenigen Coefficienten G_s gleich 0 sind, für welche $\frac{3s}{n}$ eine gebrochene Zahl ist, und daß die übrigen Funktionen G_s in den Größen $b_1, b_2, \cdots, b_N$ homogen vom Grade $\frac{3s}{n}$ sind. Wir denken uns nun für den Augenblick in der Form f die Coefficienten $a_1, a_2, \cdots, a_N$ als unbestimmte Größen, und $b_1, b_2, \cdots, b_N$ dementsprechend als Funktionen nicht nur der Substitutionscoefficienten $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots, \alpha_{ss}$, sondern zugleich als linear von $a_1, a_2, \cdots, a_N$ abhängig. Die linke Seite der obigen Gleichung, nämlich der Ausdruck

$$\delta^p + G_1(b)\delta^{p-1} + \cdots + G_p(b)$$

wird nunmehr erst dann identisch für alle Werthe von $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots, \alpha_{ss}$ verschwinden, sobald wir wieder statt der Größen $a_1, a_2, \cdots, a_N$ die betreffenden numerischen Coefficienten der besonderen Grundform f einsetzen. Indem wir jetzt auf jenen Ausdruck p-mal den Process

$$\Omega = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha_{11}} & \frac{\partial}{\partial \alpha_{12}} & \frac{\partial}{\partial \alpha_{13}} \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_{21}} & \frac{\partial}{\partial \alpha_{22}} & \frac{\partial}{\partial \alpha_{23}} \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_{31}} & \frac{\partial}{\partial \alpha_{32}} & \frac{\partial}{\partial \alpha_{33}} \end{vmatrix}$$

anwenden, erhalten wir zufolge des in Abschnitt V meiner Abhandlung „Ueber die Theorie der algebraischen Formen“ [1]) bewiesenen Satzes einen Ausdruck von der Gestalt

$$C_p + J_1(a) + J_2(a) + \cdots + J_p(a),$$

wo C_p eine von 0 verschiedene Zahl bedeutet und $J_1, J_2, \cdots, J_p$ Invarianten der Grundform f mit den unbestimmt gedachten Coefficienten $a_1, a_2, \cdots, a_N$, sind. Dieser Ausdruck muß nun 0 sein, sobald man für die Größen $a_1, a_2, \cdots, a_N$ die betreffenden numerischen Coefficienten der Form f einführt und daraus folgt, daß nicht sämmtliche Invarianten $J_1, J_2, \cdots, J_p$ für die besondere Grundform f verschwinden können. Wir sprechen dieses für alle weiteren Betrachtungen wesentliche Resultat in folgendem Satze aus:

Eine Grundform mit bestimmten numerischen Coefficienten besitzt dann und nur dann eine von 0 verschiedene Invariante, wenn die Substitutionsdeterminante δ eine ganze algebraische Funktion der Coefficienten der linear transformirten Form ist.

Nunmehr möchte ich noch kurz den Weg andeuten, wie man durch endliche und von vornherein übersehbare Processe entscheiden kann, ob δ eine ganze algebraische Funktion der Größen $b_1, b_2, \cdots, b_N$ ist oder nicht. Zunächst zeige man durch ein ähnliches Verfahren, wie auf Seite 234 meiner ersten Note, daß es stets möglich ist, aus den Größen $b_1, b_2, \cdots, b_N$ durch lineare Combination mit geeigneten numerischen Coefficienten $c_{11}, c_{12}, \cdots, c_{9N}$ neun Ausdrücke von der Gestalt

$$B_1 = c_{11} b_1 + c_{12} b_2 + \cdots + c_{1N} b_N,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B_9 = c_{91} b_1 + c_{92} b_2 + \cdots + c_{9N} b_N$$

zu bilden, durch welche alle Größen $b_1, b_2, \cdots, b_N$ sich als ganze algebraische Funktionen ausdrücken lassen. Die 9 Ausdrücke $B_1, \cdots, B_9$ sind dann ebenfalls, wie die Größen $b_1, b_2, \cdots, b_N$ ganze

1) Mathematische Annalen Bd. 36 S. 524.

rationale homogene Funktionen n^{ten} Grades von $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{33}$ mit numerischen Coefficienten und es läßt sich zeigen, daß zwischen diesen 9 Ausdrücken $B_1, \cdots, B_9$ eine algebraische Relation im Allgemeinen nur dann stattfindet, wenn die besondere Form f die Eigenschaft hat, lineare continuirliche Transformationen in sich selbst zu besitzen. In diesem Falle reicht schon eine geringere Zahl von linearen Combinationen der Größen $b_1, b_2, \cdots, b_N$ aus, um durch dieselben jede einzelne dieser Größen als ganze algebraische Funktion auszudrücken. Es seien $B_1, \cdots, B_k$ k solche lineare Combinationen, durch welche sich jede der Größen $b_1, b_2, \cdots, b_N$ ganz und algebraisch ausdrücken läßt und zwischen denen selbst keine algebraische Relation stattfindet. Dann bestimme man $9-k$ Funktionen $B_{k+1}, \cdots, B_9$ vom Grade n in $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{33}$ und mit numerischen Coefficienten derart, daß zwischen den 9 Funktionen $B_1, \cdots, B_9$ ebenfalls keine algebraische Relation stattfindet. Daß dies unter den bestehenden Umständen immer möglich ist, läßt sich leicht mit Hilfe einer bekannten Eigenschaft der Funktionaldeterminante zeigen. Nunmehr werde die irreducible Gleichung aufgestellt, welche zwischen $\delta, B_1, \cdots, B_9$ besteht; dieselbe sei von der Gestalt

$$\delta^\pi + \Gamma_1 \delta^{\pi-1} + \cdots + \Gamma_\pi = 0.$$

Nehmen wir dann an, es sei δ eine ganze algebraische Funktion der Größen $b_1, b_2, \cdots, b_N$, so läßt sich zeigen, daß in dieser Gleichung die Coefficienten $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_\pi$ nothwendigerweise ganze rationale Funktionen von $B_1, \cdots, B_k$ sein müssen und von den $B_{k+1}, \cdots, B_9$ vollkommen frei sind. Damit ist der Weg gegeben, auf welchem sich entscheiden läßt, ob die Substitutionsdeterminante δ eine ganze algebraische Funktion der Coefficienten der transformirten Form ist oder nicht.

Wir können aber zugleich für den Grad π jener Gleichung eine obere Grenze finden und zwar mit Hilfe der folgenden Betrachtung: Es seien $h+1$ Formen $H_1, \cdots, H_{h+1}$ gegeben, welche sämmtlich vom Grade m in den h homogenen Veränderlichen $u_1, \cdots, u_h$ sind. Wir bilden alle Potenzen und Producte R-ten Grades der Größen $H_1, \cdots, H_{h+1}$ und betrachten die Gleichung

$$\sum C_{s_1, s_2, \ldots, s_{h+1}} H_1^{s_1} H_2^{s_2} \cdots H_{h+1}^{s_{h+1}} = 0.$$

$$(s_1 + s_2 + \cdots + s_{h+1} = R).$$

Indem wir auf der linken Seite nach Ausführung der Multiplication sämmtliche Potenzen und Producte der Veränderlichen $u_1, \cdots, u_h$ gleich 0 setzen, ergibt sich zur Bestimmung der

$$\frac{(R+1)(R+2)\cdots(R+h)}{1\cdot 2\cdot \quad \cdots h}$$

Coefficienten $C_{s_1, s_2, \ldots, s_{h+1}}$ ein System von

$$\frac{(mR+1)(mR+2)\cdots(mR+h-1)}{1\cdot 2 \quad \cdots h-1}$$

linearen homogenen Gleichungen; diese Gleichungen werden stets Lösungen haben, sobald

$$\frac{(R+1)\cdots(R+h)}{1\cdot 2 \quad \cdots h} > \frac{(mR+1)\cdots(mR+h-1)}{1\cdot 2\cdots h-1}$$

ist und diese Ungleichung ist jedenfalls dann erfüllt, wenn wir $R = h(m+1)^{h-1}$ nehmen. Hieraus folgt, daß zwischen den Funktionen $H_1, \cdots, H_{h+1}$ nothwendig eine Relation bestehn muß, deren Grad kleiner oder gleich der Zahl $h(m+1)^{h-1}$ ist.

Wir wenden diesen Satz auf die 10 Formen δ^n, $B_1^n, \cdots, B_9^n$ an, von denen jede homogen vom $3n^{\text{ten}}$ Grade in den 9 Veränderlichen $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots, \alpha_{33}$ ist; wir setzen also $h = 9$ und $m = 3n$. Auf diese Weise ergiebt sich, daß der Grad π der oben aufgestellten Gleichung jedenfalls die Zahl $9n(3n+1)^8$ nicht übersteigt und wir erhalten so leicht den Satz:

Wenn für eine ternäre Grundform von der Ordnung n diejenigen Invarianten 0 sind, deren Gewicht die Zahl $9n(3n+1)^8$ nicht übersteigt, so sind nothwendig sämmtliche Invarianten der Grundform gleich 0.

Und aus diesem folgt dann mit Hülfe des Satzes auf Seite 237 meiner ersten Note:

Sämmtliche Invarianten einer ternären Grundform lassen sich als ganze algebraische Funktionen derjenigen Invarianten ausdrücken, deren Gewicht die Zahl $9n(3n+1)^8$ nicht übersteigt.

Eine obere Grenze für die Grade und für die Anzahl der Invarianten folgt hieraus unmittelbar. Zugleich ist mit diesen Entwickelungen gezeigt, wie das volle Invariantensystem durch rationale und von vornherein übersehbare Processe wirklich aufgestellt werden kann. Bei näherer Ausführung findet man nun auch leicht eine nur von n abhängige obere Grenze für die Gewichte derjenigen Invarianten, durch welche sich alle übrigen Invarianten ganz und rational ausdrücken lassen, womit, wie ich glaube, die wichtigsten allgemeinen Ziele einer Theorie der durch die Invarianten gebildeten Funktionenkörper erreicht sind.

Königsberg i. Pr. den 5. Januar 1892.

Zur Kenntniß der Anthomedusen.

Von

Dr. **Clemens Hartlaub.**

(Vorgelegt von E. Ehlers.)

Herr Dr. E. Vanhöffen hat in Nr. 379 des Zool. Anzeigers von 1891 ein neues System der Anthomedusen vorgeschlagen, welches je nach der Form der Gonaden die Ordnung in zwei Familien theilt, nämlich in die Codonidae („Gonaden ungetrennt als zusammenhängender Mantel den Magen ringartig umfassend") und in die Oceanidae („Vier oder vier Paar interradiale Gonaden dem Ectoderm des Magens eingelagert").

Da der Autor in diesem System die von mir früher untersuchte Gattung Cladonema zu den Oceaniden stellt, so hat er offenbar eine von mir publicirte Mittheilung[1]) unberücksichtigt gelassen, und ich möchte mir daher erlauben auf sie von neuen hinzuweisen und eine Stelle über die Form der Gonaden hier zu citiren.

Sodann möchte ich eine kurze Mittheilung über das Genus Turris machen und endlich Einsprache gegen die Vanhöffensche Vereinigung der Genera Pandaea und Tiara erheben.

In dem besagten Aufsatze über Cladonema habe ich über die Lage des Sexualorgans Folgendes angegeben:

„An der Entwickelung der Sexualproducte betheiligt sich nur die erstere Partie (Centralmagen), und zwar wird der Magen, ähnlich dem der Codoniden von einer zusammenhängenden Gonade umgeben. Die bisherige Auffassung, daß Cladonema vier (5) — jedenfalls müßte es für unser Material fünf (4) heißen — getrennte Gonaden besäße, begründet sich darauf, daß das Manubrium in der unteren Gonadenregion fünf (4) sackartige Ausstülpungen bildet, die bei oberflächlicher Betrachtung leicht für einzelne Gonaden gehalten werden könnten, in Wahrheit aber diese Bedeutung nicht besitzen. Auf Schnitten an jungen Exemplaren zeigt sich deutlich, daß die Sexualzellenproduction an der ganzen Peripherie der unteren Zweidrittel des Centralmagens gleichzeitig gleich stark beginnt, sehr bald aber auch schon das proximale Drittel in Mitleidenschaft gezogen wird. Erst mit zunehmender Menge der Sexualstoffe entstehen die fünf

1) Zool. Anzeiger Nr. 267 1887.

perradial gelegenen Ausstülpungen, doch bleibt die Bildung der Geschlechtsproducte zwischen ihnen eher stärker als schwächer".

Es ist demnach wohl ersichtlich, daß Vanhöffen Cladonema zu den Codonidae und nicht zu den Oceanidae hätte stellen müssen.

Was Eleutheria betrifft, die nach Vanhöffen mit Cladonema zusammen die Unterfamilie der Dendronemidae bildet, so ist bei ihr noch viel weniger von vier oder vier Paar interradialen Gonaden die Rede als bei dieser, denn bei der einzigen darauf hin genau genug untersuchten Art Eleutheria dichotoma Quatref. liegen die Sexualproducte nicht am Manubrium, sondern in der über dem Magen befindlichen Bruthöhle.

Die zweite Unterfamilie der Gruppe Cladonemata sind die Pteronemidae (Pteronema Ctenaria, Zanclea, Gemmaria). Da von diesen vier Gattungen wohl schwerlich eine von Vanhöffen auf die Gonaden untersucht wurde, so bleibt es fraglich, ob sie sich nicht ähnlich wie Cladonema verhalten, und ob nicht die ganze Gruppe der Cladonemata zu den Codonidae zu zählen sein wird.

Die Gattung Eleutheria scheint mir durch den Besitz der Bruthöhle, der sechs interradialen Canäle, welche Bruthöhle und Subumbrella verbinden, ferner durch den mächtigen Nesselwulst ihres Glockenrandes und schließlich durch ihre Knospungsvermehrung, so tiefgreifend von Cladonema unterschieden zu sein, daß ich die Vanhöffensche Vereinigung dieser zwei Gattungen zur Subfamilie der Dendronemidae unmöglich gut heißen kann.

Vielleicht dürfte es richtiger sein, der angeführten Charaktere wegen Eleutheria als Vertreterin einer besonderen Unterfamilie der Eleutheridae aufzufassen. Weder die verzweigte Tentakelform noch der Cladonema und Eleutheria gemeinsame Hermaphroditismus scheinen mir Grund genug für eine engere Vereinigung der beiden Genera zu sein. Auch die Polypen der beiden Medusen sind so verschieden, daß Clavatella prolifera, die Ammenform von Eleutheria, von Allman[1]) als einzige Vertreterin der Familie „Clavatellidae" aufgeführt wird.

Daß gerade in Bezug auf die Gonaden bei einer nicht ganz gründlichen Prüfung leicht Irrthümer passiren, ist gewiß. Nur die Schnittmethode ist hier ganz entscheidend, und mittelst dieser hat auch Vanhöffen, wie er sagt, die Erfahrung gemacht „daß

1) Allmann, G. J., A Monograph of the Gymnoblastic or Tubularian Hydroids. London 1871.

bei Vertretern fast aller Gruppen der Oceaniden, selbst bei solchen Medusen, denen nach Haeckel perradiale Gonaden zukommen sollten" „die Gonaden perradial getrennt sind".

Die Gattung Turris, von der ich eine schöne Art vor einigen Jahren in Neapel beobachten konnte, bestätigt dies vollkommen. Ich schicke die Diagnose der sehr wahrscheinlich neuen Species voran.

Turris coeca n. sp.

Schirm hoch glockenförmig, mit ansehnlichem Scheitelaufsatz. Magen höchstens Zweidrittel der Schirmhöhle erfüllend, vierseitig, mit breiter Basis festsitzend. — Vier radial getrennte Gonaden, welche bis dicht an die Mundkrausen hinabreichen; auf jeder ihrer Seiten eine Längsreihe von gelappten Querwulsten, in der Mitte ein Gitterwerk von Leisten. — Radialcanäle überall gleich breit, bandförmig, an den Rändern mit nicht sehr dicht stehenden, kurzen Drüsenschläuchen besetzt, die verästelt sein können. Tentakeln von ansehnlicher Länge, in einer Reihe, circa 50, an der Basis stark comprimirt und hoch. Keine Ocellen.

Farbe: rosinenfarbig; Tentakeln an der Basis okergelb.

Größe: Schirmbreite circa 15 mm, Schirmhöhe 30—35 mm.

Fundort: Mittelmeer (Neapel im Februar und März).

Die neue Species steht der Turris digitalis Forbes (Grönländisches Meer und Nordsee), die ich leider nur in einem sehr mäßig erhaltenen Exemplare des Copenhagener Museums untersuchen konnte, sehr nahe. Halten wir uns aber an die Haeckelsche Beschreibung, so können wir die Mittelmeerform einstweilen nicht mit ihr identificiren. Die Hauptunterschiede sind folgende: T. digitalis hat einen viel längeren Magen, kürzere Tentakeln und besondere, den Radiärcanälen entlang laufende Längsmuskeln. Wie es bei ihr mit den Ocellen steht, die unserer neuen Art auffallender Weise vollkommen fehlen, geht aus den Beschreibungen nicht hervor. Auf der Forbesschen Figur[1]) sind keine eingezeichnet. — Die eigenthümlichen Längsmuskeln der nordischen Art konnte ich, vielleicht in Folge der schlechten Erhaltung, nicht auffinden, ebenso wenig konnte ich bestätigen, daß die Tentakeln bei ihr in zwei Reihen stehen, wie Haeckel[2]) meint. Ob die von Haeckel beschriebene Verengerung des Radiärcanals in seinem oberen mit dem Magen durch das sogenannte Mesenterium verbundene Theile wirklich bei ihr besteht oder etwa nur eine

1) Forbes, British Naked eyed Medusae London 1848. Pl. III Fig. 1.

2) System der Medusen.

Contractionserscheinung ist, konnte ich nicht feststellen. Bei unserer Art ist der Radiärcanal in diesem Abschnitte kaum bemerkenswerth enger als an seiner Einmündung in den Ringcanal. Wohl zu beachten ist aber, daß ein eigentliches Mesenterium bei dieser und den verwandten Gattungen überhaupt nicht existirt, denn ich überzeugte mich durch Schnitte, daß sowohl bei Turris als bei Tiara, Pandaea und Turritopsis das vermeintliche Mesenterium hohl ist und seiner ganzen Länge nach eine offene Verbindung herstellt zwischen Magenraum und dem in diesem ganzen Theile nicht geschlossenen sondern rinnenförmigen Radiärcanal. Die Radiärcanäle nehmen also ihren Ursprung nicht am Grunde des Magens wie bislang angenommen wurde, sondern mittelst einer langen schlitzförmigen Oeffnung, deren Ausdehnung z. B. bei Pandaea mehr als die Hälfte der ganzen Magenlänge beträgt (s. Fig. 2). — In der Färbung scheinen die südliche und nördliche Art übereinzustimmen.

Die andere bekannte Art unserer Gattung, Turris neglecta Lesson (Britische Küsten), ist, abgesehen von dem Besitz von Ocellarbulben, durch ihre viel geringere Größe leicht zu unterscheiden (Schirmbreite: 3—4 mm, Schirmhöhe: 4—6 mm) vergl. Abbildung bei Forbes l. c. Pl. III Fig. 2.

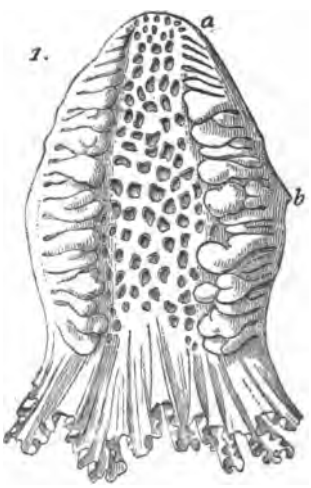


Fig. 1. Gonade an der Magenwand von Turris coeca n. sp. a. b. Ausdehnung der offenen Verbindung des Radiärcanals mit dem Magen.

Zur genaueren Kenntniß der Gonaden unserer Art sei noch folgendes bemerkt: Die eigenthümlichen gelappten Querwülste auf den Seiten der Gonade (s. Fig. 1), sowie das in der Mitte gelegene Gitterwerk der Leisten beruhen nicht etwa auf partieller

Verdickung der im Ectoderm gelegenen Sexualzellenschicht, sondern auf einer zur Vergrößerung der Oberfläche entstandenen, complicirten Faltenbildung der Magenwand. Betrachten wir diese von der Innenseite, so haben wir ein der Außenfläche ganz ähnliches Bild vor uns. Denn was auf dieser als Vertiefungen zwischen den Wülsten und als Gruben in den Maschen des Gitterwerkes der Balken erscheint, bildet auf der inneren Magenfläche ebensoviele Hervorragungen. Wahrscheinlich meint Gegenbaur[1]) ähnliche Hervorragungen, wenn er von Pandaea conica sagt: „Vom ersten unteren Fünftheile an gerechnet, ist die Innenfläche des Magens mit kreisrunden oder nierenförmigen Vorsprüngen besetzt, die in ihrer Peripherie aus braunen oder braunrothen Zellenmassen bestehen und einen für die Verdauung thätigen Absonderungsapparate entsprechen". Die Schicht der Sexualzellen ist auf den Querwülsten und in den zwischen ihnen liegenden Einfaltungen nur wenig dicker als auf der ganzen übrigen Gonadenfläche. Nur im Grunde der den Maschen des Balkennetzes entsprechenden Gruben fand ich auf Querschnitten durch ein männliches Exemplar die Schicht der Geschlechtszellen manchmal unterbrochen.

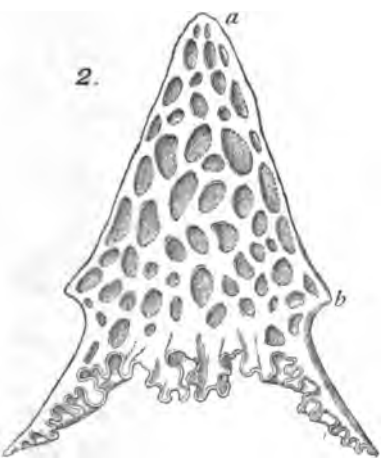


Fig. 2. Gonade an der Magenwand von Pandaea conica Haeck. a. b. s. Fig. 1.

Die Gattung Turris nimmt durch die Form ihrer Gonade eine vermittelnde Stellung ein zwischen den Gattungen Pandaea und Tiara. Wenn Vanhöffen sagt, daß die Gonaden von Pan-

1) Gegenbaur, C., Versuch eines Systemes der Medusen in: Zeitschr. wiss. Zool. 1856. Bd. VIII p. 222.

daea genau wie bei Tiara gebildet seien, so ist das nach meinen Erfahrungen durchaus unrichtig, und die von ihm gemachte Vereinigung der beiden Gattungen desshalb ein entschiedener Mißgriff. Haeckel bezeichnet die Pandaea-Gonade als glatt, nach Van höffen bestände sie wie bei Tiara aus zwei Längsreihen von dicken theilweise verästelten Querwülsten, in Wirklichkeit aber bedeckt sie (s. Fig. 2) die ganze Magenfläche, indem sie ein ziemlich weitmaschiges Netzwerk von Balken bildet. Sie hat also einen ähnlichen Charakter wie der mittlere Theil der Turris-Gonade.

Tiara besitzt gerade im Gegensatz zu Pandaea nur die seitlichen Querwülste der Gonade von Turris, während ihr ein in der Mitte gelegenes Gitterwerk vollkommen fehlt (s. Fig. 3). Bei ihr hat die Gonade eine mehr oder minder hufeisenförmige Gestalt, in sofern die beiden Längsreihen von Querwülsten oben an der Basis des Manubriums durch eine Querbrücke verbunden sind.

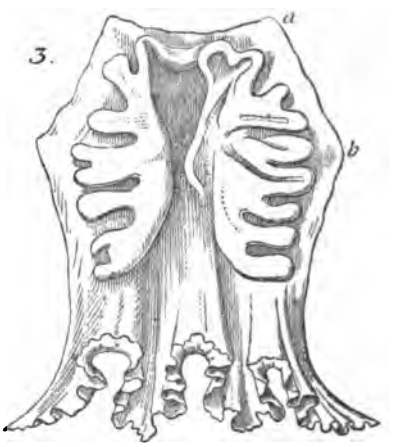


Fig. 3. Gonade an der Magenwand von Tiara pileata Agass. a. b. s. Fig. 1.

Schließlich sei noch erwähnt, daß auch die Gonaden von Turritopsis armata Haeckel nicht wie der Autor angiebt, „vier eiförmige Längswülste mit glatter Oberfläche, durch vier tiefe interradiale Furchen getrennt“ sind, sondern ebenfalls die ganze Magenwand bedecken und radial getrennt sind. Ihre äußere Oberfläche ist allerdings glatt; die vier radialen Magenkanten, in denen das Entoderm, wie man auf Querschnitten sieht, eine ganz besondere großzellige protoplasmaarme Struktur hat, sind von aller Sexualzellenbildung vollkommen frei.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Mai 1891.

Sitzungsberichte der Kön. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. XIX—XXIV. Berlin 1891.

Sylvische Furche und Reil'sche Insel des Genus Hylobates von W. Waldeyer. (Aus den Sitzungsberichten d. K. Pr. Akademie d. Wiss. 1891. XVI).

Veröffentlichung des Kön. Preuss. Geodätischen Institutes. Das Berliner Basisnetz 1885—1887. Berlin 1891.

Verhandlungen der vom 15. 21. Sept. 1890 zu Freiburg i. Br. abgehaltenen Conferenz der permanenten Commission der internationalen Erdmessung redig. v. A. Hirsch. Berlin 1891.

Die Königl. Observatorien für Astrophysik, Meteorologie und Geodäsie bei Potsdam. Berlin 1890.

C. G. J. Jacobi's Gesammelte Werke. 6. Band. Herausgeg. v. K. Weierstrass. Berlin 1891.

Kön. B. Akademie der Wissenschaften zu München:

a. Sitzungsberichte (philosophisch-philologische und historische Classe. 1891. Heft 1. München 1891.

b. Abhandlungen. 1. Mathematisch-physikalische Classe. 17ten Bandes 2te Abth. 2. Philosophisch-philologische Classe. 19ten Bandes 1te Abth. Ebd. 1891.

c. Die grossen Monarchien oder die Weltreiche in der Geschichte. Festrede am 15. Nov. 1890 geh. v. Ferd. Gregorovius. Ebd. 1890.

d. Rerum cognoscere causas. Ansprache des Präsidenten Dr. Max von Pettenkofer am 15. Nov. 1890. Ebd. 1890.

Abhandlungen herausgeg. vom naturwissenschaftl. Verein zu Bremen. XII. Bd., 1. Heft. Bremen 1891.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift. VI. Band. N. 19, 20. Berlin 1891.

Kaiserl. Leop.-Carol. deutsche Akademie der Naturforscher:

a. Nova Acta. Band LV. N. 4. Halle 1890.

b. Leopoldina. Heft XXVII. N. 7 – 8. April 1891. Ebd. 1891.

Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. 25. Jahrg. 4. Heft. Leipzig 1890.

Physikalisch-medicinische Gesellschaft zu Würzburg:

a. Verhandlungen. N. F. XXIV. Band. N. 7. N. F. XXV. Band. N. 1, 2. Würzburg 1891.

b. Sitzungsberichte. Jahrg. 1891. N. 1.

Neues Lausitzisches Magazin. 67ter Band. 1. Heft. Görlitz 1891.

Sonderabdruck aus der Zeitschrift für wissenschaftl. Geographie. Band VIII, Heft 1. *Ἡ ἀνατολικωτέρα τῶν λιμνῶν. Ἡ τῶν κροκοδείλων λίμνη.* Kura Kawar. Ukerewe Njansa von Dr. Konrad Ganzenmüller. Wemar 1891.

Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mittheilungen der Prähistorischen Commission. 1. Band. N. 2. 1890. Wien 1890.

K. K. geologische Reichsanstalt:

a. Verhandlungen. 1891. N. 5, 6, 7. Wien 1891.

b. Abhandlungen. Band XV. Heft 3. Ausgeg. am 28. Febr. 1891. Wien 1891.

Musealverein für Krain:

a. Mittheilungen. Erste Abth. Historischer Theil. Zweite Abth. Naturkundlicher Theil. 1891.

b. Izvestja muzejskega društva za Kranjsko. Izdal društveni odbor. Prvi letnik. V. Ljubljani (Laibach) 1891. [Berichte des Musealvereins f. Krain. I. Jahrg.]

Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. 8. Bd. (Oct. 1889—Oct. 1890). Berlin, Budapest 1891.

Kgl. Ung. Geologische Anstalt:
a. Jahresbericht für 1889. Budapest 1891.
b. Mittheilungen aus dem Jahrbuche. IX. Band. 3. 4. 5. Heft. Ebd. 1891.
Földtani Közlöny [Geolog. Mittheilungen]. XXI. Kötet. 1891. 1.—3. Füzet. Ebd. 1891.
Naturforschender Verein in Brünn:
a. VIII. Bericht der meteorologischen Commission. Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen i. J. 1888. Brünn 1890.
b. Verhandlungen. XXVIII. Band. 1889. Ebd. 1890.
Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. 35. Jahrg. 3. u. 4. Heft. Zürich 1890.
Astronomische Mittheilungen von Dr. Rud. Wolf. LXXVI. Beobachtungen der Sonnenflecken im Jahre 1889 etc. Ebend. 1890.
Académie Royale de Belgique. Bulletin. 61e année, 3e série, tome 21. N. 4. Bruxelles 1891.
Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy publiées par l'Académie des sciences. IIe série. Tome IX. Paris 1891.
Léçons sur la théorie des surfaces . . . par G. Darboux. IIIe partie. Deuxième fasc. Paris 1891.
Société mathematique de France. Bulletin. Tome XIX. No. 3. Paris 1891.
Académie Imp. des sciences de St. Pétersbourg. Mémoires. VII. Série. Tome XXXVIII. N. 2. 3. St. Pétersbourg 1890/91.
Bericht über die Ergebnisse der Beobachtungen an den Regenstationen der kaiserl. livländischen gemeinnützigen und ökonomischen Sozietät für d. J. 1888. Dorpat 1891.
Materialien zur Mineralogie Russlands von Nik. v. Kokscharow. 10. Bd. (Schluss). St. Petersburg 1891.
Proceedings of the London Mathematical Society. N. 404—408. London.
Monthly notices of the Royal Astronomical Society. Vol. LI. N. 6. April 1891. London.
Proceedings of the Scientific meetings of the Zoological Society of London. 1890. Part IV. Nov. and Dec. London 1891.
Report of the Manchester Museum, Owens College. From 1st Oct. 1889, to 30th Sept., 1890. Manchester.
Canadian Institute.
a. Transactions. N. 2. March 1891. Vol. 1. Part 2. Toronto 1891.
b. Fourth annnal report. (Session of 1890—91). Ebd. 1891.
Geological Survey of Canada. Contributions to Canadian Palaeontology. Vol. III. (Quarto). Montreal 1891.
Bibliotheca Indica. Collection of Oriental Works publ. by the Asiatic Society of Bengal. New Series. N. 262. 265. 728. 747. 773. 775. 776. 777. 778. 779. 780. 781. 782. 783. 784. 785. 786. 787. 788. 790. 791. 792. Calcutta 1888–91.
Nature. Vol. 43. N. 1122. Vol. 44. N. 1123—1126. London.
Bulletin mensuel de l'Obsereatoire météorologique de l'Université d'Upsal. Vol. XXII. Année 1890. Upsal 1890—91.
Sveriges offentliga Bibliotek Stockholm, Upsala, Lund, Göteborg. Accessions-Katalog. 5. 1890. Stockholm 1891.
Stavanger museums aarsberetning for 1890. Stavanger.
Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles publicés par la Société Hollandaise des scienses de Harlem. Tome XXV. 1re Livr. Harlem 1891.

(Fortsetzung folgt.)

Inhalt von Nr. 1.

Heinrich Burkhardt, zur Reduction des Problems der 17 Geraden der allgemeinen Fläche dritter Ordnung auf das Transformationsproblem der hyperelliptischen Functionen $p = 2$. — *David Hilbert*, über die Theorie der algebraischen Invarianten. — *Clemens Hartlaub*, zur Kenntniss der Anthomedusen. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Szuppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

17. Februar. **№ 2.** 1892.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 6. Februar.

Unser Platontext.

Von

Hermann Usener.

Erster Theil.

Unter den Ueberraschungen, welche im abgelaufenen Jahre Aegypten der classischen Philologie gebracht hat, dürfen auch die Reste einer alten Papyrusrolle genannt werden, die einst den Platonischen Phaidon enthielt. Sie füllen nicht weniger als vier Facsimiletafeln im achten Heft der Cunningham memoirs[1]). So trümmerhaft auch die 15 und mehr Columnen, von denen uns Fetzen vorliegen, erhalten sein mögen, gestatten sie doch, wo immer nur ein Buchstabe uns Anhalt gewährt, meistens eine sichere Herstellung nnd dadurch eine Vorstellung, wie in der ersten Hälfte des dritten Jahrhunderts, etwa unter dem zweiten Ptolemaeer, ungefähr 1150 Jahre vor unserer ältesten Handschrift,

1) On the Flinders Petrie papyri, with transcriptions, commentaries and index, by the rev. John P. Mahaffy. With thirty autotypes [in besonderer Mappe]. Dublin 1891. 68 S. Abhandlung, 97 S. Text usw. in Folio.

der Text Platons beschaffen war. Dieser Einblick ist in der That überraschend. Der Herausgeber Herr Mahaffy faßt seine Eindrücke in folgende Worte zusammen (S. 34):

> The differences between the readings of this ms. and those of our best mediaeval texts, though they do not affect the argument, are such in regard to style, that they clearly indicate a tradition distinct from that afterwards current. It has been of late years suspected by scholars that the Alexandrian critics edited the older texts from a rhetorical standpoint, and introduced refinements which they considered indispensable to good prose. Among these one of the most important was that law forbidding the hiatus between the final and initial vowels of two succeeding words, concerning which Benseler's tract has been too often quoted as conclusive. The fragments before us show in several places a complete disregard for this law, where our mediaeval texts avoid its violation by a mere variation in the order of the words. As a change from the observance to the non-observance of such a law cannot be rationally explained, while the reverse proceeding is exactly what we have reason to exspect, it follows that the ms. before us represents the pre-Alexandrine tradition, or, at least, the condition of Plato's text before it had been „improved" by the early grammarians to an extent unsuspected by most modern scholars.

Wie eine Offenbarung ist es also, was aus diesen Papyrusresten zu uns tönt und mit einem Schlage unseren Glauben zu Köhlerglauben, unsere Ueberzeugungen zu Irrthümern stempelt; dem wüsten Dilettantismus der Conjecturenjagd und der Glossenspürerei, der allmählich abgelebt schien, thun sich die Thore weit auf. Platon selbst scheint von den Todten auferstanden um dem armseligen Epigonengeschlecht der Grammatiker, das ihm die ewigen Werke planmäßig verwässert und verdorben, die Larve abzureißen.

Es ist wunderbar, welche berauschende Kraft diesen Tropfen alten Weines innewohnt. Ich bin darum weit davon entfernt den Entzifferern und den ersten Lesern einen Vorwurf daraus zu machen, daß der erste Eindruck einer durch ihr Alter alle anderen Zeugen niederschlagenden Urkunde sie an einzelnen Wahrnehmungen haften und nicht zu einer Würdigung des wahren Werthes gelangen ließ. Gewiß, im Angesicht der neuen Funde, die uns Aegypten gebracht hat und hoffentlich ferner bringen wird, müssen wir uns bereit halten nicht nur zu lernen, sondern auch umzulernen. Aber nicht minder haben wir die Pflicht das neue vorurtheilsfrei zu prüfen und wohl begründete Ueberzeugungen nicht unbesehen einem glänzenden Scheine preiszugeben. Es handelt sich hier um nichts geringeres als um die Beschaffenheit und Zuverlässigkeit der uns überlieferten Texte der großen griechischen Prosaiker. Soll diese fundamentale Frage an den neu-

gefundenen Resten des Phaidon zum Austrag gebracht werden, so kann es nur auf Grund gewissenhafter Abwägung der beiderseitigen Abweichungen geschehn, und dazu ist als weitere Vorarbeit ein erneuter Versuch der Herstellung und Ergänzung unerläßlich, da der Herausgeber die Ausdehnung der Lücken vielfach nicht genau genug in Rechnung gezogen hat. Nicht die Betrachtung einzelner Stellen, sondern nur eine Durchprüfung des ganzen kann ein sicheres Urtheil begründen; erst wenn dieses gewonnen ist, wird eine richtige Fragestellung geschaffen sein. Auf die Beantwortung glaube ich seit langem gerüstet zu sein. Ob ich mich darin nicht täusche, mögen Andere beurtheilen.

Die alte Phaidonrolle, um deren Text es sich handelt, war in Spalten von je 22 Zeilen geschrieben[2]). Während der Eingang der Zeilen auf gleicher Linie steht, ist das Zeilenende mit geringer Regelmäßigkeit behandelt und schießt oft stark über in den leeren Zwischenraum zwischen den Spalten: ein Umstand, der den Ergänzungen im Anfang der Zeilen weit größere Sicherheit gibt als am Ende. Die Schrift selbst zeigt einen älteren Charakter als die Urkunden aus der Zeit des zweiten und dritten Ptolemaeers. Sigma zwar hat schon durchweg die gerundete Form C, aber E ist erst im Uebergang begriffen: oft genug erscheint es noch in der eckigen Form der Capitalschrift, und auch wo das untere Ende sich rundet, setzt meistens an den vorgezogenen oberen Horizontalstrich der verticale rechtwinklig ein. ⊙ kommt noch einigemal mit einfachem Punkt im Kreis vor (s. Mahaffy zu T. VIII 2, 9 p. 27). Die Horizontallinien von Γ Π T sind breit ausgezogen. In dem ebenfalls breiten M zeigen die beiden Mittellinien bereits Neigung, sich zu einem gerundeten Zug zu verbinden, bilden aber meistens noch eine Art von Winkel. Dagegen wird Ω durchweg uncial geschrieben; an T lehnt es sich regelmäßig so an, daß es ohne die untere Zeilengränze zu berühren den Zug des Horizontalstrichs von T fortzusetzen scheint. Der Personenwechsel wird gewöhnlich in der Zeile selbst durch einen höher stehenden Gedankenstrich, außerdem auch, gerade wie in den Herculanischen Rollen der Abschluß einer Periode, durch einen Strich links unter der betreffenden Zeile bezeichnet; nur wenn der Querstrich innerhalb der Zeile vergessen war, wird durch je zwei Punkte (:) vor und nach der Zwischenrede nachgeholfen (so T. V 3, 6). Sonst fehlt jede Interpunktion, auch von

2) Nur auf Taf. V, 8 war, offenbar um etwas beim Uebergang zur nächsten Spalte übersehenes nachzutragen, ein Theil der 23ten Zeile erforderlich.

der Anwendung eines Lesezeichens (*προσῳδία*) ist keine Spur vorhanden.

Um der folgenden Erörterung eine bequemere Unterlage zu schaffen und dem Leser eigenes Urtheil zu ermöglichen, schicke ich zunächst den Text des Papyrus selbst voraus. Die Ergänzung habe ich auf Grund der phototypischen Nachbildungen unabhängig durchzuführen versucht, aber es bedarf keines Wortes, daß Mahaffy das meiste vorweg genommen hat. Die Anmerkungen unter dem Text sollen nicht nur in zweifelhaften Fällen Rechenschaft von der Ergänzung geben, sondern vor allem zu leichter Uebersicht das Material der Beurtheilung vorlegen. Unter den Platon-Hss. konnte der Bodleianus (*B*) aus dem J. 895 in den meisten Fällen als Vertreter ausreichen. Für größere Abschnitte sind neben ihm ältere Zeugen, Iamblichos (*I*) und Johannes Stobaeus (*S*) herangezogen worden. Den Papyrus von Arsinoe bezeichne ich durch *A*. Bei der Anführung von Stellen füge ich dem Abschnitt der Stephanus'schen Pagina die Zeile des Papyrus bei, um das Nachschlagen zu erleichtern.

Taf. V, 1[a] [*ἄνδρα παρασκευά-* 67[de]
ζοντα ἑαυτὸν ἐν τ]*ῶι βίῳ*[*ι*
ὅ τι ἐγγυτάτω ὄντα τ]*οῦ τε-*
θνάναι οὕτω ξ]*ῆν κἄπειτα ἥκ*[*ον-*
τος αὐτῶι τού]*του ἀγανακτεῖν·*
(ἢ οὐ φῃς;): Πῶς δ'οὔ;:] Τῶι ὄντι ἄρα,
ἔφη, ὦ Σιμμία, οἱ ὀ]*ρθῶς φιλοσο-*
φοῦντες ἀποθν]*ήισκειν μελ*[*ε-*
τῶσι κτλ.

Taf. V, 1[b] *ἀπη*]*λλάχθαι συνόντο*[*ς; ἢ ἀνθρω-* 68[a]
πίν]*ων μὲν παιδικῶ*[*ν ἢ γυναι-*
κῶν] *ἢ παίδων ἕνεκα* [*ἀποθανόν-*
των π]*ολλοὶ ἑκόντε*[*ς ἠθέλησαν*
εἰς Ἅι]*δ*[*ο*]*υ ἐλθεῖν ὑπὸ* [*ταύτης*
ἀγόμενοι τῆς ἐλπίδος] *κτλ.*

es fehlen 8—9 Zeilen bis zum Anfang der nächsten Columne.

V, 1[a] Z. 5 *ἢ οὐ φῃς*] in einen Raum für 6 Buchstaben fügt sich nicht das überlieferte *οὐ γελοῖον* 7 [*ἀποθν*]*ήισκειν* wie *B* vgl. Fleckeisens Jahrb. 1865 p. 245 f. Noch Demosthenes (über *Σ* s. Kidd zu Dawes Miscell. p. 221, Augustanus in der Kranzrede § 205) und Theophrast (Urbinas in hist. plant. III 10,3 IV 4, 12) schrieben so.

V, 1[b] Z. 1 *συνόντος αὐτοῖς B*: das Pronomen muß in *A* gefehlt haben. 2 f. *παιδικῶν καὶ γυναικῶν καὶ υἱέων ἀποθανόντων B* ohne *ἕνεκα* 4 *πολλοὶ δὴ ἑκόντες B*.

Taf. V, 2 [ἀγανακτήσει τε]
ἀποθνήισκων καὶ] οὐκ ἄσμενος εἶσιν αὐ- 68b
τόσε; οἴεσθαί γε χ]ρή, ἐὰν τῶι ὄντι γε
ἦι, ὦ ἑταῖρε, φιλ]όσοφος· σφόδρα γὰρ αὐτῶι
ταῦτα δόξει, μη]θαμοῦ ἄλλοθι
5 ἀλλ' ἢ ἐν Ἅιδου κα]θαρῶς φρονήσει ἐν-
τεύξεσθαι· εἰ δὲ ο]ὕτως ἔχει, ὅπερ
ἄρτι ἔλεγον, οὐ πο]λλὴ ἀλογία ἂν
εἴη, εἰ φοβοῖτο τὸν θ]άνατον ὁ τοιοῦτος;
— Πολλὴ μέντοι νὴ] Δία, ἦ δ' ὅς.
10 Οὐκ οὖν ἱκανόν σοι,] ἔφη, τεκμήριον
τοῦτο, ὃν ἂν ἴδηις] ἀγανακτοῦ[ν]τα
τούτωι, ὅτι οὐκ ἄρ' ἦ]ν φιλόσοφος,
ἀλλά τις φιλοσώ]ματος; ὁ αὐτὸ[ς
δέ που οὗτος τυ]γχάνει φιλο- 68c
15 χρήματος καὶ φ]ιλότιμος, ἤτοι
τό γε ἕτερον το]ύτων ἢ ἀμφότερα.
Πάνυ, ἔφη, ἔχει] οὕτως ὡ(ς)λέγεις.
Ἆρ' οὖν, ὦ Σιμμία, οὐ] καὶ ἡ [ὀ]νομα-
ζομένη ἀνδρεία τοῖς] οὕτω δια-
20 κειμένοις μάλιστ]α προσήκει;
Πάντως δήπου, ἔφη.]— Οὐκ οὖν καὶ ἡ
22 σωφροσύνη, ἣν καὶ ο]ἱ πολλοὶ ||
Taf. V, 3 ὀνομάζουσι σωφρο]σύνην, τὸ περὶ
τ[ὰς ἐπιθυμίας μὴ] ἐπτοῆσθαι [ἀλλ'
ὀλι[γώρ]ως ἔχειν καὶ [κ]οσμίως, ἆρ' οὐ τού-

V, 2 Z. 1 *οὐκ ἄσμενος* hier auch *B* 4—6 *μηδαμοῦ ἄλλοθι καθαρῶς* (am Rand *γρ ἄλλοθι δυνατὸν εἶναι καθαρῶς*) *ἐντεύξεσθαι φρονήσει ἀλλ' ἢ ἐκεῖ B* 5 *ἐκεῖ* würde den übrigen Raum nicht füllen; diesem genügte *ἐν Ἅιδου* 6 *εἰ δὲ τοῦτο οὕτως ἔχει B*: für *τοῦτο* ist kein Raum, falls man nicht etwa *ἐντυχεῖν* statt des Futurs vorzieht; aber wenn *τοῦτο* fehlte, sollte nicht *ὅπερ* sondern *ὥςπερ* stehn 7 *πολλὴ ἂν ἀλογία B* 10 *σοι τεκμήριον, ἔφη, τοῦτο ἀνδρὸς B S*(tobaeus floril. 8, 22): *ἀνδρὸς* oder *τοῦτο* muß in *A* gefehlt haben 11—12 *ἀγανακτοῦντα μέλλοντα ἀποθανεῖσθαι B*: dem Raum in *A* entspricht etwa *τούτωι*, vgl. p. 63b *ἀγανακτῶν τῷ θανάτῳ* und wahrscheinlich 64a *ἀγανακτεῖν ᾧ* (ὃ Hss.) *πάλαι προεθυμοῦντό τε καὶ ἐπετήδευον* 13 *ὁ αὐτὸς* auch *B*: *αὐτὸς* las *S* 14 *τυγχάνει ὢν καὶ φιλοχρήματος BS* 15—16 *ἤτοι τὰ ἕτερα τούτων BS*: der Raum in *A* erfordert mehr als 7 Buchstaben vor *τούτων*; was ich gesetzt, genügt den Anforderungen, und entspricht dem strengeren Sprachgebrauch, vgl. z. B. Theaet. 190d; der Plural könnte dem folgenden *ἀμφότερα* angepaßt sein, doch vgl. Phaid. 76a *δυοῖν τὰ ἕτερα* (*θάτερον B*a am Rand). 17 *ὡς* gibt Mahaffy als Lesung von *A*: das Facsimile zeigt weder eine Spur des C noch Raum dafür 18 *ἆρ' οὖν ἔφη ὦ BS* 19 *οὕτω*] das Facsimile zeigt einen täuschenden Strich an *ω*

το[ις] μόνον πρ[οσ]ήκει τοῖς μάλιστα τοῦ
σώ[μ]ατος ὀλιγωροῦσίν τε καὶ ἐμ φιλο- 68d
σοφ[ί]α[ι ξ]ῶσιν ; : Ἀνάγκη : Εἰ γὰρ ἐθέλεις,
ἦ δ' ὅς, ἐννοῆσ[α]ι τήν γε τῶν ἄλλων [ἀν-'
δρείαν [καὶ σω]φροσ[ύ]νην, δόξει σοι
ε[ἶ]ναι ἄ[τοπος : Πῶς δή : Οἶσθα, ἦ] δ' ὅς, ὅ[τι
τὸ μ[όρσιμον ἡγοῦντ]αι [πάντες
οἱ ἄ]λλοι τῶν μεγάλω[ν κακῶν
εἶν]αι. — Ναὶ μάλα, ἔφη. [— Οὐκ οὖν φό-
βω]ι μειζόνων κακῶν [ὑπομέ-
νου]σιν αὐτῶν οἱ ἀνδ[ρεῖοι τὸν θά-
νατο]ν, ὅταν ὑπομείμω[σιν ; — Ἔστι
ταῦτα. — Τ]ῶι δεδιέναι [ἄ]ρ[α καὶ δέει ἀν-
δρεῖοί εἰ]σι πάντες [πλὴν οἱ φιλό-
σοφοι. καίτ]οι ἄλογόν [γε δέει τινὰ καὶ
δειλίαι ἀνδ]ρεῖον εἶ[ναι. — Πάνυ μὲν
οὖν. — Τί δὲ ο]ἱ κόσμι[οι αὐτῶν ; οὐ ταὐτὸν 68e
τοῦτο πε]πόνθασ[ιν, ἀκολασίαι
τινὶ σωφρονο]ῦσιν ; [καί τοι φαμέν
γ' ἀδυνατεῖν, ἀλ]λ' ὅμως ||
Taf. V, 4 αὐτοῖς συμφαίνει τοῦτο ὅμοι[ον
τὸ πάθος τοι ἐπ' αὐτὴν τὴν
ἀνδραποδώδη σωφροσύνην·
φοβούμενοι γὰρ στερηθῆναι
ἑτέρων ἡδονῶν καὶ ἐπιθυμοῦν-
τες ἐκείνων ἄλλων ἀπέχοντ[αι
ὑπ' ἐκείνω[ν] κρατούμενοι. καί [τ]οι
καλοῦσί γε [ἀκ]ολασίαν τὸ ὑπ[ὸ τῶν
ἡδονῶν ἄ[ρχεσθ]αι· συμβαίνει 69a
δ' οὖν αὐτοί[ς κρατ]ουμ[έ]ν[οις
ὑφ' ἡδον[ῶν κρατεῖν ἄ]λ[λων
ἡδονῶ[ν· τοῦτο δ' ὅμοιον ὥι νῦν δὴ

V, 3 Z. 4 *μόνοις BS I*(amblichos protr. p. 66, 1 Pistelli) 6 *Ἀνάγκη, ἔφη. BS* 8 *ἀνδρείαν τε καὶ BIS* 9 *πῶς δὴ ὦ Σώκρατες; Οἶσθα BS* 10 *τὸν θάνατον ἡγοῦνται BIS* τὸμ [θάνατον ergänzte Mahaffy 12 *εἶναι* fehlt B^1I, aber steht bei *S* und am Rand B^2 *ναὶ*] *καὶ BS* 13 *κακῶν* fehlt *I* 14 *αὐτὸν S* 15 *ὑπομένωσιν BIS* 21 *τούτῳ I* 22 *σωφρονοῦσιν*] *σώφρονές εἰσιν BIS* 23 *γε ἀδύνατον εἶναι BIS*: dafür bietet diese überschüssige und nicht ausgeschriebene Zeile nicht zureichenden Raum.

V, 4 Z. 1 *συμφαίνει* verschrieben für *συμβαίνει* (*BIS*) *τούτωι BIS* 2—3 *τὸ πάθος τὸ* (*τῶ* B^2) *περὶ ταύτην τὴν εὐήθη σωφροσύνην· BIS* 4—5 *γὰρ ἑτέρων ἡδονῶν στερηθῆναι καὶ BIS* 7 *ὑπ' ἐκείνων*] *ὑπ' ἄλλων BIS* 9—10 *συμβαίνει δ' οὖν*] *ἀλλ' ὅμως συμβαίνει BIS* 12 *τοῦτο δ' ὅμοιόν ἐστιν*

ἐλέγετο, [τῶι τρόπον τινὰ δι' ἀ-
κολασί[αν αὐτοὺς σεσωφρονίσθαι. —
15 Ἔοικ[ε γάρ. — Ὦ μακάριε Σιμμία,
μὴ γὰ[ρ οὐχ αὕτη ἦι ἡ ὀρθὴ πρὸς ἀ-
ρετὴ[ν ἀλλαγή, ἡδονὰς πρὸς ἡ-
δονὰ[ς καὶ λύπας πρὸς λύπας
καὶ φ[όβον πρὸς φόβον· καταλλάττεσθαι κτλ.

Der Columne fehlen noch drei Zeilen.

Taf. VI, 1 dürftige Trümmer von p. 79^{bc} (124, 3—7 Schanz); bemerkenswerth nur die Schreibung ἀιδεῖ (Sch. 124, 4), s. S. 46.

Taf. VI, 2
δμως ὡς ἕ]πος εἰ[πεῖν ἀθάνατά ἐστιν. 80^{d}
ἦ οὔ; — Ν]αί. — Ἡ δὲ [ψυχὴ τὸ ἀιδές,
τὸ εἰς τοι]οῦτον ἕτερον τόπ[ο]ν
οἰχόμεν]ον τὸγ γενναῖον
5 καὶ καθαρ]ὸν καὶ ἀιδῆ, εἰς Ἅιδου
ὡς ἀληθῶς πα]ρὰ τὸν ἀγαθὸν θεὸν
καὶ φρόνιμο]ν δι αν θεὸς θέλει
αὐτίκα τῆι ἐ]μῆι ψυχῆι ἰτέ[ο]ν,
αὕτη δὲ δὴ ἡ]μῖν ἡ τοι[αύ]τ[η κτλ.

Taf. VI, 3
ἅτε μελετῶσα α . . ει τοῦτο· τὸ δὲ 80^{e}
οὐθὲν ἄλλο ἐστὶν ἢ ὀρθῶς φιλοσοφοῦσα
κα]ὶ τῶι ὄντι τεθνάναι μελετῶσα
ῥαιδίως· ἦ οὐ τοῦτ' ἂν εἴη μελέτ[η 81^{a}
5 θ]ανάτου; — Παντάπασί γε. [—
Οὐκ οὖ]ν οὕτω μὲν ἔχουσα εἰς
τὸ δμοιον αὐτῆι τὸ] ἀιδὲς ἀ[πέρχε-
ται, τὸ θεῖον κα]ὶ ἀθάνατον καὶ
φρόνιμον, οὗ ἀ]φικομένηι ὑπάρχει
10 εὐδαίμονι εἶν]αι πλάνης καὶ ἀν[οίας

ὦι (ὃ *IS*) νῦν δὴ ἐλέγετο (ἔλεγον corr *I*) *BIS*: die Fassung in *A* muß kürzer gewesen sein; mindestens fehlte ἐστί, vielleicht war darin wie in *IS* die unter allen Umständen bedenkliche Attraction (s. van Cleef De attractionis usu Platonico p. 42) vermieden 13 τῶι fehlt *I*: τὸ *S*

VI, 2 Z. 10 ἡ δὲ ψυχὴ ἄρα, τὸ ἀειδές *B S*(tobaeus ecl. I p. 431, 11 Wachsm.) 3 τοιοῦτον τόπον ἕτερον *BS* 4 τὸγ fehlt *BS* 5 ἀειδῆ *BS* 6—7 παρὰ τὸν ἀγαθὸν καὶ φρόνιμον θεόν, οἷ ἂν θεὸς ἐθέλῃι *BS* 8 αὐτίκα καὶ τῆι *B*: καὶ fehlt auch *S*

VI, 3 Z. 1 zwischen A und EI tritt deutlich ein C hervor, das übrige ist undeutlich, vermuthlich stand AσαEI da, d. h. ἐς ἀεί (ἀεὶ *BS*) τὸ δὲ] τοῦτο δὲ *BS* 2 οὐδὲν *BS* 4 ῥαιδίως auch *BS* εἴη ἡ μελέτη *S* 7 ἀειδὲς *BS* 8 τὸ θεῖόν τε καὶ *BS*: τε kann in *A* nicht gestanden haben 9—10 ὑπάρχει αὐτῆι (αὐτὴ *S*) εὐδαίμονι *BS*: für das Pronomen ist kein Raum

καὶ φόβων καὶ] ἀγρίων ἐρώτων καὶ τῶν
ἄλλων κακιῶ]ν τῶν ἀνθρωπίνων
ἀπηλλαγμέν]η, εἰ ὥςπερ δὲ λέγεται
κατὰ] τῶν μεμνημένων,
15 ἀληθ]ῶς τὸν λοιπὸν χρόνον
μετ]ὰ θεῶν διάγουσα· οὕτω φῶμεν,
ὦ Κέβης, ἢ ἄλ]λως; — Οὕτω νὴ Δία, ἔφη 81b
ὁ Κέβης.] — Ἐὰν δέ γε οἰμεμια[σ]μένη
καὶ ἀκάθαρτος τοῦ σώματος
20 ἀπ[α]λλάττ[η]ται, ἅτε τῶι σώματι
ἀεὶ συνοῦσα καὶ τοῦτο θεραπεύουσα
καὶ [ἐρῶσα κ]αὶ γοητευ[ο]μένη ||
Taf. VI, 4 ὑπὸ τῶν ἐπιθυμιῶν [καὶ τῶν
ἡδονῶν, ὥςτε μηδὲ[ν δοκεῖν εἶναι
ἀληθὲς ἄλλο ἢ τὸ σω[ματοειδές,
οὗ ἄν τις ἅψαιτο [καὶ ἴδοι καὶ πίοι
5 καὶ φάγοι καὶ πρὸ[ς τὰ ἀφροδίσια
χρήσαιτο, τὸ δ[ὲ τοῖς ὄμμασι
σ]κοτῶδες καὶ τ[ὸ ἀιδές, νοητὸν δὲ
καὶ σοφίαι αἱρε[τόν, τοῦτο δὲ εἰ-
θισμένη μ[ισεῖν τε καὶ
10 τρέμειν [καὶ φεύγειν· οὕτω δὴ
ἔχ[ουσαν οἴει ψυχὴν αι'τὴν 81c
καθ' αὑτ[ὴν εἰλικρινῆ ἀπαλλά-
ξεσθαι; — Οὐδ' ὁ[πωστιοῦν, ἔφη. —
Ἀλλὰ διειλημ[μένην γε οἶμαι

12 ἄλλων κακῶν *BS*: in *A* ist Raum für 10 bis 11 Buchstaben ἀνθρωπείων *BS*: ἀνθρωπίνων auch die Tübinger Hs. und die beiden Venezianer *DE* (Ξ Π bei Bekker) 13 ἀπηλλαγμένηι ὥςπερ δὲ *B*, *S*: in *A* scheint durch Mißverständniß des auslautenden iota εἰ entstanden und darum δὲ ausgelassen zu sein, das dann über der Zeile nachgetragen wurde 15 ὡς ἀληθῶς *BS*: *A* hatte im Anfang der Zeile Raum nur für 4 Buchstaben τὸν λοιπὸν χρόνον auch *B*: τὸ λοιπὸν *S* 16 μετὰ τῶν θεῶν B^1: aber τῶν ist in *B* durch Punkte getilgt und fehlt nicht nur in andern Hss. sondern auch in *S*; nooh Bekker hatte es nicht in den Text gesetzt 18 οἶμαι μεμιασμένη *BS*: in *A* hat die Aussprache von αι = ε bewirkt, daß der Schreiber die zweite Silbe von οἶμαι vernachläßigte 22 καὶ γεγοητευμένη ὑπ' αὐτοῦ B^1S, aber γεγοητευομένη B^1 γοητευομένη die Tübinger Hs. ὑπ' αὐτοῦ fehlte in *A*

VI, 4 Z. 1 ὑπό τε τῶν ἐπιθυμιῶν καὶ ἡδονῶν *BS* 2 ὥςτε μηδὲν ἄλλο δοκεῖν εἶναι ἀληθὲς ἀλλ' ἢ τὸ *BS* 4 οὗ τις ἂν ἅψαιτο *BS* 7 σκοτῶδες καὶ ἀειδές *BS*: in *A* ist nach KAI der Querstrich eines T unverkennbar, auch von Mahaffy anerkannt, der die Zeile wohl nur durch ein Versehen so wiedergibt: σκοτωδες και — [νοητον δε 8 καὶ φιλοσοφίαι *BS* 14 ἀλλὰ καὶ διειλημμένην B^1: aber καὶ streicht B^2 und es fehlt bei *S*

15 ὑπὸ τοῦ σωμα[τοειδοῦς, ὃ αὐτῇι
ἡ ὁμιλία [τ]ε καὶ συν[ουσία τοῦ
σώματος δ]ιὰ τὸ ἀεὶ [συνεῖναι καὶ
διὰ τὴν πολλὴν [μελέτην
ἐνεποίησεν σύμ[φυτον; — Πάνυ γε. —
20 Ἔμβριθὲς δέ γε τοῦ[τ', ὦ φίλε, οἴ-
εσθαι χρὴ εἶναι κα]ὶ βαρὺ καὶ
γεῶδες καὶ [ὁρατόν· ὃ δὴ ἔχουσα ||
Taf. VI, 5 ἡ τοιαύτη ψυχὴ β[αρύνεταί τε
καὶ ἕλκεται πάλ[ιν εἰς τὸν ὁρατὸν
τόπον φόβωι τ[οῦ ἀιδοῦς τε καὶ
Ἅιδου, ὥςπερ λέγ[εται, περὶ τὰ μνή- 81d
5 ματά τε καὶ τοὺ[ς τάφους κυλινδου-
μένη, περὶ ἃ δὴ [καὶ ὤφθη ἄττα
ψυ]χῶν φαν[τάσματα, οἷα δὴ
ἀν]ω τάφ[ων ἐν] ἀσθενεί[αι παρέ-
χονται αἱ τοιαῦται ψυ[χαὶ εἴδωλα
10 αἱ μὴ καθαρῶς ἀπολυθ[εῖσαι ἀλλὰ
τοῦ ὁρατοῦ μετέχουσα[ι, διὸ καὶ
ὁρῶνται. — Εἰκότως γε [ὦ Σώκρατες. —
Εἰκὸ]ς μέντοι, ὦ Κέβης, [καὶ οὔ τί
γε τὰς τῶν ἀ]γαθῶν αὐτ[ὰς εἶναι,
15 ἀλλὰ τὰς τῶν] φαύλων . . . . . .
Der Columne fehlen 7 Zeilen.
Taf. VII, 1 Zum Anfang fehlen 10 Zeilen.
Τοὺς δέ γε ἀδικίας τε καὶ τ]υραν- 82a
νίδας καὶ ἁρπαγὰς προ]τετι-
μηκότας εἰς τὰ τῶν λύκω]ν τε
καὶ ἱεράκων καὶ ἱκτίνων γ]ένη·
15 ἢ ποῖ ἂν ἄλλοσε φαμὲν τὰς] τοι-
[αύτας ἰέναι; — Ἀμέλει, ἔφη ὁ Κέ-]
βης, εἰς τὰ τοιαῦτα. — Οὐκ οὖ]ν,
[ἦ δ' ὅς, δῆλα δὴ καὶ τὰ ἄλλα]
οἷ ἂν ἕκαστα ἴοι κατὰ τὰς] αὐτῶν
20 [ὁμοιότητας τῆς μελέτης; — Δῆ-]

20 δέ γε ὦ φίλε τοῦτο *BS* 22 ὃ δὴ καὶ ἔχουσα *BS*

VI, 5 Z. 6 καὶ ὤφθη καὶ ἄττα *S* 7—9 ψυχῶν σκιοειδῆ φαντάσματα (φάσματα *S*), οἷα παρέχονται (περιέ- *S*) αἱ *BS* 8 zwischen ταφ und ασθενει konnten 3 — 4 Buchstaben Platz finden, vgl. unten S. 42 12 εἰκός γε *BS* 13 εἰκὸς μέντοι auch *B* εἰκὸς μέντοι γε *S*: εἰκότω]ς ergänzt Mahaffy, zwei Buchst. zu viel für die Lücke 14 ταύτας *BS*

VII, 1 Z. 12 ἁρπαγὰς *B*: ἕρεις πάσας *S* (433, 11) 19 οἷ B^2 ἧι B^1 ἢ *S*

λον δή, ἔφη· πῶς δ' οὔ; — Οὐκ ο]ὖν
[εὐδαιμονέστατοι, ἔφη] κτλ.

Taf. VII, 2 Zu Anfang fehlen 7 Zeilen.

[Πῆι δὴ]
ο]ὗτοι εὐδαιμ[ονέστατοι; — Ὅτι 82b
αὐτοὺ]ς εἰκὸς εἰς [τοιοῦτον πάλιν
ἀφικέσθαι πολ[ιτικὸν καὶ ἡμερώ-
τερον γένος ἢ [που μελιττῶν
ἢ σφηκῶν ἢ μ[υρμήκων ἢ καὶ
εἰς τὸ αὐτ[ό] γ[ε πάλιν τὸ ἀνθρώ-
πινον γένος, [καὶ γίγνεσθαι
ἄνδρας μετρί[ους. — Εἰκότως. —
Εἰς δέ γε θεῶγ γ[ένος μὴ φιλοσο-
φήσαντι κα[ὶ παντελῶς καθαρῶι
ἀπιόντι οὐ θέ[μις ἀφικέσθαι ἄλλ' 82c
ἢ τῶι φιλομα[θεῖ. ἀλλὰ διὰ ταῦτα,
ὦ ἑταῖρε Σι[μμία] τε καὶ [Κ]έβης,
οἱ ὀρθῶς φιλ[όσοφο]ι ἀπέχονται τῶν
κατὰ τὸ [σῶμ'] ἐπιθυμιῶν ||

Taf. VII, 3 Zu Anfang fehlen 13 Zeilen.

χαίρειν] εἰπόν[τες οὐ κατὰ ταὐτὰ 82d
πορ]εύσοντα[ι] α[ὐτοῖς ὡς οὐκ εἰδόσιν
δπη]ι ἔρχον[ται, αὐτοὶ δ' ἡγούμενοι οὐ
δε]ῖν ἐναντία [τῆι φιλοσοφί]αι
πρ]άττειν καὶ τ[ῆ]ι ἐκ[είν]ης
λύσ]ε[ι] τε κα[ὶ] τῶ[ι] καθ[αρμῶι] ταύτηι
δὴ τρέπονται ἑπόμενοι ᾗι
ἐκείνη ὑφηγεῖται. — Πῶς λέγεις,
ἔφη, ὦ Σώκρατες; — Ἐγὼ ἔ[ρ]ω. γιγνώ- ||

VII, 2 Z. 8 *Ὅτι τούτους* B^1S Eusebios : *Ὅτι* (*Τί*; Schanz) *οὐ τούτους* B^c 9 *εἰκός ἐστιν εἰς BS* *εἰς τὸ τοιοῦτον S*, nicht *B* 10 *ἀφικνεῖσθαι BS* *πολιτικὸν καὶ S* : *πολιτικόν τε καὶ B* *ἥμερον BS* 13 *ταὐτόν BS* 14 *γίγνεσθαι ἐξ αὐτῶν ἄνδρας μετρίους BS* : *ἐξ αὐτῶν* von Mahaffy aufgenommen, durch den Umfang der Lücke ausgeschlossen 15 *Εἰκός BS* : ich habe des Raumes wegen die vollere Form für nöthig gehalten 18 *ἀφικνεῖσθαι BS I*(ambl. protr. p. 67, 20 Pist.) des Raumes wegen unwahrscheinlich *ἀλλ' ἢ B* : *ἄλλῳ ἢ IS*, B^2 am Rand 19 *ἀλλὰ τούτων ἕνεκα ὦ BI* : in *A* fand nur eine kürzere Formel Platz 21 *φιλόσοφοι I* : *φιλοσοφοῦντες B* 22 *σῶμα BI* : *A* hat Raum nur für 3 Buchstaben

VII, 3 Z. 15 *πορεύονται BI* 19 *καὶ καθαρμῶι B, I* 19—20 *ταύτηι* (ohne *δή*) *τρέπονται ἐκείνηι ἑπόμενοι B, I* 21—22 *Πῶς, ὦ Σώκρατες; B* 22 *Ἐγὼ ἐρῶ, ἔφη. B*

Taf. VIII, 1 [σκουσι γάρ, ἢ δ' ὅς, οἱ φιλομαθεῖς
ὅτι παραλαβοῦσα αὐτῶν τὴν ψυχὴν
ἡ φιλοσοφία ἀτεχνῶς διαδε]δεμένην 82e
ἐν τῶι σώματι καὶ προσκεκ]ολ-
λημένην, ἀναγκαζομέν]ην
δὲ ὥςπερ δι' εἰργμοῦ διὰ το]ύτου
σκοπεῖν τὰ ὄντα, ἀλλὰ μὴ αὐτ]ὴν
δι' αὐτῆς καὶ ἐν πάσ]ι
ἁμαθίαι κυλινδουμένην καὶ] τοῦ
εἰργμοῦ τὴν δεινότητα κ]ατι-
δοῦσα ὅτι δι' ἐπιθυμίας] ἐστίν,
ὡς ἂν μάλιστα] α[ὐτὸ]ς ὁ δεδε-
μένος συλλή]πτωρ εἴη τῶι
δοῦντι?. ὃ περ ο]ὖν λέ[γω, γι]γνώ- 83a
σκουσιν οἱ φιλο]μαθεῖς ὅτι οὕτω
παραλαβοῦσα] ἡ φιλοσοφία ἔχου-
σαν αὐτῶν τ]ὴμ ψυχὴν ἠ[ρ]έμα
παραμυθεῖ]ται καὶ λύειν ἐπι-
χειρεῖ δει]κνυμένη ὅτι
ἀπάτης μ]ὲν μεστ[ὴ ἡ δι]ὰ τῶν
ὀμμάτων σκέ]ψις, ἀπάτης δὲ
ἡ διὰ τῶν ὤ]των ἢ τῶν ἄλλων ||
Taf. VIII, 2 αἰσθή]σεων, πείθουσα δὲ ἐκ τούτωμ
μὲ]ν ἀναχωρεῖν, ὅσομ μὴ ἀνάγκη
χρῆσ[θ]αι, αὐτὴν δ' εἰς ἑαυτὴν συλ-
λέγεσθαι καὶ ἀθροίζεσθαι παρακε-
λεύεσ[θ]αι, πιστεύειν δὲ μηδενὶ ἄλλωι
ἢ αὐτ[ῆ]ι, ὅ τι ἂν νοήσει αὐτὴ [κ]αθ' αὐτὴν
αὐτ[ὸ κα]θ' αὐτό τι τ[ῶν] ὄντων, ὅ τι 83b
δ' ἂν δ[ι' ἄλλ]ων σκοπῆι ἐν ἄλλοις
ἄλλο, μ[ηθὲ]ν ἡγεῖσθαι ἀληθές·
εἶναι δ[ὲ] τὸ μὲν τοιο[ῦτο]ν αἰσθητὸν
καὶ ὁρατόν, ὦ[ι] δὲ αὐτ[ὴ π]ροσέχει, νο-

VIII, 1 Z. 6 διὰ (δι' *I*) εἰργμοῦ *BI*: vielleicht fehlte διὰ in *A* 7 σκοπεῖσθαι *BI*: der Raum fordert eine Verkürzung des sonst überlieferten Wortlauts 13—14 τῶι δεδέσθαι *BI*: in *A* stand nach τωι (so das Facsim., nicht του wie Mahaffy p. 27 ausdrücklich angibt) ein kürzerer Ausdruck 19 ἐνδεικνυμένη *BI* 20 μὲν fehlt *I* 22 ὥτων καὶ τῶν *BI*

VIII, 2 Z. 2—3 ἀνάγκη αὐτοῖς χρῆσθαι *BI* 3 δὲ εἰς *BI* αὐτὴν *B* αὐτὴν *I* 4 παρακελευομένη *BI* 5—6 ἄλλωι ἀλλ' ἢ αὐτὴν αὐτῆι (αὐτῆ *I*) *BI* 6 νοήσηι *BI* 7 καθ' αὐτὸ τῶν *BI* 8—9 ἐν ἄλλοις ὃ ν ἄλλο *BI* 10 αἰσθητόν τε καὶ *BI* 11 ὁρατόν· ὃ δὲ αὐτὴ ὁρᾶι, νοητόν *BI*

ητόν τ[ε] καὶ ἀιδές· τ[αύ]τει οὖ[ν τῆι
λύσει οὐ[κ οἰ]ομένη [δ]εῖν ἐναντι-
οῦσθαι ἡ τοῦ ὡς ἀληθῶς φιλοσόφου
ψυχὴ οὕτω ἀπέχεται [τ]ῶν ἡδο-
ν[ῶν] τε καὶ ἐπιθυμιῶν καὶ λυπῶν
καθ' ὅσον δύνατα[ι, λογ]ιζομένη
ὅτι ἐπειδάν τίς τι [σφ]όδρα ἡσθῆι
ἢ λυπηθεῖ ἢ φοβηθεῖ ἢ [ἐπιθυμή-
σηι, οὐθὲν τοσοῦτογ κακ[ὸν ἔπα-
θεν ἀπ' αὐτῶν ὧν τις [οἰ]ηθείη ἄ[ν,
οἷον ἢ νοσήσας ἢ τι ἀν[αλώσας ||
Taf. VIII, 3 δ[ιὰ τὰς ἐπιθυμίας, ἀλλ' ὃ πάντων 83c
μ[έγιστόν τε κακὸν καὶ ἔσχατόν ἐστι]ν,
το[ῦτο πάσχει καὶ οὐ λογίζετα]ι αὐτό.
Τί, [ὦ Σώ]κρατες, ἔφ[η ὁ Κέβης. —
Ὅτ[ι ψυχὴ] παντ[ὸς ἀνθρώπου ἀναγ-
κά[ζε]ται ἅμα τε ἡ[σθῆν]αι σφόδρα
ἢ λ[υπ]ηθῆναι ἐπί τωι καὶ ἡγεῖσθαι,
π[ερὶ ο]ὗ ἂμ μάλιστα τοῦτο πάσχει,
μ[άλισ]τα δὲ εἶναι τοῦτ[ο], οὐχ οὕτως
ἔ[χο]ν· ταῦτα δ[ὲ] μ[άλιστα] ὁρατά· ἢ οὔ;
Π[άνυ γε. — Οὐκοῦν] ἐν [τ]ούτωι
τῶ[ι πάθει μάλιστ]α καταδεῖται
ψυ[χὴ ὑπὸ σώματος; —] Πῶς δή; —
Ὅτι ἑκάστη ἡδονὴ] καὶ λύπη 83d
ὥςπερ ἧλον ἔχουσα π[ροσηλοῖ
αὐτὴν πρὸς τὸ σῶμα] καὶ προσ-
περονᾶι καὶ ποιεῖ σω]ματοειδῆ,
δοξάζουσαν ταῦτα ἀ]ληθῆ
εἶναι ἅπερ ἂν τὸ σῶμ]α φῆι· ἐκ γὰρ
τοῦ ὁμοδοξεῖν τῶι σώμα]τι καὶ τοῖς
αὐτοῖς χαίρειν ἀναγκάζε]ται,
οἶομαι, ὁμότροφός τε] καὶ ὁμότροπος ||

12 ἀειδές *B* ἀηδές *I* 15 οὕτως *BI* 16 λυπῶν auch *I*: λυπῶν καὶ φόβων *B* 18 ἐπειδάν τις σφόδρα (ohne τι) *BI* 19 ἢ λυπηθῆι ἢ φοβηθῆι B^2, *I*: ἢ φοβηθῆι B^1 21 ὧν ἄν τις οἰηθείη *B* ὡς ἄν τις οἰηθείη *I*
VIII, 3 Z. 2 κακὸν *B* κακῶν *I* 4 Τί τοῦτο ὦ *B* 5 Ὅτι *B* ὅτι δὴ *I* 6 ἡσθῆναι σφόδρα ἢ λυπηθῆναι auch *I*: ἡσθῆναι ἢ λυπηθῆναι σφόδρα *B* 7 ἐπὶ τούτῳ *I* 8 περὶ ὃ ἂν *BI* μάλιστα τοῦτο πάσχει ($πάσχει B^1$) *B*: πάσχῃ μάλιστα τοῦτο *I* 8 μάλιστα . . . 9 οὐχ] τοῦτο ἐναργέστατόν τε εἶναι καὶ ἀληθές, οὐχ *BI* 10 μάλιστα ὁρατά auch *BI* 19 ἅπερ ἂν καὶ τὸ *B* 22 οἶμαι *B* ὁμότροπός τε καὶ ὁμότροφος B^1*I*: die beiden Adjectiva stellt aber B^2 um

Taf. VIII, 4 γίγνεσ]θα[ι καὶ οἷα καθαρῶς
εἰς Ἅιδου μ[ηδέποτε ἀφικέσθαι,
ἀλλὰ ἀ[ε]ὶ ἀν[απλέα τοῦ σώματος
ἐξιέναι, ὥστ[ε ταχὺ πάλιν πίπτειν
εἰς ἄλλο σῶ[μα καὶ ὥσπερ σπειρο-
μένη ἐμφύεσθαι καὶ ἐκ [τούτων 83e
ἄμοιρος εἶναι τῆς τοῦ θείο[υ τε
καὶ καθαροῦ καὶ μονοειδοῦς
συ]νουσίας. — Ἀληθέστατα, ἔφη,
λέγε[ις, ὁ Κέβη]ς, ὦ Σώκρατες.
Τούτων τοίνυν ἕνεκ[α οἱ δικαίως
φιλομα[θε]ῖ[ς κόσμιοί εἰσι καὶ
ἀνδρεῖοι [οὐχ ὧν οἱ πολλοὶ ἕνεκα.
ἦ σὺ οἴει; — [Οὐ δῆτα ἔγωγε. — 84a
[Οὐ γὰρ ἀλλ' οὕτω λογίσαιτο ἂν
ψ]υχὴ ἀνδρὸς φιλοσόφου, κ[αὶ
οὐκ] ἂν οἰηθείη τὴν μὲν φιλοσ[οφίαν
χρῆναι αὐτὴν λύειν, λυούσ[ης
δ' ἐκείνης αὐτὴ παραδιδόναι
ταῖς ἡδοναῖς καὶ λύπαις αὐτὴ[ν
πάλιν αὖ ἐγκαταδεῖν κ[αὶ ἀνή-
νυτον ἔργον πράττειν . . . . .

VIII, 4 Z. 1—2 οἷα μηδέποτε εἰς Ἅιδου καθαρῶς ἀφικέσθαι *BI* 3 ἀεὶ ἀναπλέα τοῦ σώματος auch *I*: ἀεὶ τοῦ σώματος ἀναπλέα *B* 11 ἕνεκα ὧ Κέβης οἱ *B* 13 ἕνεκα φασίν, ἦ *BI* 18 ἑαυτὴν *BI* 19 δοκ – statt δεκ – *A* δὲ ἐκείνης αὐτὴν (αὐ- *I*) *BI* 20 ἑαυτὴν *BI* 21 ἐγκαταδεῖν auch B^1I: ἐπικαταδεῖν B^2.

Als wichtigen Beweggrund für die von den Grammatikern vorgenommene Ueberarbeitung dieses alten Textes nennt Mahaffy die Scheu vor dem Hiatus[8]). Mir war es neu, daß unser bisheriger Platon irgend welche Empfindlichkeit gegen den Zusammenstoß von Vocalen verrathe. Man wird es mir nicht verargen, wenn ich nicht zu verstehen vermag, wie dieser hiatenreiche Text hiatusscheuen Grammatikern seinen Ursprung verdanken könne. Wenn ich eine solche Hiatensammlung lese wie z. B. 81a 9 οἳ ἀφικομένῃ ὑπάρχει αὐτῇ εὐδαίμονι εἶναι und wahrnehme daß in *A* bei gleicher Wortstellung αὐτῇ fehlt, so könnte ich in dem Gedankengang des Herausgebers nur folgern, daß dem Grammatiker vier

8) In den Anmerkungen zum Text wird nur in wenigen Fällen auf die Vermeidung des Hiatus hingewiesen, zu VI 4, 4 VIII 4, 3.

Hiate in dem kurzen Satz noch nicht genügten und er darum durch Einschiebung von *αὐτῇ* noch einen fünften zufügte. Ich stelle noch einige weitere Fälle zur Verfügung:

	B	*A*
68^{b}7	*πολλὴ ἂν ἀλογία εἴη*	*πολλὴ ἀλογία ἂν εἴη*
80^{d}2	*ἡ δὲ ψυχὴ ἄρα τὸ*	*ἡ δὲ [ψυχὴ τὸ*
83^{c}6	*ἅμα τε ἡσθῆναι ἢ λυπηθῆναι σφόδρα*	*ἅμα τε ἡσθῆναι σφόδρα ἢ λυπηθῆναι*

oder etwa

68^{c}14	*τυγχάνει ὢν καὶ φιλοχρήματος*	*τυγχάνει φιλοχρήματος*
69^{a}9	*ἀλλ' ὅμως συμβαίνει αὐτοῖς*	*συμβαίνει δ' οὖν αὐτοῖς.*

Mit gleichberechtigtem Trugschluß könnte man nach solchen Proben annehmen, daß die hämischen Grammatiker den Text durch Hiate verunziert hätten. Nein, die Umstellungen im Platontexte stehen in keinem erkennbaren Zusammenhang mit der Isokrateischen Vorschrift; sie sind auch nicht in unserer hsl. Ueberlieferung, sondern in *A* vorgenommen worden, und meist aus Gründen, die sich noch erkennen oder wenigstens fühlen lassen. Sie sollen meist bequemerem Verständniß dienen; so 68^{b}4 *μηθαμοῦ ἄλλοθι ἀλλ' ἢ ἐν Ἅιδου καθαρῶς φρονήσει ἐντεύξεσθαι* mit doppelter Umstellung, während die überlieferte Wortfolge gesichert ist durch 68^{a} *μηδαμοῦ ἄλλοθι ἐντεύξεσθαι αὐτῇ ἀξίως λόγου ἢ ἐν Ἅιδου*; 68^{b}10 *ἱκανόν σοι, ἔφη, τεκμήριον τοῦτο*, während die Hss. *ἔφη* vor *τοῦτο* stellen und dadurch das Pronomen von seinem Nomen trennen, und ähnlich 81^{c}20 *ἐμβριθὲς δέ γε τοῦτ' ὦ φίλε*, während die Hss. *τοῦτο* nach der Anrede stellen; 80^{d}3 *τοιοῦτον ἕτερον τόπον*, was glatter und bequemer schien als *τοι. τόπον ἕτερον* („which is less euphonious than the reading of the papyrus" urtheilt Mah.); 83^{b}21 *ὃν τις οἰηθείη ἄν* ist die Umstellung von *ἄν* eine Folge davon, daß man in Relativsätzen dem *ἄν*, das beim Conjunctiv seine feste Stelle hinter dem Relativ hatte, beim Optativ lieber einen anderen Ort anwies, wie denn umgekehrt 81^{b}4 *οὗ ἄν τις ἅψαιτο A, οὗ τις ἂν ἅψ.* unsere Hss., vielleicht aus unwillkürlicher Aenderung, geben. Auch da, wo unser Gefühl durch die Wortstellung des Papyrus mehr befriedigt wird, ist Vorsicht geboten; so 80^{d}6 *τὸν ἀγαθὸν θεὸν καὶ φρόνιμον A τὸν ἀγαθὸν καὶ φρόνιμον θεόν* die Hss.: aber da sich daran *οἵ ἂν θεὸς ἐθέλῃ* unmittelbar anschließt, kann der Anstoß, den die rasche Wiederholung desselben Wortes gab, durch die entferntere Stellung von *θεὸν* absichtlich gemildert worden sein.

So schwer willkürliche Aenderungen der Wortstellung in die

Wagschale fallen, wenn es sich um die Treue der Ueberlieferung handelt, so begründen sie allein doch kein Urtheil über Werth und Beschaffenheit derselben. Wir müssen zu dem Zweck ihre Reinheit von Verderbnissen und Glossemen prüfen.

Es trifft sich gut daß in den erhaltenen Abschnitten eine alte Verderbniß vorkommt 81ª4 *καὶ τῷ ὄντι τεθνάναι μελετῶσα ῥᾳδίως*. Ficinus übersetzt *mortemque revera facile commentari*, was nichts ist, Schleiermacher „leicht zu sterben", was im griechischen unmöglich ist, da *τεθνάναι* todt sein, sterben *ἀποθνῄσκειν* heißt. Hirschig hat dem Wort das Todesurtheil gesprochen, und nun fristet es sein Dasein hinter Gittern. Aber im Papyrus steht *ϛαιδίως totidem litteris*. Ist es darum echt? Oder ist vielmehr *A* in dem Falle bereits gerade so verderbt wie unsere Hss.? Was Platon geschrieben, hatte man vielleicht schon in der Schreiberwerkstätte des Hermodoros nicht verstanden und durch ein beliebiges anklingendes Wort ersetzt. Platon, denke ich, hatte *τεθνάναι μελετῶσ' ἀῤῥάτως* geschrieben, vgl. Ruhnken zu Tim. p. 50 (wo Bekk. An. Gr. p. 442, 20 und Boethos in Millers Mél. de litt. gr. p. 400 nachzutragen sind) und J. Bernays Ges. Abh. 1, 132. In einem zweiten Falle p. 82ᵈ *οἷς τι μέλει τῆς ἑαυτῶν ψυχῆς, ἀλλὰ μὴ σώματι πλάττοντες ζῶσι* setzt der Papyrus (VII 3) leider erst nach dem Wort ein, für das wir Heilung von ihm erhofften. Ob wir wohl noch das vermuthlich richtige *πελάται ὄντες* oder bereits *πλάττοντες* in ihm gefunden haben würden?

Frei von den alten Schäden, an denen unser Platontext offenkundig oder im geheimen krankt, ist der Papyrus nicht. Und wenn Mahaffy zu 82ᵉ13 von Heindorfs *τοῦ* bemerkt „this is the only emendation of modern scholars that is supported by the papyrus", so ist es fast tragisch, daß statt dieses *τοῦ* das Facsimile ein zweifelloses *τωι* aufweist, wie alle Hss.

An eigenen Verderbnissen leidet dagegen der Papyrus keinen Mangel. Aber die beste Ueberlieferung kann unter den Händen eines unwissenden Schreibers bis zur Unverständlichkeit entstellt werden und uns auch in dieser Gestalt weit werthvoller sein als ein glatter überarbeiteter Text. Ich lege daher kein Gewicht auf einfache Corruptelen, wie 68ᵉ1 *συμφαίνει τοῦτο* st. *συμβαίνει τούτωι* 68ᵉ17 *ὠλεγεις* st. *ὡς λέγεις* 80ᵈ7 *διαν* st. *οἵ ἂν* 80ᵉ1 vermuthlich *ἀ[ϛ ἀ]εὶ* für *ἐς ἀεὶ* st. *ἀεί* 81ª13 *εἰ ὥϛπερ* (*δὲ* übergeschr.) *λέγεται* 81ᵇ18 *οἱμεμιασμένη* st. *οἶμαι μεμ.* 82ᵇ13 *τὸ αὐτόγ* übel für *ταὐτόν* 83ᶜ8 *περὶ οὗ* st. *ὃ* u. a.; ich will sogar absehen von fehlerhaften Textänderungen geringerer Bedeutung, weil sie sich unbewußt einfinden können, wie 68ᵈ12 *ναὶ μάλα* st. *καὶ μ.* 68ᵈ15 *ὅταν ὑπο-*

μείμωσιν (so) st. ὑπομένωσιν 68°2 αὐτὴν für ταύτην (s. unten S. 43) 81ᵈ14 αὐτάς, wo das hsl. ταύτας von dem angeschlossenen, aber durch ein gegensätzliches Glied getrennten Relativsatz gefordert wird, 82ᵈ15 πορεύσονται st. πορεύονται oder das gedankenlose, alle Structur zerstörende παρακελεύεσθαι 83ᵃ4 st. παρακελευομένη. Aber bedenklich ist die Zahl der Textverderbnisse, die zweifellos auf willkürlicher Aenderung beruhen. Dieser Art ist 81ᵈ12 εἰκότως für εἰκός: man könnte zweifeln, auf welcher Seite das ursprüngliche zu suchen sei, wenn Sokrates daran mit Εἰκότως μέντοι anknüpfte; aber nichts ist gewisser als daß in *A* Raum nur für Εἰκὸ]ς μέντοι war, und damit ist das vorausgehende εἰκότως gerichtet. Dann 80°1 τὸ δὲ st. τοῦτο δὲ, 81ᵇ8 σοφίαι αἱρετόν st. φιλοσοφίᾳ αἱρ., 82ᵇ10 ἀφικέσθαι st. des erforderlichen und überlieferten Inf. Praes., 68ᵃ3 ἢ — ἢ für καὶ — καὶ, wie 83ᵇ22 ἢ st. καί; ferner die wiederholte Auslassung des correspondierenden τε 68ᵈ8, 81ᵃ8 (82ᵇ10) und 83ᵇ10, wo die Auslassung durch den Parallelismus des nächsten Glieds erwiesen wird. Nicht anders wird über 68°22 σωφρονοῦσιν st. σώφρονές εἰσιν oder 68°4 μόνον st. μόνοις zu urtheilen sein, und falls meine Ergänzungen richtig sind, über 80°1 ἐς ἀεί st. ἀεί, 68°23 ἀδυνατεῖν st. ἀδύνατον εἶναι.

Unter den Gesichtspunkt der Interpolation möchte ich die zahlreichen Abweichungen in den dialogischen Formeln nicht stellen. Platon behandelt dieselben im erzählten Dialog mit großer Freiheit, indem er die namentliche Bezeichnung des Sprechers und die Anrede bald mit behaglicher Förmlichkeit gibt bald nebensächlich behandelt oder gar dem Leser zu ergänzen überläßt. So finden wir in *A* wiederholt ἔφη ausgelassen 68(°18)ᵈ6, 82ᵈ22, umgestellt 68ᵇ10, Fehlen der Anrede ὦ Σώκρατες 68ᵈ9 ὦ Κέβης 83°11, eine kürzere Form der Frage 67°5, während umgekehrt 82ᵈ21 πῶς λέγεις, ἔφη, ὦ Σώκρατες die beiden Verba λέγεις ἔφη in unseren Hss. fehlen.

Einen Vorzug besitzt der Papyrustext in der Abwesenheit verschiedener theils bereits von andern ausgeschiedener theils nun erkennbarer Glosseme. Für einige Auslassungen stehen dem Papyrus hsliche Zeugen zur Seite: καὶ fehlt 81°14 auch in B^2S, 80ᵈ8 (wo es wohl erst durch Doppelung der letzten Silbe von αὐτίκα entstanden ist) in *S*, 81ᵃ16 τῶν vor θεῶν auch in B^2S. Aber die Unechtheit von φασίν nach ἕνεκα 83°13, schon von Hirschig bemerkt, wird nun bestätigt. Und gerne lassen wir uns durch *A* belehren, daß Platon 82ᵇ9 nicht εἰκός ἐστιν (wie noch im Staat I p. 337ᵃ gelesen wird) sondern nach seinem sonstigen Gebrauch bloß εἰκός geschrieben hat, und freuen uns der Abwe-

senheit von ἐξ αὐτῶν 82ᵇ 14 und ἐκείνῃ 82ᵈ 20. Möglich ist auch daß das Fehlen von ἄλλο 81ᵇ 2 und ἀλλ' 83ᵃ 6, allenfalls von αὐτοῖς 68ᵃ 1 in der Ueberlieferung begründet war. Aber im übrigen fordern die Auslassungen in *A* eine Prüfung heraus, in der sie nicht zu bestehn vermögen. 81ᵇ 22 γοητευομένη [ὑπ' αὐτοῦ] ὑπό [τε] τῶν ἐπιθυμιῶν καὶ ἡδονῶν fehlen in *A* die von mir eingeschlossenen Worte: aber der Zusammenhang fordert daß Pl. von der Einwirkung des Leibes (ὑπ' αὐτοῦ) auf den Geist rede; daß die Worte ὑπ' οὐτοῦ nicht fehlen durften, hat Vermehren anerkannt, als er durch gleichen Anstoß an der Ueberfülle des Ausdrucks wie vermuthlich der Urheber von *A* veranlaßt das weitere ὑπό τε ... ἡδονῶν ausscheiden wollte; daß unsere hsl. Ueberlieferung heil und echt ist, lehrt Phaid. 66ᶜ τὸ σῶμα καὶ αἱ τούτου ἐπιθυμίαι. Bestechend ist auf den ersten Blick 83ᵃ 2 ὅσον μὴ ἀνάγκη [αὐτοῖς] χρῆσθαι, aber vgl. Phaid. 64ᵈ καθ' ὅσον μὴ πολλὴ ἀκάγκη μετέχειν αὐτῶν. Unmöglich ist das Fehlen von τοῦτο 83ᶜ 4 Τί τοῦτο, ὦ Σώκρατες; und sehr verdächtig 68ᵇ 6, wie schon in der Anm. S. 29 ausgesprochen wurde. Die nachlässige Auslassung von καὶ φόβων 83ᵇ 16 theilt *A* mit Iamblichos. Für die Abwesenheit von ὄν in 83ᵇ 8 ἐν ἄλλοις [ὂν] ἄλλο gebe ich die Möglichkeit zu, daß verschiedene Wortfolge ἐν ἄλλοις ἄλλο ὄν leicht Anlaß zum Schwinden des Wortes geben konnte, das bei damaliger Schreibung (s. unten S. 47) vor dem folgenden μηθέν zu ὅμ werden mußte.

Daß eine Textquelle, die unsere älteste Handschrift um mehr als elf, einen litterarischen Zeugen wie Iamblichos um sechs Jahrhunderte überragt, von unechten Zusätzen, welche die spätere Schullectüre mit sich bringen mußte, sich noch unberührt zeigt, ist so natürlich, daß das Gegentheil ein Wunder sein würde. Dieser Umstand kann also, wenn die Frage nach Werth und Zuverlässigkeit des in *A* vorliegenden Textes gestellt ist, die Entscheidung um so weniger bringen, als dieser Text keineswegs frei ist von willkürlichen Auslassungen.

Mit weit größerer Sicherheit dürfen wir urtheilen, wenn wir das Umgekehrte beobachten. Daß *A* echte Worte bewahrt, die unseren Hss. verloren gegangen, wird man so gut wie nicht wahrnehmen; möglich ist daß 82ᵈ 20 δὴ und 83ᵇ 18 (ἐπειδάν τίς τι σφόδρα ἡσθῇ) τι richtig zugefügt wird; das 68ᵈ 12 zutretende εἶναι hat auch B^3 und Stobaeus. Häufiger müssen wir die Beobachtung machen, daß die nur „etwa 50 Jahre nach Platons Tod" geschriebene Rolle Zusätze und Interpolationen aufweist, von denen unsere gegen sie jungen Pergamene unberührt sind: 68ᵃ 3 ἢ ἀνθρωπίνων μὲν παιδικῶν ἢ γυναικῶν ἢ παίδων ἕνεκα ἀποθανόντων

πολλοὶ ἐκόντες ἠθέλησαν εἰς Ἅιδου ἐλθεῖν, wo durch den Einschub des den absoluten Genetiv erklärenden ἕνεκα das überlieferte δὴ nach πολλοί überflüssig und gleichzeitig getilgt wurde; 68b 5 μηθαμοῦ ἄλλοθι [ἀλλ' ἢ ἐν Ἅιδου] statt des auf 68a ἢ ἐν Ἅιδου zurückweisenden ἢ ἐκεῖ; 68b 12 τεκμήριον τοῦτο ἀνδρὸς ὃν ἂν ἴδῃς ἀγανακτοῦντα [τούτῳ] statt des untergeordneten Particips ἀγανακτοῦντα μέλλοντα ἀποθανεῖσθαι, das zwar unbequem ist, aber wahrlich nicht nach einem Glossem aussieht und durch das vorhergehende ἀγανακτήσει τε ἀποθνῄσκων geschützt wird. Dieselbe Tendenz tritt 80d 4 hervor τὸ εἰς τοιοῦτον ἕτερον τόπον οἰχόμενον τὸν γενναῖον καὶ καθαρὸν καὶ ἀιδῆ, wo der Artikel τὸν einfach undenkbar ist, da unter den das Demonstrativum erläuternden Adjectiven sich eben der Begriff befindet, auf den τοιοῦτον zurückweist, ἀιδῆ: aber dem Interpolator schien er ein zulässiges Hilfsmittel um den Leser sofort zwischen dem neutralen οἰχόμενον und dem masculinischen γενναῖον usf. unterscheiden zu lassen. Einen schulmeisterlichen Anstoß zu heben dient die Einflickung des Artikels 82d 19 τῇ ἐκείνης λύσει τε καὶ τῶι καθαρμῶι, wo die Stellung von τε übersehen wurde, welche dafür spricht, daß λύσις καὶ καθαρμός von Pl. zu dem einen Begriff der seelenbefreienden Wirkung der Philosophie zusammengefaßt wird vgl. Staat II p. 364e λύσεις τε καὶ καθαρμοί. Gedankenlos aber nicht minder fehlerhaft ist die Wiederholung des Artikels 81b 7 τὸ δὲ τοῖς ὄμμασι σκοτῶδες καὶ τὸ ἀιδές. Und wenn 83b 7 ὅ τι ἂν νοήσει αὐτὴ καθ' αὑτὴν αὐτὸ καθ' αὑτό τι τῶν ὄντων sich ein sprachwidriges τι einfindet, so kann das nur dadurch entstanden sein, daß der Schreiber in ὅ τι fälschlich die Conjunction ὅτι gesehn hatte und darum das unbestimmte Pronomen einzuschieben nöthig fand. Man wird vielleicht finden, daß ich zu sehr in den Krümeln wühle. So will ich einen groben Fall vorführen: 81d 8 περὶ τὰ μνήματά τε καὶ τοὺς τάφους κυλινδουμένη, περὶ ἃ δὴ καὶ ὤφθη ἅττα ψυχῶν φαν[τάσματα, οἷα δὴ ἄ]ν τάφ[ων ἐν] ἀσθενεί[αι παρέ]χονται αἱ τοιαῦται ψυχαὶ εἴδωλα κτλ. Auf meine Herstellung von Z. 8 will ich kein Gewicht legen, es ließe sich auch ἄν]ω τάφ[ων γε] ἀσθενεῖ[ς denken. Aber daß hier ein zweifaches störendes Glossem eingedrungen ist, einmal ἄνω τάφων neben dem vorangegangenen περὶ τοὺς τάφους, dann ἐν ἀσθενείᾳ oder ἀσθενεῖς vermuthlich an Stelle des im Hauptsatze unterdrückten σκιοειδῆ, bedarf keines Beweises.

Mehr und mehr hat sich die willkürliche Textbehandlung, mit einem Wort die Textveruntreuung in dem alten Papyrus herausgestellt. Auch die letzten Bedenken gegen dies scharfe Urtheil

müssen schwinden, wenn wir zur Prüfung solcher Stellen schreiten, an denen wesentliche und eingreifende Verschiedenheit der Texte vorliegt. Eine solche ist 68e f. *ἀλλ' ὅμως αὐτοῖς συμβαίνει τούτῳ ὅμοιον τὸ πάθος τὸ περὶ ταύτην τὴν εὐήθη σωφροσύνην*: *A* gibt *τοῦτο* und *πάθος τοι ἐπ' αὐτὴν τὴν ἀνδραποδώδη σωφρ.* Falsch ist, wie schon (S. 39) bemerkt, *τοῦτο*, sei es daß es durch Verderbniß oder daß es durch Schlimmbesserung entstanden ist. Eine richtige Corruptel ist dann *τοιεπαυτην*: nur ist ein Gewinn für den Platonischen Text daraus nicht zu ziehen; es ist sichtlich aus *τὸ περὶ αὐτὴν* hervorgegangen, aber das Pronomen *αὐτὴν ipsam* werden wir uns hüten gegen das rückweisende Demonstrativum einzutauschen. Es folgt eine starke Abweichung, *ἀνδραποδώδη* st. *εὐήθη*. Mahaffy sagt „the reading of the papyrus is far more vigorous, and likely to be genuine". Kräftiger wohl, ob auch richtiger? Platon hat die Analyse der gemeinen Selbstbeherrschung begonnen; der Verdacht liegt nahe, daß auch sie auf unwillkürlicher Selbsttäuschung beruhe: daher sie wohl *εὐήθης* genannt werden konnte, wie zum voraus 68d 9 *ἄτοπος*. Aber erst am Schluß der ganzen Erörterung über falsche und wahre, d. h. mit Vernunfterkenntniß gepaarte Tugend erhebt sich Sokrates zu der Erklärung 69b *μὴ σκιαγραφία τις ᾖ ἡ τοιαύτη ἀρετὴ καὶ τῷ ὄντι ἀνδραποδώδης τε καὶ οὐδὲν ὑγιὲς οὐδ' ἀληθὲς ἔχῃ*. Ich verstehe, wie von hier aus der Ausdruck in die frühere Stelle eingeschwärzt werden konnte, für die er nicht paßt, weil er nicht genügend vorbereitet ist; ich verstehe auch, wie leicht ein mitdenkender Leser glauben konnte durch diese vermeintliche Besserung dem Platonischen Text aufzuhelfen, indem er meinte, Pl. blicke 69b mit *τῷ ὄντι ἀνδραποδώδης* auf eine frühere Anwendung des Wortes zurück. Aber nicht verstehe ich, wie jemand hätte darauf verfallen sollen, *εὐήθης* an Stelle des wuchtigeren Wortes zu setzen. Sollte wirklich jemand derselben Täuschung unterliegen wie der Interpolator der Stelle? Die Formeln *τῷ ὄντι* und *ὡς ἀληθῶς* weisen an sich nicht zurück, sondern betonen in Fällen wie der unsere, daß ein aus dem Volksmund oder einem Dichter bekannter Satz oder Ausdruck unter der augenblicklichen Beleuchtung sich überraschend bewähre, vgl. J. Bernays Ges. Abhandl. 2, 279. Dies gilt von dem Begriff *ἀνδραποδώδης*, der dem Sokratischen Kreis als Gegensatz zu der von Vernunft beherrschten, sich selbst bestimmenden Sittlichkeit geläufig war: Phaidr. 258e *πᾶσαι αἱ περὶ τὸ σῶμα ἡδοναὶ ... δικαίως ἀνδραποδώδεις κέκληνται* Xen. Denkwürdigk. IV 2, 22 *οἶσθα δέ τινας ἀνδραποδώδεις καλουμένους*; vgl. I 1, 16 *ἀνδραποδώδεις ἂν δικαίως*

κεκλῆσθαι Pl. Staat IV p. 430$_b$ τήν τε θηριώδη καὶ ἀνδραποδώδη (ἀνδρείαν), wie Aristoteles E. N. 3, 10 p. 1118^a 25 ἀνδραπ. καὶ θηριώδεις von den ἡδοναί, auch Ar. ebend. 1, 5 p. 1095^b 19 οἱ μὲν οὖν πολλοὶ παντελῶς ἀνδραποδώδεις φαίνονται βοσκημάτων βίον προαιρούμενοι usw. Die vorangestellten Aeußerungen Platons und Xenophons bezeugen, daß der Attische Bürgerstolz nicht erst auf die Sokratiker gewartet hatte um freie und sklavenmäßige Sittlichkeit unterscheiden zu lernen, und Euripides bestätigt es Hiket. 876 τοὺς τρόπους δούλους παρασχεῖν χρημάτων ζευχθεὶς ὕπο.

Lesen wir weiter. φοβούμενοι γὰρ ἑτέρων ἡδονῶν στερηθῆναι καὶ ἐπιθυμοῦντες ἐκείνων ἄλλων ἀπέχονται ὑπ' ἄλλων κρατούμενοι: *A* gibt φοβούμενοι γὰρ στερηθῆναι ἑτέρων ἡδονῶν . . . ὑπ' ἐκείνων κρατ. Ich erwarte nicht, daß noch jemand im Ernst die Hiatusscheu zu Hilfe rufen werde, um aus der Wortstellung des Papyrus die auch von Iamblichos und Stobaeus bestätigte Fassung unserer Hss. abzuleiten; aber noch weniger, daß jemand für die Verschiebung des στερηθῆναι sich erwärmen könnte. Unzweifelhaft aber beruht ὑπ' ἐκείνων auf absichtlicher Aenderung des überlieferten. Während es Platon darauf ankommt, durch Gegenüberstellung von ἄλλων — ὑπ' ἄλλων, ein ihm sehr beliebtes Hilfsmittel, den Begriff der ἀλλαγή vorzubereiten, in den er die gemeine Sittlichkeit auflösen will (s. 69^a 17. 19. 69^b), strebt der Ueberarbeiter leichteres Verständniß anzubahnen, damit der Leser nicht genöthigt werde die beiden ἄλλα erst umzudeuten, und weist durch ὑπ' ἐκείνων auf das vorhergehende ἐκείνων (ἡδονῶν) zurück. Die größere Glätte und Bequemlichkeit des Textes ist auf Kosten der dialektischen Kunst gewonnen. Man wird dem alten Leser oder Corrector den Mißgriff nicht zu hoch anrechnen dürfen; ist doch gleich nachher 69^a κρατουμένοις ὑφ' ἡδονῶν κρατεῖν ἄλλων ἡδονῶν der Zweck des ἄλλων auch einem Manne wie Cobet entgangen, der das sowohl von *A* als auch nach Pistelli's ausdrücklichem Zeugniß von Iamblichos geschützte ἄλλων streichen wollte. Bald danach wird der Satz καίτοι καλοῦσί γε κτλ. in unserer Ueberlieferung durch ἀλλ' ὅμως συμβαίνει αὐτοῖς — aufgenommen, wie sich auch vorher die Erörterung voranbewegt hatte (καίτοι φαμέν γε — ἀλλ' ὅμως αὐτοῖς συμβαίνει). In *A* ist der Gegensatz zu einem das Ergebniß ziehenden Schlußsatz umgestaltet: συμβαίνει δ' οὖν αὐτοῖς —. Aber die Pointe, auf welche die Erörterung abzielt, wird erst in dem nächsten, erläuternden Satze (τοῦτο δ' —) gezogen: δι' ἀκολασίαν αὐτοὺς σεσωφρονίσθαι. Auch hier vermag ich nur eine absichtliche Schlimmbesserung zu erkennen.

Eine auffällige Abweichung findet sich ferner 83$_b$ 11 *εἶναι δὲ τὸ μὲν τοιοῦτον αἰσθητὸν καὶ ὁρατόν, ᾧ δὲ αὐτὴ προσέχει, νοητόν τε καὶ ἀιδές.* Statt des hervorgehobenen Relativsatzes geben unsere Hss. ὃ *δὲ αὐτὴ ὁρᾷ.* Ich könnte sagen, der Urheber von *A* habe so den schreienden Hiatus unserer Hss. entfernen wollen. Aber ich will nicht scherzen. Die an sich unverdächtige Wendung *ᾧ – προσέχει* erweist sich im Zusammenhang als unzulänglich; der Satz nimmt das vorhergegangene *ὅ τι ἂν νοήσῃ αὐτὴ καθ' αὑτήν* auf, dessen Gegensatz war *ὅ τι δ' ἂν δι' ἄλλων σκοπῇ ἐν ἄλλοις κτλ.*: nicht nur um das Object des Denkens, auch um die durch Denken gefundene Erkenntniß handelt es sich. So ungeeignet die neue Formel ist, so deutlich ist der Anstoß, durch welchen unsere hsl. Ueberlieferung zu einer Aenderung antreiben mußte. Es wird geschieden zwischen dem sinnlich unfaßbaren Inhalt des Denkens und dem sinnlich Wahrnehmbaren; grade dies letztere wird *ὁρατόν*, das erstere *ἀιδές* genannt. Wie kann mitten in der schärfsten Betonung dieses Gegensatzes Platon von dem unsinnlichen Vorgang des Denkens das Wort für die wichtigste Sinneswahrnehmung gebrauchen? Diesen Anstoß hat ein verständiger Leser recht unverständig durch jene unverfängliche Wendung zu heben geglaubt. Es ist wahr, Pl. meidet in der ganzen Erörterung von p. 65^b an sorgfältig, wenn er die Denkthätigkeit bezeichnet und den Vorgang anschaulich machen will, das Wort *ὁρᾶν*. Er spricht von *σκοπεῖν* und *θεωρεῖν*, von *θηρεύειν* und *τυγχάνειν*, von *ἐπιλαβέσθαι* und *ἐφάψασθαι*, aber er ist sichtlich bemüht den Leser nicht durch doppelsinnige Anwendung von *ὁρᾶν* zu verwirren. Ganz hat er auch da dem freieren Gebrauch des Verbums nicht ausweichen können: die Worte 68^a *τοῦ ὄψεσθαί τε ἐκεῖ ὧν ἐπεθύμουν καὶ συνέσεσθαι* entsprechen genau den früheren 67^a *μετὰ τοιούτων τε ἐσόμεθα καὶ γνωσόμεθα δι' ἡμῶν αὐτῶν πᾶν τὸ εἰλικρινές.* Und sieht man unsere Stelle vorurtheilsfrei an: *εἶναι δὲ τὸ μὲν τοιοῦτον αἰσθητόν τε καὶ ὁρατόν· ὃ δὲ αὐτὴ ὁρᾷ κτλ.*, so wird man erkennen, daß das unter starken Nachdruck gestellte *αὐτή* den freieren Gebrauch von *ὁρᾷ* nicht nur gestattet, sondern auch bedarf: „was die Seele selbst sieht" im Gegensatz zu dem, was sie durch die Sinne erfährt, dem *ὁρατόν*.

Endlich wird 83^c 9 statt unseres Textes: *περὶ ὃ ἂν μάλιστα τοῦτο πάσχῃ, τοῦτο ἐναργέστατόν τε εἶναι καὶ ἀληθέστατον*[4]), *οὐχ οὕτως ἔχον* in *A* ganz abweichend überliefert: *περὶ οὗ*

4) Der Herausg. meint: „In the received text the sense is not clearly expressed and the readings possibly corrupt". Das verstehe ich nicht. Vgl. 83^d

(s. oben S. 39) ἅμ μάλιστα τοῦτο πάσχει (s. unten S. 47), μάλιστα δὲ εἶναι τοῦτο, οὐχ οὕτως ἔχον. Hier könnte in der That das einfache μάλιστα εἶναι den Eindruck einer ursprünglicheren Fassung machen. Aber unerklärlich würde δέ bleiben. Der Herausg. vermuthet dafür δεῖν: dann wäre auf dem Papyrus ΔΕΙΝΑΙ zu erwarten gewesen, es steht aber deutlich ΔΕΕΙΝΑΙ da. Dies δέ läßt meines Erachtens nur die eine Erklärung zu, daß ein Glied mit μάλιστα μέν vorangegangen und in Folge des gleichen Anfangs übersehen ist: der Satz könnte etwa gelautet haben μάλιστα <μὲν ἐναργές τε φαίνεσθαι καὶ ἀληθές, μάλιστα> δὲ εἶναι τοῦτο. Ich kann also auch hier keinen Anhalt dazu finden, den Text von *A* als einen ursprünglicheren zu begrüßen.

Wenn Treue und Zuverlässigkeit einer Ueberlieferung sich auch im Kleinen bewähren muß, darf schließlich die Rechtschreibung von unserer Prüfung nicht ausgeschlossen werden. Jungen Philologen des XIX. Jahrhunderts ist es wohl begegnet *quom* und *uolt* schreiben, aber Donatschnitzer nicht vermeiden zu können: Schreiber des Alterthums haben schwerlich auf solche Kleinigkeiten Aufmerksamkeit verwandt, wenn sie sonst mit dem überlieferten Wort nach Lust und Laune hantierten. In dieser Hinsicht kann zunächst die Bewahrung des nachlautenden Iota in ἀποθνήισκειν 67°7 Vertrauen erwecken. Wichtiger, und eine Bereicherung unseres Wissens ist die regelmäßige Schreibung ἀιδής statt ἀειδής, die schon der Herausgeber (S. 34) mit Recht betont hat; so 79° τῶι ἀιδεῖ (Taf. VI, 1), 80ᵈ ἀιδῆ, 81ᵃ und 83ᵇ ἀιδές. Diese Schreibung trägt ihre Gewähr in sich: erst durch sie kommt das Wortspiel 80ᵈ (εἰς τόπον) ἀιδῆ, εἰς Ἅιδου (nicht Ἄιδου) ὡς ἀληθῶς und wohl auch 81ᶜ φόβῳ τοῦ ἀιδοῦς τε καὶ Ἅιδου zur Geltung: denn daß Platon das Wortspiel beabsichtigt hatte, zeigt 80ᵈ der Zusatz der Formel ὡς ἀληθῶς s. oben S. 43. Die schönste Bestätigung gibt Platon selbst im Kratylos p. 404ᵇ καὶ τό γε ὄνομα ὁ Ἅιδης — πολλοῦ δεῖ ἀπὸ τοῦ ἀιδοῦς (so *BT* dh. die Handschriften) ἐπωνομάσθαι, ἀλλὰ πολὺ μᾶλλον ἀπὸ τοῦ πάντα τὰ καλὰ εἰδέναι . . . Ἅιδης ἐκλήθη: eine Stelle, die nun jeder der Platon zu lesen, d. h. zwischen den Zeilen zu lesen versteht, als eine launige Uebertrumpfung des Phaidon empfinden wird. Wir haben also für die ältere Sprache nunmehr zwei Worte auseinanderzuhalten: ἀιδής (vgl. Homer. ἀίδηλος und ἄϊστος, ἀιδνός) unsichtbar, und ἀειδής unansehnlich, mißgestaltet von τὸ εἶδος. Herodian

---

δοξάζουσαν ταῦτα (dies ist festzuhalten, nicht ταὐτὰ mit Schanz zu schreiben) ἀληθῆ εἶναι ἃ περ ἂν καὶ τὸ σῶμα φῇ.

kannte jenes Adjectiv noch, s. epim. Hom. in Cramers Anecd. Ox. I p. 65, 21 (Lentz' Herod. I p. 80, 1 f., vgl. Etym. M. p. 42, 26) *οὕτως καὶ ἴδω ἰδής καὶ μετὰ τοῦ στερητικοῦ ἀ ἀιδής ὁ ἀγνώτους ποιῶν· βαρυτόνως δὲ τὸ Ἀίδης· τὸ γὰρ ἐπιθετικὸν ὀξύνεται· „δυσμενέων δ' ἀιδής" λέγει Βακχυλίδης* [fr. 46 Bergk.]· *οὗ τὸ οὐδέτερον ἀιδές· „τοῦ δὲ τάφου καὶ σῆμ' ἀιδὲς ποίησεν" Ἡσίοδος* [Schild 477], und Choerob. ebend. II p. 180, 12 *Ἄιδης παρὰ τὸ ἀιδές, τὸ ἡμῖν μὴ φαινόμενον.* Wenn nun in unseren Hss. des Phaidon trotz des Wortspiels das alte *ἀιδές* überall bis auf unzulängliche Spuren (wie 79^{b} *ἀιδές* D^{1} 81^{a} *ἀηδὲς* C^{1} 83^{b} *ἀηδές* Iamblichos) ausgemerzt ist, so wird man nicht erstaunen das gleiche im Gorg. 493^{b} *τῶν ἐν Ἄιδου — τὸ ἀιδὲς δὴ λέγων* wahrzunehmen. Auch im Krat. 403^{a} *τὸ ἀειδές* liegt dieselbe Verderbniß vor, wie die unverkennbare Rückbeziehung der oben vorgeführten Stelle 404^{b} beweist.

Das hohe Alter des Papyrus tritt greifbar hervor in Eigenthümlichkeiten, die uns aus den Inschriften geläufig sind. Vielfach wird, wie es die lebendige Sprache that, der auslautende Consonant dem folgenden Anlaut angeglichen. Nicht nur in proklitischen Worten wie *ἐμ φιλοσοφίαι* 68^{d} 5 *ἄμ μάλιστα* 83^{c} 8, *τὸγ γενναῖον* 80^{d} 4 *τὴμ ψυχήν* 83^{a} 17, sondern auch in selbständigen, wie *αὐτόγ γε* 82^{b} 13 *ὅσομ μὴ* 83^{a} 2 *τούτωμ μὲν* 83^{a} 1 *τοσοῦτογ κακόν* 83^{b} 20. An Nomina freilich kommt, soviel ich sehe, nur ein Fall vor 82^{b} 16 *θεῶγ γένος.* Merkwürdig ist sodann der mehrfach vorkommende Uebergang der Endung *ηι* in *ει*, einmal in der Declination 83^{b} 12 *ταύτει*, öfter im Conjunctiv 80^{d} 7 *θέλει* 83^{a} 6 *νοήσει* 83^{c} 8 *πάσχει* und in bunter Mischung 83^{b} 18 *ἡσθῆι ἢ λυπηθεῖ ἢ φοβηθεῖ ἢ ἐπιθυμήσηι.* Sayce und Mahaffy (p. 34) neigten zu der Ansicht, daß diese Phaidonrolle in Attika selbst geschrieben worden sei; es scheint, daß die Alterthümlichkeit der Schriftzüge sie dazu bestimmt hat. Einen triftigeren Grund hätten sie eben dieser Lauterscheinung entnehmen können, die, schon im IV. Jahrhundert häufig, für die attischen Inschriften des dritten Jahrh. charakteristisch ist (vgl. Meisterhans, Gramm. der att. Inschrr. § 15, 7—9 p. 30 f. der II. Ausg.).

Diese Eigenthümlichkeiten sind zwar Zeichen des Alters, aber nicht treuer Ueberlieferung eines älteren Textes; der Schreiber befolgt einfach die Sitte und Gewöhnung seiner Zeit. Die Spuren der älteren Atthis, die im ganzen von Platon festgehalten wurde, sind gründlich verwischt. Nirgends finden wir *ξύν*, überall *σύν*; immer *ἀεί*, nie *αἰεί*; nicht *ἅσμενος* (vgl. Fleckeisens Jahrb. 1865 p. 255 Anm. 22) lesen wir 68^{b} 1, sondern *οὐκ ἄσμενος.* Be-

lastender noch ist das Eindringen zweifellos unplatonischer Schreibungen. Mit Ausnahme des einen Falles 83a 5 *μηδενί* begegnet überall das *θ*: 68b 4 *μηθαμοῦ* 81b 2 *μηθέν* 80e 2 und 83b 20 *οὐθέν*. Die aspirierte Form tritt bekanntlich in der Litteratur erst bei Aristoteles, Theophrast und Epikur massenhaft auf. Obwohl sie auf den attischen Inschriften schon der Zeit von 378 — 300 nach Meisterhans' Zählung im Verhältniß von 2 : 3 zur Schreibung mit media vorkommt, ist sie in den Platonischen Schriften, sogar den Gesetzen, so gut wie unerhört; vereinzelte Fälle wie Sympos. 172d *οὐθὲν* (so *B*, aber nicht *T*) können nichts beweisen. Ein Dialog muß freilich ausgenommen werden, der zweite Alkibiades. Dort findet sich neben *μηδέν* 146d *μηδέτερα* 139a 140e *οὐδείς* 143b 148c *οὐδέν* 142c 149a-e 150a *οὐδένες* 148e *οὐδένων* 148c die Aspiration so oft, daß sie als Sprachform des Verfassers anerkannt werden muß: *μηθέν* 141c 150e *οὐθέν* 141d 144a 148a 149b 150c; schon Lobeck (zum Phryn. p. 182) ist das nicht entgangen. Aber wer den übrigens schon im Alterthum (s. Athen. XI p. 506c) beanstandeten Dialog kennt, weiß auch, daß der Verfasser, so fleißig er Platon gelesen hatte, doch nicht vermocht hat seine Sprache der des Vorbildes genügend anzupassen[5]). Er verräth seine Zeit durch Formen wie *ἀποκριθῆναι* 149b *οἴδαμεν* 142a 145d *ἐνδεεστέρως* 149a *προχειροτέρως* 144e, durch Structuren wie *ξυμβαίνει ὥστε* 148c-d *εἰς δύναμιν τὴν ἐμήν* 140a *εἰς τὸ παρῆκον τοῦ χρόνου* „bis auf die Gegenwart" 148c, durch die Verwechselung des fragenden und des relativen Pronomens 145b, durch den Wortgebrauch wie *εἰπεῖν* für „fragen" 143e, *τὸ εἰδός* „das Wissen" 145e (wie seit Philon *τὸ συνειδός* „das Gewissen" vgl. zu Pelagia 10, 14 p. 43). Selbst seine Heimath deutet er einigermaßen an durch die Einführung

5) Schon Ast, Platons Leben und Schriften p. 445 f. hat eine stattliche Anzahl Abweichungen von Platonischem Sprachgebrauch angemerkt. Ich füge hinzu das grobe Anakoluth 148e, *τυχόν* 140a 150c *ὁμοιότροπος* 142c *ἑαυτοῦ* für *σεαυτοῦ* 143c *ὀρφανὸς ἐπιστήμης* 147a *πολιτικὸν φύσημα φυσώντων* 145e *ἐπουρίσαι* 147a *ἐκδεδυκέναι* „elabi" 148a *ἀνεύχεσθαι* ein Gebet widerrufen 142d 148b *τοκιστήν* 149e *ἀν' ἕκαστον ἔτος* 148e 150a *ἀντίψηφον γενέσθαι* 150c die Verbindung *μεγίστην ξύννοιαν* 138a *ἐν ταύτῃ ὄντες τῇ ἕξει ἐν ᾗ διδόασιν* 138b. Anderes freilich wartet der Emendation: 141b ist zu lesen *εἰ δέ σε ὁρῶν* (*ὀρφῇ* Hss.) *ἔτι ἔλαττον δοκοῦντα ἔχειν, εἰ μὴ καὶ πάσης Εὐρώπης* (sc. *τύραννος γένοιο*), *ὑποσταίη σοι καὶ τοῦτο* [*μὴ μόνον ὑποσταίη*], *αὐθημερὸν σοῦ κτλ.* 145b *οὐκ οὖν οὐδὲ εἴ τίς τινα ἀποκτιννύναι οἶδεν οὐδ' εἰ* (*οὐδὲ* Hss.) *χρήματα ἀφαιρεῖσθαι* 146a *φαίης γε ἄν, οἶμαι, ὁπότ' αὖ* (*ὁπόταν* Hss.) *ὀρφῆς* 147e *μεταβαλλόμενος γέ τοι ἄνω καὶ κάτω οὐδ' ὁτιοῦν παύει, ἀλλ' ὅ τι ἂν μάλιστά σοι δόξῃ, τοῦτο καὶ ἐκδέδυκεν* (*ἐκδεδυκέναι* Hss.) *αὖ καὶ οὐκέτι ὡσαύτως δοκεῖ* (so Bekkers Ξ, die anderen *δοκεῖν*) 149b *τάδε λέγει Ἄμμων· φησὶν δὴ* (*ἂν* Hss.) *βούλεσθαι κτλ.*

des nordgriechischen Reflexivpronomens αὐτοσαυτοῦ statt ἑαυτοῦ, das von K. Keil im Rhein. Mus. 18, 263 f. und G. Curtius in den Berichten der sächs. Gesellsch. der Wissensch. 1864 p. 225 f. genügend erörtert ist. Denn wenn man auch den Fall 144$_c$ οὐδὲ τὴν ὁτουοῦν μητέρα διενοεῖτο ἀποκτεῖναι ἀλλὰ τὴν αὐτὸς αὐτοῦ ebenso wie Aeschines gegen Ktesiphon § 233 als eine Nachbildung der Tragiker [6]) fassen könnte, welche einem von Praeposition oder Nomen abhängigen obliquen Casus von αὐτὸς zu größerem Nachdruck αὐτός so vorsetzen können, daß dies nur Freiheit der Wortstellung für sich in Anspruch nimmt, so wird doch eine solche Erklärung unmöglich, wenn wir 146^a lesen: τοῦ δὲ τῇ πόλει καὶ αὐτὸν αἰτῷ βελτίστου ὄντος — διημαρτηκότα. Hier haben wir das fest zusammengewachsene αὐτοσαυτῷ, wie wir gemäß den Delphischen Inschriften werden schreiben müssen. Auch 146$_c$ λυσιτελούντως ἡμᾶς ἔξειν καὶ τῇ πόλει καὶ αὐτὸν αὐτῷ hätten wir αὐτοσαυτοῖς herzustellen, wenn nicht ἡμᾶς ein unechter Eindringling sein und das Subject des Relativsatzes ἅ τις οἶδεν für den Infinitiv mit gelten könnte: λυσιτελούντως ἔξειν καὶ τῇ πόλει καὶ αὐτὸν αὐτῷ wie 145^c ἀποχρῶντα ξύμβουλον καὶ τῇ πόλει καὶ αὐτὸν αὐτῷ und 146^c οὔτε τῇ πόλει οὔτ' αὐτὸν αὐτῷ.

Auch einen anderen, wenn gleich vereinzelten Fall haben wir hierher zu ziehn. Neben richtigem εἰ γὰρ ἐθέλεις 68^d 6 steht 80^d 7 (οἷ) ἂν θεὸς θέλει, gerade wie im zweiten Alkibiades einmal τούτων θελόντων 151$_b$. Auf attischen Inschriften ist das von den Tragikern viel gebrauchte θέλειν bisher vor der Mitte des dritten Jahrh. nicht gefunden worden (Meisterhans p. 142, 23). Den Sprachgebrauch der Redner haben Benseler zu Isokr. Areopag. p. 257 ff., Meier Opusc. acad. 1, 171 f. und Vömel zu Dem. demeg. p. 11 f. festgestellt. Bei Platon zeigen die Herausgeber eine gewisse Unsicherheit, so Schneider zum Staat, Band I p. 230. So viel ich

6) Aesch. Prom. 762 πρὸς αὐτὸς αὐτοῦ κενοφρόνων βουλευμάτων 921 τοῖον παλαιστὴν νῦν παρασκευάζεται ἐπ' αὐτὸς αὐτῷ Ag. 836 τοῖς αὐτὸς αὐτοῦ πήμασιν βαρύνεται, und wie diese letztere, sind die Stellen des Sophokles Ai. 1132 Oed. Kol. 930. 1356 beschaffen. Dasselbe bei den Komikern, Timokles bei Ath. VI p. 223^d (Mein. III p. 593 v. 19) τὰς αὐτὸς αὐτοῦ συμφορὰς ῥᾷον φέρει und Philemon b. Stob. fl. 102, 5 (Mein. IV p. 50). Ich möchte bei diesen wie bei der oben angeführten Stelle des Aeschines Einwirkung nordgriechischen Sprachgebrauchs vermuthen. Erst die späte Kunstprosa hat dann die Ausdrucksweise als alten Leckerbissen wieder aufgewärmt, s. Bast Lettre crit. p. 176 (212 Schaefer). Daß bei diesem Reflexivpronomen der zweite Bestandtheil nicht αὐτοῦ sondern αὑτοῦ war, hat schon Elmsley zu Eurip. Herakliden 144 (vgl. zu 814) mit gutem Grund angenommen, und muß ich trotz Lobeck z. Ai. 906 für richtig halten wegen der inschriftlichen Thatsachen.

sehe, kennt Platon ausschließlich die volle Form. Wenn zu Sympos. 192d ἐπιθυμεῖτε, θέλω Schanz die Anmerkung gibt: θέλω *B*: ἐθέλω *T*, so ziehen wir daraus den Schluß, daß überliefert war und herzustellen ist ἐπιθυμεῖτ', ἐθέλω; und so hat Schanz selbst Phaidr. 230d das in *B* überlieferte οὐδέν μεθέλει διδάσκειν an der Hand von *T* richtig interpretiert als μ' ἐθέλει. Es ist kein Zufall, daß die kurze Form bei Platon wie fast durchweg auch bei den Rednern nur nach Vocalen vorkommt. Man wird in diesen Fällen wie bei ἐκεῖνος 'κεῖνος Aphaeresis anzunehmen haben: μὴ 'θέλητε Phaid. 115b μὴ 'θέλωσιν Symp. 190d Gesetze VI 762b μὴ 'θέλειν Staat III 391a μὴ 'θέλων Ges. VI 764a; εἰ 'θέλεις Hipp. min. 373a Krat. 435b Staat X 596b εἰ 'θέλετε Phaid. 77c εἰ 'θέλοις Staat IX 581c, und ohne Bedenken in einem Falle wie Staat IV 426d τοὺς θέλοντας das leicht nach c übersehene ε herstellen. Zur Entschuldigung mag dem Schreiber des Papyrus gereichen, daß sein θέλει gerade in der Formel ἂν θεὸς θέλῃ vorkommt, in welcher schon die Komiker und gelegentlich die Redner die kurze Form anwenden: gerechtfertigt wird er nicht durch diesen Umstand, denn Platon hält auch in dieser Redensart das volle ἐθέλειν fest: die Belege gibt Lobeck zum Phryn. p. 7 und zu Soph. Aias 24.

Die unerläßliche Einzelprüfung, durch welche ich bedaure die Geduld des Lesers über Gebühr in Anspruch genommen zu haben, hat, hoffe ich, allmählich ein Ergebniß sicher gestellt, das freilich für manchen noch überraschender sein mag als was die Entzifferer und ersten Leser wahrzunehmen glaubten. Spätestens in der dritten Generation nach Platons Tod geschrieben, zeigt der Papyrus aus Faijûm bereits einen in jeder Hinsicht verlotterten und mit gewissenloser Willkür mißhandelten Text. Elf und ein halbes Jahrhundert später beginnt erst unsere handschriftliche Ueberlieferung Platons, die in ihren ältesten und besten Vertretern, dem Bodleianus und Parisinus *A*, trotz der Verderbnisse und zahlreichen Interpolationen, in denen fleißige Lectüre in Schule und Gelehrtenkammer und die schriftliche Fortpflanzung so vieler Jahrhunderte ihre Spur hinterlassen mußten, doch wie Gold von dem Tombak dieses alten Papyrus absticht. Wie erklärt sich dieses Räthsel? Wie konnte es kommen, daß das Mittelalter über einen ursprünglicheren und treueren Platontext verfügte als das zweite und dritte Menschenalter nach Platon? Wir sind hiermit zum Kern der Frage gelangt.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Mai 1891.

(Fortsetzung.)

Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen:
a. Verhandelingen. Deel XLV. 3e Stuk: Proeve van een Lampongsch-Hollandsche Woordenlijst.
Deel XLV. 4e Stuk: Verzameling Lamponsche Tekaten etc. Batavia 1891.
b. Notulen van de Algemeene en Bestuurs-Vergaderingen. Deel XXVIII.—1890. Aflever. III. Ebd. 1890.

La Reale Accademia dei Lincei: Atti. Serie IV. Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.
a. Anno CCLXXXV. 1888. Vol. IV. Parte I. Memorie. Roma 1888.
b. Anno CCLXXXVI. 1889. Vol. VI. Parte 2e Notizie degli Scavi. Gennaio-Dicembre e Indice topografico per l'ann. 1889. Ebd. 1889—90.
c. Rendiconti. Anno CCLXXXVIII. 1891. Vol. VII. 1. Semestre. Fasc. 7. 8. Ebd. 1891.

Circolo Matematic di Palermo. Rendiconti. Tomo V, fasc. III. Anno 1891. Maggio-Giugno. Palermo 1891.

Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze. Bollettino delle pubblicazioni italiane. 1891. N. 128—130 und Indice zu 1890, Bogen F. G. H. Firenze 1891.

Biblioteca Nazionale Centrale Vittorio Emanuele di Roma Bollettino delle opere Moderne Straniere. Vol. VI. N. 4. Aprile 1891. Roma 1891.

Transactions of the twenty-second Meeting of the Kansas Academy of Science 1889. Vol. XII. Part 1. Topeka 1890.

University of Nebraska Agricultural Experiment Station:
a. Fourth annual report. Jan. 29th, 1891. (2 Exempl.). Lincoln, Nebraska 1891.
b. Bulletin. (Sugar Beet Series N. II.) Vol. IV. N. 16. (2 Exemplare). Ebd. 1891.

Bulletin of the Museum of Comparative Zöology at Harvard College. Vol. XXI. N. 1. Cambridge, U. A. S. 1891.

Johns Hopkins University Circulars. Vol. X. N. 87, 88. April, Mai 1891. Baltimore 1891.

Time-reckoning for the twentieth century by Sanford Fleming. From the Smithsonian Report for 1886. Washington 1889.

Anales de la Sociedad científica Argentina. Abril de 1891. Entrega IV. Tomo XXXI. Buenos Aires 1891.

Nachträge.

Γ. *Μιστριώτου Λόγος, Τά αἴτια τοῦ ἀρχαίου καὶ τοῦ νεωτέρου ἑλληνικοῦ πολιτισμοῦ. Ἐν Ἀθήναις*, 1891.

Κατάλογος τῶν βιβλίων τῆς ἐθνικῆς βιβλιοθήκης τῆς Ἑλλάδος. Τμῆμα δ'. Γλωσσολογία. Ἐν Ἀθήναις 1891.

Naudet, Notice historique sur MM. Burnouf, père et fils. Paris 1886.

Choix de lettres d'Eugène Burnouf. Paris 1891.

Juni 1891.

Sitzungsberichte der K. Pr. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. XXV—XXVI, XXVII.

Königl. Sächs. Ges. d. W. zu Leipzig:

a. Berichte über die Verhandlungen. Mathematisch-Physische Classe. 1891. I.
b. Abhandlungen. Mathematisch-Physische Classe. Band XVII. No. III. Reinhold Hahn, Mikrometrische Vermessung des Sternhaufens Σ 762. No. IV. F. Mall, Das reticulirte Gewebe und seine Beziehungen zu den Bindegewebsfibrillen. Leipzig 1891.

Schriften des Naturwissenschaftlichen Vereins für Schleswig-Holstein. Band VIII. 1. u. 2. Heft. Kiel 1889, 91.

75. Jahresbericht der Naturforschenden Gesellschaft in Emden 1889/90. Emden 1891.

Zeitschrift der deutschen Morgenländischen Gesellschaft. 45. Band. 1. Heft. Leipzig 1891.

Leopoldina. Heft XXVII. N. 9—10. Halle a. S. 1891.

Astronomische Mittheilungen von Dr. Rud. Wolf. LXXVIII. Seite 282 — 316. Zürich.

Mittheilungen der Antiquarischen Gesellschaft in Zürich. Band XXIII, Heft 2. Die Casa di ferro Vignaccia bei Locarno v. J. R. Rahn u. Th. v. Liebenau. Leipzig 1891.

Bericht über die Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag 1890. Prag 1891.

Anzeiger der Akademie der Wissensch. in Krakau 1891. Mai. Krakau 1891.

Ungarische Revue. V. Heft. 1891. Mai. Elfter Jahrgang. Budapest 1891.

Codex Diplomaticus Comitum Károlyi De Nagy-Károly. Elsö Kötet 1253—1413, Második Kötet 1414—1489, Harmadik Kötet 1491—1600, Negyedik Kötet 1600 —1700. Budapest 1882—87.

Journal of the Royal Microscopical Society 1891. Part 3. June. (2 Exempl.) London and Edinburgh.

Proceedings of the Royal Society. Vol. XLIX. N. 299. London 1891.

Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. Vol. LI. N. 7. May 1891. London 1891.

Nature. Vol. 44. 1127—1130.

Royal Irish Academy:
a. Proceedings. Third Series. Vol. 1. N. 5. 1891.
b. Transactions. Vol. XXIX. Part XV. Dublin 1891.
c. Cunningham Memoirs. N. VI. On the Morphology of the Duck and the Auk Tribes by W. Kitchen Parker. Dublin 1890.

Académie Royale de Belgique:
Bulletin. 61. année, 3e série, tome 21. No. 5. 1891.

La Société Impériale des Naturalistes de Moscou:
a. Bulletin. Année 1890. N. 4. 1891.
b. Meteorologische Beobachtungen der Landwirthschaftl. Akademie bei Moskau. Das Jahr 1890. Zweite Hälfte. (Beilage zum Bulletin. Deuxième série. Tome IV). Moscou 1891.

Bulletin de la Société Mathématique de France. Tome XIX. N. 4. 5.

Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas. Vol. X. N. 2. Coimbra 1891.

R. Accademia delle Scienze di Torino. Atti. Vol. XXVI. Disp. 9a, 10 — 11. 1890—91. Torino.

La Società Toscana di Scienze Naturali in Pisa Mémorie. Vol. XI. Pisa 1891.

R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna:
a. Memorie. Serie IV. Tomo X. Bologna 1889.
b. Indici Generali dei dieci Tomi componenti la Serie Quarta 1880—1889. Ibid. 1890.
c. Exposé des Raisons appuyant la Transaction proposée par l'Académie des sciences de Bologne au sujet du Méridien initial et de l'heure universelle.
d. Del Meridiano Iniziale e dell' Ora Universale. Bologna 1890.

(Fortsetzung folgt.)

Inhalt von Nr. 2.

Hermann Usener, Unser Platontext. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

3. Februar. **№ 3.** 1892.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 7. Februar 1891.

Eine Krisis in der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Von

F. Frensdorff.

Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, durch eine Verordnung König Georg II. vom 23. Februar 1751 ins Leben gerufen, hat nicht lange nach ihrer Begründung eine schwere Krisis durchzumachen gehabt, die durch die Ursachen, aus denen sie entsprang, und die Personen, die an den Vorgängen betheiligt waren, an sich von Interesse, dadurch an Bedeutung gewinnt, daß ihr Abschluß durch Ordnungen herbeigeführt wurde, die im Wesentlichen noch heute für die Gesellschaft gelten und einen Grundbestandtheil ihrer Einrichtungen bilden. Da mir eine Reihe bisher unbekannter oder unbenutzter Urkunden zugänglich geworden ist, die zur Aufhellung der Krisis dienen, und von dieser bisher nirgends eine zusammenhängende Darstellung gegeben worden ist [1]), so habe ich im Folgenden eine solche versucht. An geeigneten

1) Einzelne Andeutungen finden sich bei Heeren, Heyne (Histor. Werke VI) S. 89 ff. und vorher in Heynes Elogium auf Kästner (Comment. vol. XV) S. 6.

Stellen sind wörtliche Mittheilungen aus den benutzten Quellen eingeschaltet. Diese bestehen aus Briefen und Aktenstücken. Unter den Briefen sind vor allem wichtig von Göttingen oder Hannover aus an Albrecht von Haller gerichtete, die in der großen Hallerschen Briefsammlung der Stadtbibliothek zu Bern aufbewahrt werden. Von Hannover aus hat G. A. von Münchhausen mit Haller in Sachen der Societät in Briefwechsel gestanden; die Göttinger Correspondenten sind Michaelis und Murray. Solange Haller in Göttingen lebte, war J. D. Michaelis seine rechte Hand in den Angelegenheiten der Societät, nach seinem Weggange hielt er überhaupt die Verbindung Hallers mit Göttingen aufrecht, wie der Leibmedicus Werlhof, über den ich vor kurzem an anderer Stelle ausführlich berichtet habe [1]), die mit Hannover. Joh. Philipp Murray, Professor in der philosophischen Facultät, der nicht mit seinem 14 Jahre jüngern Bruder, dem Botaniker Joh. Andreas Murray, verwechselt werden darf, war durch seine Stellung als Secretair der Societät veranlaßt, fortlaufend an Haller, der auch nach seinem Weggange von Göttingen mit der Gesellschaft im engsten Zusammenhange blieb, zu berichten. Zur vollen Kenntniß der Verhältnisse bedürfte es der Zuziehung der Antworten Hallers. Leider hat sich von ihnen bisher keine Spur auffinden lassen. Das auswärts vorhandene Briefmaterial, das ich Dank der Liberalität der Berner Behörden und insbesondere des Herrn Oberbibliothekars Professor Dr. Blösch hier in voller Muße benutzen konnte, findet eine willkommene Ergänzung durch Göttinger Quellen. Unter ihnen erwiesen sich namentlich inhaltsreich die Briefe von Münchhausen und Georg Brandes an Heyne, welche die Königliche Bibliothek aus Heynes Nachlaß besitzt, und das Archiv des Königlichen Universitätscuratoriums, dessen Benutzung Herr Geh. Rath von Meier mit gewohnter Liberalität gestattete. Für einzelne Partieen lieferten Hollmanns handschriftliche Chronik [2]) und der Michaelissche Briefwechsel, beide auf der Königlichen Bibliothek, erwünschte Aushülfe.

Es ist bezeichnend, daß wer sich über die Entstehung der Societät der Wissenschaften unterrichten will, in den litterarischen

---

1) Zeitschrift des Histor. Vereins f. Niedersachsen Jg. 1891 S. 104 ff.

2) Cod. ms. hist. litt. 82. Ueber diese Chronik, die die Geschichte der Societät eingehend berücksichtigt, vgl. A. Schöne, die Univ. Göttingen im siebenjährigen Kriege (Leipz. 1887) S. 48.

Hülfsmitteln auf Zimmermanns Leben des Herrn von Haller (Zürich 1755) verwiesen wird. Mag auch die erste Anregung zur Stiftung einer gelehrten Gesellschaft in Göttingen von anderer Seite ausgegangen sein, das Institut, wie es ins Leben trat, war eine Schöpfung Hallers. Er hatte die Statuten entworfen, die Mitglieder vorgeschlagen, welche der König ernannte, war zum beständigen Präsidenten der Gesellschaft vom Könige bestellt worden und, was mehr als das alles bedeutete, sein Name und seine Arbeiten bewirkten, daß die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften[1]) alsbald bekannt wurde und im Inland und Ausland Ansehen erlangte. Es ist daher erklärlich, daß die größte Verlegenheit für die Gesellschaft entstehen mußte, als Haller zwei Jahre nach ihrer Begründung, im Frühjahr 1753 unerwartet Göttingen verließ und in sein Vaterland zurückkehrte. Man dürfte den Beginn der Krisis schon von hier ab datiren, wenn es nicht noch längere Zeit zweifelhaft geblieben wäre, ob Haller definitiv Göttingen den Rücken gekehrt hätte. Wie er in Göttingen schon länger zwischen Bleiben und Gehen geschwankt hatte, so hat er sich in der Heimat Jahre, Jahrzehnte hindurch mit dem Gedanken der Rückkehr nach Göttingen beschäftigt, wie man denn auch in Hannover nicht müde geworden ist, immer und immer wieder mit ihm zu unterhandeln, ihm Aussichten und Vortheile zu eröffnen, die Haller mit dem verglich, was ihm sein Vaterland gewährte oder versagte, und gegen die Rücksichten abwog, die er der Heimat und seiner Familie schuldete, ohne zu einem Entschlusse nach der einen oder nach der andern Seite kommen zu können.

Der Schaden, der der Societät aus Hallers Weggang erwuchs, blieb zunächst noch verborgen. Nach kurzem Schwanken, während dessen einmal daran gedacht war, Werlhof zum Präsidenten zu machen[2]), entschloß man sich, Haller seiner Abwesenheit ungeachtet in seiner bisherigen Stellung zu belassen. Seine bei Gründung der Societät erfolgte Ernennung zum Praeses perpetuus bot dafür den nöthigen äußern Anhalt, mochte sich auch die ihm in dem königlichen Patente zuertheilte Aufgabe „qui prudenti moderamine concordes atque mutuo inter se amore junctos conservaret collegas omnes et de scriptis eorum atque conatibus literariis, si qua suboreretur dissensio, pro ingenii et doctrinae maturitate senten-

1) „Augustissimo rege indulgentissime annuente societas scientiarum regia et electoralis dicitor". Nur an dieser Stelle des Gründungsstatuts S. XXII findet sich der Zusatz et elect., sonst heißt sie hier und in andern amtlichen Actenstücken von Anfang an nur: soc. regia.

2) Zeitschr. des histor. V. f. NS. S. 119.

tiam dicere posset“ [1]) ohne persönliche Anwesenheit schwerlich durchführen lassen. Dem Bedürfniß der Leitung an Ort und Stelle suchte man durch Einrichtung eines Directoriums zu entsprechen, das zwischen den beiden ältesten Mitgliedern der Gesellschaft halbjährlich wechseln sollte.

Das Gründungsstatut [2]) hatte für alle die verschiedenen Mitgliederclassen bestimmte Zahlen festgesetzt, selbst für die Ehrenmitglieder. Es unterschied: collegae honorarii, ordinarii, absentes, extraordinarii. Dazu kamen noch sex viri juvenes Gottingae degentes als hospites ordinarii. Der Ehrenmitglieder sollten drei, der auswärtigen neun, der außerordentlichen drei sein. Ordentliche Mitglieder gab es statutenmäßig nur eins für jede der drei Classen; dazu kamen der praeses perpetuus und der secretarius. Die Statuten besagten darüber: neque licitum esto plures legere, nisi gravissimae rationes illud suaserint, ne sensim minus honorificum habeatur collegio scientiarum adscribi. Außer dem angegebenen Motiv wirkte sicherlich die finanzielle Rücksicht ein, daß außer dem Präsidenten- und dem Secretairposten die Stellen der drei ordentlichen Mitglieder, wenn auch bescheiden, mit je 60 Thalern dotirt waren. Aber wie dem auch sei, die Beschränkung der Societät auf eine so kleine Zahl von Mitgliedern wird man nicht anders als einen Grundfehler bezeichnen können, der in den alsbald entstehenden Schwierigkeiten sich empfindlich rächte. Die Verhinderung, der Wegfall eines Einzelnen mußte das ganze Werk ins Stocken bringen; die häufige Nothwendigkeit von Ersatzwahlen Bewegung und Intrigue hervorrufen. Je kleiner die Zahl war, um so mehr entstand die Gefahr einer Ueberhebung der so Ausgezeichneten über ihre Collegen von der Universität, einer Scheidung der Societätsmäßigen von den Nicht-Societätsmäßigen.

Bei Hallers Weggang von Göttingen bestand die Societät aus den drei ordentlichen Mitgliedern: Hollmann in der physicalischen oder, wie man damals meistens sagte, physischen Classe, Segner in der mathematischen, Joh. Matthias Gesner in der philologisch-historischen Classe. Außerordentliche Mitglieder waren Tobias Mayer, Achenwall und Röderer. Da Joh. Andreas Segner, seit 1735 Professor der Physik und Mathematik in Göttingen, sich in

---

1) Commentarii soc. reg. scient. Gott., tom. I (1752) S. XXVI.

2) Mitgetheilt in tom. I der Commentarii S. X: „ut sciant omnes, qui commentarios nostros legent, quae nobis leges praescriptae sint, earum exemplum typis expressum addimus paucis exceptis, quae ad alios non spectantia nobis solis servamus“.

seiner Erwartung, Hallers Nachfolger im Präsidium zu werden, getäuscht sah, verließ er die Societät und vertauschte Ostern 1755 Göttingen mit Halle. Ihm die Präsidentenstelle zu übertragen verbot sich trotz seiner wissenschaftlichen Verdienste und seines Alters durch die Rücksicht auf Haller; denn Segner, obschon dessen Schwager[1]), gehörte zu denen, die Haller als seine entschiedensten Feinde in Göttingen ansah.

Eine Zeitlang bewährte sich die im Sommer 1753 getroffene Auskunft. Das Directorium wechselte halbjährlich zwischen Gesner (geb. 1691) und Hollmann (geb. 1696). Michaelis fungirte als beständiger Secretair. Ein Mann in der Mitte der dreißig, seit 1746 außerordentlicher, seit 1750 ordentlicher Professor in der philosophischen Facultät, hatte Michaelis zwar noch wenig von dem geleistet, was ihn in der Wissenschaft berühmt gemacht hat[2]), war aber doch schon, abgesehen von der Tüchtigkeit in seinem Fache, durch seine Gewandtheit, Energie und litterarische Vielseitigkeit eine wichtige Persönlichkeit in wie außerhalb der Societät geworden. Durch seine Redaction der gelehrten Anzeigen, die er in der schwierigen Zeit nach Hallers Weggang an dessen Stelle übernahm, durch seine eifrige Mitarbeit an dem Blatte erwarb er sich ein großes Verdienst. Zwei der schönsten Briefe des jungen Lessing haben wir dieser Thätigkeit zu danken[3]). Der Nachfolger Hallers war Michaelis auch in der Gunst des Ministers geworden. Die Annäherung ist wahrscheinlich eben durch die Heimkehr Hallers herbeigeführt. Die Ordnung mannichfacher damit zusammenhängender Verhältnisse, die sofort auftauchende Frage der Rückberufung Hallers machten es wünschenswerth, einen Vertrauensmann zu haben, der zwischen Bern und Hannover vermittelte. Dazu eignete sich niemand besser als Michaelis, der Hallern in der letzten Zeit nahe gestanden hatte, und schon mit Hannover mancherlei Verbindung unterhielt. Es bahnte sich ein lebhafter Briefwechsel und Verkehr zwischen Michaelis und Rathgebern des Ministers wie Scheidt, Götten, Joh. Friedr. Jacobi und dem Minister selbst an, so daß Gesner 1760 in einer Bibliotheksangelegenheit äußern konnte: „ist etwas zu erhalten, so ist es gewis unter den jetzigen Um-

1) Hallers dritte Frau, mit der er seit 1741 verheiratet war, war eine Tochter des Professors der Medicin Teichmeyer zu Jena. Deren Schwester Sophie war seit 1732 mit Segner verheiratet. Ein dritter Schwiegersohn Teichmeyers war der bekannte Jurist und Philosoph Darjes zu Frankfurt a. O.

2) Die Wendung bei Erich Schmidt, Lessing I 138: kein geringerer als Prof. Michaelis erscheint deshalb für diese Zeit etwas anticipirt.

3) Redlich, Lessings Briefe I Nr. 16 und 17, beide v. J. 1754.

ständen nicht anders als durch E. W. und Ihrer Freunde bona officia bey Illustrissimo Maecenate zu erhalten“ [1]).

Haller führte das Präsidium nicht blos dem Namen nach. Niemand arbeitete für die Publicationen der Gesellschaft so fleißig wie er. Er sandte Abhandlungen ein, die in den Monatssitzungen der Societät verlesen wurden. Jeder Band der Commentarii brachte Beiträge von ihm. Der Direction der Göttingischen Gelehrten Anzeigen — oder, wie sie zur Zeit noch hießen: Göttingische Zeitungen von Gelehrten Sachen — hatte sich Haller schon seit 1747 angenommen. Er hatte sie 1753 mit der Societät in Verbindung gebracht, die seitdem Verlegerin des Blattes war und die Aufsicht über die Redaction führte. Haller blieb nach seinem Abzug von Göttingen der getreueste Mitarbeiter der Anzeigen; ihre medicinischen und naturwissenschaftlichen Artikel, ihre Berichte über Reisebeschreibungen rühren überwiegend von ihm her, und die Recensionen dieser Fächer nehmen einen so großen Raum ein, daß es manchem Leser des Guten zu viel dünkte. Außerdem besprach Haller aber auch Erscheinungen der philosophischen und der schönen Litteratur, der deutschen wie der außerdeutschen. So sind z. B. die Schriften Voltaires und Rousseaus von ihm angezeigt, und er ist deshalb von Voltaire mit dem Titel des Journaliste de Gottingue beehrt worden. Dem Gebiete der politischen Oekonomie in dem ausgedehnten Sinne, den man damals mit der Bezeichnung verband, gehört gleichfalls eine große Zahl von Hallers Beiträgen an. Zu dem Aufschwung, den die Anzeigen nahmen, und dem Ruhm, den sie erlangten, hat Hallers Thätigkeit wesentlich mitgewirkt. Die Vielseitigkeit des Blattes, der rasche Ueberblick, den es über die neueste Litteratur gewährte, namentlich auch die damals schwer zugängliche des Auslandes, verschafften ihm weite Verbreitung. Der Curator legte im Interesse der Sache wie in dem der Universität und Societät großen Werth auf das Organ, für das er eine Art Bannrecht in Anspruch nahm. Unter den moralischen Wochenschriften, welche auch in Göttingen Eingang fanden und unter rasch wechselnden Namen, meistens von Rudolf Wedekind herausgegeben, seit den vierziger Jahren erschienen [2]), ließ es sich eine, Niemand betitelt, beikommen, dann und wann von gelehrten Männern und Sachen etwas zu berichten. Der Curator erblickte darin einen Eingriff in das Privilegium der Gött. Gelehrten

1) Michaelisscher Briefwechsel Bd. IV Bl. 83. E. W., E. H. hier und im Folgenden immer für Ew. Wohlgeboren, Hochwohlgeboren.

2) Pütter, Gel. Gesch. II, S. 303. Gödeke, Grundriß IV S. 20 (§ 204 Nr. 25).

Anzeigen und wies den Censor, Gesner, durch ein Rescript vom 27. März 1756 an, den Druck nicht zu gestatten, sobald in dem Wochenblatt gelehrte Schriften recensirt oder Auszüge aus solchen gebracht würden; solange das Blatt sich auf die bloße Meldung des Titels gelehrter Schriften oder die Anzeige von Sterbefällen gelehrter Männer beschränke, solle ihm nichts in den Weg gelegt werden[1]). Münchhausen sorgte dafür, daß den Gel. Anzeigen die neue Litteratur aller Wissenszweige zu Gebote stand. Bei neuen Bücheranschaffungen, die alle damals von Hannover aus geschahen und durch des Curators Hand giengen, bedauerte er es wohl, wenn nichts Anzeigenswerthes darunter war, oder äußerte im Voraus seine Freude über die schöne Recension, zu welcher das neu angeschaffte Werk Veranlassung geben werde. Er wachte auch darüber, daß stets ein Stamm tüchtiger Mitarbeiter des Blattes vorhanden war. Der Tod oder Rücktritt eines Recensenten, die Frage wer zu seinem Ersatz heranzuziehen sei, bildete den Gegenstand sorgfältiger Erwägung in den Briefen, die der Minister mit seinen Vertrauensmännern wechselte. Aufmerksam verglich er die Gel. Anzeigen mit andern litterarischen Organen, räumte ihrem Inhalte den Vorzug vor den Leipzigern ein, mußte aber zugeben, daß sie den Göttingern an Novitäten voraus waren. Man weiß, welche Rolle das studium novitatis in Lehre und Litteratur des vorigen Jahrhunderts spielte. „Die Geschwindigkeit der Nachrichten ist eines unsrer größten Verlangen" hieß es in dem Redactionsprogramm der Gel. Anz. von 1753. Der Inhalt der Anzeigen wurde aber noch in einem andern Sinne von Hannover aus controllirt. Gewisse Bücher zu besprechen wurde wohl untersagt: die oeuvres du philosophe de Sans Souci sollen auf hohe Ordre nicht erwähnt werden, meldet Michaelis an Haller, bey der neuen Edition erhalte ich neue Instruction davon[2]). Scheidt, der aus seiner Kopenhagener Dienststelle ein gutes Stück Byzantinismus nach Hannover mitgebracht hatte, beschwor Haller, zu verhüten, daß in den Gelehrten Anzeigen nichts vorkomme, was den König von Dänemark Friedrich V. offendiren könne; „denn wir verehren in dero geheiligter Person einen Monarchen, in deßen huldreichem Angesicht sich die Gnade und Menschen Liebe geschildert zu haben scheinet", und immediate vor dies selbe Angesicht kommen seit einiger Zeit die Gött. Gel. Zeitungen[3]). In heikeln staats-

1) Hollmann, Chronik Bl. 184[a].
2) 1760 April 7 (Bern, einzelner Brief).
3) 1751 Juli 26 (Bern Bd. 46 n. 74).

rechtlichen Angelegenheiten ist manche Anzeige in Hannover unter den Augen des Ministers von Scheidt, von Strube u. a. geschrieben oder einer in Göttingen verfaßten Schrift eine Recension nachgesandt worden, die ihr die gefährliche Spitze abbrach[1]). Scheidt unterschied unter seinen für die G. G. A. bestimmten Aufsätzen: alles was er nomine proprio einsende, pressire nicht und könne die Redaction darüber nach Belieben disponiren; andere mache er aber auf höhern Befehl, „und wann selbige einmahl aus meiner Hand sind, so habe ich darüber weiter nichts zu sagen“[2]).

Nicht zum wenigsten waren die G. G. A. dazu bestimmt, über die in Göttingen selbst entwickelte litterarische Thätigkeit zu berichten und damit zur Ausbreitung des Ruhmes der Universität beizutragen. Der Fleiß der Professoren lag dem Curator sehr am Herzen. Gleich nach Hallers Abgang lief ein „sehr unangenehmes und heftiges Promemoria“ ein, das den Ausfall des Artikels Göttingen in den letzten fünf Nummern der Anzeigen rügte[3]).

Neben den Abhandlungen der Societät und den Gelehrten Anzeigen existirte eine Zeitlang noch eine dritte litterarische Unternehmung, bei der die Mitglieder der Gesellschaft in erster Linie betheiligt waren. Seit 1752 erschienen Relationes de libris novis, bestimmt zur Aufnahme so ausführlicher Auszüge aus neuern Schriften, daß dadurch einigermaßen der Mangel des Buches selbst ersetzt werden konnte. Man wollte nur solche Bücher berücksichtigen, die etwas neues und der Billigung würdiges enthielten. Die Abfassung in lateinischer Sprache weist aber wohl noch auf einen anderen Zweck hin, zumal sich mitunter Besprechungen derselben Bücher in den Relationes finden, die auch in den Gelehrten Anzeigen, wenngleich von andern Verfassern, recensirt sind. Vermuthlich sollten die Relationen eine Art gelehrten und vornehmen Seitenstücks zu den Anzeigen für das Ausland bilden. Solche internationale Absichten lagen dem damaligen Göttingen nicht fern; und die starke Berücksichtigung der ausländischen Litteratur in den Relationen bestätigt diese Zweckbestimmung. Die Mitarbeiter der vierteljährlich in Fascikeln von 18 Bogen erscheinenden Zeitschrift waren ordentliche und auswärtige Mitglieder der Societät, obenan wieder deren Präses. Die Zeitschrift erschien in den Jahren 1752—55 und brachte es auf 13 Fascikel, von denen die ersten acht im Verlage der Wittwe Vandenhoeck, die letzten fünf sum-

1) Pütters Selbstbiographie I S. 208.
2) Scheidt an Haller 1751 Juli 26 (Bern Bd. 46 n. 74).
3) Michaelis an Haller (Bern Bd. 12 n. 94).

tibus Eliae Luzac, der auch vom tomus III (z. J. 1753) ab den Verlag der Commentarii übernommen hatte, veröffentlicht wurden. Frau Vandenhoeck, die nach dem Tode ihres Mannes (1750) Buchhandlung und Verlag fortgesetzt hatte, war mit der Societät und einzelnen Universitätsmitgliedern, namentlich mit Haller in Differenzen gerathen und hatte sich im Frühjahr 1753 vom Verlag der Commentarien und Relationen losgesagt. „Sie wollte ordentlich über den Minister tyrannisiren" — schreibt Michaelis an Haller — „was dieser wünschte, wenn er auch die besten Bedingungen machte, ward von ihr abgeschlagen" [1]). Diese Begründung mag der Briefschreiber Haller gegenüber für ausreichend gehalten haben. In Göttingen wußte man, daß die kostbaren Kupfer des zweiten Bandes der Commentarien, welche die Abhandlung Hallers forderte, der Verlagshandlung so beschwerlich gefallen waren, daß sie erklärt hatte, nur wenn die Regierung einen ansehnlichen Beitrag zu den Kosten bewillige, die Fortsetzung des Werkes übernehmen zu können [2]). Die Regierung sah sich nach einem andern Verleger um und auf den Rath des Geheimen Canzleisecretairs Georg Brandes, der den Mann auf seinen Reisen kennen gelernt haben mochte, wurde Elias Luzac aus Leiden nach Göttingen gezogen. Der neue Universitätsbuchhändler war ein studirter Mann, der sich mit philosophischen Arbeiten beschäftigt hatte. Als die berüchtigte Schrift La Mettrie's l'homme machine (1748), die aus seiner Presse hervorgieng, ihm Verfolgungen zuzog, vertheidigte er sich durch: l'homme plus que machine, eine Brochüre, die sich selbst durch die Bemerkung auf dem Titelblatte charakterisirt: ouvrage qui sert à refuter les principaux arguments, sur lesquels on fonde le Materialisme. Die zweite Auflage dieser Brochüre ist in Göttingen erschienen [3]), wie andere seiner Verlagswerke dieser Zeit als à Gottingue et Leide erschienen bezeichnet sind [4]). Durch die Gewinnung Luzacs dachte die Regierung verschiedenen Interessen zugleich zn dienen und bewilligte günstige Bedingungen. Gegen die Verpflichtung zur Anlage einer holländischen Druckerei und Unterhaltung eines großen Buchladens, in dem insbesondere auch die ausländische Litteratur zu haben war, gewährte sie Luzac einen

1) 2. Sept. 1753 (Bern Bd. 12 n. 134).

2) Hollmann Bl. 50[b] und 54[a].

3) Die erste Ausgabe ist Londres 1748, die zweite Gottingue chez l'auteur 1755 datirt. Erst diese nennt den Verfasser und den Professor Jean Lulofs in Leiden als den, dem das Werkchen gewidmet ist.

4) Hollmann Bl. 57[b] führt an: Ch. Bonnet, Recherches sur l'usage des feuilles dans les plantes 1754.

Vorschuß von 6000 Thalern unter Verzicht auf Rückzahlung, solange die Handlung in Göttingen verblieb, das alleinige Recht des Drucks der Inaugural-Dissertationen, Postfreiheit und legte ihm den Titel eines Obercommissarius bei. Dagegen verstand sich Luzac der Societät gegenüber dazu, die drei nächsten Bände der Commentarien auf seine Kosten zu drucken, 32 Freiexemplare an die Societät abzuliefern und ein Honorar von einem Speciesducaten für den Bogen zu zahlen. Ueber den Verlag der Relationen waren ähnliche Abreden getroffen[1]). Ein paar Jahre hindurch gieng alles gut. Die Vereidigung Luzacs als Universitäts-Buchhändlers und Buchdruckers, die sich verzögert zu haben scheint, war aber kaum am 30. September 1755 bewerkstelligt, so kam es zu Klagen von allen Seiten. Die Regierung beschwerte sich darüber, daß Luzac die Anlage eines wohlversehenen Buchladens und einer Druckerei unterlassen habe, die Societät daß er den weitern Druck von Commentarien und Relationen weigere, Luzac daß die Autoren ihre Manuscripte unregelmäßig einlieferten. Die Hauptpersonen auf beiden Seiten, Luzac und Michaelis als Vertreter der Societät, verdarben dann die Sache alsbald gründlich. Jenem wurde vorgeworfen, die ganze Angelegenheit zu holländisch, zu kaufmännisch behandelt zu haben[2]); auch die Regierung meinte in ihrem Rescript, wenn der Verleger nicht durch unanständige, hieselbst ungewohnte Begegniß sich die Mitarbeiter alieniert hätte, würde ihm genugsames Material nicht gefehlt haben[3]). Michaelis legte man zur Last, mit zu großer Hitze oder, wie ein andermal gesagt ist, mit zu viel akademischer Grandessa verfahren zu sein. In Hannover verkannte man den Antheil, den Michaelis an dem Hergange hatte, nicht, und er selbst datirte von hier ab die Mißgunst, in der er bei Georg Brandes stand[4]). Das Resultat des Conflicts war, daß Luzac nach Holland zurückgieng, der Druck der Commentarien mitten im fünften Bande stecken blieb, und ein Prozeß von Seiten der Regierung wie von der der Societät gegen Luzac angestrengt wurde. Der fünfte Band der Commentarien ist nie erschienen,

1) Die Verträge vom October 1753 sind abgedruckt in den von Luzac veröffentlichten Prozeß-Schriften zwischen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen und Elias Luzac dem jüngern (1757) S. V ff.

2) Murray an Haller 1765 Mai 8 und 1768 Mai 25 (Bern Bd. 24 n. 66 und 28 n. 111).

3) Rescript v. 1755 Nov. 30 (Prozeßschriften S. LXXII). Heyne bezeichnet Luzac in der Memoria auf Michaelis als „homo rerum suarum intelligens et attentus, verum idem moribus asperis et inficetis".

4) Michaelis an Haller 1756 Januar 4 (Bern, einz. Brief).

wenn man auch zuweilen die Bogen so bezeichnet findet[1]), die von diesem Bande bereits gedruckt waren, als der Rechtsstreit entstand, und solange mit Beschlag belegt blieben, als dieser währte. Die Relationen giengen ebenfalls ein, und wenn Michaelis auch eine Zeitlang daran dachte, den Verlag zu übernehmen, so schnitt der Ausbruch des siebenjährigen Krieges und die Besetzung Göttingens durch die Franzosen die Verwirklichung neuer litterarischer Pläne völlig ab. Wurden auch noch Sitzungen der Societät gehalten und Abhandlungen vorgelesen, zur Uebernahme des Druckes hatte kein Verleger mehr den Muth. Ueber den politischen Calamitäten gerieth auch der Prozeß gegen Luzac ins Stocken, und als er nach zehn Jahren zu Ende kam, hatte sein Ausgang kein Interesse mehr.

Als Münchhausen nach Wiederherstellung des Friedens sich die Hebung Göttingens angelegen sein ließ, war die Societät und was mit ihr zusammenhieng neu zu beleben eine seiner vornehmsten Sorgen. In dem Personalbestande der Societät waren inzwischen mannigfache Aenderungen vorgegangen. Neu als ordentliches, aber überzähliges und deshalb vorläufig unbesoldetes Mitglied war Kästner in die Societät, der er als auswärtiges Mitglied schon seit deren Begründung angehörte, eingetreten, als er zu Ostern 1756 von Leipzig nach Göttingen kam, um den Lehrstuhl Segners (oben S. 57) für Mathematik und Physik zu übernehmen. Kästners Eintritt in die Societät hatte mancherlei Unzufriedenheit zur Folge. Die außerordentlichen Mitglieder hatten gehofft, bei Gelegenheit der eingetretenen Vacanz zu ordentlichen ernannt zu werden. Praeter opinionem et expectationem, wie sich Heyne ausdrückt, wurde beschlossen, sie alle in ihrer bisherigen Stellung zu belassen und Kästner allein zum ordentlichen Mitgliede zu machen. Die Zurücksetzung, welche gelehrte und verdiente Männer, wie Achenwall, Röderer, der Botaniker Zinn dadurch erfuhren, trug früh zur Schädigung der Societät bei[2]). An dem unerwarteten Ausgang maß man mit Recht dem zeitigen Secretair einen großen Theil der Schuld bei. Ueber den Andrang der außerordentlichen Mitglieder und ihre Unzufriedenheit mit der ihnen durch das Statut zugewiesenen Stellung schon lange mißvergnügt, hatte Michaelis sein Amt als Secretair niedergelegt, war aber ordentliches Mitglied geblieben und zwar mit dem Range über Tobias Mayer, hatte die

1) Den Inhalt des Bandes, der mitten in einer Abhandlung Gesners Explicatio marmoris Corcyraei abbricht, verzeichnet Pütter II 287.

2) Heyne, Elogium Kaestneri S. 6.

Redaction der Anzeigen und — nicht zu vergessen — „das völlige utile“ seiner bisherigen Stellung behalten[1]). Mr. Michaelis a eu de vives disputes avec quelques membres de la société; il est vif — et tout va de travers à Gottingue schrieb damals Haller an Zimmermann[2]). In die Secretairstelle wurde Hamberger, ein Neffe Gesners, seit 1747 Bibliothekscustos, seit 1755 außerordentlicher Professor der Philosophie, gewählt, blieb aber nur kurze Zeit im Amte. Provisorisch ersetzte ihn Kästner 1761—62, bis in der Person Joh. Philipp Murrays (ob. S. 54) ein dauernder Vertreter gefunden war.

Kästner fand bei seinem Eintritt in die Societät Tobias Mayer als Mathematiker, Hollmann als Physiker vor. So hoch er jenen stellte, so gering dachte er von diesem. Seit 1734 ordentlicher Professor in Göttingen, war Hollmann (oben S. 57) nicht blos den Jahren nach ein Mann der alten Schule. Wegen seines Charakters, seiner frühern Verdienste, seiner Verwaltungstalente, schon als einer der wenigen überlebenden Zeugen, die die Wiegenzeit der Universität gesehen hatten, sich eines großen Ansehens erfreuend, wurde er gleichwohl die Zielscheibe des Kästnerschen Spottes.

Es ist schwer, über Kästners Persönlichkeit zu einem abschließenden Urtheil zu gelangen. Er ist von seinen Beurtheilern ebenso hoch erhoben wie tief verdammt worden. Auf dem Denkmal, das ihm Herzog Friedrich August von Braunschweig-Oels auf unserer Bibliothek gesetzt hat, heißt er: der Einzige seiner Art. Der Zufall hat es gewollt, daß unmittelbar daneben im historischen Saal die Büste des Mannes steht, der ihm den grimmigen Nachruf in das Decanatsbuch der philosophischen Facultät schrieb[3]). Auch

---

1) 1756 Febr. 15 (Bern, einzelner Brief an Haller).

2) Bodemann, Von und über A. v. Haller (Hannover 1885) S. 44.

3) Da der Eintrag in Christ. v. Schlözer, A. L. v. Schlözers öffentliches und Privatleben I (Leipz. 1828) S. 162 — nachher als Schlözers Leben cit. — unvollständig und fehlerhaft abgedruckt ist, so theile ich ihn im Folgenden aus dem Liber Decanorum p. 35 mit, wo der Text sich übrigens weder undeutlich noch mit Abkürzungen von Schlözers kräftiger Hand geschrieben findet:

Ego secundum Decanus August. Ludov. Schlözer Decanatum gessi inde a 2. Jul. 1799 usque ad 2. Jul. 1800.

Obiit quoque die 20. Jun. Kästner, vir multiplicis eruditionis scriptisque mathematicis clarissimus, verum bonis omnibus odiosus ob criminationes continuas, quibus ab a. 1761 usque ad ultimum vitae terminum jam octogenarius viros vitae integros atque ipsos adeo collegas gravissimos, legum nostrarum academicarum immemor insectatus est. Jocari se dictitabat homo, facie habitu moribusque ipse jocis opportunissimus; sed jocandi genus elegerat illiberale, petulcum subinde flagitiosum aç obscenum. Quum nullum quantum equidem novi

wer sich an Kästners Epigrammen blos um ihrer Kunst und ihres Witzes willen zu ergötzen vermochte, mußte sich sagen, daß die Art und Weise, wie Kästner sich seiner Gabe bediente, öffentlichen Schaden anrichtete. „Die Satyren thun nichts zur Wahrheit und erwecken nur Haß und Unfrieden.“ Diesen Ausspruch Münchhausens [1]) bestätigen die Zustände der Göttinger Gesellschaft vollständig, an deren fortschreitender Zerrüttung der Pasquillenunfug einen erheblichen Antheil hatte. Bald waren es gepfefferte Briefe, bald Flugblätter oder Reden, die gegen einen Collegen losgelassen wurden, am liebsten aber Epigramme. Die kleinen, spitzen, leicht sich einprägenden Dinger liefen wie Scheidemünze von Hand zu Hand und wirkten wie Scheidewasser. Bald in diesem, bald in jenem Auditorium tauchte ein Spottvers auf. Nicht immer mochte, was unter Kästners Namen umlief, auch auf seine Rechnung gehören. Solches Wesen wirkte ansteckend. Aber wo von Satyren die Rede war, schloß man auf Kästner. „Ich sehe“, schrieb Münchhausen an Heyne, „daß in dem dortigen Wochenblatt mit Satyren gedroht wird; sollte etwa Herr K. auch daran arbeiten?“ [2]) Kästner glaubte sich mit der Schuld der ihn umgebenden Personen und Verhältnisse rechtfertigen zu können. „Von dem Zungentodtschlage bin ich so ziemlich frey. Von dem Federtodtschlage wüßte ich mich freylich nicht anders zu reinigen, als daß ich ihn allemal im Kriege für Wahrheit und Vernunft begangen habe“ [3]). Mochten Verhältnisse und Personen oft genug Grund zu seinen Angriffen bieten, die Freude an der witzigen Kleinkunst griff nicht selten darüber hinaus, traf Männer von anerkanntem Verdienst und schreckte vor groben Cynismen gegen sie und ihre Familienglieder nicht zurück. Hollmann und der um die Technologie so hoch verdiente Johann Beckmann, der Hollmanns Nichte, Fräulein Schlosser, heiratete, haben das weidlich erfahren müssen [4]). Für die Geschichte der Societät wurde der Conflict Kästners mit

poenitentiae signum dederit, ad quam ei tamen satis spatii natura largita est: haec huc in acta referre meo collegarumque aliquot meorum nomine volui, debui. Legat posteritas, si qua erit, Autobiographiae meae sect. XI atque crimine ab uno discat reliqua omnia.

1) Heeren, Heyne S. 100.

2) Heeren, Heyne S. 99. Statt „solte etwa“, wie die Hs. hat (Briefe an Heyne II Bl. 41 b), liest der Druck: „folglich wird“. Der Abdruck der Briefe ist auch sonst keineswegs correct.

3) Werke IV 107. Ich citire nach der Berlin 1841 erschienenen Ausgabe der ges. poet. u. pros. schönwissenschaftl. Werke.

4) Viel über den „Kästnerschen Pasquillenunfug“ in Schlözers Leben I 159 ff., aber verblendet parteiisch und ohne allen Sinn für Humor.

Hollmann wichtig. Der Gegensatz zwischen beiden Männern war sachlicher Art. Hollmann hatte sich von der Philosophie und der sg. natürlichen Theologie ausgehend den Naturwissenschaften zugewandt und glaubte Physik lehren zu können, ohne sich auf Mathematik zu verstehen. Ja, er hatte es sich auch wohl beikommen lassen, geringschätzig von der Mathematik zu reden. Auf diesem Gebiete verstand Kästner keinen Spaß. Wie der lebenslängliche Conflict mit Schlözer davon seinen Ausgang nahm, daß dieser die Mathematik für die unmittelbare Aufklärung einer Nation unfruchtbar genannt hatte [1]), so hatte der ältere Gegensatz gegen Hollmann in einer ähnlichen, aber unberechtigtern Aeußerung seinen Grund. Der physikalischen Thätigkeit Hollmanns, der in seinen Vorlesungen großen Zulauf hatte und den Offizieren der Garnison den vor den Studenten gehaltenen Vortrag in einer besonderen Stunde wiederholen mußte, machte Kästner den oft wiederholten Vorwurf, daß er anstatt zu lehren spiele. Am drastischsten hat er das in einem Epigramme ausgedrückt, das an eine bekannte Satyre Lichtenbergs vom J. 1777 anknüpft: „Jack Philadelphens Spiel verscheuchst, Augusta, du? Und sahst doch vierzig Jahr den Spielen Hollmanns zu“ [2]). Eine ganze Anzahl von Epigrammen ist auf Hollmann gemünzt, und unter Kästners Reden gelten ihm die beiden: über den Werth der Mathematik, wenn man sie als einen Zeitvertreib betrachtet vom J. 1759 und die über die Verbindung der Mathematik und Naturlehre vom J. 1768 [3]). In öffentlicher Polemik sind sich beide erst in den siebziger Jahren gegenüber getreten, und 1780 hat Kästner in dem Schreiben an Hrn. Hofrath und Leibmedicus Zimmermann in Hannover den Streit mit Hollmann noch einmal in seiner Weise recapitulirt [4]). Jetzt reichte der Gegensatz zu Kästner aus, um dem alten Herrn die Societät zu verleiden. Auch die Societät als Ganzes hat Kästner Stoff für seine satyrische Feder geliefert. In einem Schema, das in so viele Abtheilungen und Unterabtheilungen zerfällt, daß neben lateinischem und griechischem Alphabet noch das hebräische zur Hülfe genommen werden muß, sind die Mitglieder der Societät nach ihren verschiedenen Beziehungen zur Gesellschaft

---

1) Vgl. meinen Art. Schlözer in der Allgem. deutschen Biogr. 31. S. 578.

2) Werke I 71 Nr. 235.

3) Werke III 80 und 101. Spitzen gegen Hollmann hat Kästner auch sonst, wo er konnte, angebracht; so in seiner 1764 niedergeschriebenen Selbstbiographie, die in Schlichtegrolls Nekrolog f. 1800 wiederabgedruckt ist, S. 179 u. 201.

4) Werke IV 59 ff.

zusammengestellt[1]). Den Directoribiles Gesner und Hollmann stehen als Indirectoribiles Michaelis, Mayer und Kästner gegenüber, die noch weiter in Mitglieder mit und ohne Pension geschieden werden. Die außerordentlichen Mitglieder theilt die „Tafel" in drei Classen: weder kommende noch arbeitende, kommende und nicht arbeitende, kommende und arbeitende, und überweist der ersteren den Geographen Franz, der von Nürnberg nach Göttingen gerufen war, der zweiten Achenwall, der dritten Röderer und Lowitz, die dann noch als zum Austritt aus der Societät breitschlagende und breitgeschlagene unterschieden werden.

Stellt die Tafel den Bestand der Societät zu Anfang des J. 1760 dar, so schmolz das kleine Häuflein in den nächsten Jahren noch mehr zusammen. Hollmann, der zu Neujahr 1761 das Directorium hätte übernehmen müssen, lehnte das Amt ab und trat aus der Societät. Es fehle der Societät, so motivirte er seinen Schritt, schon lange an einer hinlänglichen Anzahl von Mitgliedern, ihre Arbeiten könnten auf anständige und societätsmäßige Art seit 5 Jahren nicht mehr zum Druck gebracht werden; darüber gehe den Mitgliedern die Lust verloren, Sachen von einiger Wichtigkeit auszuarbeiten; die vornehmsten Einkünfte der Societät fingen an zu Wasser zu werden und es bestehe nicht einmal mehr ein gewisser und anständiger Ort für ihre Zusammenkünfte[2]). Trotz der Fülle von Gründen hat er einen sehr wirksamen verschwiegen: die boshaften Angriffe Kästners. Gesner, dem nun das Directorium allein aufgetragen wurde, starb, ein Opfer des Krieges, im August 1761. Franz folgte ihm im nächsten Monat, Tobias Mayer 1762, Roederer 1763. Da Achenwall und Lowitz ihre Stellen niederlegten, so blieben nur Michaelis und Kästner übrig. Nach dem Tode Gesners wurde Michaelis Director; aber wen und was hatte er zu dirigiren? Kästner war am wenigsten der Mann sich dirigiren zu lassen, namentlich nicht von Michaelis, mit dem er bald in arge Zwistigkeiten gerieth.

---

1) „Die Tafel der K. Gesellschaft der Wissensehaften zu Göttingen im J. 1760" ist zuerst von Alb. Oppermann „aus Kästners ungedrucktem Nachlaß" mitgetheilt in den Studien und Kritiken der deutschen Journalistik (1838) S. 317 ff., einer rasch wieder eingangenen Unternehmung von Dingelstedt und Beuermann. Wiederholt hat Oppermann die Mittheilung in seinem Buche: die Göttinger gelehrten Anzeigen (Hannov. 1844) S. 5. In den Werken Kästners IV 118 ist das Stück dem erstgenannten Abdruck entnommen.

2) Hollmann hat seine Correspondenz mit Gesner vom Januar 1761 in der Vorrede der Commentationum in reg. scient. societate inde ab 1756 recensitarum sylloge (Gott. 1762) abdrucken lassen.

Es war eine Lebensfrage für die Universität und Societät zugleich, ob und welcher Ersatz für Gesner gefunden wurde. Er konnte nicht glücklicher gefunden werden. An Heyne, der im Juni 1763 nach Göttingen kam, gewann Münchhausen die sicherste Stütze für seine erneuernde Thätigkeit auf allen Gebieten. Hier interessiren zunächst: die Leitung der Bibliothek, der Gelehrten Anzeigen und der Societät. In jeder dieser drei Beziehungen bedurfte es einer Auseinandersetzung mit Michaelis, denn nach Gesners Tode war ihm auch die Direction der Bibliothek, wenn gleich nur provisorisch, übergeben worden. Hier gelang die Lösung am raschesten: zu Ende 1763 legte Michaelis seine Stelle nieder und Heyne hatte nun das plenum directorium (Heeren, Heyne S. 95).

Größer waren die Schwierigkeiten, die sich der Ordnung der beiden anderen Institute in den Weg stellten. Der schwachen Besetzung der Societät war zwar in den letzten Jahren abgeholfen, aber die erforderliche Vielseitigkeit nicht erreicht; denn nur für die philologische Classe waren neue Mitglieder gewonnen: vor allem Heyne, dann auf Betreiben von Michaelis der Kirchenhistoriker Walch, ein Glied der bekannten Jenenser Theologenfamilie, seit 1754 in Göttingen erst als Professor der Philosophie, dann der Theologie angestellt; seit 1764 war auch der Secretair Murray (ob. S. 64) ordentliches Mitglied der Classe geworden.

Erst in den Jahren 1769 und 1770 gelang die Neuordnung. Die Verzögerung erklärte sich daraus, daß sich erst jetzt die Aussicht auf Hallers Rückkehr völlig zerschlug und Münchhausen den Grundsatz befolgte, den er einmal so ausdrückte: soferne als nur möglich ist, suche ich jederman bey gutem humeur zu erhalten[1]). So unzufrieden er auch schon seit langer Zeit mit den Gelehrten Anzeigen, der Societät und ihrer Leitung durch Michaelis war, so nahm er doch erst im Frühjahr 1769 die Reform in die Hand, entschlossen diese Angelegenheit noch vor seinem Abgang zu Ende zu bringen. Er hoffte dabei außer auf Heyne auch auf Haller, der seine Mitarbeit zur Wiederherstellung der Gesellschaft, deren Präsident er noch immer war, nicht weigern konnte, und, da sich die engen Beziehungen zu Michaelis in den letzten Jahren gelockert hatten, voraussichtlich auch nicht weigern wollte. Ueber die Thätigkeit Hallers ergeben die Acten nicht viel. Um so eifriger nahm sich Heyne der Aufgabe an.

Am 12. Febr. 1769 hatte Münchhausen an Heyne geschrieben:[2])

1) 10. October 1763 (Briefe an Heyne I Bl. 19).

2) Briefe an Heyne II Bl. 117.

„ich erkenne gar wohl, daß so wenig die gelehrte Gesellschaft als die dortige Anzeigen bey der caprice und interessirten Absichten einer Person wohl fahren werden.“ Wer gemeint war, konnte dem Empfänger des Briefes nicht zweifelhaft sein. Schon länger bediente sich der Curator Heyne gegenüber dieser oder ähnlicher andeutender Bezeichnungen für Michaelis (Heeren, Heyne S. 90). Er fuhr dann fort: „des Herrn Hallers Hinkunfft ist höchst zweifelhaft, ich habe ihn aber nunmehr dahin gebracht, daß binnen 14 Tagen man wißen muß, woran man ist. Kömt derselbe nicht, so wünsche ich sehr, daß die Direction der gelehrten Anzeigen Ew. Wohlgeb. aufgetragen werden möge“ [1]). Daß Münchhausen sich so objectiv ausdrückt, erklärt sich daraus, daß die Redaction der Anzeigen nicht durch den Curator persönlich, sondern durch das Geheimraths-Collegium vergeben wurde. Am 13. April meldete Münchhausen ganz kurz: „Herr von Haller wird nicht zu uns kommen“ und bat Heyne das ihn schon länger beschäftigende Gutachten, wie Societät und Zeitungen in bessere Ordnung zu setzen seien, zu beschleunigen [2]). Wenige Tage darauf war die Ausarbeitung Heynes eingelaufen, so daß Münchhausen am 21. April schrieb: „es sind sehr schöne gedancken, welche E. W. wegen der Societät und der gelehrten Anzeigen mir zu melden beliebet, davon ich bestmöglichen gebrauch zu machen gedencke. Man fordert heute die Rechnungen von beyden; ich sorge aber, es werde sich dagegen eine gewiße Person aufs euserste streben“ [3]). Am 24. April unterschrieb der Curator das nachstehende an Haller gerichtete Promemoria.

Pro Memoria. [4])

Hannover den 24. April 1769.

Dem Herrn Presidenten von Haller ist am besten bekannt, wasmaßen die Königliche Societät der Wißenschaften zu Göttingen seit einigen Jahren in einer Art von Unthätigkeit ruhe, wenigstens nicht den Eifer beweisen mögen, welcher zu ihrem besonderen und dem algemeinen Besten der Universität zu erwarten gewesen.

So sehr mir dieses nützliche Institut anlieget, so wenig würde ich bis anhero bei deßen Erkaltung haben ruhig seyn können, wenn ich mich nicht mit der Hofnung geschmeichelt hätte, daß der

1) Der Rest des Briefes ist bereits von Heeren, Heyne S. 106 mitgetheilt.

2) Briefe an Heyne Bl. 133 vgl. mit 127.

3) Das. Bl. 135.

4) Bern, Hallersche Correspondenz Bd. 29 Nr. 79, von Schreiberhand, nur die Unterschrift Münchhausens eigenhändig.

Herr President durch ihre Zurückkehr demselben gar bald ein neues Leben wiederum mittheilen würdeu.

Da aber diese Hofnung zu meinem Leidwesen verschwunden ist, so verdoppelt sich nunmehro meine Bekümmerniß darüber, und kan ich nicht länger anstehen, zu deren Wiederaufnahme meine letzteren Bemühungen anzuwenden.

Die Societät hat ihren Ursprung und ihre schönsten Tage dem Herrn Presidenten hauptsächlich zu verdancken, und ich bin gewiß, daß derselbe auch fernerhin die Neigung und den Eifer für sie behalten werde, womit er selbige bisher unterstützet hat. Ich vertraue darauf alleine und erbitte mir daher, die Sache nach ihrer gegenwärtigen Lage in reifliche Erwegung zu nehmen und mir die Mittel an Hand zu geben, wodurch meine Absicht und die Wiederherstellung des Werckes zu seinem alten Flor am besten zu erreichen seyn mögte. Die Societät stehet mit den Gelehrten Anzeigen in einem so wesentlichen Bande, daß jene von dieser gewißermaßen ihr Leben erhält, mithin der Wohlstand des einen ohne das andere nicht wol zu erreichen stehet.

Die Anzeigen haben sich ohnstreitig zeithero aufgenommen[1]). Ihr vermehrter Debit gibt davon sichern Beweis und zugleich Mittel, der Societät unter die Arme zu greifen.

Da ich die Einnahme davon noch nicht eigentlich weiß, auch in dem Rechnungswesen die völlige Richtigkeit mir nicht scheinet, so habe ich desfallß zuförderst Bericht erfordert und werde dem Herrn Presidenten darüber das nähere mittheilen. Indeßen leidet es keinen Zweifel, daß auch bei diesen Anzeigen noch manche Verbeßerung eintreten könne, und wünsche ich auch darüber desselben Gedancken zu vernehmen.

Vorläufig sind mir dabei folgende Umstände vorgekommen, welche ich zu weiterer Prüfung verstelle:

1) Die Direction derselben hat bekantlich der Herr Hofrath Michaelis, und obwol er vielleicht dazu nicht völlig so gut als

---

1) Zu Anfang der sechsziger Jahre war ein starker Rückgang eingetreten. Darauf beziehen sich die oben S. 67 angeführten Worte Hollmanns. Bestimmte Zahlen kann ich nur aus den J. 1769/70 angeben. Damals, als der Absatz sich wieder gehoben hatte, wurde eine Auflage von 800 Exemplaren gedruckt, von denen 642 auf die Post geliefert wurden; 44 vertrieb die Vandenhoecksche Buchhandlung. Seit 1753 war der Umfang des Jahrganges von 52 Bogen auf 78—84 und dementsprechend der Abonnementspreis von 2 auf $2^1/_2$ Thaler — natürlich excl. der Postgelder — erhöht. Nachher war der Preis wieder etwas geringer; denn in dem 1769 eingeforderten Voranschlage der Einnahmen und Ausgaben der Gesellschaft sind für das Exemplar 2 Thlr. 4 Ggr. angesetzt.

zum Mitarbeiter zu seyn scheinet, so wünsche ich doch auf alle Weise nach seinem eigenem Gutfinden ihn darunter beizubehalten, mithin ihm darunter solche Anweisungen zu geben, wodurch der Haupt-Endzweck etwas mehr befördet (!) werden mögte.

2) Die Claßen, woran man bisher noch einigen Mangel bemercket, sind die Jurisprudentz, deutsche Reichshistorie, Mathematik und gewißermaßen auch die politische Oeconomie. Ich will dazu gern mehrere Arbeiter ansetzen. In ersterem habe ich von dem Dr. Seyberth [1]) nach seiner Rückkunft von einer gelehrten Reise gute Hofnung; in der Historie wünschte ich Herrn Gatterer herbeyzuziehen; in der Mathematik könnte Herr Kestner schon alles füllen, wenn er statt Kleinigkeiten und witziger Artikel sich damit recht befaßen wolte; und in dem letzteren hat man insonderheit von auswärtigen Sachen viele schöne Recensiones von dem Herrn Presidenten bisher erhalten, die denen Anzeigen zu großer Zierde gereichen und um deren Fortsetzung ich inständigst bitte.

In Absicht vieler in Teutschland zum Vorschein und vielleicht nach der Schweitz nicht kommenden Sachen wird alles auf des Herrn Presidenten Ermäßigung ankommen.

3) Um die Arbeiter desto mehr anzumuntern, könnte auch das Honorarium von 4 auf 5 Rthlr. für den Bogen erhöhet, daneben die Anstalt zu richtigerer Zahlung als bishero getroffen werden.

Mit der Societät selber dürfte es vielleicht schwerer fallen, ihr den rechten Anstoß zu geben, doch verzweifele ich auch desfalls unter des Herrn Presidenten Führung keinesweges, und ist mir dabei folgendes bemercklich worden.

1) Hat man verschiedentlich für einen Fehler gehalten, daß das Directorium in Abwesenheit des Herrn Presidenten ständig sei und dessen Abwechselung gleich bei anderen Academien darum diensahmer geglaubet, weilen sich alsdenn iedwedes ordentliches Mitglied des Werkes desto mehr annehmen, einfolglich daraus ein gewißer esprit de corps erwachsen würde.

---

1) Philipp Heinrich Seyberth aus Idstein in Nassau, ein Schüler Göttingens, begleitete nach seiner Promotion (1767) einen Freiherrn von Lüttichau auf einer Reise durch Holland, England, Frankreich und Italien, wurde während derselben zum außerordentlichen Professor ernannt und zur Bearbeitung des Gebauerschen Corpus juris ausersehen. Er starb aber sehr bald nach seiner Rückkehr (1769 Oct. 14). „Sein frühzeitiger Tod war ein wahrer Verlust für die Universität und die juristische Litteratur“ (Pütter, Gel. Gesch. II 60).

So anscheinend auch dieses ist, so sehr besorge ich doch, daß eine Veränderung darunter für jetzo den Herrn Hofraht Michaelis mismüthig machen dürfte, an deßen Beibehaltung der Societät gar viel gelegen ist.

2) In der Auswahl der ordentlichen Mitglieder scheinet darinnen bishero wol gefehlet zu seyn, daß man zu wenig von der physicalisch- und mathematischen Claße und hingegen zu viel von der philologischen Claße genommen hat, da doch iene das Hauptwerck und diese nur ein Nebenstück seyn sollte. Es ist wahr, die Gelehrten in ienen Fächern sind bey uns selten: doch wißen der Herr President vielleicht auch darin Vorschläge, und ich gebe inzwischen zur Ueberlegung anheim:

3) Ob nicht die Anzahl außerordentlicher anwesender Mitglieder etwa durch Herrn Vogel wegen seiner chimischen Käntniße, Herr Murray med., Wrißberg, Richter jun. und Joh. Beckmann oder sonst zu vermehren seyn mögte.

4) Daß die Preißaufgaben, Vorlesungen und Zusammenkünfte ordentlicher und zweckmäßiger als bishero gehalten werden müssen, leidet wol keinen Zweifel, und wünsche ich insonderheit Bestimmung, wie man die Versamlungen so einrichte, daß man nicht blos mit Verlesung eines Aufsatzes sich begnüge und sodann aus einander eile, sondern sowohl darüber als über die Hauptgegenstände der Societät in eine gründliche und vertraute Beurtheil- und Rathpflegung trete.

5) Es ist gewünschet, daß bei den Zusammenkünften mehr hospites ordinarii zugelaßen und dieselbe bei den vertraulichsten Unterredungen zugegen seyn dürften.

6) Da nicht nur das Archiv, sondern auch die Bücher- und Naturaliensamlung sich noch bei dem Director befindet, so mögte es wol beßer seyn, solches alles in den Saal der Societät zu bringen und iedem ordentlichen Mitgliede den freien Zutrit dazu zu verstatten.

7) Die Ausgabe der Commentariorum so wol fürs Künftige als Vergangene ist endlich wol eine der wichtigsten Betrachtungen, und will ich dazu gern alle Beförderung geben. Gleichwie aber mir überhaupt eine schärfere Auswahl der Abhandlungen als in einigen der ersten Theile erforderlich scheinet, so würde es insonderheit eine Ueberlegung verdienen, wie solche zuförderst für die rückständigen Jahre anzustellen, mithin nur etwa das Vorzüglichste nach und nach herauszugeben, sodann aber auch ob nicht für die künftigen neuen Theile die Physicalisch- und Mathematischen Stücke von denenienigen so blos zur Litteratur gehören abzu-

sondern, mithin von beiderlei Materien zwey verschiedene Werke und Abtheilungen zu machon seyn mögten.

Münchhausen.

An
den Herrn Presidenten der Königl.
Societät von Haller zu Bern.

Ist auch vieles in dem vorstehenden Promemoria dem von Heyne eingereichten Gutachten entnommen, so doch bei weitem nicht alles. Aber man wird verwundert sein zu erfahren, daß gerade die Klage über die Bevorzugung der historisch-philologischen Classe und die Vernachlässigung der übrigen von Heyne stammt. In seinen bei den Akten befindlichen Ideen, den künftigen Zustand der Kgl. Soc. der Wiss. betreffend, v. 17. April 1769 [1]), heißt es: „Vor allen Dingen müßte die Physicalische Classe besetzt werden. Bis dahin hat die ganze Societät keine Consistenz. Da sie, die Societät, neue Wahrheiten und Entdeckungen zu ihrer Hauptabsicht haben soll, so ist es unnatürlich, daß just die Classe, wo es fast allein noch möglich ist, wirkliche Decouverten zu machen, seit so vielen Jahren unbesetzt ist. Hingegen das andre Glied, die philologisch-historische Classe, welche, genau betrachtet, nur ein Accessorium ist, bey dem eigentlichen Plane der Societät ist und seyn muß, hat eine eben so unnatürliche Excrescenz von vier Mitgliedern. Diese Anzahl wäre der Societät eher zum Vortheil in der physicalischen Classe. Aber philologische Wissenschaften sind das gar nicht, was eine Societät wie die unserige ist, heben könnte. Die Besetzung dieser (d. h. der physicalischen) Classe mit einem ordentlichen Mitglied hat allerdings ihre große Schwierigkeiten. Allein wenn wir auch nur einen blosen Repraesentanten in der Stelle hätten, so wäre es uns nicht so nachtheilig, als daß gar niemand vorhanden ist; ob ich gleich gern zugebe, daß ein Mann von Reputation und erkannter Gelehrsamkeit in diesem Fache auf einmal der ganzen Sache eine andere Gestalt geben könnte“. Heyne schlägt dann vor, ohne weiteres die auch im P. M. (oben S. 72) genannten Murray, Wrisberg, Richter und Becmann, deren Wissenschaften mit der Societät in einer ungleich nähern Verbindung ständen als die philologischen, als außerordentliche Mitglieder der physicalischen Classe aufzunehmen. „Durch eine stärkere Besetzung dieser Classe fiel auch auf einmal der Ausschlag in der Societät anders als bisher aus. Sie hätte auch bey Auswärtigen

1) Curatorialarchiv, betr. die Aufnahme der Soc. der Wiss. 1769.

mehr Vertrauen; statt daß sie ietzt als eine hebräisch-griechisch-lateinisch-deutsche Gesellschaft betrachtet wird".

Um das Mißverhältniß zwischen der historisch-philologischen Classe und den übrigen stark hervorzuheben, hatte sich Heyne einer kleinen Uebertreibung schuldig gemacht. Denn die historisch-philologischen Studien als bloßes Anhängsel zu behandeln hatte man bei Begründung der Societät durchaus nicht die Absicht. Von vornherein waren drei Classen eingerichtet und die für die historici und philologi gemeinsam bestimmte den andern ebenbürtig an die Seite gestellt. Ja es wurde gerade als ein Vorzug der neuen Akademie vor andern bestehenden gepriesen, daß sie auch Geschichte und Litteratur in ihren Arbeitsplan aufgenommen hatte, und mit einem gewissen Stolze hob man hervor, daß sie darin das Beispiel der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu London befolge[1]).

Mittheilenswerth aus Heynes Bericht ist noch die Schilderung der Societätssitzungen, da sie nur sehr abgeblaßt in das officielle Promemoria des Curators aufgenommen werden konnte: „bey den Zusammenkünften müßte vor allen Dingen mehr darauf Rücksicht genommen werden, daß sie ihrem Endzweck entsprächen. Jetzt versammelt man sich, steht eine Zeitlang stumm und steif da, dann setzt man sich, es wird gelesen; man gähnt und plaudert; und sobald der Lesende aufhört, so läuft alles über Halß und Kopf zur Thüre hinaus. Der, welcher gelesen hat, weiß weder für wen noch wozu er gelesen hat. Selbst die Gesetze und der ehemalige Gebrauch schreibt hierinnen ganz etwas anders vor. Allein um diesen Gebrauch wieder aufzubringen, gehört dazu, daß nicht der eine allein gehört seyn will, den übrigen zutraut, daß sie auch allenfalls ein vernünftig Wort reden können, und daß alle unter einander ein gegenseitig Zutrauen haben".

Mit den letzten Worten ist die wundeste Seite der Societät berührt. Je weiter man in die Erkenntniß der Göttinger Verhältnisse des vorigen Jahrhunderts eindringt, desto mehr nimmt man wahr, wie tief Zwist und Parteiung die Kreise der Professoren gespalten und zerrissen haben. Was dem zu Grunde lag, waren nicht Gegnerschaften politischer, kirchlicher, wissenschaftlicher Art, die zu andern Zeiten zu Parteibildungen geführt haben, sondern regelmäßig ist es der Gegensatz stark ausgeprägter Persönlichkeiten, die in dem kleinen Gemeinwesen neben einander und zum Theil mit einander leben und wirken müssen. Männer von mehr

1) Zimmermann, Leben Hallers S. 281. Pütter, Gött. Gel.-Gesch. I. 252.

oder minder berechtigtem Selbstbewußtsein, in unverhältnißmäßig großer Zahl auf engem Raume beisammen, sind sie durch ihren Beruf darauf angewiesen, sich die Gunst des akademischen Publicums zu verschaffen und zu erhalten. Ihre ganze Thätigkeit, die wissenschaftliche wie die des Privatlebens, vollzieht sich unter der Controlle und Kritik ihrer Genossen. Daß von den Factionen die Clientelen unzertrennlich sind, gilt nicht blos von den politischen Aristokratieen. Um jede hervorragendere Persönlichkeit sammelt sich ein kleiner Kreis von Anhängern und verschärft womöglich den Gegensatz und die Reibung mit den übrigen Kreisen. Beruht das alles zunächst auf den innern Verhältnissen des kleinen in sich abgeschlossenen Gemeinwesens, wo, wie Lichtenberg es einmal ausdrückt, alles einerlei hofft und fürchtet, einerlei bewundert und einerlei erzählt[1]), so kommt als äußere Einwirkung hinzu: die völlige Abhängigkeit von Hannover. Die beiden Eigenthümlichkeiten in der Einrichtung Göttingens, der Mangel eines eigenen Vermögens der Universität und die Einflußlosigkeit der Facultäten bei Berufungen haben es bewirkt, daß jede sachliche Bewilligung und jede persönliche Beförderung von der Regierung ausgieng. Die Beachtung, die Gunst des Curators zu erlangen, Beziehungen zu seinen Räthen und Rathgebern zu unterhalten war nur einzelnen möglich; andrerseits mußte es den Leitern der Universitätsangelegenheiten erwünscht sein, Vertrauensmänner in Göttingen zu besitzen, bei denen sie sich Raths in sachlichen oder persönlichen Fragen erholen konnten. Bei der Mannichfaltigkeit und dem Wechsel der Interessen bedurfte es einer Mehrheit von Vertrauensmännern. Sie lösten sich ab und nutzten sich ab, theils durch eigene Schuld, theils durch fremde, aber sammelten stets einen Kreis von Anhängern um sich, die sich mit ihnen zu heben hofften. Bei Bildung des Göttinger Lehrkörpers hatte Münchhausen sich insbesondere auch von dem Gesichtspunkte leiten lassen, daß nicht von vornherein der Zunder der Uneinigkeit in die neue Universität getragen werde. Es hat jedenfalls nicht lange vorgehalten, wenn er Professoren von friedliebendem Charakter gewonnen hatte oder zu haben glaubte. Bei Gründung der Societät ist es von Anfang an von manchem Beurtheiler für einen Fehler gehalten, eine so kleine Zahl von Mitgliedern zu vereinigen (ob. S. 56) und gerade daraus die Befürchtung geschöpft, das Bild der Uneinigkeit, das die Universität bot, werde sich hier nur noch in verstärktem Maße wiederholen. Diese Besorgniß hat sich früh und

1) Vermischte Schr. III 212.

nur zu stark erfüllt. Der Curator, dem das Uebel nicht verborgen blieb, redete, wo er immer Gelegenheit hatte, zum Frieden. Heyne bat er gleich in den ersten Monaten nach seiner Ankunft, mit Herrn Michaelis und mit jedermann alle erdenkliche Politesse, Freundschaft und Willfährigkeit zu unterhalten und dadurch wenigstens seines Orts dem auswärts zunehmenden Gerüchte von der in Göttingen herrschenden Uneinigkeit entgegenzuarbeiten[1]). Das Uebel war aber schon zu weit eingerissen, als daß ein einzelner, der neu und jung in diesen Kreis eintrat, es hätte unterdrücken können. Eine überlegene, mitten im Kreise der Genossen wirkende, Persönlichkeit fehlte, nicht weniger mangelte es trotz aller schönen Redensarten an einem zum Frieden rathenden Gemeinsinne und so wucherte das Uebel fort. Die Mitglieder der Societät selbst verhehlten sich den Schaden nicht, nur daß jeder dem andern die Schuld beimaß.

Michaelis selbst hatte Murray zum Secretair vorgeschlagen. Trotzdem war nach kürzester Zeit der Director mit dem Secretair, der Secretair mit dem Director unzufrieden, verklagte einer den andern bei A. von Haller. Murray entdeckt an dem Director „die Preußischen despotischen Grundsätze", die keinem Schweden und Schweizer gefallen können" [2]). Michaelis findet bei Murray die Neigung des Schweden zu Parteiumtrieben und widerstrebt deshalb der Aufnahme des zweiten Murray (oben S. 72), obschon er ihm mehr Verstand und Activität als dem Bruder zutraut[3]). Den Mangel an Thätigkeit für die Interessen der Societät, die Michaelis rügt, entschuldigt Murray mit der Ungunst seiner materiellen Lage. Seit 1762 Ordinarius, muß er sich mit einem Gehalt von 5—600 Thalern behelfen. Die Arbeit für die Societät lohnt sich schlecht, hindert ihn in seinen sonstigen Unternehmungen und damit im Fortkommen. Eine gewisse Unklarheit in seiner wissenschaftlichen Stellung hängt ihm aber auch noch an. Man ist in Verlegenheit, welchem Fache man ihn zuzählen soll. Von Haus aus Theologe, zum Redner gebildet, hat er sich nachher ausschließlich der Litteratur und Geschichte gewidmet. Die Angaben bei Pütter I S. 180 über seine Vorlesungen zeigen eine sehr bunte Musterkarte. Seine Arbeiten für die Societät bewegten sich meistens im Gebiete der germanischen Alterthümer, der nordischen Geschichte und Geographie. Er las über Runen und über die Rei-

1) 12. Dec. 1763 (Briefe von Heyne I Bl. 39).
2) 1763 Juni 24 (Bern Bd. 22 n. 87).
3) 1769 Dec. 6 (Bern Bd. 29 n. 199).

sen des Other und Wulfstan. Daneben schrieb er über neueste europäische Geschichte, hielt schon während des siebenjährigen Krieges Vorlesungen über dessen Gang. Eine größere Zahl seiner Arbeiten sind Uebersetzungen aus dem Schwedischen. Von Geburt ein Schleswiger, war er als Knabe mit seinem Vater, der als Prediger der deutschen Gemeinde nach Stockholm berufen wurde, nach Schweden gekommen und liebte nach Kästners Ausdruck das Land, in dem er erzogen worden, wie es eine Schwede liebt. Er klagt gegen Haller über den Verfall der Sitten, die Zunahme des Luxus in seiner Heimat. „Die Oxenstierna, Torstensone, Wrangel hatten hölzerne Stühle und etwa ein paar silberne Becher auf dem Tische. Das war die Zeit der Helden". Französisches Geld und französische Galanterie zerrütten jetzt alles. Er klagt über Linné, daß er die jungen Leute von ernsten Studien ablenke und indem er sie botanisiren führt ihnen gestatte, in närrischer Tracht, mit Fahnen schaarenweise herumzuziehen [1]). Er dankt Haller für sein Interesse an schwedischen Dingen, und so berechtigt die Verehrung für Haller auch sein mag, ihm ins Gesicht zu rühmen, er sei im Reich der Wissenschaft, was der Preußen Friedrich im Felde und Cabinet [2]), beweist einen hohen Grad von Schmeichelfähigkeit. Murray hat bei seinem frühen Tode — er starb 1776, fünfzig Jahr alt [3]) — viel warme Anerkennung gefunden. Heyne hat sein elogium geschrieben, Büsching ihm in den Wöchentlichen Nachrichten Jg. IV (1776) St. 6 einen eingehenden Aufsatz gewidmet, Kästner in der deutschen Gesellschaft am 27. Januar 1776 einen Nachruf gehalten [4]). „Er ist aus einer Welt geschieden, in der Redlichkeit und Wohlwollen von List und Eigennutz gedrückt werden". „Es ist sehr gut, wenn unter den weltlichen Gelehrten manchmal auch noch Christen sind". So heißt es in Kästners Rede mit den damaligen Hörern leicht verständlichen Beziehungen, während ihn Büsching als ein Opfer der Münchhausischen Principien hinstellt,

---

1) 1765 April 10, Mai 8 (Bern Bd. 24 n. 53 u. 66).

2) 1763 Janr. 3 (Bern Bd. 22 n. 2).

3) Seine Familie hat noch lange in Göttingen fortgelebt. Der Sohn und der Enkel Murrays wurden Pächter der Göttinger Universitätsapotheke, jener bis 1828, dieser bis 1846. Der Nachfolger des letztern, der mit einer gebornen Post verheiratet war, wurde der Neffe der Frau. Ein anderer Enkel Joh. Philipp Murrays war der 1865 als Inspector beim akademischen Museum verstorbene Dr. med. Murray, eine Enkelin die Frau des 1863 verstorbenen Consistorialraths Prof. Dr. Reiche.

4) Sammelband der Göttinger Bibliothek: Kaestner Programmata Bd. II (Mathes. 78. 4.)

Auswärtige vor verdienten Einheimischen zu begünstigen. Münchhausen habe zwar gegen ihn selbst geäußert: „Sie wissen, daß allhier die Gewohnheit nicht sey, geschickte und wohlverdiente Personen aus hiesigen Diensten zu lassen“, aber doch häufig geschickte und wohlverdiente Gelehrte so lange in schlechten oder kaum mittelmäßigen Umständen sitzen lassen, bis sie von Auswärtigen gesucht wurden. Daß Murray der harmlose, ungerecht verdächtigte und zurückgesetzte Mann, als der er hier geschildert wird, nicht war, zeigen seine Aeußerungen gegen Haller. Jede Beförderung anderer preßt ihm eine Klage ab. Als Klotz, der noch auf dem Gymnasium war, während er schon eine Professur hatte, eine höhere Zulage bekam als er, als der „junge Professor Heyne“ vor ihm besoldetes Mitglied der Societät wurde, kränkte ihn das bitter. Mit Genugthuung weiß er zu Anfang des J. 1764 zu berichten: der Credit des Herrn M., der seit vielen Jahren bey Ihro Excellenz dem Herrn Cammerpräsidenten so vieles vermocht hat, scheinet seit einiger Zeit sehr gefallen zu seyn. Das allgemeine Schicksal der Lieblinge! Es ist hier bey vielen ein großes Frohlocken darüber“ [1]). Als Haller das M. nicht verstanden hatte oder nicht verstehen wollte, erläuterte Murray [2]): „es ist unser Herr Director, gegen den sich fast unsere ganze Academie verschworen hat. Allein man braucht verdienstvolle Männer, und unser großer Minister weis alle Leute zu seinen Absichten zu gebrauchen. Es sind einige, die das Herz dieses berühmten Mannes nicht rühmen wollen“. Murray hält es deshalb für gerathen, Haller gewissermaßen zur Vorsicht zu ermahnen. „Ew. Hochwohlgeb. besitzen zu viele Einsicht, als daß Sie darüber nicht am gründlichsten urtheilen könnten, und ich bin versichert, daß Sie nach Dero so vieljährigen Erfahrung und beständigem Umgange mit Geschäften sich vor Dero Ankunft in allen Stücken prospiciren werden“. Ein halbes Jahr später schrieb Murray: „Herr M. ist ein gelehrter großer Philolog. Allein ein Physicus, ein Mathematicus, ja auch ein Historicus ist er nicht. Man klagt auch sehr über seine Herrschsucht. Und es giebt noch viele, recht viele andere Ursachen zum Mißvergnügen, über die ich mich nächstens einmal gegen E. H. aufrichtig erklären muß. Es ist zwar jetzt um 10 procent besser als vor 1½ Jahren. Dies macht aber, weil die Gnade des Ministers sehr geschwächet worden. Herr Hofrath Pütter hat sie gewonnen, und auch andere rechtschaffene Leute participiren daran“ [3]).

1) 1764 Janr. 17 (Bern Bd. 23 n. 16).
2) 1764 Juni 21 (das. n. 86).
3) 1765 Janr. 30 (Bern Bd. 24 n. 15).

Die wichtigste Beschwerde von allen ist das beständige Directorium der Gesellschaft in der Hand von Michaelis. „Das Directorium müßte halbjährig verändert werden. Die Jalousie ist bey den andern Mitgliedern zu groß; das gesellschaftliche Vertrauen fehlt“ [1]). Und wie der directe Widerhall klingt es, wenn man in einem Briefe von Michaelis an Haller liest [2]): „ich kann als Director nicht das gute thun, was E. H. als gegenwärtiger Präsidente thun können, und ich muß noch dabey sehr behutsam seyn, um nicht durch einen etwa entstehenden Verdruß die Societät, die kein einziges Mitglied entbehren kann, zu sprengen. Denn ich sehe, daß die übrigen wenigen Glieder zum Theil eine Jalousie gegen mich haben und gern selbst das Directorium gehabt hätten“.

Am unwilligsten trug Kästner diesen Zustand. Während aber andere ihren Groll in Privatbriefen entluden, sprach ihn Kästner offen in seinen Erklärungen aus, die er in der Societät abgab oder an die Regierung richtete. Kästner wußte aus Erfahrung, daß Münchhausen es gern hatte, wenn man ihm frei schrieb, aber auch, daß er deswegen doch that, was er wollte [3]). Dem schweren Geschütz der officiellen Angriffe fehlte auch hier das begleitende Geplänkel der Epigramme nicht, in denen er allem Luft machte, was er gegen Michaelis auf dem Herzen hatte. Bald greift er seine Herrschsucht, bald seine Bibelübersetzung, bald seine mangelhafte Orthodoxie an [4]), wie er in einer seiner Reden höhnisch von berühmten Schriftauslegern ohne den Geist der Religion spricht [5]). Spöttische Wendungen von Michaelis über die deutschen Gesellschaften erwidert der Aelteste der Göttinger deutschen Gesellschaft mit dem Anerbieten, „gegen jeden etwas bekannten deutschen Gesellschafter, der ein kleiner Geist ist, einen orientalischen Philologen zu nennen, der noch etwas elenderes ist“ [6]). Zeit und Umstände sorgten dafür, daß es der Feindschaft zwischen den beiden Männern nicht an Stoff fehlte. Der Prorectoratswechsel im Sommer 1766 berief Kästner an die Spitze der Universität. Unglücklicherweise fielen in seine Zeit studentische Unruhen, die das Einschreiten einer königlichen Commission nothwendig machten [7]). In

1) Murray an Haller 1765 Janr. 30 (Bern Bd. 24 n. 15).
2) 1764 Janr. 21 (Bern Bd. 23 n. 21).
3) Werke IV 105.
4) Das. I S. 68, 49; IV S. 190.
5) Das. II 178.
6) 1764 Janr. 9 (Michaelisscher Briefw. VI Bl. 90).
7) Pütter, Selbstbiogr. II 470.

dem Kreise von Michaelis maß man Kästner erhebliche Schuld an dem unglücklichen Verlaufe bei. „Vielleicht wißen E. H.“, schrieb Michaelis an Haller[1]), „was für einen unserer Universität nachtheiligen Tumult wir gehabt haben, an dem die Grobheit, Poltronnerie und Dummheit des Prorectors Kästners schuldig ist. Eben dieser Mann scheint es jetzt darauf zu setzen, auch durch seine Grobheit die Societät zu sprengen. Kein Votum, so er giebt, ist unbeleidigend“. Daß die letztere Anklage nicht ohne Grund erhoben wurde, dafür werden noch Beispiele vorkommen; ob auch die erstere begründet war, läßt sich jetzt schwerlich noch entscheiden. Jedenfalls besaß Kästner Gemüthsruhe genug, einem Tage des Tulmuts, an dem gerade Lessing in Göttingen verweilte[2]), ein Sinngedicht zu widmen und seinen Nachfolger im Amte, den Theologen Walch, der ganz unter Michaelis' Einflusse stand, mit den Worten zu begrüßen[3]):

Bald werd' ich dich nicht mehr regieren,
Augusta, jetzt erst wirst du blühn,
Ein Heiliger wird deinen Zepter führen
Und ein Erzengel leitet ihn.

Der akademische Conflict trug dazu bei, die schon vorhandene Spannung unter den Genossen der Societät zu vergrößern. Und da sich zugleich die eben neu aufgetauchte Hoffnung auf Hallers Rückkehr wieder einmal verlor, so wandte sich Michaelis nach Hannover mit der Bitte, ihm eventuell seine Entlassung aus der Societät zu gewähren. Am 28. October 1766 schrieb er darüber an Haller[4]): bereits vor einem Viertheiljahre habe ich meinen ehemahligen Wunsch, den E. H. wißen, die Societät gantz verlaßen zu können nach Hannover gelangen laßen, wobey ich die Ursache beygefüget, daß ich glaubte, die Societät würde entweder zerstieben oder entschlafen, und um meiner eigenen Ehre Willen möchte ich gern, daß eins oder das andere erst alsdann geschehe, wenn ich heraus wäre. Nun ist mir zwar meine Bitte noch nicht bewilliget, aber doch so viel (welches fast gleichlautend ist) versprochen, daß ich, falls die Societät auch aufhörte, die von derselben habende Pension behalten sollte.“ Die Beibehaltung „des völligen utile“ der bisherigen Stellung begegnet uns hier zum zweiten Male (ob. S. 64).

Im Jahre 1769, während zwischen dem Curator und Heyne

1) 1766 Oct. 28 (Bern Bd. 25 Nr. 216).
2) Kästner, Werke I S. 58 Nr. 186.
3) Das. I S. 72 Nr. 237.
4) Bern Bd. 25 Nr. 216.

über die Reorganisation der Societät verhandelt wurde, hielt es Michaelis für an der Zeit, an jene drei Jahre früher ihm gemachte Zusage zu erinnern. Wenn er auch nach seiner Versicherung gegen Haller, bei Münchhausens Lebzeiten keinen Gebrauch von dem Zugeständniß machen wollte, so ist er doch zu seiner Erinnerung an die frühere Zusage offenbar durch die Bedenken, welche Münchhausens hohes Alter hervorrufen mußte, und die Nachrichten, welche über seinen besorglichen Gesundheitszustand umliefen, bestimmt worden. Der Minister antwortete: „es ist mir wol erinnerlich, was ad 1766 vorgekommen, und so schwer mir diese condescendance fällt, so gewiß können E. W. jedoch auf deßen Erfüllung, wenn es nicht anderst seyn kan, rechnen.“ Er bittet ihn nur, seine Mitarbeit an den gelehrten Zeitungen dann doch jedenfalls fortzusetzen. Welche Bedeutung Münchhausen dem Organ beilegte, ist aus dem frühern Promemoria (oben S. 70) bekannt. Das folgende ebenfalls aus dem Frühjahr 1769 erweitert dies noch und hebt besonders den Werth hervor, der auf Michaelis' Thätigkeit gelegt wurde.

P. M. die Göttingischen Gelehrten Zeitungen betreffend.[1])

1. Die Göttingischen Gelehrten Zeitungen sind meines wenigen Erachtens unter allen gelehrten Zeitungen, die wir jetzo haben, die besten. Eine sehr dringende Nohtwendigkeit in Absicht derselben, eine wesentliche Veränderung vorzunehmen, scheinet also nicht vorhanden zu seyn. Wenigstens ist sorgfältig dahin zu sehen, daß man nicht um es beßer machen zu wollen, das Gute was man hat verliere.

2. Der Grund ihres Vorzuges lieget darin, daß die Recensenten würcklich juges competents sind, sich bey deren Arbeit Mühe geben und also gründliche und zuverläßige Urtheile erfolgen, welche auch wenn sie einen Tadel enthalten, dennoch auf eine anständige Art abgefaßet sind. Es ist also vor allen Dingen nöhtig, daß man ferner würcklich gründliche Gelehrte zu Arbeitern beybehalte. Diese wollen sich selten viele Regeln, wenn auch solche noch so gut sind, vorschreiben laßen. Man muß also solche soviel es immer möglich ist, ihre Freiheit laßen.

3. Auf die Direction komt überaus viel an. Herr Hofrath Michaelis scheinet zwar zu solcher sich so gut als zum Recensenten nicht zu schicken. Er ist jedoch in der letzten Eigenschaften höchst nützlich, und seine Recensiones sind eine wahre Zierde der Zeitungen. Es ist also sehr zu wünschen, daß man nichts thun

1) Bern Bd. 29 Nr. 81.

möge, was ihn bewege das Werck zu verlaßen. Wenn er wie er vorhin Willens gewesen ist, aus der Societät der Wissenschaften gehen, mithin die Direction mit guten Willen niederlegen und dennoch dabey ein Mitarbeiter der Zeitungen bleiben wolte, so könte die erstere niemand beßer als Hr. Heynen aufgetragen werden, der solche sowohl nach seinen persönlichen Eigenschaften sehr gut führen würde, als auch qua bibliothecarius die beste Gelegenheit hat, dem Wercke alle mögliche Vollkommenheit zu geben.

Ende April schrieb Michaelis an Haller[1]): vor jetzt gehen die Sachen ziemlich gut, und die ehemahligen Animositäten haben sich gelegt: nur fürchte ich, sie können einmahl wieder entstehen. Schon während er so schrieb, hatte er selbst den ersten Schritt dazu gethan, die erloschene Flamme wieder zum hellen Auflodern zu bringen.

Seit dem Frühjahr schwebten Verhandlungen, die den Zweck hatten, Schlözer als ordentlichen Professor für Göttingen zu gewinnen.[2]) Schlözer, ein Schüler Göttingens und insbesondere Michaelis', schon seit 1764 mit dem Prädicate eines professor extraordinarius, das ihm auf seinen Reisen im Auslande von Nutzen sein konnte, von der hannoverschen Regierung bekleidet, brachte den größten Theil seines Urlaubes, den er im Herbst 1767 von der Petersburger Akademie erhalten hatte, in Göttingen zu. Er war ein fleißiger Mitarbeiter der Gelehrten Anzeigen und von Münchhausen als Kenner russischer Verhältnisse und Litteratur besonders geschätzt. Die Beziehung Hannovers zu England hat offenbar ein internationales Element in Göttingen heimisch gemacht. Ausländer nach Göttingen zu ziehen war immer des Curators Wunsch gewesen, und noch in einem der letzten Briefe, die er geschrieben, knüpft er an Lichtenbergs Berufung Betrachtungen, wie Engländern der Aufenthalt in Göttingen nützlich gemacht werden könne[3]). Unter den übrigen fremden Nationen waren es Schweden und Dänen, mit denen es gelungen war in gelehrten Verkehr zu kommen. Nach dem siebenjährigen Kriege, der auch Anknüpfungen friedlicher Art mit einzelnen hervorragenden und gelehrten Franzosen zu Stande gebracht hatte, wurden die russischen Verhältnisse für Deutschland immer wichtiger und interessanter. Man legte deshalb in Hannover besonderen Werth auf den Besitz eines Mannes, der über nordische Verhältnisse aus eigener Anschauung Auskunft zu geben, zu lehren und

1) Bern Bd. 29 Nr. 86.

2) Schlözers Leben I 142.

3) Briefe v. 25. und 30. Mai 1770 (an Heyne II Bl. 226 ff.).

zu schreiben verstand[1]). Münchhausen und D. G. Strube, der getreue Beirath des Curators, interessirten sich gleichmäßig für die Gewinnung Schlözers, der am 14. Juni 1769 zum ordentlichen Professor in der philosophischen Facultät ernannt wurde. Da er seit 1761 Correspondent und seit 1766 auswärtiges Mitglied der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften war und die Arbeit für deren Publicationen eine Hauptabsicht bei seiner Berufung bildete, so schien nichts natürlicher als Schlözer zum ordentlichen Mitgliede der Societät vorzuschlagen. Und doch mußte sich Michaelis sagen, daß der Schritt zur Zeit außerordentlich unpolitisch war. Ein Vorschlag zur Vermehrung der philologischen Classe, während man deren Ueberfüllung und die Verödung der übrigen Classen beklagte, ein Vorschlag zu Gunsten eines Schützlings von Michaelis, während man sich über dessen Herrschsucht beschwerte, mußte als eine doppelte Ungeschicklichkeit gelten, ja als eine dreifache, wenn man erwog, daß Schlözer mit Kästner in so arge Händel gerathen war, daß er ihn im April 1768 bei dem Curatorium verklagt und dieses Kästner eine ernstliche Weisung ertheilt hatte, sich in bessern Schranken zu halten[2]).

Der Vorschlag brachte die ganze Societät in Aufregung. Sofort ließ sich wieder Murray mit seinen Klagen vernehmen, die diesmal nun gar persönliche Erfahrungen verwerthen zu können glaubten. „Ich brachte Schlözer 1755 zuerst nach Stockholm ins Haus meines Vaters. Da war er noch in der Historie und ihren Hülfswissenschaften so schlecht bewandert, daß ich mich seinetwegen in Verlegenheit fand. Und jetzt ist er ein Held“ [3]). Daß aus andern etwas wird, ist dem Schreiber offenbar so unerträglich wie unerklärlich. Er muß zugeben, daß Schlözer Kenntnisse und Genie und Fleiß besitze, „allein was er noch geleistet, will nicht viel sagen. Er verstehet aber das Wenige, was er herausgiebt und meist in Collectaneis bestehet, vortrefflich durch Journale anpreisen zu lassen“. Der schlimmste Vorwurf, den er Schlözer macht,

1) Schlözers Leben II 84.

2) Schlözers Leben I. 476 und 483. Die Darstellung, welche hier der Sohn von dem Verhältniß seines Vaters zu Kästner gegeben hat, die Behandlung, die er überhaupt Kästnern widerfahren läßt, ist nicht blos parteiisch, sondern geradezu unwürdig. Mit welchen Augen Unparteiische den Handel zwischen Kästner und Schlözer ansahen, zeigt die unten S. 85 folgende Aeußerung Heynes.

3) 1769 Mai 24 (Bern Bd. 29 n. 99). Man weiß sonst nur, daß Schlözer auf Michaelis' Empfehlung als Hauslehrer zu dem Prediger Murray in Stockholm kam. Nach 18 Monaten schied er aus dieser unbefriedigenden Stellung. Schlözers Leben S. 28.

ist der Mangel „jedes gesellschaftlichen, socialischen Characters“. In seiner Zanksucht, seiner Unverträglichkeit sieht er die Ursache seiner Entfernung von Petersburg. Statt dorthin zurückzukehren wird er sich nun in Göttingen fixiren und die älteste Tochter des seligen Röderers, ein Mädchen von 10—12000 Thalern und 16 Jahren — er dem Ansehen nach ein Schwindsüchtiger — heiraten[1]). Eine gute Besoldung ist ihm, obschon er ganz entbehrlich ist, auch schon ausgesetzt, 500 Thaler; und was hat er für Göttingen gethan[2])? In diesem Ton gehen die Klagen fort, auf die das Goethische „Wie sich Verdienst und Glück verketten“ wie gemacht erscheint. Von den Worten schritt man zu Werken. „Die meisten von uns, berichtete Murray weiter, haben sich in Hannover gegen Schlözer geregt, auch bei den Anzeigen will er sich eindrängen; wir müssen ihm den Kopf bieten“. Obschon in dem durch Michaelis Schlözern gemachten Antrage der Regierung auf eine künftige Stellung in der Societät Rücksicht genommen war, so hatte man sich doch gehütet, wegen der Societät etwas zu versprechen. Dazu kannte man in Hannover die Empfindlichkeit der Mitglieder zu gut. Im October kam der Vorschlag von Michaelis zur Abstimmung. Dem von dem Director nach Hannover eingesandten Berichte liegen die Vota der Mitglieder bei; nur Walch stimmte zu, die übrigen dagegen. Mittheilenswerth sind nur die von Heyne und Kästner; so sachlich das eine ist, so persönlich das andere.

Votum Heynes[3]).

Ich habe alle Achtung und Freundschafft für Herrn Prof. Schlötzer, ich habe ihm einige nicht ganz verwerfliche Dienste erwiesen[4]), ich habe nie eine Beleidigung von ihm erhalten, auch, da ich ihm nie in den Weg zu kommen gedenke, keine zu befürchten. Wir arbeiten außerdem in verschiedenen Fächern.

---

1) Schlözers Leben S. 145 und 159. Schl. erzählt selbst, daß er im Sommer 1769 bei Begegnungen häufig gesagt habe: entschuldigen Sie mich, daß ich nicht mehr so kränklich aussehe.

2) 1769 Juni 14 (Bern Bd. 29 n. 114).

3) Curatorialarchiv a. a. O.

4) Schlözers Probe russischer Annalen (1768) wurde von Heyne in den Gött. gel. Anz. (März 1768) sehr günstig recensiert, so daß Schlözer die Anzeige nachgehends in seinen Nestor II S. XXII wieder aufnahm. In einem Briefe von 1787 redet Schlözer Heyne aber doch mit den Worten an: „mein von jeher aufrichtig verehrtester, wenngleich mir von jeher erweislich ungünstiger Herr Collega“. (Leben S. 347).

Gleichwohl gebe ich ihm meine Stimme nicht als membrum ordinarium, sondern als extraordinarium, wofern man ihm es antragen oder er es annehmen will. Ich disponire über meine Stimme nach meinen beßten Einsichten, und so fern von einer freywilligen Wahl die Rede ist.

Meine Gründe sind:

1. Daß ich keinen Grund sehe, warum Herr Schlötzer vielmehr ordentlich als auserordentlich Mitglied seyn soll. Des Herrn D. Walchs Gründe widerlegen zu wollen, das wäre uncollegialisch[1]). Also kan ich blos so viel anführen. Von Seiten der Societät selbst sehe ich nicht, was uns dazu veranlaßen könnte. Herr S. Wißenschaft ist just die nicht, welche bey einer Societät der Wissenschaften (welche auf die Erfindung neuer Wahrheiten gestiftet ist) vorzüglich in Betrachtung käme. Bey dem Vorschlag, der einmal in Ansehung Herrn Gatterers geschah, galt dieß Argument sehr viel, um zu seiner Reception nicht so pressant zu seyn. Die historische Classe ist allemal nur etwas beyläufiges, und dieser fehlt es Gottlob bey weiten nicht an Mitgliedern. Wäre von einem Platz in der physicalischen Classe die Rede, so wäre es freylich eine andere Sache.

Von Seiten Herrn Schlötzers sehe ich eben so wenig eine dringende Ursache. Ich schätze seine Kenntnisse sehr hoch; ich hoffe sehr viel von ihm; ich habe selbst seine Verdienste in ein paar Recensionen ausposaunen helfen. Aber eben bey der Gelegenheit habe ich auch einsehen lernen, daß bey weitem nicht alles was er sagt neu ist — daß er von seinen Ideen, die ihm eigen sind, drey Viertel in zehn Jahren einschmelzen wird — daß es ihm gar sehr an Präcision, Methode und Ordnung fehlt.

Herr S. hat zur Zeit viel versprochen. Ich dächte, man behielte den Rang eines Membri ordinarii bis dahin für ihn auf, wann er die Hälfte geleistet haben wird.

Ich sehe also meines Orts noch keinen hinlänglichen Grund dafür.

2. Auf der andern Seite sehe ich Gründe dagegen. 1) Denn was Herr Büttner (ein Mann, den Herr Schlötzer als seinen Lehrer verehret und deßen Einsichten er vielleicht jetzt noch gar vieles

---

1) Walch hatte geltend gemacht, Schlözer besitze die drei wesentlichen Eigenschaften eines Mitglieds: er sei gelehrt, fleißig und berühmt. Ihm eine extraordinaire Stelle anbieten, heiße ihm Exclusivam geben. Die Folge lasse sich voraussehen: er werde seine Arbeiten andern Akademieen zuwenden und für die Gelehrten Anzeigen nicht mehr schreiben.

zu danken hat)[1]) und Herr Meister, der ein Mathematiker und also weit mehr Societätsfähig ist, verschuldet haben, daß sie Herr Schlötzern nachgesetzt werden sollen, ist mir nicht deutlich.

2) Herr Schlötzer hat sich in einer gewißen Angelegenheit gegen eines unsrer ersten Mitglieder[2]) mit so vieler Heftigkeit und mit so unermeßlichen Stolze und Unbilligkeit betragen, daß es durchaus unmöglich ist, daß ein gegenseitiges Vertrauen unter beyden sich einfinden sollte. Und so leidet unsre ganze Verbindung; denn geheimer Unwille und geheime Cabale würden bald sich äusern.

Alles dieses läßt sich jetzt verhindern, und ohne eines und des andern Beleidigung. Herr Hofrath Kästner hat von Herrn Schlötzern auserdem zuviel Humiliation erfahren, als daß er neben ihm und mit ihm in einer so engen Verbindung leben könnte. Nun liegt aber der Societät offenbar an H. Kästnern ohne Vergleichung mehr als an H. S. Endlich ist der eine schon ietzt wirkliches Mitglied, und wie sehr lief es wider die collegialische Vertraulichkeit ein anderes zu recipiren, mit dem er nicht leben könnte!

Eben diese Kenntniß, welche ich bey dieser Gelegenheit von Herrn S. Denkungsart erhalten habe, die so wenig zu der collegialischen Vertraulichkeit Hoffnung macht, ist nicht geschickt, mich dahin zu disponiren, daß ich ihm freiwillig und nach meiner Überzeugung mein Votum geben könnte; auch selbst in der Betrachtung, daß zu befürchten steht, wir dürften Herrn S. zu früh stolz machen, wenn wir ihm so früh alles geben.

Göttingen, den 10. Octob. 1769. Heyne.

Votum Kästners[3]).

Der Societät der Wissenschaften übergeben den 10. October 1769.

Wegen Herrn Prof. Schlözers
entwerfe meine Meynung auf einem besondern Papier, um den Herrn, die nach mir votiren werden, den Platz nicht wegzunehmen.

Da er Mitglied ist, so kann er es bleiben, wenn er will. Da

1) Gemeint ist Christ. Wilh. Büttner, der sg. Stein-Büttner (im Gegensatz des 1768 verstorbenen Blumen-Büttner), der außer seinen naturwissenschaftlichen Studien sich mit Vergleichung von Völkern und Sprachen beschäftigte.

2) Oben S. 83.

3) Curatorialarchiv a. a. O. Das Votum liegt in zwei Ausfertigungen, die nicht ganz mit einander übereinstimmen, bei den Acten. Nur ein paar Abweichungen der Redaction, welche als Anlage dem an Münchhausen übersandten Berichte Kästners (unten S. 89) beigefügt ist, (B), habe ich notirt.

aber die Stelle eines auswärtigen Mitgliedes, das seinen Aufenthalt nachgehends hier nimmt, unbestimmt ist, so gehöret ihm meines Erachtens die Stelle eines auserordentlichen Mitgliedes, nach Herrn Prof. Büttner und Herrn Prof. Meister, vor denen die iezt noch nicht auserordentliche Mitglieder sind.

Sollte er ordentliches Mitglied werden, so erkläre ich mich hiemit, daß ich niemahls über etwas votiren werde, darüber er als ordentliches Mitglied votirte.

Von dieser meiner Erklärung brauche ich niemanden (in der Societät) Rechenschaft zu geben. Von dem was ich vorhin wegen der ihm anzuweisenden Stelle gesagt habe, will ich meine Gründe meinen Hochzuehrenden Herren zur Erwägung vorlegen.

Herr Schlözer ward durch den seeligen Hofrath Gesner der Societät zum Correspondenten vorgeschlagen. Man kannte ihn nur als einen fleissigen Studenten, der sich glaube ich damahls in Schweden aufhielt[1]). Er hatte eine Reise in die Morgenländer vor, und dieser Titel sollte ihm behülflich seyn, mehr Unterstützung zu dieser Reise zu erhalten. Aus der Reise ist bekanntermaßen nichts geworden.

Da er nun einmahl Correspondent war, wählte[2]) man ihn zum Mitgliede, lediglich in Betrachtung seiner Stelle bey der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Petersburg. Wenn er iezo noch mit dieser Akademie in Verbindung steht, so ist er auswärtiges Mitglied. Der seel. Röderer war dieses, ward es auf eine Art, die noch mehr Ehre macht, als in einer Akademie, wo man einmahl gegenwärtig gewesen ist, auswärtig zu bleiben, und Röderer blieb bey uns auserordentliches Mitglied, bis die ordentliche Stelle seiner Classe erlediget ward, und auch da haben unsere Hohen Obern es als eine Probe meiner Bereitwilligkeit, die Ruhe und das Beste der Gesellschaft zu befördern, gnädig angesehen, daß ich ihm diese Stelle überließ, da ich schon ordentliches Mitglied, aber noch ohne Pension war.

Da sich in unserer Versammlung Herr Dr. Walch darauf berufen hat, daß Herr Schlözer zu Petersburg den Rang über Leon-

1) Oben S. 83. Schlözer war damals vielmehr aus Schweden zurückgekehrt und studirte zum zweitenmale in Göttingen, um sich für seine orientalische Reise vorzubereiten. Schriftstellerisch hatte er sich bereits durch litterarhistorische Arbeiten über Schweden legitimirt. Daß Kästner als Decan schon 1764 ihm als fata gentium et linguas philosophico ingenio illustranti aus freien Stücken das Magisterdiplom zugesandt hatte (Schlözers Leben I S. 95, 177), vergißt er anzuführen.

2) Urspr.: machte, corrig. in: wählte mit der Randbemerkung: weil wir die Mitglieder nicht machen. B.

hard Eulern hätte, so muß ich dieserwegen folgendes erinnern: der erlangische akademische Addreßcalender[1]) ist in seiner Art nichts weniger als classisch. Zum Beweise sehe man nach, was darinnen unter der Aufschrift: Veränderungen, bey Göttingen steht[2]): Unsers Herrn Premierministers Excellenz seyen bisher Curator der Universität gewesen, und als sie Premierminister geworden von hier ab nach Hannover gegangen.

Man sollte doch glauben, von einem Münchhausen machte sich ieder Primaner auf einer Deutschen Schule eine klügere Vorstellung.

In dieses Kalenders Artikel: Petersburg steht freylich Herr Schlözer fast zuerst. Aber die Ordnung, nach der die Mitglieder gesetzt sind, kann keine seyn als die subjectivische Confusion in des Kalenderschreibers Kopfe; denn Möller (soll Müller heißen)[3]) steht als erster Professor der Historie fast zuletzt und Herr Schlötzer wird zweyter Prof. der Historie genannt. Gewöhnlichermaßen hat doch der erste den Rang über den zweyten. Und was von Leonhard Eulern dort gesagt wird und auch sonst weltbekannt ist, zeigt genugsam, daß Herr Schlözer gar nicht sagen wird, er habe den Rang über Eulern, deßwegen man sich sicher auf ihn selbst berufen kann.

Durch das bisherige habe ich zu zeigen gesucht, daß wir nicht verbunden sind, Herrn Schl. zum ordentlichen Mitgliede vorzuschlagen, ich füge hinzu, daß wir es mit Ehren nicht thun können und daß alles, was unsere Freundschaft und Gefälligkeit gegen ihn thun darf, da der erste Schritt durch seine Ernennung zum auswärtigen Mitgliede einmahl geschehen ist, sich darauf einschränken muß, ihn zum auserordentlichen vorzuschlagen.

Denn bey der Sparsamkeit, die wir in der Wahl unserer Mitglieder beobachten, und der, selbst höhern Orts, uns weislich empfohlen wird, laßen wir noch sehr viel, ganz andere Männer als Herr Schlözer iezo ist, unter unsern Correspondenten. Ich will aus ieder Classe nur einen nennen: Bonnet, Schmidt, Lambert.

Es ist hier nicht der Ort, mich über Herrn Schlözers Verdienste zu erklären, welches allenfalls öffentlicher geschehen müßte. Iezo sage ich nur soviel: Wenn man sich mit Sachen be-

1) Akademischer Addreßkalender auf das Jahr 1769 und 70. Erlangen. Das Buch will „die Namen und Ämter aller jetztlebenden Lehrer auf Akademieen in und auserhalb Teutschlands“ bringen.

2) Was darinnen von unsers Herrn Premier Ministers Excellenz steht. Das Folgende bis: nach H. gegangen fehlt. B.

3) Gerhard Friedrich Müller s. Allg. deutsche Biogr. XXII 547.

schäfftiget, die bisher größtentheils von Schaafsköpfen sind behandelt worden, so kann man da recht sehr mit dem gesunden Menschenverstande glänzen, mit dem man anderswo, wo schon Geister gearbeitet haben, in der Mathematik z. E. eine ganz unbemerkte Figur gemacht hätte.

Den 10. Oct. 1769. Abraham Gotthelf Kästner.

Zusatz.

Ich füge noch bey, was ich der Societät zu melden in der Geschwindigkeit, mit der ich dieses Votum ausfertigte, vergessen habe, daß Herr Schlözer weder bey dem Chef der Kaiserlichen Akademie zu Petersburg noch bey einigen Mitgliedern besondere Gewogenheit hat. Auserdem daß solches Leute, die Petersburg kennen, versichern z. E. ein Sohn des russischen Ministers von Teplow, der vor einigen Tagen mit seinem Hofmeister hier durch ging und zum Theil meinetwegen seine Studia hier fortgesetzt hätte, wenn der Hofmeister nicht auf einer andern Universität eine Beförderung zu hoffen gehabt und ihn dahin mit sich genommen hätte, so kann ich, was ich von Herrn Schlözer sage, durch einen Brief aus Petersburg vom 12. Sept. beweisen, den ich nicht aus den Händen geben darf, aber diese Stelle und den Nahmen seines Verfassers iedem der es zu verlangen berechtiget ist, zeigen will. Es ist mir bey der Gelegenheit gemeldet worden, da ich Herrn Schlözers Verfahren gegen mich nach Petersburg geschrieben habe [1]). Der Petersburgischen Akademie macht man durch Herrn Schlözers Aufnahme in unsere Societät iezo gewiß kein Compliment [2]).

Kästner nahm die Gelegenheit wahr, zugleich dem Minister vorzutragen, was er als den Grundschaden der Societät ansehe. Sein Bericht ist zu ausführlich, um ihn hier ganz zu wiederholen. Es muß genügen, die wichtigsten Stellen mitzutheilen. Der Be-

---

1) Der Brief Kästners vom 5. Juni 1769, an den jüngern Euler gerichtet, ist nach einer von letzterm Schlözer mitgetheilten Abschrift mit einzelnen Auslassungen gedruckt in Schlözers Leben I 182 ff. Über den in diesem Briefe gebrauchten Ausdruck, Schlözer habe sich zweimal in die Gesellschaft der Wissenschaften eingelogen, kam es 1772 zu Verhandlungen vor dem Curatorium. Das. S. 484 ff.

2) Diese Aeußerung findet ihre Erklärung durch Walchs Votum: „dem Herrn Schlözer eine extraordinaire Stelle anzubieten ist wegen seiner zu Petersburg bekleideten Station, da wir ihn allemal erniedrigen, nicht allein ihm, sondern auch der Akademie daselbst nachtheilig; ich weiß aber nicht, ob unsere Societät Ursach habe, diese zu beleidigen".

richt ist eine Anklageschrift gegen die Einrichtung eines beständigen Directoriums und gegen Michaelis als beständigen Director. Zunächst führt er die Verwirrung in den Finanzen der Societät darauf zurück. Von dem beständigen Director habe die Societät nicht mit der gehörigen Strenge von Zeit zu Zeit Rechnungsablage über die Zeitungscasse fordern können. „Seine Geschäfte sollten ihm wenigstens keine Entschuldigung seiner Saumseligkeit seyn, weil die Direction der Zeitungen mit zu den von ihm ordentlich übernommenen Geschäften gehört und er solche so wenig umsonst thut, daß er in den Jahren des Krieges, da in zwey Jahren nur soviel Anzeigen sind gedruckt worden als sonst in einem[1]), doch sich zweymahl funfzig Thaler angerechnet hat, obgleich die meisten in der Societät glaubten, es gebührten ihm 50 Thaler, wenn er ein Jahr gelehrter Anzeigen besorgt hätte, nicht: wenn er ein Jahr gelebt hätte. Diese Rechnungen läßt er allemahl durch den Kämmerer Kritter auf Kosten der Zeitungscasse fertigen, als ob er nicht selbst addiren und dividiren könnte? Bisher sind sie immer so verwickelt eingerichtet gewesen, daß die Societät nicht hat klug werden können, wie es mit der Zeitungscasse eigentlich steht".

Der zweite Hauptvorwurf, den Kästner dem Director macht, betrifft den Mitgliederbestand der Societät. Kästner giebt ihm Schuld die Vervollständigung der Societät in den zur Physik gehörigen Theilen der Medicin verhindert zu haben. Die ihm vorgeschlagene Zuziehung Wrisbergs, gegen den er an sich nichts einzuwenden hatte, hat er zu fördern unterlassen unter Berufung auf die Ungewißheit, ob A. von Haller nach Göttingen zurückkommen werde. Andrerseits ist er nie saumselig gewesen, solche Mitglieder heranzuziehen, von denen er eine Unterstützung seiner Absichten erwarten konnte. „Herr Dr. Walch[2]) ist als Professor der Theologie unserer Universität sehr wichtig, und seines rechtschaffenen Gemüthscharakters wegen wird er von allen verehrt. Aber eben dieses Gemüthscharakters wegen läßt er sich von Herrn Hofr. Michaelis wie derselbe will brauchen. Auser den theologischen Wissenschaften zeigt er weder Gelehrsamkeit noch Genie

1) Für 1761 und 1762 der G. G. A. ist nur ein Jahrgang, zwei Bände umfassend, erschienen. Das erste Stück des J. 1761 ist den 2. Mai ausgegeben. Als Grund werden in der Vorrede außer den Kriegsunruhen der Mangel der Mitarbeiter an Muße, der Mangel an Papier, an neuen Büchern, die während der Blokade nicht durchgelassen wurden, und endlich der Mangel des Eingangs der Abonnementsgelder von den Postämtern angeführt.

2) Oben S. 80.

und war daher nicht der Societät, sondern nur dem Herrn Director unentbehrlich. Indeßen hat die Societät von diesem Mitgliede noch allemahl Ehre und Vortheil. Aber das ist zu arg, daß ihr der Herr Director iezo einen Mann aufdringen will, der in seinem Theile der Gelehrsamkeit noch sehr, sehr lange das nicht ist, was Walch in dem seinigen, und in seinem Gemüthscharakter der Antipode von einem Walch ist, einen Schlözer.

Iezo wird nebst Herrn Prof. Wrisbergen Herr Prof. Murray der Botanicus und Herr Prof. Joh. Becmann ieder als auserordentliches Mitglied der physischen Classe vorgeschlagen werden. Dem Botanicus ist der Herr Hofrath Michaelis zuwieder und hält ihn nicht für societätsmässig [1]). Ich weiß nicht, wie der Herr Director sich unterfangen kann von dem Botanico zu urtheilen, Er, der auser seinen orientalischen Sprachen und seinem Vortheile nichts gründlich versteht und nur ein bißchen Naturhistorie von Prof. Büttnern [2]) gelernt hat, dem er dafür zur Dankbarkeit geschadet hat. Mit diesem bißchen Naturhistorie macht er nun freylich in der philologia sacra alle Augenblicke neue Entdeckungen, weil die Philologen ganz unwissend in der Kenntniß der Natur gewesen sind und ihm die Ehre überlassen haben, der erste unter ihnen zu seyn, der z. E. sagte, daß Judenpech kein Salz und kein Räucherwerk ist".

Kästner faßt sein Urtheil über Michaelis dahin zusammen, daß er ihm die größte Schuld an dem Verfalle der Societät beimißt.

„So lange ich noch einigermassen glauben konnte, sein beständiges Directorium könne zum Besten der Societät gereichen, so lange ließ ich mir gefallen, solches einem Manne stets zu überlaßen, der sonst in der gelehrten Welt weder länger noch vortheilhafter bekannt ist als ich; und der sich in Absicht auf die Mannichfaltigkeit der gelehrten Kenntniße gar nicht mit mir vergleichen darf. Iezo da ich seit vielen Jahren sein beständiges Directorium nur zum Verderben der Societät gereichen sehe, muß ich unterthänigst und inständigst meine Bitte wiederhohlen, die Abwechslung des Directorii unter den ordentlichen Mitgliedern bey den iezigen zum Besten der Societät abzielenden Bewegungen zu veranstalten". Durch die Einführung eines nicht blos unter den ältesten, sondern unter allen jetzigen Mitgliedern abwechselnden Directoriums würde selbst dem Herrn Hofrath Michaelis ihm unwissend ein Gefallen geschehen. Wenn sie nicht beliebt wird, so — erklärt

1) Oben S. 76.
2) Oben S. 86.

Kästner — werde ich zwar in allem was wegen solcher Verfaßungen für gut befunden wird, schuldigen Gehorsam leisten, aber, weil ich nicht verbunden werden kann, das Lächerliche mit auf mir sitzen zu laßen, das durch des Herrn Hofrath Michaelis beständige Direction über die Societät kommt, so werde ich nicht in der Societät bleiben können, der Welt aber meine Gedanken über einen Mann mit aller gehörigen Achtung gegen seine wahren Verdienste sagen, der die Unverschämtheit hat eine Societät der Wißenschaften beständig dirigiren zu wollen, von der er selbst die Oekonomie in Ordnung zu erhalten entweder nicht Geschicklichkeit oder nicht Fleiß oder nicht Willen hat, in Absicht auf die Gelehrsamkeit aber von der Societät nicht den dritten Theil zu beurtheilen weiß. Denn selbst in der historischen Claße sind seine Kenntniße nichts weniger als universell, und es geht ihm auch in dieser Claße oft, wie es ihm gegangen ist, als er das von ihm so ruhmvoll verwaltete Amt eines Bibliothecarii antrat[1]). Er fand beym ersten Eintritte in die Bibliothek einen Lucan und die Stelle aufgeschlagen:

Ignotum vobis Arabes venistis in orbem“[2]).

Der Erfolg, den Michaelis unvorsichtiger Vorschlag hatte, war nicht blos der negative, daß Schlözer nicht ordentliches Mitglied wurde, sondern auch der, daß die Directorialstellung des Vorschlagenden erschütterter war denn je zuvor. Damit traf eine wichtige in Hannover sich vollziehende Veränderung zusammen. Im Herbst 1769 starb der Geh. Canzleisecretair Heinr. Eberhard Balck, der die Expedition der Universitätssachen seit den vierziger Jahren besorgt hatte. Sein Nachfolger wurde Georg Brandes, der durch sein Decernat der Klostersachen schon lange mit den Universitätsangelegenheiten nach ihrer finanziellen Seite zu thun gehabt hatte. Auf Wunsch Münchhausens übernahm er zu seinem bisherigen Ressort das vacant gewordene. Diese Vermehrung

1) Oben S. 68.

2) Pharsaliae lib. III v. 247. Michaelis als Araber zu bezeichnen konnte schon seine Schrift: Beurtheilung der Mittel, die man anwendet, die ausgestorbene hebräische Sprache zu verstehen (1756), in der auf das Studium des Arabischen gedrungen wird, den Anlaß bieten. Nachher waren es die Fragen für die nach Arabien reisende Gesellschaft (1762), welche den Namen popularisirten So nennt ihn Herder einen deutschen Araber (über die neuere deutsche Litt., erste Sammlg. 1767: Werke hg. v. Suphan I 133.). Vergl. auch Kästners Epigramm: auf einen Bibelübersetzer (Werke I S. 49 Nr. 155).

seiner Arbeit würde ihn nicht weiter bekümmert haben, wenn Leute von Heynes Denkungsart die Mehrzahl unter denen gebildet hätten, mit denen er nun zu thun bekam. „So aber muß ich es bei gegenwärtiger Lage der Sache als einen ingraten Zeitverlust und periculosae plenum opus aleae ansehen, wobei das einzige Vergnügen, mit Ihnen, bester Freund, in nähere Verbindung zu kommen sich leider! wol nicht anders als durch manche düstere Wolke durchdringen möchte“ [1]). Diese elegische Stimmung hatte ihren Grund vorzugsweise in der Societätsangelegenheit und dem Verhältniß zu Michaelis. Brandes und Michaelis standen sich schon lange wenn nicht feindselig, doch mißtrauisch gegenüber. Die Angelegenheit Luzacs hatte den ersten Anstoß gegeben (oben S. 62). Michaelis, der damals bei Münchhausen sich großer Gunst erfreute, hatte auf seine Beschwerde es erlangt, daß das Referat in der fraglichen Angelegenheit in die Hände des Geh. Secretairs Balck gelegt wurde. „Indeßen glaube ich doch, daß ich aufs künftige einen sehr activen und gefährlichen Widersacher an Geh. Secr. Brandes haben werde, der mir erst alsdann schaden kann, wenn der Herr Cammer-Präsident vergeßen hat, daß er ein Feind ist und warum er es ist“ [2]). Diese 1756 geschriebenen Worte Michaelis' giengen nach mehr als zehn Jahren in Erfüllung, allerdings nicht wie ein Verhängniß, nicht durch ein Vergessen früherer Verdienste im Schooße der Regierung, sondern unter voller eigener Verschuldung des Propheten. Die Abneigung, die Brandes von früher her gegen Michaelis erfüllte, verstärkte sich, seit er zu Heyne amtlich und persönlich in nähere Beziehungen gekommen war und diese datirten vom Herbst 1764, einem Jahr nach Heynes Ankunft in Göttingen. Brandes hatte eine sehr hohe Meinung von der Societät der Wissenschaften. „Wie vollkommen bin ich Ihrer Meinung“ — schreibt er an Heyne — in Ansehung der Anzeigen und der Societät. Sie haben der Universität den größesten Ruf und einen Vorzng vor allen ihren Schwestern verschaffet“. Umsomehr beklagte er ihren Verfall. „Der Eigensinn und vielleicht noch eine schlechtere Leidenschaft eines eintzigen Mannes stürtzet beide und mit ihr die Universität, wenn ihm nicht Einhalt geschiehet“ [3]). Daß Brandes selbst das Verdienst gebührt eingegriffen zu haben, zeigt das raschere Tempo, das seit seiner Uebernahme der Geschäfte in der Societätsreform eintritt. Was ihn

1) An Heyne 1769 Oct. 30 (I Bl. 122).
2) Michaelis an Haller 1756 Janr. 4 (Bern, einz. Brief).
3) 1768 Janr. 10 (I Bl. 69b).

zum Gegner von Michaelis macht, ist zweierlei. Eins ist die virtus post nummos, wie er es klassisch bezeichnet[1]). Das andere ist die Liebhaberei für krumme Wege, die unterirdische Manier zu verfahren[2]). Hat er überhaupt darüber zu klagen, daß alle guten Absichten, die man in Hannover hegt, in Göttingen immer so verwickelt und erschwert werden, so trifft das ganz besonders die „Kunstgriffe“ und „Winkelzüge“, die der theure Herr M., der Herr Director dem Bestreben, die Societätsverhältnisse zu ordnen, in den Weg legt[3]). Umsomehr Gefallen hatte Brandes an dem Auftreten Kästners. Er verehrte ihn unendlich und hatte seine eben damals erschienene Lobschrift auf Leibniz[4]) dreimal gelesen. Die eingereichte Denkschrift (oben S. 89) fand er zwar überaus heftig, aber doch in der Hauptsache völlig begründet und mit Meisterzügen voll epigrammatischen Witzes durchflochten[5]).

Es ist von Interesse nach den Aeußerungen des vortragenden Rathes das Urtheil des Ministers zu hören. Brandes ließ nicht ab zu warnen; es gehörte gegenüber den Treibereien in Göttingen die volle Nachsicht und Geduld Münchhausens dazu, um seine patrias manus nicht sinken zu lassen. „Ich fürchte fast, daß man ihn zuletzt ermüde und die besten Absichten zum Ruhm und Vortheil der Societät und eines ieden Mitgliedes eben von denen, die solche am mehresten befördern sollten, vereitelt werden“[6]).

Münchhausen an A. v. Haller[7]).

Hannover den 10. Nov. 1769.

Hochwolgebohrner Herr
Hochzuehrender Herr

E. H. danke ich auf das verbindlichste für die mir zugesandte neue Probe Dero fortdaurenden Fleißes. Es gereichet mir dabei zu einer besonderen Beruhigung, daß Dieselben noch nicht ermüden, Sich unsers Societätswesens mit Ihrem gewohnten Eifer anzunehmen. Die gegenwärtige Lage derselben bekümmert mich

1) Heeren, Heyne S. 137.

2) An Heyne 1770 März 8, April 18.

3) An Heyne 1769 Dec. 28, 1770 Janr. 4 u. 22.

4) Sie ist leider nicht in die Sammlungen von Kästners Werken aufgenommen und, wie es scheint, schwer zugänglich. Ich habe sie nicht einsehen können.

5) An Heyne 1769 Oct. 30 (I Bl. 122b).

6) Das. 1769 Dec. 28 (I Bl. 129a).

7) Bern, Hallersche Correspondenz Bd. 29 Nr. 189; dictirt, von Münchhausens Hand nur die letzten vier Worte.

ungemein, und ich habe bishero mein äußerstes gethan, um das Werk wieder in seine rechte Thätigkeit und zu dem Ansehen zu bringen, welches es einst über mein Erwarten erhalten hatte. Ich bemerke aber leider! bei iedem Schritte, wie sehr es den gegenwärtigen Mitgliedern nicht nur an den hiezu erforderlichen Einsichten, sondern auch hauptsächlich an dem nothwendigen Eifer, Vertrauen und Einigkeit fehle, und wie viel ich auch in diesem Stücke an E. H. verlohren habe. Um desto mehr aber muß ich bitten, mir auch abwesend Dero Beistand nicht zu versagen und mich dadurch in den Stand zu setzen, ein Institut wieder zu beleben, an deßen Wolstande Sie noch immer so aufrichtig Theil nehmen. Der Abdruck der Vorlesungen ist freilich der nothwendigste und erste Schritt, den wir zu thun haben. Ich treibe daher solchen auf das äußerste, und da die Wittwe Vandenhoek sich gar nicht dazu bequemen wollen, so hat man bei der Societät auf Barmeyern Rücksicht genommen, mithin für selbigen einige Unterstützung verlanget. Ich bin auch dazu willig und habe nur von seinen Forderungen nähere Anzeige begehret und zu weiterem Bedenken verstellet, ob auch der Mann, da er meines Wißens die Meßen nicht besuchet, das Werk gehörig zu verbreiten im Stande seyn werde. Findet sich dieses, so will ich das äußerste thun, damit noch zwischen hier und Ostern der Anfang zum Drucke geschehe. Da auch Herr Michaelis seine Abhandlungen besonders herausgegeben und Herr Kestner ein gleiches zu thun Willens ist, mithin, weil beide Samlungen in dem nämlichen Formate der Commentarien seyn sollen, sie allemal als ein Theil derselben betrachtet werden können, so glaube ich, daß das übrige der rückständigen Schriften nicht über ein paar Bände ausmachen und es um desto leichter seyn werde, damit wieder fürs erste in Ordnung zu gerathen und demnächst von Jahren zu Jahren gehörig fortzugehen. Außerdem habe ich den iährlichen Hauptpreis nunmehro zu 50 Ducaten festgesetzet, um auch in diesem Stücke der Societät mehr Ansehen und nützliche Beiträge zuzuziehen.

Ich hatte gewünschet, einestheiles den bisherigen Unterschied der ordentlichen und außerordentlichen Mitglieder gantz aufzuheben, andern Theiles die Anzahl der Mitglieder überhaupt zu erhöhen. Dem ersten Gedanken hat man sich gantz entgegen geleget, und ich laße ihn also fallen. Wegen des andern aber verkennet man zwar den Nutzen nicht, äußert iedoch dabei eine solche Verschiedenheit der Absichten, daß es schwer halten wird, eine vergnügende Entschließung zu treffen. Den Herrn Vogel schläget man einmüthig zur physikalischen Classe vor: in der histori-

schen Classe aber hat man sich wegen des Herrn Schloetzers mit großer Heftigkeit getheilet, da einige ihn gar nicht, andere nur zum außerordentlichen und andere zum ordentlichen Mitgliede iedoch sine voto haben wollen. Auf letzteren dürfte also wol nicht zu gedenken seyn, so wie ich hingegen ersteren gern genehmigen, auch allenfalls die zu außerordentlichen Mitgliedern annoch benannte Prof. Murray jun., Wrisberg und Joh. Becmann meines Ortes mir gefallen laße. Ich muß aber darüber zuforderst Ew. H. Meinung wißen und bitte mir dieselbe offenherzig mitzutheilen. Eine der Hauptschwierigkeiten zeiget sich sonst noch in dem gegenwärtigen Directorio. So groß auch die Verdienste des Herrn Michaelis überhaupt und insonderheit auch bei der Societät sind, so kan ich doch E. H. im Vertrauen nicht bergen, daß er zum beständigen Director weder den rechten Betrieb äußere, noch sich das Ansehen und Zutrauen erworben habe, welches dazu erforderlich scheinet. Ich wünschete also, daß man die Einrichtung etwa auf ein nach den Claßen oder sonst alternirendes Directorium stellen könne, wenn nur Herr Michaelis, den ich doch auf alle Weise zu menagiren suche, darüber keine Empfindlichkeit schöpfen möchte. Eben dergleichen Mängel eines rechten Directorii habe ich auch bei den mit der Societät so genau verbundenen gelehrten Anzeigen bemerket und desfals von der Societät vorläufig ein Gutachten gefordert; mithin inzwischen zu ihrer Aufnahme folgende Verfügungen getroffen: 1) daß das so sehr in Unordnung gerathene Rechnungswesen derselben in beßere Richtigkeit gesetzet, 2) die Recensionen entweder durch Vermehrung der Bogenzahl oder eine besondere Zugabe weiter erstrecket, 3) zu Ausfüllung der Lücke in der mittleren Geschichte der Prof. Gatterer herzugezogen, 4) behuf beßerer Vernehmlaßung unter einander zu Zeiten ordentliche Zusammenkünfte gehalten, auch 5) von den für die Bibliothek angeschaffeten neuen Werken so fort ein Verzeichniß unter die Mitarbeiter zur Auswahl der Recensionen herumgesand werde. Ich wünschete E. H. Absichten hierunter erreichet zu haben und erbitte mir darüber, wie auch was Sie weiter zu thun nöthig glauben, Dero offenherzige Gedanken, damit ich alles was in der Welt möglich ist, ferner zur Hand nehmen könne. Ich setze in diesem gantzem Werke mein vorzügliches Vertrauen auf E. H. tiefe Einsichten und unverloschene Liebe zu unserer Universität, die ich gewiß eben so sehr lebenslang erkennen werde als vollkommen ich in größester Hochachtung verharre.

Ew. Hochwohlgeb.

gantz ergebenster Diener
Münchhausen.

Der Minister hat sich gewiß nicht weniger als sein Rath an den Berichten Kästners ergötzt, aber wie er gerecht genug war die großen Verdienste des Angegriffenen anzuerkennen, so wird er auch die maßlose Ueberhebung empfunden haben, mit der Kästner über Michaelis' philologische Leistungen aburtheilt.

Unter allen Mitteln zur Belebung der Societät erschien dem Minister mit Recht die Wiederaufnahme der Commentarien als das wichtigste. Nachdem Michaelis, Hollmann und Kästner ihre in der Societät während des Stillstandes der Abhandlungen gehaltenen Vorlesungen separatim veröffentlicht hatten[1]), kam es vorzugsweise an auf den Druck der neuen von jetzt ab zu haltenden Vorlesungen und die nachträgliche Mittheilung der wichtigern aus der Zwischenzeit, die noch unveröffentlicht in dem Archive der Gesellschaft lagen. Einen Verleger dafür zu finden, hielt schwer. Die von Murray ausgehende Idee, den Buchdrucker Barmeyer, der die Messen nicht bezog, für den Verlag zu gewinnen, verwarf Münchhausen als unpraktisch. Die Wittwe Vandenhoeck, mochte auch ihr Geschäftsführer Ruprecht geneigt sein, lehnte auf Michaelis' erneute Anfrage ab, auch wenn die Regierung sich zu einem Geschenk, nicht blos zu einem Darlehn bereit erklären sollte. Der frühe und unerwartete Tod des jungen Dr. Seyberth[2]) brachte Michaelis auf den Gedanken, ob nicht die für das Gebauersche Corpus Iuris ausgesetzte Summe, deren Verwendung ihm nunmehr zur Unmöglichkeit geworden schien, einem Verleger der Commentarien überwiesen werden könne[3]). Davon wollte das Ministerium nichts wissen. Der Buchhändler Johann Christian Dietrich, der 1766 von Gotha nach Göttingen gezogen war und neben seinem Verlagsgeschäft zugleich eine Buchdruckerei betrieb, hatte von der Regierung einen Vorschuß erhalten theils zur Anlage einer Druckerei theils zur Herausgabe des Corpus juris, zu dem Gebauer seit langer Zeit das Material gesammelt hatte. Dietrich den Verlag der Commentarii als Verpflichtung aufzuerlegen, lehnte die Regierung um so bestimmter ab, als sie von den beiden bei Gewährung des Vorschusses verfolgten Absichten „die eine gewis zu erreichen meinte und zu der andern, der höchsten Ortes sehr gewünschten Ausgabe des Gebauerschen Corpus juris, des unangenehmen Zwischenfalls ungeachtet, die Hoffnung noch nicht aufgeben wollte[4]). Den Gedanken mit Dietrich in Verhandlungen ein-

1) Oben S. 67 und Pütter Gel. Gesch. I 171 Nr. 49 und II 153.
2) Oben S. 71.
3) 1769 Nov. 20 Bericht der Societät (Curat.-Arch.).
4) Rescript v. 1769 Nov. 27 (Curator.-Archiv).

zutreten wies der Minister nicht von der Hand und war auch zur eventuellen Gewährung einer Unterstützung bei dem Verlage der Abhandlungen bereit. In Göttingen selbst schien man noch nicht rechtes Vertrauen in die neue Firma zu setzen. „Unser Dietrichs ist zu allem bereit. Allein er hat zu viel Französisches, deutsch Windiges, an sich. Dazu wagt er in manchen Stücken gleich anfangs zu viel, so daß kluge Leute" — unter ihnen Murray — „keine lange Dauer prophezeien" [1]). Andere folgten dem neuen Verleger mit besserer Zuversicht. Man wußte, daß von seinen Unternehmungen doch manche sehr gut einschlugen, und rühmte in dieser Beziehung besonders seinen „Kalender". Damit war der Göttinger Musenalmanach gemeint, dessen erster für 1770 bestimmter Jahrgang, von Boie mit Unterstützung Gotters und Kästners herausgegeben, zu Anfang des Jahres erschienen war [2]). Auch Heyne gehörte zu denen, die Dietrich mit Vertrauen begegneten, und im Einverständniß mit der Regierung knüpfte er mit ihm Verhandlungen wegen Uebernahme des Verlags der Societätsschriften an. Trotz mancherlei Kreuz- und Querzügen, die erneut von Michaelis ausgiengen — darin ist unser Herr Director Meister, heißt es einmal in einem Briefe Heynes, sich bey den kleinsten Umständen aufzuhalten und die größten Wichtigkeiten daraus zu machen. Mücken säugen (!) und Kamele verschlingen [3]) — kam es am 27. März 1770 zu einem Vertrage zwischen der Societät und Dietrich. Er übernahm die gesammten Herstellungskosten und erhielt eine Zusicherung der prompten Einliefrung der Manuscripte und Schutz gegen allzuviele und allzu kostbare Kupfer. Die bisherige Honorarzahlung des Verlegers an die Mitglieder fiel weg, dagegen war er verpflichtet, an die Societät 50 Exemplare jedes Bandes und 50 Thaler für den Band zu liefern. Zugleich mit diesem Vertrage wurde ein zweiter zwischen Dietrich und der Societät geschlossen, der ein neues Unternehmen, den Verlag der „Deutschen Schriften", der Gesellschaft zum Gegenstand hatte. Die Bedingungen waren ähnlicher Art, nur daß hier an die Stelle der Zahlung an die Gesellschaftscasse eine Honorarzahlung an die einzelnen Mitarbeiter, 4 Thaler für den Bogen an die ordentlichen Mitglieder der Societät, 2 Thaler an jeden andern,

1) Murray an Haller 1769 Aug. 26 (Bern Bd. 29 n. 159).

2) Michaelis wollte schon in einem Briefe an Münchhausen v. 1770 Febr. 15. (Cur.-Arch.) wissen, daß „Dietrichs Calender und einige seiner Verlagsbücher über alle Maaße gut gehen". Nach Weinhold, Boie S. 23 konnte der Musenalmanach erst im Januar 1770 versandt werden.

3) An Münchhausen 1770 Febr. 22 (Curat.-Arch.).

trat. Beiderlei Verträge gelangten in den nächsten Jahren zur Ausführung. Die im Jahre 1771 ins Werk gesetzten „Deutschen Schriften", zu denen von Göttingern nur Kästner, Heyne und Murray Beiträge geliefert hatten, erfreuten sich nur einer kurzen Lebensdauer. Mehr als der erste Band erschien nicht. „Da sich seit der Zeit die Journale und Vehikel und Canäle, worin man zu Lande und zu Wasser gelehrte Arbeiten in das Publicum einführen kann, so zusehends gehäufet haben, so schien es der Societät, daß bei einer ähnlichen Unternehmung für sie kein Verdienst weiter übrig sein dürfte" heißt es in Pütters Gelehrten-Geschichte II 288 mit einer ungewöhnlichen Munterkeit des Styls, die man wohl eher auf Rechnung eines Einsenders, etwa Kästners, als des Herausgebers setzen darf.

In den innern Societätsverhältnissen kam am frühesten eine Neubesetzung des Secretariats zu Stande und in Folge dessen alles übrige. Murray fühlte sich verletzt, weil er bei einer Gewährung von Gnaden und Titeln, die im Frühjahr 1770 über Göttingen ergieng, unberücksichtigt geblieben war und suchte um Entlassung aus seinem Amte bei der Societät nach. In Hannover war man darüber nahezu erfreut; denn jetzt lag die Möglichkeit vor, das Amt in die Hand eines so sachlich tauglichen und persönlich dem Director gewachsenen Mannes wie Heyne zu bringen, der auch nicht anzunehmen zögerte. Die Candidaten, die Michaelis in Bereitschaft hatte, Schlözer und Johann Beckmann, hatten das gegen sich, daß sie seine Clienten waren und nicht hinreichend Latein für das Amt konnten. Doch nahm er ihre Zurückweisung und die Bevorzugung Heynes zunächst noch ohne die Empfindlichkeit, die man halb und halb erwartet hatte, hin, und erst als Kästner im Sommer erklärte, das ständige Directorium von Michaelis nicht länger ertragen zu wollen, kam auch die Ordnung dieser Angelegenheit in Fluß. An die Stelle des beständigen Directoriums wurde ein unter den drei Classen jährlich abwechselndes gesetzt, das allemal von deren ältestem Mitgliede geführt wurde. Daraufhin machte Michaelis von dem ihm früher eingeräumten Rechte (ob. S. 81) Gebrauch und trat aus. Gegen Haller erklärte er seinen Schritt damit[1]): Herr Kästner prätendirte das Directorium, so mir allein übergeben war, zu theilen und darin mit mir abzuwechseln, und machte dem Premier-Ministre damit bange, daß er aus der Societät treten und die Ursachen davon drucken lassen wollte[2]). Hier fürchte sich der Herr Premier-Ministre vor der

1) 1770 Dec. 25 (Bern Bd. 80 n. 216).

2) Oben S. 92.

Malice seiner Feder. Ich erklärte mich, da ich schon längst wegen des beständigen Verdrusses, den Herr Kästner und Heine geflissentlich zu machen gesucht hatten und dem ich mit aller Mühe nicht ausweichen konnte, entschlossen war nicht immer in der Societät zu bleiben: meine honneur litte nicht gleichsahm zu descendiren, ich wollte also jetzt aus der Societät gehen".

Die Gelehrten Anzeigen brachten am 10. September 1770 die Nachricht, mit Ende des Monats lege Michaelis seine Stelle in der Societät nieder. Wenn Münchhausen geglaubt hatte, ihn noch als Mitarbeiter bei dem Blatte erhalten zu können, so täuschte er sich. Den Eindruck, den dies Verhalten auf den Minister hervorbrachte, zeigen seine beiden Schreiben [1]):

Münchhausen an Heyne.

Hannover den 26. August 1770.

E. W. werden leicht erachten, daß die Euserung eines gewißen Mannes auf das Sujet der gelehrten Gesellschaft mich betrübet hat. Ein solch Hertz, daß blos auf sich und sein Interesse siehet, und das keine Liebe gegen das algemeine Beste hat, ist gewis bedaurenswürdig und giebet zu vielen traurigen reflexionen anlas.

Bey nachfolgenden Posttag werden E. W. darüber eine ausführliche antwort haben. Es bleibet mir die unangenehme alternativ übrig, entweder Herrn M[ichaelis] Resignation anzunehmen oder die gantze Societät zu dissolviren, letzteres würde cum gravi detrimento Academiae geschehen.

Nur dieses wäre zu wünschen, daß diese Veränderung ohne eclat geschehen mögte, vieleicht diente dazu, daß Herr M. wegen seiner jetzigen auf sich habenden Arbeiten auf ein paar Jahre die Dispensation von der gelehrten Societät suchte. Bey seiner manifestirten Gesinnung aber zweifele ich, ob er solches thun werde, wenn auch gleich sonst dieses Expediens ohnbedenklich [2]) gefunden würde, so ich doch nicht weis [3]).

Münchhausen

Hannover den 10. Sept. 1770.

Die Anschlüße und insonderheit die interessirte Erklärung, warum er an denen gelehrten Anzeigen nicht weiter arbeiten will, werden bey E. W. so große Verwunderung verursachen als sie es

1) Briefe an Heyne Bd. II Bl. 240 u. 242, beide eigenhändig.

2) Geschrieben: ohnbendlich.

3) Der Rest des Briefes betrifft Angelegenheiten der Bibliothek.

bey mir in höchsten grad gethan haben. Ein Mann, der vor ein nicht weiter führendes directorium umsonst sein honorarium erhält, kan sine rubore sich auch demjenigen entziehen, was noch der Universität zum Vortheil gereichet!

Dieser punckt und überhaupt die künftige Einrichtung der gelehrten Anzeigen, die nun wieder unter Dero directorio kommen[1]), erfordert Dero Überlegung.

Münchhausen.

Eine nähere Ausführung liefern zwei Briefe von Brandes, deren erster zwischen die beiden Schreiben des Ministers fällt[2]): „Die Wendung, welche Herr M. der Sache gibt, ist recht hebräisch und machet den Entschluß minder zweifelhaft, da er deutlich bezeuget, wie wenig es ihm um das gemeine Beste zu thun sei. Indeßen wird man die Resolution per modum dispensationis faßen, damit es auswärts minder Eindruck gebe". Man dachte nämlich daran, Michaelis mit Rücksicht auf seine damals begonnene Übersetzung der Bibel von der Stellung in der Societät zu dispensiren. Wie wenig verdient solch schonende Behandlung war, zeigt das Verhalten von Michaelis zu den Gelehrten Anzeigen. Darüber schrieb Brandes vierzehn Tage später: „Herr M. erhält mit dieser Post seine Erlaßung auf Michaelis. Ich wünschete, daß der Herr Premier Minister Ihnen sein letzteres Schreiben mittheilen möchte. Hier zeiget er sich in seiner gantzen Blöße, detrahit et pellem ipse — introrsum turpis. Gar keine Empfindlichkeit als blos auf das Intereße, wobei dem Minister die ungegründetesten Vorwürfe geschehen, die alle seine Langmuth erforderlich machen. Wegen der Anzeigen will er erst seinen Vortheil noch beßer überrechnen; denn 4 ℳ für einen so dichte gesetzten Bogen ist nicht das, was er sonst in der Zeit verdienen könte. Ich habe nicht ohne Überwindung ihm desfals noch Complimente machen und in ihn dringen müßen, denn obgleich ich auch wünsche, daß er seine Mitarbeit fortsetze, so halte ich ihn doch keinesweges dabei unentbehrlich, sondern bin versichert, daß sein Fach schon zu ersetzen seyn solte"[3]).

Die Vervollständigung der Societät erfolgte in der oben S. 95 bestimmten Weise. Vogel wurde Mitglied der physischen Classe, als außerordentliche Mitglieder traten für die Fächer der Anato-

1) Bezieht sich darauf, daß Heyne eine Zeitlang, während Michaelis durch Krankheit und Badereise verhindert war, die Redaction geführt hatte.

2) 1770 Aug. 27 (I Bl. 153b).

3) 1770 Sept. 10 (Bl. 154.)

mie, Chirurgie, Botanik und Oekonomie ein: Wrisberg, Richter d. J., Murray und Joh. Beckmann. Zum ordentlichen Mitgliede der historisch-philolog. Classe wurde Joh. Philipp Murray, der ausgeschiedene Secretair, wiedererwählt [1]).

Es gehörte zu den letzten Sorgen Münchhausens, die verworrenen Angelegenheiten der Societät in Ordnung zu bringen. Er sah noch die Leitung des von ihm so hochgeschätzten litterarischen Organs in die Hände Heynes übergehen, in denen es ihm gelang seinen alten Ruhm zu behaupten und neue Anerkennung zu erlangen. Keine ist ehrenvoller als die ihm Herder aussprach:

„Mitten unter stürmischen Faktionen brachte Haller ein schmales Blatt unter den Schutz einer Societät der Wissenschaften selbst und gründete ihm dadurch nicht nur Unpartheilichkeit, Billigkeit und Gleichmuth, sondern auch Theilnahme am Fortgange des menschlichen Geistes in allen Weltgegenden und Sprachen. Seitdem sind die Göttingischen gelehrten Anzeigen nicht nur Annalen, sondern auch Beförderinnen und, ohne ein Tribunal zu seyn, consularische Fasten und Hülfsquellen der Wissenschaft worden, zu denen man, wenn manche einseitige Kritik verstummt ist, wie durch Lybische Wüsten zum stillen kenntnißgebenden Orakel der Wissenschaft reiset und dabei immer noch Hallers und seiner Nachfolger Namen segnet“ [2]).

Am 26. November 1770 starb G. A. von Münchhausen. Zu den Segnungen, die ihm Göttingen verdankt, gehört auch die „Wiederherstellung der Societät“, wie man schon damals die Schritte des Jahres 1770 bezeichnete [3]).

Unter dem Titel: Novi Commentarii soc. reg. scient. erschien im Herbst 1771 der die in den J. 1769 und 1770 gelesenen Abhandlungen umfassende erste Band, dem bis 1777 sieben weitere Bände folgten. 1779 begann man eine neue Serie [4]), die unter dem Titel: Commentationes soc. reg. scient. bis in die westfälische Zeit fortlief und damals in den Commentationes recentiores eine Fortsetzung erhielt. Mit dem 1843 ausgegebenen ersten, die J. 1838—1841 umfassenden Bande trat der Titel: Ab-

1) Novi Comment. I p. IX.

2) Briefe zur Beförderung der Humanität 8. Samlg. (1796) bei Suphan, Herders S. W. 18 S. 129.

3) Pütter, Gelehrten-Geschichte II 300.

4) Dem vol. I ist ein Inhaltsverzeichniß der novi commentarii beigegeben und ein Anhang, der einige der früher gelesenen, aber während des Stillstandes nicht zum Abdruck gelangten Abhandlungen z. B. von Zinn, Lowitz u. a. enthält. Damit ist in den folgenden Bänden fortgefahren. Pütter Gel. Gesch. II 287.

handlungen und die deutsche Sprache ein. Der schon lange angefochtene Unterschied von ordentlichen und außerordentlichen Mitgliedern der Gesellschaft, den Münchhausen bereits 1769 beseitigen wollte[1]), fristete noch bis 1776 sein Leben. Die Aufhebung wurde von Heyne in den Worten angezeigt: etsi nominis potius ac soni esset diversitas quam ut re ipsa aliquod interesset discrimen, ne tamen quicquam superesset quod disparilitatis opinionem facere posset, sublevatum est nominis discrimen, ut eadem conditione eodem loco et honore omnes sodales simus et habeamur.

Als im October 1771 die neuen Commentarien der Societät erschienen, begrüßte sie Georg Brandes in einem Schreiben an Heyne[2]): „Die Abhandlungen sind alle Societätsmäßig und enthalten, eine mehr die andere weniger, doch alle etwas neues und keine altägige Dinge oder Compilationen. Sie werden gewiß der Gesellschaft und gantzen Universität ein neues Ansehen geben. Und dieses haben wir doch warhaftig Ihnen, wehrtester Freund, gantz alleine zu danken. Der gute seel. Premier Minister, wie sehr verzweifelte er, und mit Recht, diesen todten Körper wieder zu einigem Leben zu sehen und wie bereuete er es nicht öfters demselben das Daseyn gegeben zu haben!“

Es verlohnt sich, das vorstehende den Briefen und Acten der Zeit abgewonnene Ergebniß mit den zugänglichen Berichten über diese Vorgänge zu vergleichen. Heyne hat im J. 1800 gelegentlich des Nachrufs für Kästner einen Rückblick auf diese Periode der Societätsgeschichte geworfen, der sich in folgenden Sätzen zusammenfassen läßt. Die Zerrüttung der Gesellschaft nahm ihren Ausgang davon, „cum socii unum ex medio suo viderent clandestinis artibus viam sibi ad directorium consequendum parare“. Als Michaelis das erstrebte Ziel erreicht hatte, war die Gesellschaft in Folge seiner und fremder Schuld in völliger Auflösung. Seine Versuche sie wiederherzustellen mißlangen. „Kaestnerum habui bonorum consiliorum participem in redintegranda societate“[3]). — Das herbe Urtheil, das Heyne hier über Michaelis fällt, verdient verglichen zu werden mit der Memoria, die er Michaelis am 24. Sept. 1791 in der Societät der Wissenschaften gehalten hat. War auch Michaelis der Societät seit dem Ausgang der Krisis, dem J. 1770 fern geblieben, so hatte er doch in seinem Testamente ihr ein Legat von 200 Thalern vermacht und sie seiner besten Wünsche

1) Oben S. 65 und 95.

2) 1771 Oct. 31 Bl. 204[a].

3) Heyne, Elogium Kaestneri in Comment. vol. 15 p. 6 ff.

für ihren Ruhm und den Nutzen, den sie den Wissenschaften verschaffet, versichert. Das bot der Societät Veranlassung, zu Ehren ihres ehemaligen Mitgliedes und Directors eine Erinnerungsfeier zu veranstalten [1]). Daß die bei dieser Gelegenheit gehaltene Rede schonend über die Streitigkeiten hinweggleitet, welche den Austritt Michaelis' herbeiführten, ist leicht erklärlich. Das verhüllende Gewand lateinischer Rhetorik und die Kunst des Redners lassen kaum von fern erkennen, was damals vorgefallen ist. Wie aber auch in deutscher Sprache ähnliches zu erreichen ist, zeigt Michaelis' Selbstbiographie [2]). Trotzdem sie mehrere Anläufe nimmt, des Verfassers Austritt aus der Societät zu erzählen, versteht sie geschickt bei den Nebendingen ausführlich zu verweilen und der Hauptsache aus dem Wege zu gehen. — Heeren, der aus den Briefen von Münchhausen und Brandes an Heyne das Wesentliche des ganzen Verlaufs kannte, verzichtete absichtlich auf deren Darstellung in der Biographie Heynes und verwies sie in eine Geschichte der Societät. Einzelne sehr werthvolle Winke und Mittheilungen sind ihm gleichwohl zu verdanken.

Es ist kein erfreulicher Einblick in Personen und Verhältnisse, den die Durchforschung der Briefe und Acten jener Zeit eröffnet hat. Aber er macht manches aus der Geschichte jener Jahre verständlich, auch manches was über die Stürme im Wasserglase hinaus liegt. Es genügt hier an das Auftreten Herders und des jungen Goethe gegen Schlözer und Michaelis und an die Hindernisse zu erinnern, die sich der Berufung Herders nach Göttingen in den Weg stellten.

1) Memoria Michaelis, aus den Commentat. abgedruckt in der Selbstbiogr. von Michaelis hg. v. Hassencamp (1793) S. 265 ff.

2) S. 113, 125.

Inhalt von Nr. 3.

F. Frensdorff, Eine Krisis in der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

9. März. **№ 4.** 1892.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 6. Februar 1892.

Liebisch legt den Aufsatz des Herrn Assistenten Kröker vor: „Ueber die Abhängigkeit der specifischen Wärme des Boracit von der Temperatur".

Kielhorn legt vor a) die Arbeit des Herrn Fritz Krebs in Berlin: „Altchristliche Texte im Berliner Museum".

b) eine eigne: „Jacobis Tafeln zur Berechnung indischer Daten und Mâdhavâchârya's Kâlanirṇaya".

Ehlers legt einen Aufsatz des Herrn Privatdocenten Dr. Bürger vor: „Kenntnis der Nemertinenfauna des Golfs von Neapel". Vorläufige Mittheilung.

Merkel legt einen Aufsatz des Herrn Prosektor Dr. Disse vor: „Ueber die Veränderungen der Epithelien in der Niere bei der Harnsekretion".

Der Sekretar legt eine Abhandlung des Herrn Professor Dr. Usener in Bonn, Korrespondenten der Gesellschaft in der Histor.-philolog. Klasse, vor: „Unser Platontext". II. Theil.

Scherin g legt eine Abhandlung des Herrn Professor Dr. Prym in Würzburg, Korrespondenten in der Mathematischen Klasse, vor: „Ueber orthogonale, involutorische und orthogonal-involutorische Substitutionen". (Die Gesellschaft beschließt den Abdruck im Band 38 der Abhandlungen).

Jacobis Tafeln zur Berechnung Indischer Daten und Mâdhavâchârya's Kâlanirṇaya.

Von

F. Kielhorn.

Die von Professor Jacobi in *Epigraphia Indica*, Band I., veröffentlichten Tafeln zur Berechnung indischer Daten haben mich bewogen, das Kapitel über Schaltmonate und ausfallende Monate des indischen lunaren Jahres in Mâdhavâchârya's *Kâlanirṇaya* da-

mit zu prüfen; und ich theile einige meiner Resultate mit, nicht nur, um auf Jacobis vortreffliche Arbeit in Deutschland aufmerksam zu machen, sondern auch, weil ein paar Stellen des *Kâlanirṇaya* vielleicht von allgemeinerem Interesse sind, und um beiläufig zu zeigen, daß die Calcuttaer Ausgabe dieses Werkes mit Vorsicht zu gebrauchen ist.

Der indische lunare Kalender des täglichen Lebens beruht auf dem solaren Kalender: das lunare Jahr und die lunaren Monate werden vom solaren Jahre und von den solaren Monaten reguliert. Das lunare Jahr fängt mit dem Neumonde an, der dem Anfange des solaren Jahres unmittelbar vorausgeht. Der lunare Monat erhält den Namen des solaren Monats, in den der die helle Hälfte des lunaren Monats einführende Neumond fällt. Fallen zwei Neumonde in einen solaren Monat, was in Zwischenräumen von etwa 30 Monaten geschieht, so erhalten wir zwei lunare Monate, die dem solaren Monate homonym sind, und von denen der erste als Schaltmonat betrachtet wird. Fällt kein Neumond in einen solaren Monat, so wird der Name dieses solaren Monats im lunaren Kalender gestrichen. Wo dies der Fall ist, sind die Verhältnisse der Art, daß sich sowohl kurz vor der Stelle wo der gestrichene Monat zu erwarten gewesen wäre, wie kurz nach derselben, ein Schaltmonat einstellt. Wir erhalten demnach bisweilen ein lunares Jahr, in dem der Name eines Monats fehlt, dafür aber die Namen zweier Monate zweimal erscheinen. Solche Jahre sollen in Zwischenräumen von 141 oder 19 Jahren wiederkehren. — Da der solare Monat mit der Saṁkrânti, d. i. dem Eintritte der Sonne in ein Sternbild, anfängt und endigt, so dürfen wir das eben erklärte auch so ausdrücken: ein lunarer Monat, in dem keine Saṁkrânti stattfindet, ist ein Schaltmonat; fallen zwei Saṁkrântis in einen lunaren Monat, so fällt der Name des von den beiden Saṁkrântis eingeschlossenen solaren Monats im lunaren Kalender aus. Der Schaltmonat ist *asaṁkrânta*; der lunare Monat, nach welchem der Name eines andern Monats ausfällt, ist *dvisaṁkrânta*. Ein lunares Jahr, in dem der Name eines Monats ausfällt, die Namen zweier Monate aber zweimal erscheinen, ist ein Jahr mit einem *dvisaṁkrânta* und zwei *asaṁkrânta* lunaren Monaten.

Als Beispiel eines solchen Jahres wird auf S. 74 des *Kâlanirṇaya* das Jupiterjahr Bhâva, welches dem Śaka Jahre[1]) 1256 (= A.D. 1334—35) entspricht, angeführt. Damit stimmen die ge-

1) Mit Śaka 1256 bezeichne ich nach der Weise der Inder dasjenige Jahr, welches eintritt, wenn 1256 Jahre der Śaka Aera verflossen sind, also das laufende Jahr 1257. Siehe unten.

wöhnlichen Tafeln durchaus nicht überein. Nach Sir A. Cunninghams *Book of Indian Eras* war in Śaka 1256 nur Âśvina ein Schaltmonat; nach Dr. Schrams Tafeln nur Bhâdrapada; nach R. Sewells Tafeln war Kârttika ein Schaltmonat, während Mârgaśira ausfiel. Rechnen wir dagegen mit Professor Jacobis Tafeln für Sûrya-siddhânta, so erhalten wir folgendes Resultat: —

Solare Monate.	**Saṁkrânti.**	**Entfernung ☾—☉.**	**Lunare Monate.**
	Mîna Ś. 1255.	217°18′32″	
(12). *Chaitra* Ś. 1255.	Mesha Ś. 1256.	235°52′1″	Chaitra (1). Ś. 1256.
(1). Vaiśâkha Ś. 1256.	Vṛisha	255°17′0″	Vaiśâkha (2).
(2). Jyaishṭha	Mithuna	283°0′57″	Jyaishṭha (3).
(3). Âshâḍha	Karkaṭa	314°12′53″	Âshâḍha (4).
(4). Śrâvaṇa	Siṁha	339°49′12″	Śrâvaṇa (5).
(5). Bhâdra	Kanyâ	355°59′42″	Bhâdra (6).
(6). Âśvina	Tulâ	3°50′0″	Âśvina I. (7). Âśvina II. (8).
(7). Kârttika	Vṛiśchika	5°21′52″	Kârttika (9).
(8). Mârga	Dhanuḥ	2°43′11″	Mârga (10).
(9). Pausha	Makara	358°41′25″	Mâgha (11).
(10). Mâgha	Kumbha	357°12′46″	Phâlguna I. (12).
(11). Phâlguna	Mîna	1°49′44″	Phâlguna II. (13).
(12). Chaitra	Mesha Ś. 1257.	14°50′17″	

Die dritte Columne dieser Tafel giebt die Entfernung des Mondes von der Sonne zur Zeit der Saṁkrânti, d.h., am Anfange der solaren Monate. Am Anfange des solaren Chaitra des Śaka Jahres 1255 war die Entfernung des Mondes von der Sonne 217°18′32″. Während des solaren Chaitra näherte sich der Mond der Sonne von 217°18′32″ bis zu 360° = 0° = Neumond, und entfernte sich dann wieder bis zu 235°52′1″. Der innerhalb des solaren Chaitra fallende Neumond bezeichnete den Anfang eines lunaren Monats, der, gerade weil der Neumond im solaren Chaitra stattfand, selbst Chaitra genannt wird; und der der erste Monat des lunaren Jahres ist, weil besagter Neumond unmittelbar vor dem Anfange des solaren Jahres stattfand. In gleicher Weise erhalten wir in regelmäßiger Folge die lunaren Monate Vaiśâkha, Jyaishṭha, Âshâḍha, Śrâvaṇa, und Bhâdrapada.

Am Anfange des solaren Âśvina, zur Zeit der Kanyâ-saṁkrânti, war die Entfernung ☾ — ☉ 355°59′42″; es fehlten etwa 4° (oder 8 Stunden) bis zum nächsten Neumonde. Am Ende desselben Monats, zur Zeit der Tulâ-saṁkrânti, war die Entfernung 3°50′, d.h., etwa 8 Stunden vor Ende des solaren Âśvina war wieder Neumond gewesen. Da mithin zwei Neumonde in den solaren Âśvina fielen, so erhalten auch die beiden mit diesen Neumonden anfangenden lunaren Monate den Namen Âśvina, und der erste derselben muß, weil er ganz innerhalb des solaren Monats verlief, oder weil während seiner Dauer keine Saṁkrânti stattfand, als der Schaltmonat Âśvina bezeichnet werden. Dem zweiten lunaren Âśvina folgt in regelmäßiger Weise, entsprechend dem solaren Kârttika, der lunare Monat Kârttika.

Auf Kârttika folgt ein lunarer Monat, der, wie die Tafel zeigt, vor der Dhanuḥ-saṁkrânti, also noch während des solaren Monats Mârgaśira anfing und deshalb selbst Mârgaśira zu benennen ist, der aber erst nach der Makara-saṁkrânti, d.i. nach Ablauf des solaren Pausha, aufhörte. Während des solaren Pausha war kein Neumond[1]), und wir erhalten deshalb auch keinen lunaren Monat Pausha, sondern müssen den auf den lunaren Mârgaśira folgenden lunaren Monat Mâgha nennen, weil der Neumond am Anfange dieses Monats in den solaren Mâgha fällt. Nach Ablauf des lunaren Mâgha wiederholt sich was wir bei Âśvina gesehen haben. In den solaren Phâlguna fielen zwei Neumonde, und wir erhalten so

1) Der solare Pausha dauerte 29 Tage 8 Stunden 21.2 Minuten; der lunare Mârgaśira, gerechnet von Neumond bis Neumond, dauerte 29 Tage 16 Stunden 17.2 Minuten, und fing 5 Stunden 21.2 Minuten vor Anfang des solaren Pausha an.

am Schlusse des lunaren Jahres zwei lunare Monate Phâlguna, von denen der erste natürlich wieder als Schaltmonat zu betrachten ist.

Berechnet nach Professor Jacobis Tafeln hatte das Śaka Jahr 1256 also wirklich zwei Schaltmonate, Âśvina und Phâlguna, und keinen Monat Pausha; oder, mit andern Worten, es enthielt zwei *asaṁkrânta* lunare Monate, Âśvina I und Phâlguna I, und einen *dvisaṁkrânta* Monat, Mârgaśira. Und das obige nach den Tafeln berechnete Schema des Jahres stimmt (was ich hier nicht näher auszuführen brauche) in allen Einzelheiten genau mit dem überein was im *Kâlanirṇaya* über das Śaka Jahr 1256 gelehrt wird.

Mehrere Beispiele für Jahre mit einem Schaltmonate werden S. 70 u. 71 des *Kâlanirṇaya* gegeben. Das erste derselben lautet:—

ashṭapañchâśad-yukta-śatadvay-âdhikê Śakavarshâṇâṁ sahasrê gatê sati samanantara-bhâvî yô 'yam = Îśvara-saṁvatsaras = tasmiñ = Śrâvaṇa-mâsô 'dhikaḥ | tataḥ pûrva-bhâvî yô Bhâva-saṁvatsaras = tasmin = Phâlguna-mâsô 'dhikaḥ |

„In diesem Jahre Îśvara, welches nach Alauf von 1258 Śaka Jahren eintritt, ist Śrâvaṇa ein Schaltmonat; in dem ihm vorausgehenden Jahre Bhâva Phâlguna".

Ueber die Facta liegt hier kein Zweifel vor. Daß im Jahre Bhâva Phâlguna ein Schaltmonat war, haben wir oben gesehen; und ebenso war Śrâvaṇa ein Schaltmonat in dem späteren Jahre Îśvara. Aber ich werde unten zeigen müssen, wie der Verfasser dazu gekommen sein mag, das Jahr Îśvara, das nach einer allgemeinen Regel dem Śaka Jahre 1259 entspricht, dem Śaka Jahre 1258 gleichzusetzen. Und ich möchte hier besonders auf das dem Worte *Îśvara* vorausgehende *ayam*, „dies Jahr Îśvara", aufmerksam machen, welches meines Erachtens nur den Sinn haben kann, daß Mâdhavâchârya in diesem Jahre Îśvara schrieb, daß der Kâlanirṇaya also in Śaka 1259 = A. D. 1337—38 verfaßt ist.

Das nächste Beispiel lautet im gedruckten Texte: —

yathôkt-Êśvarasaṁvatsar-ôttarabhâvini Chitrabhânu-saṁvatsarê Vaiśâkha-mâsô 'dhikaḥ | tata uttarabhâvini Târaṇasaṁvatsara-vyavahitê Pârthiva-saṁvatsarê Bhâdrapada-mâsô 'dhikaḥ |

„in dem auf das genannte Jahr Îśvara folgenden Jahre Chitrabhânu ist Vaisâkha ein Schaltmonat; in dem späteren durch das Jahr Târaṇa von Chitrabhânu getrennten Jahre Pârthiva Bhâdrapada".

Daß in diesem Texte ein Fehler steckt, ist ohne Weiteres klar. Zwischen Chitrabhânu und Pârthiva liegen zwei Jahre, Subhânu und Târaṇa. Außerdem soll, wie der Verfasser selbst sagt, der Monat Bhâdrapada des Jahres Pârthiva, vom Monate Vaiśâkha des Jahres Chitrabhânu an gezählt, der 29te Monat sein, ist aber in Wirklichkeit der 41te.

In zwei HSS. des India Office, die ich verglichen habe, lautet der Text so: —

yathôkt - Êśvarasaṁvatsar - ôttarabhâvini Chitrabhânusaṁvatsarê Vaiśâkha-mâsô 'dhikaḥ | tata uttarabhâvini Târaṇa-saṁvatsarê Bhâdrapada-mâsô 'dhikaḥ |

„in dem auf das genannte Jahr Îśvara folgenden Jahre Chitrabhânu ist Vaiśâkha ein Schaltmonat; in dem späteren Jahre Târaṇa Bhâdrapada".

Bei dieser Lesart wäre Bhâdrapada allerdings, von Vaiśâkha an gerechnet, der 29te Monat; aber auch dieser Text ist falsch. Denn das Jahr Chitrabhânu entspricht dem Śaka Jahre 1264, und Târaṇa dem Śaka Jahre 1266, und keins dieser Jahre enthält einen Schaltmonat.

Es bleibt nur übrig den Calcuttaer Text zu acceptieren, darin aber für *Chitrabhânu Subhânu* zu substituieren. Nur so erhalten wir einen correcten Text, und es ist leicht zu sehen wie daraus, sobald sich einmal die falsche Lesart *Chitrabhânu* eingeschlichen hatte, der von den beiden verglichenen HSS. gegebene Text entstehen konnte. Die weiteren Beispiele des *Kalânirṇaya*, die ich hier nicht zu behandeln brauche, zeigen, daß die Worte *Târaṇa-saṁvatsaravyavahitê* oder eine ähnliche Wendung nicht fehlen dürfen. — Der Verfasser sagt also, daß im Jahre Subhânu = Śaka 1265 Vaiśâkha ein Schaltmonat ist, und im Jahre Pârthiva = Śaka 1267 Bhâdrapada. Dasselbe lehren Sir A. Cunninghams Tafeln; nach Dr. Schrams Tafeln war in Śaka 1265 Chaitra ein Schaltmonat, und in Śaka 1267 Śrâvaṇa; nach R. Sewells Tafeln in Śaka 1265 Vaiśâkha, und in Śaka 1267 Âśvina.

Rechnen wir auch hier mit Professor Jacobis Tafeln für Sûrya-siddhânta, so erhalten wir folgende Resultate: —

In Śaka 1265 = Subhânu war die Entfernung ☾—☉ am Anfange des solaren Vaiśâkha 357°39′8″, am Ende desselben solaren Monats 18°29′44″; d. h., der lunare Vaiśakha war ein Schaltmonat.

In Śaka 1267 = Pârthiva war die Entfernung ☾—☉ am Anfange des solaren Bhâdrapada 356°8′7″, am Ende desselben solalaren Monats 17°2′13″; d. h., auch hier war, wie unser Text verlangt, Bhâdrapada ein Schaltmonat.

Noch bleibt die Frage, wie der Verfasser des *Kâlanirṇaya* dazu gekommen ist, das Jupiterjahr Îśvara, in dem er schrieb, dem Śaka Jahre 1258 gleichzusetzen.

Von allen Seiten häufen sich die Beweise dafür, daß man in Indien stets und bei allen Aeren gewöhnlich nicht nach laufenden, sondern nach abgelaufenen oder verflossenen Jahren gezählt hat. Wie der 15. Januar 1892 nach indischer Weise als der 15. Januar (nach Ablauf) des Jahres 1891 zu bezeichnen wäre, so bedeutet Śaka 1258 im Allgemeinen nicht das laufende Śaka Jahr 1258, sondern das auf das abgelaufene Jahr 1258 folgende laufende Jahr 1259. Das laufende Jahr 1259 wird bezeichnet als das Jahr nach Ablauf von 1258 Jahren, oder als das abgelaufene oder verflossene Jahr 1258, oder geradezu als das Jahr 1258. Nur die Jahre des Jupitercyclus sind laufende Jahre; und die Regel des südlichen luni-solaren Systems, die hier in Betracht kommt, lehrt, daß, wenn wir zum Śaka Jahre eines Datums 12 addieren, und die Summe durch 60 dividieren, der Rest, gezählt vom Jupiterjahre Prabhava = 1, das dem Śaka Jahre (d. i., dem auf das genannte Śaka Jahr folgenden laufenden Jahre) entsprechende Jupiterjahr anzeigt. Nach dieser Regel aber würde das im *Kâlanirṇaya* genannte Jahr 1258 dem Jupiterjahre Bahudhânya (10), nicht dem Jahre Îśvara (11) entsprechen; und da der Verfasser zweifellos vom Jahre Îśvara spricht, so hätte er dies Jahr dem (abgelaufenen) Śaka Jahre 1259 gleichsetzen müssen.

Dafür, daß die Regel des südlichen luni-solaren Systems der Jupiterjahre richtig ist, könnte ich Beispiele in Menge anführen. Ich begnüge mich mit dreien [1]).

Eine Kupferplatte des Yâdava Königs Kṛishṇa (Kanhara) von Dêvagiri enthält das Datum [2]): Êkasaptaty-uttara-śat-âdhika-sahasra-saṁkhyêshu Śakâbdêshv-atîtêshu pravartamânê Saumya-saṁvatsarê tadantargat-Âshâḍha-paurṇamâsyâṁ Śanaiśchara-vârê Pûrvâshâḍhâ-nakshatrê Vaidhṛiti-yôgê; d. i., als 1171 Śaka Jahre verflossen waren, im laufenden Jupiterjahre Saumya, während der Vollmond-*tithi* des Monats Âshâḍha, Sonnabend, unter dem *nakshatra* Pûrvâshâḍhâ und dem *yôga* Vaidhṛiti. Das correspondierende Datum, welches alle diese Bedingungen erfüllt, ist, für Śaka 1171 = Saumya (43), Sonnabend, der 26. Juni, 1249.

Das Datum einer andern Kupferplatte desselben Königs lau-

---

1) Absichtlich habe ich alle folgenden Daten den Inschriften ein und derselben Familie entnommen.

2) *Indian Antiquary* VII, 304.

tet[1]): śrî-Śaka-saṁvatsarasya śat-âdhika-sahasr-aik-âdhika-saptatyâś-ch-ânantarê Saumyê-bdê Śrâvaṇê mâsi sita-pakshê dvâdaśyâṁ Guru-vârê; d. i., im Jupiterjahre Saumya, das unmittelbar auf das Śaka Jahr 1171 folgt, am 12ten lunaren Tage der hellen Hälfte des Śrâvaṇa, Donnerstag. Das correspondierende Datum, wiederum für Śaka 1171 = Saumya (43), ist Donnerstag, der 22. Juli, 1249.

Eine Kupferplatte des Yâdava Râmachandra ist datiert[2]): Śakê cha êkâdaśasu trinavaty-adhikêshv-atîtêshu 1193 vartamâna-Prajâpati-saṁvatsar-ântargata-Mâgha-śuddha-dvâdaśyâṁ Budhê; d. i., als 1193 Śaka Jahre verflossen waren, im laufenden Jupiterjahre Prajâpati, am 12ten lunaren Tage der hellen Hälfte des Mâgha, Mittwoch. Hier ist das correspondierende Datum, wieder, wie die Regel verlangt, für Śaka 1193 = Prajâpati (5), Mittwoch, der 13. Januar, 1272.

Wie bei andern Aeren, so wird bisweilen auch in Daten der Śaka Aera ausnahmsweise[3]) nicht das abgelaufene, sondern das wirklich laufende Śaka Jahr genannt. Einige sichere Beispiele hierfür hat J. F. Fleet im *Indian Antiquary* gegeben, und die Sache ist an sich verständlich genug. Ganz anders ist es, wenn der Schreiber eines Datums weder das laufende noch das abgelaufene, sondern das dem abgelaufenen Śaka Jahre vorhergehende Jahr mit dem gerade laufenden Jupiterjahre in Verbindung bringt.

Eine Inschrift des Yâdava Sêuṇadêva enthält das Datum[4]): śrî-Śaka-saṁvat 1063 Dundubhi-saṁvatsar-ântargata-Jyêshṭha-sudi-pañchadaśyâṁ Sômê Anurâdhâ-nakshatrê Siddha-yôgê; d. i., im Śaka Jahre 1063, am 15ten lunaren Tage der hellen Hälfte des Jyêshṭha des Jupiterjahres Dundubhi, Montag, unter dem *nakshatra* Anurâdhâ und dem *yôga* Siddha. Der Regel nach ist Dundubhi (56) gleich dem (abgelaufenen) Śaka Jahre 1064 (nicht 1063); und daß das Datum wirklich in Śaka 1064 (d. i. in das laufende Jahr 1065) fiel, wird durch das correspondierende Datum, — Montag, der 11. Mai, 1142, — erwiesen, das alle Bedingungen erfüllt.

---

1) *Ib.* XIV, 69.

2) *Ib.* XIV, 317.

3) Der Wortlaut eines Datums, d.h., ob das Jahr ausdrücklich als laufendes oder abgelaufenes bezeichnet wird, ist von keiner Bedeutung. Nur die Berechnung oder Verificierung des Datums kann zeigen, mit welcher Art von Jahr wir es in jedem einzelnen Falle zu thun haben.

4) *Ib.* XII, 126.

Eine Inschrift aus der Zeit des Yâdava Siṁghana ist datiert[1]: śrî-Śâkê 1128 Prabhava-saṁvatsarê Śrâvaṇa-mâsê paurṇamâsyâṁ chandra-grahaṇa-samayê; d. i., im Śaka Jahre 1128, im Jupiterjahre Prabhava, während der Vollmond-*tithi* des Monats Śrâvaṇa, zur Zeit einer Mondfinsterniß. Der Regel nach ist das Jupiterjahr Prabhava (1) gleich dem (abgelaufenen) Śaka Jahre 1129 (nicht 1128). Nähmen wir aber an, die Jahreszahl 1128 des Datums wäre richtig, so müßte das Datum in das Jahr 1206 n. Chr. fallen, was ganz unmöglich ist, weil im Jahre 1206 n. Chr. überhaupt keine Mondfinsterniß stattfand. Auch hier hat der Schreiber fälschlich 1128 für 1129 gesetzt, und für dieses Jahr 1129, das in der That dem Jupiterjahre Prabhava entspricht, ist das correspondierende Datum der 9. August, 1207, an dem wirklich eine in Indien sichtbare Mondfinsterniß stattfand.

Meine Erklärung für die falschen Zahlen solcher Daten ist die, daß die Verfasser der Inschriften die Jahre der regelmäßigen Daten, die uns in Wirklichkeit abgelaufene Jahre geben, als laufende Jahre betrachteten, und daß sie, in der Absicht selbst abgelaufene Jahre zu geben, die Zahl des wirklich abgelaufenen, für die Verfasser die Zahl des laufenden Jahres, um 1 verminderten. Daß ein derartiger Fehler überhaupt möglich war, wird durch die Annahme erklärlich, daß man im gewöhnlichen Leben, gerade wie dies im *Kâlanirṇaya* geschieht, die Jahre mit den Namen der Jahre des Jupitercyclus und nicht mit Zahlen bezeichnete.

Denselben Fehler nun, den wir in den beiden zuletzt gegebenen Daten bemerken, macht auch der Verfasser des *Kâlanirṇaya*, wenn er das Jupiterjahr Îśvara nach Ablauf von 1258 Śaka Jahren eintreten läßt. In Wahrheit ist Îśvara, darüber kann kein Zweifel obwalten, das laufende Śaka Jahr 1260, oder das Jahr, welches unmittelbar auf das abgelaufene Jahr 1259 folgt.

1) *Epigraphia Indica* I, 343.

Altchristliche Texte im Berliner Museum.

Von

Fritz Krebs.

Einen interessanten Zuwachs erhält die christlich-liturgische Literatur durch 1 Pergament- und 2 Papyrusurkunden in griechischer Sprache, die dem Faijum entstammen und jetzt im Berliner Museum aufbewahrt werden. Hinsichtlich des Alters freilich können sie sich z. B. mit der Epiphanienliturgie der Sammlung Erzherzog Rainer[1]) nicht messen. Denn während Wessely diese dem IV. Jahrhundert zuschreibt, glaube ich keine der folgenden Berliner Urkunden über das VI. Jahrhundert hinaufrücken zu dürfen, wenn sie auch Abschriften älterer Originale sein mögen. Aber abgesehen davon, daß sie einiges Material für die Kenntnis des vulgären griechischen Dialects liefern, dürften sie bei der geringen Anzahl erhaltener gleichartiger Urkunden für die kirchengeschichtliche Forschung von Wert sein[2]).

I.

Das älteste der drei Schriftstücke ist zweifellos die Doxologie P. 7561 (der Berliner Sammlung), welche auf beiden Seiten eines etwa 30 cm breiten und 9 cm hohen Papyrusstreifens schlechtester Qualität niedergeschrieben ist. Die Buchstaben sind dick und steif und zeigen deutlich, wie der Schreiber, nur cursiv zu schreiben gewöhnt, sich hier bemüht hat, eine uncial geschriebene Vorlage uncial zu kopieren. Den ungebildeten Schreiber verrät auch die Niederschrift in vulgärem Dialect mit orthographischen Verstößen. Zu den Vulgarismen rechne ich vor allem die Verwechslung der tenuis mit der media (τωρων für δωρων Vorders. Z. 4. παρεγεχωνεν für παραγεγονεν Rücks. Z. 2), die Setzung des υ für ι und η (ταφυναι für ταφηναι Rücks. Z. 2, υμις für ημεις Vorders. Z. 3, συμερων für σημερον Rücks. Z. 1), des ι für ει (υμις für ημεις Vorders. Z. 3,

1) Veröffentl. von Wessely in d. österr. Monatsschrift f. d. Orient 1887, S. 152, besprochen v. Bickell in d. Mittlgn. a. d. Sammlg. der Papyrus Erzherzog Rainer, 1887, S. 83. Vgl. auch Usener „Das Weihnachtsfest" S. 189.

2) Auf letzterem Gebiete Laie, möchte ich nur darauf hinweisen, daß die erste der 3 Doxologieen zum Gebrauch bei der Osterliturgie bestimmt zu sein scheint. In dieser sowie besonders in der dritten Doxologie sind sachliche Anklänge an Teile der clementinischen Liturgie unverkennbar. Im übrigen verweise ich auf Bickell, Messe und Pascha. Mainz 1872.

προκιμενον für προκειμενων Vorders. Z. 3), das η für οι (κωλπης für κολποις Rücks. Z. 1), das ι für υ (μιστικην für μυστικην Vorders. Z. 2). Für ο steht fast regelmäßig ω, ο für ω nur 1mal (πρωκιμενον für προκειμενων Vorders. Z. 3). — Der Text lautet:

†Των θανατων σου κε̄ κατανγελλωμεν και τ[. . . . .][a]υ ανασταςιν
τον σου (sic!)
δοξωλωγουμεν χρ̄ς εξιωθημεν γαρ την[b] μιστικην και ανεκλαναι[c]
τραπεζα[d] και υμις προθυμως μεταλαβομεν εκ των πρωκιμενον σου
τωρων των πνευματικων c . να ⸗. . . . . μις των ◣
των επινικιον αληλ◣†

und auf der Rückseite:

†ο εν κωλπης του πατρος θ̄c̄[. . . . .]αρχον //(sic) συμερων εν τω στ[. . . .
παραγεκωνεν και ταφυναι καταξιωσας ως ανθρωπως[. . . .
ιδιω θεληματι ουτως ται[e] τριημερως αναστας και εχαρισατο υμι[
το μεγα ελεως†

In der uns geläufigen Orthographie:

†τὸν θάνατόν σου κύριε καταγγέλλομεν καὶ τ[ὴν ἁγίαν σο]υ ἀνάστασιν δοξολογοῦμεν Χριστέ. Ἠξιώθημεν γὰρ τῆς μυστικῆς καὶ ἀνεκλαλήτου σου τραπέζας, καὶ ἡμεῖς προθύμως μετελάβομεν ἐκ τῶν προκειμένων σου δώρων τῶν πνευματικῶν . . . . .

und

†ὁ ἐν κόλποις τοῦ πατρὸς θεὸς . . . . . ἄρχων· σήμερον ἐν τῷ στ[αυρῷ] παραγέγονεν, καὶ ταφῆναι καταξιώσας ὡς ἄνθρωπος . . . . ἰδίῳ θελήματι οὕτος (?) καὶ (?) τριήμερος ἀναστὰς καὶ ἐχαρίσατο ἡμῖν τὸ μέγα ἔλεος.†

II.

Auch der folgende Papyrus (P. 5603), 24 cm hoch und 16 cm breit, läßt durch seine dicken, ungefügen Buchstaben und seine barbarische Orthographie einen ungebildeten Schreiber vermuthen, der in dem gleichen Bestreben, unzial zu schreiben, nicht über die

---

a) Zwischen την und υ ανασταςιν sind die Horizontalfasern abgesprungen. Doch lassen die über die Lücke hinausstehenden Buchstabenreste sicher αγιανco ergänzen.

b) Abhängig von ἠξιώθημεν hatte der Schreiber zuerst richtig της μιστικης (sc. τραπέζας) geschrieben, wie noch deutlich zu sehen ist, dann aber beide c in ν geändert.

c) ανεκλαναιτον ist sinnlos und anscheinend — was paläographisch leicht erklärlich ist — aus dem ανεκλαλητον der uncialen Vorlage verlesen.

d) Dem τραπεζα fehlt am Schluß ein c resp. ν.

e) ται ist für και verschrieben. Auch in der vorhergehenden Zeile hat unser Schreiber zuerst fälschlich ται für και (ταφηναι) geschrieben, es aber dann verbessert.

ersten Zeilen hinausgekommen ist. Der Gewinn, den wir aus diesem Texte für die Kenntnis des vulgären Dialects ziehen können, ist gering. Auch hier finden wir η für οι und ι für ει gesetzt (ληπον Z. 8 und προνηα Z. 9 für λοιπον und προνοια, βλεπι Z. 1 und χριματιζι Z. 7 für βλεπει und χρηματιζει), aber von den übrigen orthographischen Absonderlichkeiten ist gewiß ein gut Teil auf die persönliche Rechnung des Schreibers zu setzen. Von den 16 Zeilen bilden die ersten 10 eine Danksagung an Gott, die letzten 6 eine Fürbitte für den Kaiser, das Reich und den ελλουστριος των πολειτων. Getrennt sind beide Teile durch einen Strich, das Ende eines kleineren Sinnesabschnittes bezeichnet der Schreiber durch ein Kreuz oder 2 schräge Striche (Z. 2, 5, 7, 11, 14 u. 16).

Der Text lautet:

Φωc η δοξα το βλεπι το ctρα
τον πεδον τα Ρομεα †//
τα πραγματα εν ηρην
διοικουνται τελειωc τη
5) οικουμενη ///
ουκ εδηχηcιc εματον
αδικιαν ου χριματιζι //
ληπον ελλουστριε χαριν εχειc
και Αρcενοιει εν αριc θεου προνη
10) α
cωcον κε̅ τον φιλοχρ̅ν βαcιλεα //
[ ]ευεργετην
cωcον κε̅ την αετητον
βαcιλειαν †
15) cωcον κε̅ τον ελλουστριον
των πολειτων

Ueber Zeile 1—2 wage ich nur Vermutungen aufzustellen: Subject ist φῶc (und η δοξα?), Praedicat βλέπει („sieht herab auf"), Object τὸ στράτοπεδον τὸ Ῥωμαῖον (?? „das römische Heer"). Das vor βλέπει stehende, sinnlose το ließe sich aus einem Versehen des Schreibers erklären, der zuerst das βλέπει übersehen hatte, es dann hinter το nachholt und dies so doppelt schreibt. (Vgl. sein Versehen Z. 9).

Zeile 3—5 preisen den auf der ganzen Erde herrschenden (τελείως τῇ οἰκουμένῃ) Frieden. — Am Ende der Z. 3 ist das schließende η in ηρηνη vergessen.

Z. 6—7 preisen Gottes Fürsorge für den Einzelnen. Bei ουκεδηχηcιc sind mehrere Erklärungen denkbar: Es ist entweder = οὐ κατηχήσεις (ἑμαυτὸν ἀδικίαν). Eine Verwechslung der tenuis und

media ist denkbar. (Das οὐ χρηματίζει müßte dann für sich und in prägnantem Sinne stehen). Oder es ist gemeint οὐκ ἀδικήσεις (ἑμαυτόν). Indes steht kurz nachher richtig ἀδικίαν, und hat die Vertauschung der media mit der aspirata kein Analogon. Am nächsten läge οὐκ ἀτυχήσεις, was aber hier keinen Sinn ergiebt.

Z. 8—10 wenden sich an den ἰλλούστριος, offenbar denselben ἰλλούστριος τῶν πολιτῶν, dem die Fürbitte Z. 15—16 gilt. Da er dort neben Kaiser und Reich genannt wird, müssen wir in ihm wohl den höchsten städtischen Beamten von Arsinoe sehen, wonach dann auch Z. 8—10 verständlich wird: „du stehst in Gunst bei Gott (χάριν ἔχεις), und darum steht auch Arsinoe unter Gottes besonderer Fürsorge". αριϲ ist zu ἀρίστῃ zu ergänzen: Das unmittelbar folgende gleichlautende θϵ(ου) hat den Schreiber irre geführt.

In Z. 12 sind die Horizontalfasern des Papyrus abgesprungen. Indes berechtigen die über die Lücke hinausragenden Buchstabenreste, zu ergänzen: ϲωϲον $\widehat{\text{χϵ}}$ und am Schluß φιλοχρν. Diese Zeile noch auf den βασιλεὺς zu beziehen, hindert die am Schluß der vorhergehenden Zeile gesetzte Interpunction.

Z. 13 αετητον für ἀήττητον.

In der uns geläufigen Orthographie würde der Text lauten:

φῶς η(?) δόξα βλέπει τὸ στρα
τόπεδον τὸ Ῥωμαῖον.
τὰ πράγματα ἐν εἰρήνῃ
διοικοῦνται τελείως τῇ
οἰκουμένῃ.
Ου . . . . . ἐμαυτὸν
ἀδικίαν οὐ χρηματίζει
λοιπόν, ἰλλούστριε, χάριν ἔχεις,
καὶ Ἀρσινόη ἐν ἀρίστῃ θεοῦ προνοί
α.
σῶσον, κύριε, τὸν φιλόχριστον βασιλέα
σῶσον, κύριε, [. . .] φιλόχριστον εὐεργέτην
σῶσον, κύριε, τὴν ἀήττητον
βασιλείαν
σῶσον, κύριε, τὸν ἰλλούστριον
τῶν πολιτῶν.

III.

Unvollständig ist leider das dritte liturgische Schriftstück (P. 6697), ein Streifen schlechten Pergaments, etwa 5 cm hoch und 10 cm breit, beiderseitig mit 6 Zeilen beschrieben. Auf beiden

Seiten beginnt die oberste Zeile mitten im Satze, die Urkunde ist also sicher oben, anscheinend auch unten verstümmelt. Die Schrift ist nicht so ganz ungewandt und auch orthographisch correct bis auf die Vulgarismen: Schreibung des υ für η, ο für ω, ω für ο und η für οι. Als Interpunction dienen kleine Kreuze und Puncte:

Vorders.:]π ιcον τα παντα † cυ ει ο παν
βαcιλευc και πανυγεμων : και
.]υριοc τον ολον : cυ ει ο γενεcι
..]ργοc και κοcμωποιοc : και φυ
..]ξ του παντοc ‡ cυ και την εc[.
.....]η των φυcιν ειc το ειν[...

Rücks.: τεc απαυcτηc : γιν[...
c[1])φερεcθε διηνεκοc πρ◣
ταξαc † τηc cνc θεcμηc, sic!
ηλιοc μεν την ημεραν η τε
cελην̣η την νυκτα καταυ[
]δια την cυν βουλην.

Mit den sicheren Ergänzungen lautet der Text in unserer Orthographie:

ἐ]π᾽ ἴσον τὰ πάντα † σὺ εἶ ὁ παμ-
βασιλεὺς καὶ πανηγεμὼν : καὶ
κ]ύριος τῶν ὅλων : σὺ εἶ ὁ γενεσι-
ου]ργὸς καὶ κοσμοποιός : καὶ φῦ-
λα]ξ τοῦ παντός † σὺ καὶ τὴν εσ[.
.....]φητων φύσιν εἰς τὸ ειν[...

Rücks.: τες ἀπαύστης : γι◣
σφερεσθε[2]) δι? ηνεκος πρ◣
τάξαι † τοῖς σοῖς θεσμοῖς[3])
ἥλιος μὲν τὴν ἡμέραν ἥ τε
σε]λήνη τὴν νύκτα καταυ-
γάζει] διὰ τὴν σὴν βουλὴν[

IV.

Der Mitteilung wert scheint mir noch ein wunderliches, gleichfalls dem Faijum entstammendes Amulett der Berliner Sammlung (P. 6096): Ein 10fach zusammengeknifter Streifen sehr schlechten Pergaments, etwa 14 cm hoch, 8 cm breit und nur einseitig be-

1) Das c kann auch als Teilchen des φ angesehen werden.

2) Vielleicht φερεσθαι zu lesen. Der Zusammenhang ist mir nicht klar.

3) τηc und θεcμηc kann nur τοῖς und θεσμοῖς sein. Demnach muß auch cνc (= σης =) σοῖς sein.

schrieben. Seiner Bestimmung hat dies φυλακτήριον redlich gedient; denn der Schweiß seines Trägers hat es völlig durchtränkt und die schon ohnehin schlechte und undeutliche Schrift an manchen Stellen derart verschwimmen lassen, daß eine sichere Lesung nicht mehr möglich ist. Zu den aus der vulgären Aussprache sich herschreibenden orthographischen Eigenheiten (Setzung des ο für ω z. B. Z. 2 κατοικον, Z. 18 αυτον und διδασκον, Z. 20 θεραπευον und des υ für η in περιυγεν Z. 17) tritt hier hinzu die Endung ες für αις in συναγωγες Z. 18.

Die Wunderkraft des Textes beruht auf seiner Zusammensetzung aus Stellen der Psalmen und Evangelien:

† Εν ονοματι του πρς και . . .[1])του αγιου πνς
κατοικον εν βοηθεια του υψιστου
εν σκεπη του χρ[2]) του ουρανου αυλισθη[3])
† εν αρχη ην ο λογος και ο λογος ην π[4])
5) τον [5])και θς ην ο λογος ουτος ην εν αρχη
προς τον θν
† βιβλος γενεσεως[6]) Ιη Χρ υυ Δαδ υυ Αβρ
† αρχη του ευαγγελιου Υιου Χυ υυ του θυ[7])
† επειδηπερ πολλοι επεχειριςαν
10) ανα . .[8])ξασθαι διηγησιν
† κς εμοι βοηθος και ου φοβηθη
σομαι τι ποιησει[9]) μοι ανθς
† κς εμοι βοηθος καγω εποψομαι
τους εχθρους μου †
15) † κς στερο.[10])μα μου και καταφυγη μου
και ρυστης μου †
† περιυγεν[11])ο κς Ις ολην την Γαλιλειαν

---

1) και του υιου ist nicht mehr zu lesen.

2) κατοικων; LXX : ο κατοικων.

3) του χριστου; LXX : του θεου.

4) Im Drucke nicht wiederzugebende Sigle für πρὸς.

5) Zwischen τον und και ist θ(εο)ν vergessen.

6) Ich glaube γενεσεως zu erkennen. Auch die Lesung der folgenden Abkürzungen kann ich nicht als sicher hinstellen.

7) υιου του θεου om. cod. Sinait. cod. Sinait. alt. man.: υιου θεου Steph.: υἱοῦ τοῦ θεοῦ.

8) τα scheint nicht dazustehen. Ich glaube δε zu erkennen.

9) πηοιεει statt ποιήσει.

10) Zwischen ο und μ steht noch ein unleserlicher Buchstabe; LXX: στερέωμα.

11) περιυγεν ο κς ις ολην την Γαλιλαιαν.] cod. Sin.: και περιηγεν ο Ιησους εν (sec. man. add. ολη) τη Γαλιλαια. Steph.: καὶ περιῆγεν ὅλην τὴν Γαλιλαίαν ὁ Ἰησοῦς.

διδασκον εν ταις συναγωγες αυτον
και κυρηςον το ευαγγελειον της βασιλει/
και θεραπευον πασαν νοσον και πασαν μαλακιαν
† Το σωμα[1]) και το δεμα[2]) του χρ φεισαι του δου
λου σου τον φορουντα[3]) το φυλακτηριον
τουτο αμην αλληλουια . . † ω †

Die Bibelstellen sind die folgenden:

Ps. 91 V. 1 (Z. 2—3). Ev. Joh. 1_1 (Z. 4—6). Ev. Matth. 1_1 (Z. 7). Ev. Marc. 1_1 (Z. 8). Ev. Luc. 1_1 (Z. 9—10). Ps. 118_{6-7} (Z. 11—14). Ps. 18_2 (Z. 15—16). Ev. Matth. 4_{23} (Z. 17—20).

Ueber die Veränderungen der Epithelien in der Niere bei der Harnsecretion.

Von

Dr. **J. Disse**, Prosector in Göttingen.

Vorgelegt von Fr. Merkel.

Es darf angenommen werden, daß die Harnbestandtheile in den gewundenen Rindenkanälchen und in den weiten Schenkeln der Henle'schen Schleifen abgeschieden werden. Wie die Versuche von Heidenhain lehren, erfolgt die Abscheidung von Indigschwefelsaurem Natron, das in das Blut der Versuchsthiere eingebracht wurde, ebenfalls in den genannten Abschnitten der Harnkanälchen, unter activer Mitwirkung der Epithelzellen, die diese Abschnitte auskleiden.

Es sind die Epithelzellen in beiden Abschnitten übereinstimmend gebaut; sie sehen trübe und körnig aus, was auf der Durchsetzung des Zellenleibes mit Stäbchen beruht, und sind sehr undeutlich gegeneinander abgegrenzt.

Wie in andern Drüsen, so sieht man auch in der Niere, daß die Abscheidung des Secretes von sichtbaren Veränderungen der Epithelzellen begleitet ist; und man kann die Ansammlung des

---

1) Anknüpfend an die letzte Stelle aus dem Matthäus-Evangelium, die von Christi Krankenheilungen in Galiläa berichtet, wird nun auch für den Träger dieses Amuletts um Gesundheit gebeten.

2) Gemeint ist δέμας.

3) Gemeint ist entweder τὸ φοροῦν, auf τὸ σῶμα, oder τοῦ φοροῦντος auf τοῦ δούλου bezüglich.

Secrets in den Epithelzellen, bis zu deren vollständiger Füllung an tadellos erhaltenen Nieren mit dem Microscop verfolgen. Es werden aber die Nierenepithelien nur in 1% Osmiumsäure und im Flemming'schen Gemisch (Chrom-Osmium-Essigsäure) gut erhalten.

Das Epithel der gewundenen Rindenkanälchen erscheint durchaus nicht gleichartig, sondern sieht in verschiedenen Canälchen, sowie in verschiedenen Abschnitten des gleichen Canälchens verschieden aus. Man findet 1) gewundene Canälchen mit niedrigem Epithel und weitem Lumen; die Zellen grenzen sich gegeneinander nicht ab, und nur die regelmäßig gestellten Kerne zeigen den Zerfall in Zellen an. Die freie Fläche der Zellen zeigt beim Menschen, auch bei der Maus, einen Besatz dicker, starrer Häärchen, deren Länge ungefähr $^1/_5$ von der Höhe der Zelle ausmacht. Der Zellkern liegt dicht unter dem Stäbchensaum.

2) Gewundene Canälchen mit höherem, cylindrischem, fleckig aussehendem Epithel. Das Lumen ist ziemlich enge, etwas kleiner als die Höhe der Zellen; der Stäbchensaum ist nicht zu sehen. Jede Zelle erscheint in ihrer ganzen Länge undeutlich streifig; gegen das Lumen, wie gegen die Nachbarzellen zeigt sie eine scharfe Grenze. Das fleckige Aussehen des Epithels rührt von hellen rundlichen Blasen her, die in der Nähe des Zellkerns liegen. Meist sieht man in derartig veränderten Epithelien einzelne ganz helle, kuglig oder becherförmig erscheinende Zellen, mit scharfem Grenzkontur. Der Kern liegt in der Mitte der Zelle; nur die Basis der Zelle, die auf der Membrana propria aufsitzt, ist dunkel und zeigt Streifung.

3) Endlich findet man Abschnitte von gewundenen Canälchen deren Epithel ganz und gar aus derartig veränderten Epithelzellen besteht; jede Zelle hat einen dünnen Basalabschnitt mit Stäbchenstructur, und einen großen, hellen, dem Lumen zugekehrten becherförmigen Abschnitt, der den Kern enthält. Das Lumen der gewundenen Canälchen ist, wo die Zellen derartige Umwandlung zeigen, enge und unregelmäßig.

Die gleichen Veränderungen beobachtet man an den Epithelien des weiten Schenkels der Henle'schen Schleifen.

Die Epithelien der engen Schleifenschenkel, der Schaltstücke, Verbindungscanälchen und Sammelröhren zeigen immer ein gleichartiges Aussehen.

Das Secret der Niere sammelt sich also in den Epithelzellen der gewundenen Canälchen und der weiten Schleifenschenkel an; es tritt zuerst in der Nähe des Kerns auf, nimmt an Menge zu.

und füllt den dem Lumen zugekehrten Abschnitt der Zellen an. Der Kern liegt im secrethaltigen Zellabschnitt. Während das Secret sich ansammelt, bekommt die Zelle scharfe Grenzen.

Die Entleerung des Secrets führt zu einer beträchtlichen Verkleinerung der Zellen; dabei werden die Zellgrenzen undeutlich, und bei einigen Species bildet sich auf der freien Fläche der Zellen ein Besatz kurzer Häärchen aus.

Ueber die Abhängigkeit der specifischen Wärme des Boracits von der Temperatur.

Von

K. Kroeker.

(Vorgelegt von Th. Liebisch.)

In der Reihe der dimorphen Körper, welche eine reversible Umwandlung gestatten, zeichnet sich der Boracit dadurch aus, daß Ueberschreitungen der Umwandlungstemperatur bei ihm nur in sehr geringem Maaße auftreten. In Folge dessen ist der Boracit trefflich geeignet zur Bestimmung des thermischen Effectes, welcher die Umwandlungen begleitet.

Zur Ermittelung der Umwandlungswärme des Boracits haben schon die Herren Er. Mallard und H. Le Chatelier[1]) Untersuchungen über die Abhängigkeit der specifischen Wärme von der Temperatur ausgeführt, welche folgende Resultate ergaben:

t	Mittlere spec. Wärme zwischen 14° und $t°$.	Aenderung für 1° C
150°	0,224	
220°	0,240	0,00023
252°	0,244	0,00013
277°	0,266	**0,0088**
316°	0,274	0,0002
339°	0,273	0,00004

Die specifische Wärme des Boracits ändert sich also merklich mit der Temperatur; zwischen 252° und 277° ist die Aenderung in Folge

1) Er. Mallard: Sur la chaleur latente correspondant au changement d'état cristallin de la boracite. Bull. soc. min. de France. 6, 122; 1883.

des Freiwerdens latenter Wärme bei der Umwandlung am beträchtlichsten.

Aus diesen Zahlen berechnen Er. Mallard und H. Le Chatelier als mittlere specifische Wärme der beiden Modificationen des Boracits zwischen 14° und 265° die Werthe $c = 0{,}246$ und $c_1 = 0{,}265$. Mit Hülfe der Relation:

$$C = (c_1 - c)(265 - 14)$$

erhalten sie hieraus die Umwandlungswärme:

$$C = 4{,}77 \text{ cal.}$$

Berechnet man dagegen aus den obigen Angaben zunächst die Wärmemenge q, welche 1 g Substanz bei der Abkühlung von $t°$ auf 0° abgiebt, so erhält man die in der dritten Columne der folgenden Tabelle wiedergegebenen Zahlen, welche, graphisch als Function der Erhitzungstemperatur t dargestellt, für das Intervall 150° bis 252° eine gerade Linie und für das Intervall 270° bis 340° eine gegen die Axe der Temperaturen concave Kurve bilden.

t	Spec. Wärme zwischen 14° und $t°$	Abgegebene Wärmemenge q		
		q beob.	q ber.	Differenz
150°	0,224	33,60	33,60	0,00
220°	0,240	52,80	52,75	−0,05
252°	0,244	61,49	61,50	+0,01
277°	0,266	73,68	73,67	−0,01
316°	0,274	86,58	86,58	0,00
339°	0,273	92,55	92,55	0,00

Die Abhängigkeit der abgegebenen Wärmemengen q von der Erhitzungstemperatur t wird jetzt durch folgende Gleichungen dargestellt:

$$q = -7{,}421 + 0{,}2735 \cdot t$$

$$q_1 = 68{,}98 + 0{,}40392\,(t-265) - 0{,}0011543\,(t-265)^2.$$

Die erste Gleichung gilt für das Intervall 150° bis 265°, die zweite für 265° bis 340°. Setzt man für t die angegebenen Erhitzungstemperaturen ein, so erhält man die in der vierten Columne der Tabelle angeführten Werte von q, die mit den beobachteten Werten gut übereinstimmen. Für $t = 265°$ ergiebt die erste Gleichung $q = 65{,}056$ cal. und die zweite $q_1 = 68{,}980$ cal., woraus

für die Umwandlungswärme der Wert:

$$C = q_1 - q = 3{,}924 \text{ cal.}$$

folgt.

Da Er. Mallard seine Bestimmung der Umwandlungswärme des Boracits als eine Annäherung bezeichnet hat, so habe ich auf Veranlassung des Herrn Th. Liebisch eine erneute calorimetrische Untersuchung des Boracits ausgeführt.

Die Bestimmung der specifischen Wärme des Boracits geschah mit Hülfe des Bunsenschen Eiscalorimeters[1]).

Das Calorimeter $\mathfrak{C}$ befand sich bis zu der Stelle, wo das innere und das äußere Glasgefäß an einander geschmolzen sind, in einem aus zwei Messinggefäßen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ bestehenden Thermostaten, welcher dem von A. Schuller und V. Wartha[2]) benutzten nachgebildet war. Das innere mit destillirtem Wasser angefüllte Gefäß $\mathfrak{M}_1$ wurde durch Anwendung einer Kältemischung von Chlorcalcium und geschabtem Eis, die in den Zwischenraum von $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ gebracht wurde, mit einem $1^1/_2$ bis 2 cm dicken Eismantel ausgekleidet. Darauf wurde der Zwischenraum mit Eis ausgefüllt. Beide Gefäße wurden mit einem Deckel geschlossen, auf welchem noch Eisstücke bis zur Mündung des centralen Glasrohres $\mathfrak{P}$ des Calorimeters angehäuft werden konnten. Den ganzen Apparat umgab man mit dicken Tüchern, um das Wegschmelzen der äußeren Eishülle nach Möglichkeit einzuschränken.

Die Bildung einer ca. $^1/_2$ cm dicken Eishülle $\mathfrak{E}$ um das Rohr $\mathfrak{P}$ wurde dadurch bewirkt, daß zunächst abgekühlter Alkohol und darauf ein Reagenzglas mit einer Kältemischung in dieses Rohr gebracht wurde. Die Krystallisation erfolgte anfänglich nur sehr langsam in der Weise, wie R. Bunsen und A. W. Velten[3]) es beobachteten. Später genügte es in der Regel zur Ergänzung der abgeschmolzenen Eishülle abgekühlten Alkohol in das Rohr zu bringen.

Die Bestimmung der in Folge des Schmelzens von $\mathfrak{E}$ eingesogenen Quecksilbermengen geschah durch räumliche Messung mit einem Capillarrohre. Der Wert der Millimeter-Skala dieses Rohres in Gewichtsmengen Quecksilber war durch wiederholte Calibrierung für Intervalle von 10 zu 10 cm genau festgestellt worden. Mit

---

1) R. Bunsen: Calorimetrische Untersuchungen. Pogg. Ann. 141, 1; 1870.

2) A. Schuller und V. Wartha: Calorimetrische Untersuchungen. Ann. d. Phys. N. F. 2, 359; 1877.

3) A. W. Velten: Die specifische Wärme des Wassers. Ann. d. Phys. N. F. 21, 81; 1884.

Hülfe einer Lupe vermochte man noch 0,1 mm hinreichend genau abzuschätzen.

Der ganze Apparat befand sich in einem Zimmer, dessen Temperatur 8,0° C nicht überstieg.

Die Eigenbewegung des Quecksilberfadens, die zuerst als Rückwärtsbewegung im Sinne des Schmelzens, später als Vorwärtsbewegung im Sinne des Weiterfrierens von $\mathfrak{E}$ beobachtet wurde, war gering und durchaus regelmäßig. Was die Ursache derselben anbelangt, so schien mir die Rückwärtsbewegung des Fadens hauptsächlich eine Folge davon zu sein, daß trotz der Eisumhüllung geringe Wärmemengen von der Luft an das Calorimeter abgegeben werden, eine Annahme, die besonders durch die Beobachtung gestützt wird, daß Schwankungen der Zimmertemperatur von weniger als 0,5° C eine Aenderung der Eigenbewegung bewirkten und daß die letztere ganz aufhörte, als die Temperatur des Arbeitszimmers 0° betrug. Die Vorwärtsbewegung des Quecksilberfadens dürfte darauf zurückzuführen sein, daß von dem auf dem Deckel des Thermostats befindlichen Eise allmählich unreines Wasser in das innere Gefäß $\mathfrak{M}_1$ tropfte und die dadurch veranlaßte Gefrierpunktserniedrigung des Wassers in $\mathfrak{M}_1$ ein stetiges Weiterfrieren der Eishülle $\mathfrak{E}$ bewirkte.

Zur schnellen und sicheren Ueberführung des erhitzten Versuchskörpers in das Calorimeter diente ein nach der Angabe von M. Bellati[1]) construiertes Erhitzungsgefäß. Dasselbe besteht aus einem doppelwandigen Messingcylinder in den von oben her, durch einen Kork gehalten, ein Thermometer ragt, während die untere Seite durch eine Messingklappe verschlossen ist. Letztere springt auf, sobald eine Klammer von oben her durch einen Hebel ausgelöst wird, und läßt die Gegenstände, die man vorher um die Thermometerkugel herum angeordnet hatte, aus dem Messingcylinder herausfallen. Dieses Erhitzungsgefäß wurde in einem Luftbade langsam erwärmt, bis das innere Thermometer die gewünschte Temperatur constant anzeigte. Die bei den Versuchen benutzten Thermometer von R. Fuess waren in der physikalischen Reichsanstalt corrigiert worden; die zur Correction des herausragenden Fadens erforderliche mittlere Temperatur desselben wurde durch ein zweites in der Mitte der Thermometer-Röhre befestigtes Thermometer festgestellt. Die Thermometer waren in halbe Grade der

---

1) M. Bellati e R. Romanese: Atti dell' Istituto Veneto. (6). 1, 1043; 1882—83. Phil. Trans. 173, 1169; 1882.

hundertteiligen Skala geteilt und gestatteten noch eine Schätzung von zehntel Temperatur-Graden.

Der Gang der Untersuchung war nun folgender.

Ich bestimmte durch zwei im Abstande von einer Stunde gemachte Ablesungen die stündliche Eigenbewegung des Quecksilberfadens vor dem Versuche, ließ darauf den erhitzten Versuchskörper in das Calorimeterrohr ℜ fallen und stellte nach einer Stunde den Stand des Quecksilbers in dem Capillarrohr durch Ablesung fest. Da stets nur geringe Gewichtsmengen der Substanz verwendet wurden, so war der Wärme-Ausgleich nach einer Stunde völlig beendet, wie daraus hervorging, daß bei sämtlichen Versuchen nach Ablauf dieser Zeit die Bewegung des Quecksilberfadens constant war. Eine Stunde später machte ich noch eine vierte Ablesung, durch welche die stündliche Eigenbewegung des Quecksilberfadens nach dem Versuch festgestellt wurde. Hierauf wurde der Versuchskörper aus dem Rohr entfernt. Die von diesem Körper bei der Abkühlung von t^0 auf 0^0 abgegebene Wärmemenge ist somit gemessen durch die Differenz zwischen der zweiten und dritten Ablesung, vermehrt resp. vermindert um die mittlere Eigenbewegung des Quecksiberfadens während der Versuchsdauer.

Es mußte nun zuvörderst durch Versuche mit einem Stoffe von bekannter specifischer Wärme ein Urteil über die Genauigkeit gewonnen werden, mit der an diesem Calorimeter gearbeitet werden konnte. Hierzu bediente ich mich des destillierten Wassers. Ich suchte festzustellen, wie viel Gramm Quecksilber eingesaugt werden, wenn sich 1 g Wasser in dem Calorimeter von 100^0 auf 0^0 abkühlt.

Zu diesem Zwecke brachte ich in ein kleines Kölbchen von dünnem Glase, das auf der einen Seite zu einer feinen Capillarröhre ausgezogen war, ausgekochtes destillirtes Wasser und schmolz die Capillare zu, während das Kölbchen in einem Bade von siedendem Wasser auf Siedetemperatur erhalten wurde. Auf diese Weise blieb in dem Kölbchen nur ein sehr kleiner wasserfreier Raum.

In der folgenden Tabelle bedeutet:

p das Gewicht der Glashülle;

w das Gewicht des Wassers;

T die Erhitzungstemperatur des Kölbchens;

N den Stand des Quecksilberfadens zur Zeit der Ablesung;

E die stündliche Eigenbewegung des Quecksilberfadens;

S den durch die Abkühlung des Versuchskörpers mit Berücksichtigung von E bewirkten Rückgang des Quecksilberfadens;
Q_r das mit Hülfe der Correctionstabelle des Capillarrohres und unter Berücksichtigung der herrschenden Temperatur berechnete Gewicht der eingesaugten Quecksilbermenge;
Q_{100} das Gewicht der für $T = 100^0$ eingesaugten Quecksilbermenge.

Nummer des Versuches	Erhitzungskölbchen			Beobachtungszeit	N	E	S	Q_r	Q_{100}
	T	p	w						
1.	100,1°	0,5037 g	0,8025 g	12h0′	86,97 cm	0,00	15,495	1,3973	1,3959
				1h0′	86,97				
				2h0′	71,48	+0,01			
				3h0′	71,49				
2.	100,3	0,5037	0,8025	12h0′	24,98	−0,01	14,66	1,3972	1,3930
				1h0′	24,97				
				2h0′	10,30	−0,01			
				3h0′	10,29				
						Mittelwert für Q_{100} =			1,3944
3.	100,0°	0,470 g	0,776 g	11h0′	58,62	0,00	14,64	1,3389	1,3389
				12h0′	58,62				
				1h0′	43,98	0,00			
				2h0′	43,98				
4.	99,6	0,470	0,776	10h0′	76,28	−0,12	14,89	1,3386	1,3444
				11h0′	76,16				
				12h0′	61,10	−0,23			
				1h0′	60,87				
						Mittelwert für Q_{100} =			1,3416.

Hiervon ist diejenige Quecksilbermenge in Abzug zu bringen, welche in Folge der Abkühlung des Glases eingesogen wird. Besondere Versuche ergaben, daß bei der Abkühlung von 1,0 g Glas derselben Sorte von 100° auf 0° 0,3029 g Quecksilber eingesogen werden.

Wir haben somit bei den Versuchen 1 und 2 für die Glashülle $G_1 = 0{,}3029 \cdot 0{,}5037 = 0{,}1526$ g Quecksilber und bei den Versuchen 3 und 4 $G_2 = 0{,}3029 \cdot 0{,}47 = 0{,}1424$ g Quecksilber von dem in der Tabelle angegebenen Mittelwerte für Q_{100} abzuziehen. Es ergiebt sich alsdann, daß bei Anwendung von $w = 0{,}8025$ g Wasser $Q_1 = 1{,}2418$ g Quecksilber und bei $w = 0{,}776$ g Wasser $Q_2 = 1{,}1992$ g Quecksilber eingesogen werden.

Demnach erhalten wir für die Quecksilbermenge, welche bei

der Abkühlung von 1 g Wasser von 100° auf 0° eingesogen wird, aus den Versuchen 1 und 2 den Wert 1,5474 g und aus den Versuchen 3 und 4 den Werth 1,5453 g; der Mittelwert ist 1,5463 g, dessen hundertster Teil, 0,015463 g, das Maaß der Wärmeeinheit ist.

Es ist von Interesse diese Zahl mit den Resultaten anderer Arbeiten zu vergleichen.

Es ist für die mittlere specifische Wärme des Wassers zu setzen:

nach R. Bunsen[1])	0,01541 g	Quecksilber
nach A. Schuller und V. Wartha[2])	0,015442 g	„
nach A. W. Velten[3])	0,015471 g	„ .

Da A. W. Velten mit Quantitäten von mehr als 5,0 g Wasser und mit einem Platingefäß arbeitete, so hat die von ihm gefundene Zahl den größten Anspruch auf Genauigkeit. Der von mir gefundene Wert unterscheidet sich von derselben nur um 0,05 Procent.

Zur Bestimmung der specifischen Wärme des Boracits diente ein durchsichtiger Krystall vom Kalkberge bei Lüneburg, der begrenzt war von (100), (110), $\varkappa$ (111), $\varkappa$ ($\bar{1}\bar{1}\bar{1}$), $\varkappa$ ($\bar{2}\bar{1}\bar{1}$), $\varkappa$ (531). Sein Gewicht betrug ca. 2,0 g.

Die in der folgenden Tabelle wiedergegebenen Resultate sind die Mittelwerte von je 3 bis 4 Beobachtungen. Mit t ist die Erhitzungstemperatur, mit q die von 1 g Substanz bei der Abkühlung von t^0 auf 0° abgegebene Wärmemenge in cal. bezeichnet.

t	Abgegebene Wärmemenge			Specifische Wärme $\frac{dq}{dt}$ bei t^0
	q beobachtet	q berechnet	Differenz	
— 32°	— 5,462	— 5,472	+0,010	0,1603
+ 50°	9,832	9,820	−0,012	0,2114
+100°	21,118	21,111	−0,007	0,2398
+150°	33,670	33,762	+0,092	0,2660
+200°	47,711	47,679	−0,032	0,2901
+250°	62,715	62,740	+0,025	0,3120
+270°	70,556	70,556	+0,000	0.2650
+285°	74,984	74,983	−0,001	0,3253
+300°	80,316	80,316	−0,000	0,3857

1) R. Bunsen: Pogg. Ann. **141**, 1; 1870.
2) A. Schuller und V. Wartha: Ann. d. Phys. N. F. **2**, 868; 1877.
3) A. W. Velten: Ann. d. Phys. N. F. **21**, 58; 1881.

Trägt man in einem rechtwinkligen Coordinatensystem die Temperaturen t als Abscissen und die entsprechenden Wärmemengen q als Ordinaten ab, so erhält man für das Intervall von -32^0 bis $+250^0$ und für das Intervall von 270^0 bis 300^0 je eine regelmäßig ansteigende, nach der Axe der Temperaturen convexe Kurve.

Die Abhängigkeit der abgegebenen Wärmemenge q von der Erhitzungstemperatur t wird für diese beiden Intervalle mit hinreichender Genauigkeit ausgedrückt durch die Gleichungen:

$$q = 0{,}1809644 \cdot t + 0{,}0003156922 \cdot t^2 - 0{,}0000001428 \cdot t^3$$
$$q_1 = 70{,}556 + 0{,}26506\,(t-270) + 0{,}002009\,(t-270)^2.$$

Tragen wir in diese Gleichungen die Umwandlungstemperatur des Boracits $t = 265^0$ ein, so ergiebt die erste $q = 67{,}469$ cal. und die zweite $q_1 = 69{,}281$ cal. Daraus folgt für die Umwandlungswärme des Boracits der Wert:

$$C = q_1 - q = 1{,}812 \text{ cal.}$$

Bildet man jetzt:

$$\frac{dq}{dt} = s = 0{,}1809644 + 0{,}0006313844 \cdot t - 0{,}0000004284 \cdot t^2$$
$$\frac{dq_1}{dt} = s_1 = 0{,}26506 + 0{,}004018 \cdot (t-270),$$

so ergeben sich die in der letzten Columne der Tabelle angegebenen Werte der specifischen Wärme des Boracits.

Göttingen, Min.-Petr. Institut, Januar 1892.

Universität.

Beneke'sche Preisstiftung.

Am 11. März, dem Geburtstage des Begründers der Benekestiftung, hielt die philosophische Fakultät eine öffentliche Sitzung ab, in welcher nach einigen einleitenden Worten des Dekans über den Stifter, den Consistorialrath und Prediger Carl Gustav Beneke, und dessen Bruder, den Professor der Philosophie Friedrich Eduard Beneke, das Ergebniß der Preisbewerbung für das Jahr 1892 verkündet wurde.

Die philosophische Fakultät wählte vor 3 Jahren als „Beneke'sche philosophische Preisaufgabe“ für das Jahr 1892 das Thema: „die inneren Zustände des Kurfürstentums Hannover unter der französisch-westphälischen Herrschaft 1806—1813“.

Die Fakultät sprach dabei — s. das Ausschreiben vom 1. Mai 1889 — den Wunsch aus, daß für die quellenmäßige Darstellung der inneren Geschichte Hannovers in den Jahren 1806—1813, und zwar sowohl derjenigen Landesteile, die früher oder später mit dem Königreich Westphalen vereinigt, als auch jener, die dem französischen Kaiserreich einverleibt wurden, auch das bisher unbenutzt gebliebene archivalische Material nach Möglichkeit herangezogen werden möchte. Es sollte ferner der Arbeit zur Empfehlung gereichen, wenn sie, statt sich auf den angegebenen Zeitraum zu beschränken, bis auf die erste Occupation Hannovers durch die Franzosen und die Besitznahme des Landes durch Preußen zurückgreifen und also auch über die Jahre 1803—1806 Neues beibringen werde. Als die Hauptsache wurde die Darstellung der Verwaltung in ihren wichtigeren Zweigen mit besonderer Rücksicht auf das Finanzwesen und den Volkswohlstand bezeichnet. Endlich sollten neben den politischen Zuständen auch diejenigen Personen, einheimische und fremde, welche in hervorragender Weise in der Verwaltung des Landes oder einzelner Teile desselben tätig gewesen sind, ihre Würdigung finden.

Es ist nur eine Arbeit mit dem Motto: „Vae Victis“ eingelaufen, ein Manuscript von nahezu 1600 Folioseiten, welches eben so sehr durch seinen Inhalt wie durch seinen Umfang die Erwartungen der Fakultät übertroffen hat.

Mit dem rühmlichsten Fleiße und seltener Arbeitskraft hat der Verfasser zunächst die von der Forschung bis dahin unberührt gebliebene ungeheure Aktenmasse ausgebeutet, die das königliche Staatsarchiv zu Hannover aus der französisch-westphälischen Zeit bewahrt, und in zweiter Linie die Staatsarchive in Marburg, Berlin und Osnabrück benutzt, und zwar nicht allein für die Jahre 1806—1813, sondern auch schon für die Geschichte der ersten französischen (1803—1805) und der nachfolgenden preußischen Occupation.

Zu den überraschend reichen archivalischen Quellen kommt, namentlich aus der Zeit des Königreichs Westphalen, das sehr umfassende gedruckte Material, welches der Verfasser ebenso wie die einschlägige neuere Literatur mit Umsicht und Sorgfalt verwerthet hat.

Einen weiteren Vorzug der Arbeit', welcher sowohl von der

vollständigen Beherrschung und geistigen Durchdringung des massenhaften Stoffes, als von einer nicht gewöhnlichen Gestaltungskraft bedingt ist, bildet die Uebersichtlichkeit der Gruppierung, sowie die Klarheit, Anschaulichkeit und Prägnanz der Darstellung. Das eindringende Verständniß, das dabei der Verfasser für alle Zweige der Staatsverwaltung und für die verschiedenartigsten Erscheinungen des öffentlichen Lebens an den Tag legt, zeigt, daß er nicht allein historisch, sondern auch juristisch und staatswissenschaftlich wohl geschult ist. So kommen auch die Ergebnisse der bedeutenden Leistung nicht allein der politischen und Culturgeschichte, sondern auch der Rechts- und Verfassungsgeschichte und nicht am wenigsten der Geschichte des Finanzwesens und der Volkswirtschaft zu gute.

Es giebt kein Werk in unserer Literatur, welches in den durch die Berührung französischen und deutschen Wesens so merkwürdigen Abschnitt der vaterländischen Geschichte einen so umfassenden Einblick gewährt. Was aber den Wert des Buches für weitere Kreise noch erhöht und ihm einen besonderen Reiz verleiht, ist das reiche biographische Material, das der Verfasser nicht minder geschickt als das statistische zu verwerten verstanden hat. Es sind Hunderte von heimischen und fremden Persönlichkeiten, mit denen er uns bekannt macht: hier die Mitglieder der verschiedenen hannoverschen Kommissionen sowie der französischen und preußischen Behörden, die bei den wiederholten Occupationen des Landes eine Rolle spielen, dort alle die Männer, welche in dem Königreiche Westphalen von den Ministern, Staatsräten, Reichsständen bis hinab zu den Departemental- und Lokalbeamten sich durch ihr Thun und Treiben bemerklich machen.

Wo es sich um hervorragende Namen handelt, hat der Verfasser, wie das Preisausschreiben empfahl, es nicht unterlassen, sich auch nach ungedruckten Familienpapieren umzusehen. Es ist nicht seine Schuld, wenn diese Nachforschungen bis jetzt von geringem Erfolg gewesen sind. Der Verfasser hat indeß, wie sich aus einer gelegentlichen Bemerkung ergibt, die Hoffnung nicht aufgegeben, daß sich ihm vor der Drucklegung des Werkes auch jene Quelle an der einen und andern Stelle noch erschließen werde.

Wie hiemit schon angedeutet ist, hegt der Verfasser die Absicht, die vorliegende Arbeit vor der Veröffentlichung noch zu vervollständigen und zu vervollkommnen. Indem er somit noch einmal die Hand an ein Werk legt, welches im Verhältniß zu seinem Umfang wie zu seinem Inhalt rasch entstanden ist und naturgemäß hie und da die letzte Feile noch vermissen läßt, wird er ohne

Zweifel nicht allein einzelne vulgäre Ausdrücke, die mit unter gelaufen sind, beseitigen, sondern auch das eine und andere Urteil, welches schärfer gefaßt ist, als es seiner maßvollen Gesinnung und seinem strengen Gerechtigkeitssinn entsprechen dürfte, einer Revision unterziehen.

Der Fakultät aber gereicht es zur Freude, auf Grund einstimmig gefaßten Beschlusses dem Verfasser der mit dem Motto: „Vae Victis" versehenen Arbeit den ersten Preis erteilen zu können.

Die Bewerbungsschrift war der Fakultät in zwei Theilen eingeliefert worden, jeder von einem versiegelten Briefe begleitet, der auf der Außenseite das Motto der Abhandlung „Vae Victis" trug. Die Eröffnung der beiden Briefe ergab als Verfasser Herrn

Friedrich Thimme

stud. hist. aus Schmedenstedt bei Peine.

Für das Jahr 1895 stellt die Fakultät die folgende Aufgabe:

> „Die philosophische Fakultät wünscht Untersuchungen, welche in der Theorie der, von mehr als drei Veränderlichen abhängigen, allgemeinen Thetafunktionen einen erheblichen Fortschritt bilden".

Bewerbungsschriften sind in deutscher, lateinischer, französischer oder englischer Sprache abzufassen und bis zum 31. August 1894 auf dem Titelblatte mit einem Motto versehen an uns einzusenden, zusammen mit einem versiegelten Briefe, welcher auf der Außenseite das Motto der Abhandlung, innen Namen, Stand und Wohnort des Verfassers anzeigt. In anderer Weise darf der Name des Verfassers nicht angegeben werden. Auf dem Titelblatte der Arbeit muß ferner die Adresse verzeichnet sein, an welche die Arbeit zurückzusenden ist, falls sie nicht preiswürdig befunden wird.

Der erste Preis beträgt 1700 Mk., der zweite 680 Mk.

Die Zuerkennung der Preise erfolgt am 11. März 1895, dem Geburtstage des Stifters, in öffentlicher Sitzung der philosophischen Fakultät zu Göttingen.

Die gekrönten Arbeiten bleiben unbeschränktes Eigenthum der Verfasser.

Die Preisaufgaben, für welche die Bewerbungsschriften bis zum 31. August 1892 und 31. August 1893 einzusenden sind, finden sich in den Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissen-

schaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen im Jahrgang 1890 Seite 151 und 1891 Seite 126.

Göttingen d. 12. März 1892.

Die philosophische Fakultät.
Der Dekan
Riecke.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Juni 1891.

(Fortsetzung.)

Biblioteca Nazionale Centrale Vittorio Emanuele di Roma. Bollettino delle Opere Moderne Straniere. Vol. VI. N. 5. Maggio 1891. Roma 1891.
Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze. Bollettino delle Pubblicazioni Italiane 1891. N. 131. 132 u. Indice Bog. I u. J. (= p. 129*—152*). Firenze 1891.
Account of the Operations of the Great Trigonometrical Survey of India. Vol. XI. Astronomical Latitudes. Vol XII and XIII. Principal Triangulation. S. Trigon. Dehra Dun 1890.
Johns Hopkins University Circulars. Vol. X. N. 89. 90. Baltimore June 1891.
The Academie of Scienze of St. Louis. 1890.
Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Mayo de 1891. Entrega V. Tomo XXXI. Buenos Aires 1891.
Anales de la Oficina Meteorológica Argentina. Tomo VIII. Buenos Aires 1890.
The Journal of the College of Science. Imp. University Japan. Vol. IV. Part I. Tōkyō 1891.

Nachträge.

Zoological Society of London:
a. Proceedings 1891. Part. I. Jan. and Febr.
b. Transactions. Vol. XIII. Part. 1. 2. London 1891.
Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. 26. Jahrg. 1. Heft. Leipzig 1891.
Fauna. Verein Luxemburger Naturfreunde. Jahrg. 1891. Heft 1. 2. Luxemburg.
Archiv des Vereines für siebenbürgische Landeskunde. Neue Folge. 23. Band. 3. Heft. Hermannstadt 1891.
Finlands Geologiska Undersökning:
a. Beskrifning till Kartbladet. N. 16. 17.
b. Kartbladet. N. 16. 17. Helsingfors 1890.
Report of the chief Signal Officer of the army to the Secretary of war. 1890. Washington 1890.

Juli 1891.

Königl. Pr. Akademie d. W. zu Berlin:
a. Sitzungsberichte. (1891). XXVIII, XXIX, XXX, XXXI, XXXII, XXXIII, XXXIV
b. Abhandlungen. 1890.

Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. 26. Jahrg. 2. Heft. Leipzig 1891.

Die Internationale Erziehungsarbeit. Einsetzung des bleibenden Internationalen Erziehungs-Rates. Von Hermann Molkenboer. Flensburg 1891.

Jakob Henle. Von Fr. Merkel. Braunschweig 1891.

Deutsches Meteorologisches Jahrbuch für 1889. Bericht über die Thätigkeit im Kgl. sächsischen meteorologischen Institut. II. Hälfte oder Abtheilung III. Chemnitz 1891.

Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg in Pr. 31. Jahrgang. Jubiläumsband. 1890. Königsberg 1891.

Sitzungsberichte der Physikalisch-medicinischen Societät in Erlangen. 23. Heft. 1891. München 1891.

Schriften der Naturforschenden Gesellschaft in Danzig. Neue Folge. 7ten Bandes 4tes Heft. Danzig 1891.

Acta Mathematica 14:4. Stockholm, Berlin, Paris. 1891.

Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau. 1891. Juni. Krakau 1891.

Ueber Archive in Ungarn. Von Franz Zimmermann. Hermannstadt 1891.

Jahrbuch für Schweizerische Geschichte. Band 16. Zürich 1891.

Académie Royale de Belgique. Bulletin: 61e année, 3e série, tome 21. N. 6. Bruxelles 1891

Sur les déformations et l'extinction des ondes aëriennes, isolées ou périodiques, propagées a l'intérieur de tuyaux de conduite sans eau, de longueur indéfinite; par M. J. Boussinesq. (extrait du journal de Physique. 2. série, Jul. 1891. Paris).

Association française pour l'avancement des sciences:
a. Congrès de Paris. 1889. par M. Emile Lemoine.
b. Congrès de Limoges. 1890. par M. Emile Lemoine. Paris.

Meteorologische Beobachtungen aus Dorpat. Bd. IV, Schluß: Witterungs-Beobachtungen für Luftdruck, Temperatur, Wind, Bewölkung und Niederschlag vom Jahre 1884 u. 1885.

The stellar cluster x Persei, micrometrically surveyed by O. A. L. Pihl. Christiania 1891.

Académie Royale Danoise des sciences et des lettres, Copenhague:
a. Bulletin pour 1890. N. 3. 1891. N. 1.
b. Mémoires. 6me série. 1) Classe des sciences. Vol. VI. N. 2. — 2) Classe des lettres. Vol. III. N. 2. København 1890—91.

Koninklijke Akadémie van Wetenschappen:
a. Verhandelingen. 1. Afdeeling Natuurkunde, Deel XXVIII. 2. Afdeeling Letterkunde, Deel XIX.
b. Verslagen en Mededeelingen. Afd. Letterkunde. 3e Reeks. Deel VII.
c. Jaarboek 1890.
d. Prizovers. Maria Virgo. (2 Exemplare). Amsterdam 1890—91.

Tijdschrift voor Nederlandsche Taal- en Letterkunde. Tiende Deel, Nieuwe Reeks, Tweede Deel, Derde Aflevering. Leiden 1891.

Bijdragen tot de Taal- Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 5. Volgreeks. 6de Deel. 3de Aflevering. 'S Gravenhage 1891.

Monthly notices of the Royal Astronomical Society. Vol. LI. N. 8. June 1891.

Proceedings of the Royal Society. Vol. XLIX. N. 300.

Nature. Vol. 44. N. 1131—1134.

Proceedings of the London Mathematical Society. N. 409—413.

Iconography of Austrian Salsolaceous Plants by Baron F. von Mueller. Deeade 1—6. Melbourne 1889—90.

Journal and Proceedings of the Royal Society of New South Wales. Vol. XXIV (1890), Part 1. Sidney. London.

Records of the Geological Survey of India. Vol. XXIV, Part 2. 1891.

Geological and Natural History Survey of Canada. Contributions to Canadian Palaeontology. Vol. 1. Part III. by J. F. Whiteaves. Montreal 1891.

Atti della Reale Accademia dei Lincei. Serie 4. Rendiconti. Vol. VII. fasc. 9, 10. 1° Semestre 1891. Roma 1891.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Tomo V. Anno 1891, fasc. IV e V. Palermo 1891.

Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze. Bollettino delle pubblicazioni ital. 1890, Tavola sinottica. — 1891, N. 133, 15 Luglio. Firenze 1891.
Biblioteca Nazionale Centrale Vittorio Emanuele di Roma. Bollettino delle opere moderne straniere. Vol. VI, N. 6. Giugno 1891. Roma 1891.
Observations made during the year 1885 at the U. S. Naval Observatory. Washington 1891.
Report for 1890—91 of the Observatory of Yale University.
Geological and Natural History Survey of Minnesota:
a. Bulletin. N. 6. The Iron ores of Minnesota by N. H. and H. V. Winchell.
b. The 18th Annual Report for 1889 by N. H. Winchell. Minneapolis 1891.
American Academy of Arts and Sciences. Proceedings. New Series. Vol. XVII. Whole series XXV. From Mai 1889 to May 1890. Boston 1890.
Bulletin of the Museum of Comparative Zoölogy at Harvard College. Vol. XXI. N. 2, 3, 4. Cambridge U. S. A. 1891.
Johns Hopkins University Circulars. Vol. X. N. 91. Baltimore 1891.
Bulletin of the American Geographical Society. Vol. XXIII. N. 2. June 30. 1891. New York.
Proceedings of the Academy of Natural Sciences of Philadelphia. Part. III. October—December 1890. Philadelphia 1891.

Nachträge.

Tuberculosis. Edited by the Bacteriological Laboratory. Academy of nat. sciences of Philadelphia.
Memoria que la Secretária de Estado en el Despacho de Fomento presente á la Asamblea Legislativa de la República de Guatemala de 1891. Guatemala 1891.
Anales de la Sociedad Científica Argentina. Junio de 1891. Entrega VI. Tomo XXXI. Buenos Aires 1891.
Revista Argentina de Historia Natural. Tomo I, Entrega 3a. Junio 1° de 1891. Buenos Aires 1891.
Transactions of the Royal Irish Academy. Vol. XXIX, Part. XVI. Dublin 1891.
Mittheilungen des Vereines der Aerzte in Steiermark. XXVII. Vereinsjahr 1890. Graz 1891.
United States Coast and Geodetic Survey. Bulletin. N. 22, 23, 24. Washington 1891.
University of Nebraska. Bulletin of the Agricultural Experiment Station. N. 17. Vol. III, Article II u. III. Lincoln, Nebraska U. S. A.
The Journal of Comparative Neurology. Vol. I, June 1891. Papes XIX—XXIV, 107—200. Cincinnati, Ohio.
Értesitö az Erdélyi Muzeum-Egylet Orvos-Természettudományi Szakosztályából. 1891. XVI Evfolyan:
a) I. Orvosi Szak. 1. u. 2. Füzet.
b) II. Természettudományi Szak. 1. 2. 3. Füzet. Klausenburg 1891.

August, September, Oktober 1891.

Sitzungsberichte d. K. Pr. Akademie der Wissensch. zu Berlin. XXXV—XXXVIII, XXXIX u. XL. Berlin 1891.
Kaiserl. Leopoldinisch-Carolinische deutsche Akademie der Naturforscher:
a. Nova Acta. Vol. LIV.
b. Ule, Geschichte der Akademie.
c. Zincken, Vorkommen der natürlichen Kohlenwasserstoffe und anderer Erd-Gase.
d. Leopoldina. Heft XXVII. N. 11—12, 15—16, 17—18. Halle a. d. Saale 1891.
Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissensch. zu Leipzig:
a. mathematisch-physische Classe: Berichte über die Verhandlungen 1891. II. Abhandlungen des XVII. Bandes. N. 5.
b. philologisch-historische Classe: Berichte 1891. I. Abhandlungen des XII. Bandes. N. III, d. XIII. Bandes N. 1.
c. Preisschriften gekrönt u. herausgeg. von der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft zu Leipzig. N. XVIII der historisch-nationalökonomischen Section.
d. Jahresbericht d. Fürstl. Jablonowskischen Ges. Leipzig im März 1891.

Sächs. meteorologisches Institut. Jahrbuch 1890. I. Hälfte. Abth. I u. II. Chemnitz 1891.
Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur:
a. 68ster Jahresbericht 1890.
b. Ergänzungsheft. Breslau 1890—91.
Königl. Geodätisches Institut. Jahresbericht von April 1890 — April 1891. Berlin 1891.
Königl. bairische Akademie der Wissensch. zu München:
a. Sitzungsberichte. Mathematisch-physikalische Classe. 1891. Heft I, II; philosophisch-philologische u. historische Classe. 1891. Heft II.
b. Neue Annalen der K. Sternwarte in Bogenhausen bei München. Band II. München 1891.
Zeitschrift der deutschen Morgenländischen Ges. Band 45. Heft II. Leipzig 1891.
Verhandlungen der physikalisch-medicinischen Ges. zu Würzburg. N. F. XXV. Band. N. 3—5. Würzburg 1891.
J. Orthmann. Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Band XX. Jahrg. 1888. Heft 3. Berlin 1891.
Ronald Keßler. Praktische Philosophie. Leipzig.
Zeitschrift für Naturwissenschaften. 63. Band. Sechstes Heft. 64. Band. 1. u. 2. Heft. 3. Heft. Halle a. d. Saale 1890—91.
Verein für Naturwissenschaft zu Braunschweig. 6. Jahresbericht. Vereinsjahre 1887/88 u. 1888/89. Braunschweig 1891.
Naturhistorische Ges. zu Nürnberg. 1890. Jahresbericht. Nürnberg 1890.
Historischer Verein von Oberpfalz u. Regensburg. Verhandlungen. 44. Band. 1. u. 2. Hälfte. Regensburg 1890 - 91.
Acta Mathematica. 15 : 1 u. 2. Berlin. Stockholm. Paris 1891.
Naturforschende Gesellschaft in Zürich. Vierteljahrsschrift. 35. Jahrg. 3. u. 4. Heft. 36. Jahrg. 1. Heft. (Zwei Exemplare). Zürich 1890—91.
Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève. Memoires. Tome XXXI. Prem. partie. Genève 1890—91.
Historisch-antiq.-Gesellschaft von Graubunden. XX. Jahresbericht. Jahrg. 1890. Chur.
Societad Rhaeto-Romanscha. Annales. 5. Annada. Cuera 1890.
Kaiserl. Akademie der Wissensch. zu Wien:
a. Denkschriften. Philosophisch-historische Classe. Band XXXVIII u. XXXIX. Mathematisch-Naturwissenschaftl. Classe. Band LVII.
b. Sitzungsberichte. Mathematisch-Naturwissensch. Classe 1890. Band XCIX. Abth. I. IV—X. Heft. Abth. II a. IV—X. Heft. Abth. II b. IV—X. Heft. Abth. III. IV—X. Heft.
c. Almanach. 40. Jahrg. 1890.
d. Archiv für österreichische Geschichte. 76. Band. 1. u. 2. Hälfte. 77. Band. 1. Hälfte.
e. Fontes Rerum Austriacarum. II. Abth. XLV. Band. II. Hälfte. Philosophisch-historische Classe. Band CXXII. Band CXXIII. Jahrg. 1890.
Kaiserl. Königl. Geologische Reichsanstalt:
a. Jahresbuch. Jahrg. 1890. XL. Band. III. u. IV. Heft. Jahrg. 1891. XLI. Band. 1. Heft.
b. Verhandlungen. Nr. 8—13. 1891. Wien 1891.
Kaiserl. Königl. zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien. Verhandlungen. Jahrg. 1891. XLI. Band. I. u. II. Quartal. Wien 1891.

(Fortsetzung folgt.)

Inhalt von Nr. 4.

F. Kielhorn, Jacobis Tafeln zur Berechnung Indischer Daten und Mâdhavâchârya's Kâlanirnaya. — *Fritz Krebs*, Altchristliche Texte im Berliner Museum. — *J. Disse*, Ueber die Veränderungen der Epithelien in der Niere bei der Harnsecretion. — *K. Kroeker*, Ueber die Abhängigkeit der specifischen Wärme des Boracits von der Temperatur. — Beneke'sche Preisstiftung. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Stoppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

23. März. **№ 5.** 1892.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 6. Februar.

Zur Systematik der Nemertinenfauna des Golfs von Neapel.

Vorläufige Mittheilung

von

Dr. Otto Bürger,

Privatdocent in Göttingen.

(Vorgelegt von Ehlers.)

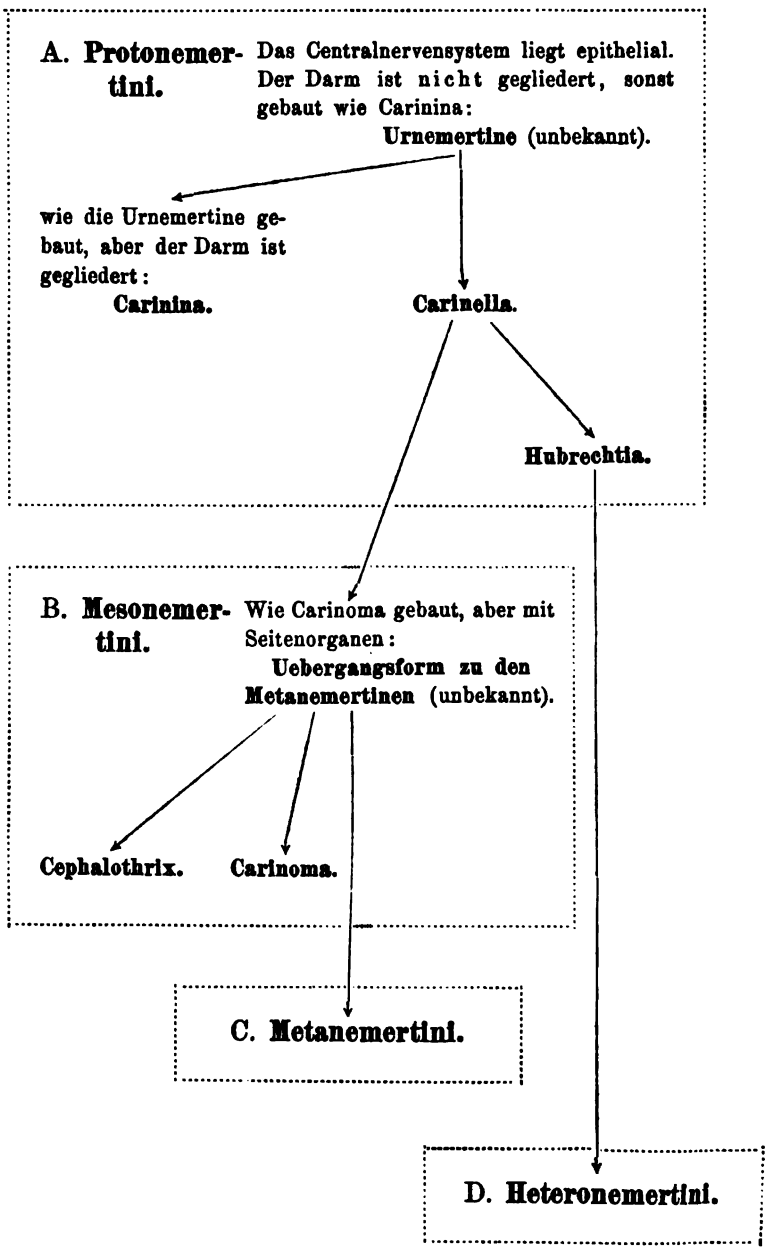
Die nachfolgenden Blätter bringen die kurze Beschreibung einer Anzahl bekannter und neuer Nemertinen, welche zumeist der Fauna des Golfs von Neapel angehören.

Es sind diese Nemertinen nach einem neuen System angeordnet, das ich bereits in seinen Grundzügen entwickelte, und welches zu discutiren ich darum verzichte [1]).

1) 1. Vorläufige Mittheilungen über Untersuchungen an Nemertinen des Golfs von Neapel. Nachricht. v. d. Königl. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen. Jahrg. 1891.

2. Untersuchungen über die Anatomie und Histologie der Nemertinen nebst Beiträgen zur Systematik. Zeitschrift f. wiss. Zoologie. Bd. 50. 1890.

Allgemeiner Entwurf zu einem Stammbaum der Nemertinen.



Verzeichnis der Ordnungen und Genera der Nemertinen.

A. **Protonemertini.**
- I. Carinina.
- II. Carinella.
- III. Hubrechtia.

B. **Mesonemertini.**
- IV. Cephalothrix.
- V. Carinoma.

C. **Metanemertini.**

(Folgen als 2. Teil nach.)

D. **Heteronemertini.**

A. **Amicrurae.**
- VI. Eupolia.
- VII. Valencinia.
- VIII. Lineus.
- IX. Borlasia.

B. **Micrurae.**
- X. Micrura.
- XI. Cerebratulus.
- XII. Langia.

A. Ordnung I Protonemertini.

Gehirn und Seitenstämme liegen außerhalb des Hautmuskelschlauches entweder im Epithel oder unter der Basalmembran. Die Körperwand baut sich auf aus dem Epithel, einer Ringmuskelschicht und einer Längsmuskelschicht. Die Mundöffnung befindet sich hinter dem Gehirn. Der Rüssel besitzt keine Stilette.

Fam. Carinellidae Mac Intosh.

Die Seitenorgane sind epithelial gelegene Grübchen, welche nur ausnahmsweise so tief sind, daß sie in das Gehirn eindringen. Das Blut circuliert in zwei Seitengefäßen. Ein Rückengefäß fehlt, indes sind häufig in der vorderen Körperregion noch 2 seitlich in der Wand des Rhynchocoeloms verlaufende Gefäße vorhanden.

I. Genus Carinina Hubrecht.

Gehirn und Seitenstämme liegen außerhalb der Basalmembran im Körperepithel.

Carinina grata. Hubrecht.

Die Seitenorgane bilden epitheliale Einschnitte. Es ist außer der Ring- und Längsmuskelschicht des Hautmuskelschlauchs noch eine äußerst dicke Ringmuskelschicht, Rhynchocoelom und Oesophagus umfassend, vorhanden. In diese (innere) Ringmuskelschicht sind die beiden einzig existierenden Blutbahnen, die Seitengefäße und außerdem die Nephridialkanäle eingeschlossen. Die beiden Stämme der Nephridien besitzen zahlreiche blinde die innere Ringmuskulatur durchbrechende und in die Längsmuskelschicht des Hautmuskelschlauchs dringende Aussackungen. Der Darm weist Taschen auf. Fundort: Bermudas. Challenger Expedition.

II. Genus Carinella Johnston.

Die Vertreter dieser Gattung sind an dem sehr breiten, nach hinten durch die Kopffurchen abgesetzten discusartigen Kopf kenntlich. Gehirn und Seitenstämme liegen nicht im Epithel, sondern sind zwischen Basalmembran und Hautmuskelschlauch eingeschlossen. Das Centralnervensystem liegt also innerhalb der Basalmembran. Die Seitenorgane stellen epitheliale Grübchen oder Canäle dar. (Ausnahme C. inexpectata Hubr.) Es existieren nur zwei Seitengefäße. Der Darm besitzt keine Taschen.

1. *Carinella polymorpha* (Renier) Hubrecht.
   Syn. Valencinia splendida Quatrfg.
   „ Tubulanus polymorphus Renier.

Eine überaus weiche Nemertine. Sie wird bis zu ½ m lang, ½ cm breit. Der Bauch ist plattgedrückt, der Rücken gewölbt. Der Kopf ist sehr breit, radförmig und scharf gegen den Rumpf abgesetzt. Zwischen Kopf und Rumpf bemerkt man die Seitenfurchen.

C. p. ist prächtig glänzend braunroth gefärbt. Ein langes hinteres Ende setzt sich durch seine goldgelbe Färbung und seinen opacen Character scharf gegen den übrigen Körper ab.

Fundort: Rizomi di Posidonia am Posilipo. Nicht häufig. Es ist schon Hubrecht aufgefallen, daß bei Spiritusexemplaren ein heller, weißgelber, etwa 2—2½ cm langer vorderer Abschnitt scharf gegen den übrigen dunkelbraunen Körper abgesetzt ist.

Gehirn und Seitenorgane sind ähnlich gebaut wie bei C. annulata. Letztere sind einfache epitheliale Grübchen. Es ist noch ein zweites, hinteres Paar von Seitenorganen vorhanden. Dasselbe liegt z. B. bei einem Thiere von 40 cm Länge etwa 5 cm von der Kopfspitze entfernt und ist im Leben als ein Paar heller Grübchen, am conservierten Thier als ein Paar weißlicher Flecke deutlich und leicht wahrzunehmen.

2. *Carinella albida* nov. sp.

Die Grundfarbe ist das reinste Weiß. Jedoch von der Mitte an erscheint der Körper grau rosa gefärbt, ein Farbenton, welcher sich wohl aus der Farbe der Geschlechtsorgane sowie der des Darmes herleitet. Der Kopf ist radförmig abgesetzt; breiter als der Rumpf und sehr stark abgeplattet so dünn, daß er etwas transparent ist. Diese Carinella wird 10—15 cm lang und etwa 2—2½ mm breit.

Fundort: Rizomi di Posidonia; Posilipo. Nicht selten.

3. *Carinella miniata* nov. sp.

Ist gleichmäßig mennigroth gefärbt. Der Kopf ist radförmig abgesetzt und am vorderen Rande nierenförmig ausgebuchtet.

Das einzige von mir beobachtete Exemplar maß $4^1/_2$ cm : 2 mm.

Fundort: Fuori Galli. 70 m tief.

4. *Carinella annulata* (Montagu. Johnst.)

Syn. Valencinia ornata Onatrfg.
Carinella annulata pars Hubrecht.
Carinella annulata Joubin.

Uebertrifft C. polymorpha an Länge und erreicht über 75 cm. Die Breite beträgt nur 5 mm. Der Kopf ist verbreitert, rund und gegen den Rumpf abgesetzt, indes weniger prägnant als bei den Formen mit dem radförmigen Kopfe. Er gleicht dem Kopfe von C. Mc. Intoshii. Der Körper verjüngt sich allmählich nach hinten und endet fast spitz. Der Rücken ist gewölbt, der Bauch platt. Die Grundfarbe ist rothbraun bis kirschroth. Den Körper zeichnen eine mittlere dorsale, eine mittlere ventrale und je eine seitliche Längslinie, die sich bis in die Schwanzspitze fortsetzen. Eine dorsale vor den Kopffurchen gelegene weiße Binde grenzt ein weiß gesäumtes rothbraunes Stirnfeld ab. Das Stirnfeld wird von der mittleren dorsalen Längslinie halbiert, da sich diese bis zum vorderen Rande des Kopfes fortsetzt. Die weißen Länglinien werden geschnitten von weißen, den Körper vollständig umgürtenden Ringen. Der erste Ring befindet sich hinter den Kopffurchen und wird durch die Mundöffnung geschnitten. Er schneidet die Rückenlinie abernicht senkrecht, sondern es bildet der Ring auf dem Rücken einen stumpfen Winkel, welcher nach vorn offen ist und durch die Rückenlinie genau halbiert wird. Der zweite Ring folgt in einem Abstande, der etwa 8—9 mal so lang ist wie derjenige zwischen zwei Ringen der mittleren Körperregion. (Der Abstand der beiden ersten Ringe beträgt ca. 3,6 cm; der Abstand von ein Paar Ringen der mittleren Körperregion 0,4 cm.) Im selben Abstande (8—9) folgt der dritte Ring. Nun folgen in nahen Abständen, welche nach hinten zu nur unbedeutend abnehmen, die $^1/_8$ Ringe; jene also, von denen 8—9 auf den Abstand zwischen Ring 1 und 2 und 2 und 3 kommen würden.

Das 2. Paar von Seitenorganen, welches C. a. mit C. polym. gemeinsam hat, liegt unmittelbar vor dem 3. Ringe und zwar sind die Organe in den seitlichen weißen Linien aufzusuchen.

Die vorderen Seitenorgane sind winzige epitheliale Grübchen, deren Epithel nicht sehr von dem der Haut unterschieden ist. Die

Grübchen sind oberflächliche Einsenkungen, sie müßten um 1/4 tiefer tiefer sein, sollten sie bis auf die Basalmembran reichen. Ein kugliges Seitenorgan mit langem Canal wie bei C. Mc. Intoshii ist mithin nicht zur Ausbildung gelangt.

Fundort: Rizomi di Posidonia; Posilipo. Nicht häufig.

5. *Carinella* Mc. Intoshii. Bürger.

Syn. C. annulata Mc. Intosh.
C. annulata pars Hubrecht.
C. Aragoi Joubin.

Besitzt wie die beiden nachfolgenden Carinellaarten eine starre Körperform. Diese Nemertine wird 8—10 cm lang, 1 1/2—2 mm breit. Der Kopf ist verbreitert, deutlich vom Rumpfe abgesetzt, wenn auch minder auffallend als bei den voraufgehenden Arten mit dem radförmigen Kopfe. Der Körper verjüngt sich allmählich nach hinten und läuft sehr spitz aus.

Die Grundfarbe ist zimmetroth, bei einer selteneren Varietät chokoladenbraun. Charakteristisch ist die Zeichnung. Die Kopfspitze ist dorsal weiß. Aber in dem weißen Felde befindet sich ein halbkreisförmiger Fleck, welcher wie die Grundfarbe aussieht, so daß nun nur der Rand des Kopfes weiß erscheint und eine weiße Querbinde hinter dem halbkreisförmigen Fleck zum Ausdruck kommt. Auch die Kopffurchen sind weiß. Der Länge nach ziehen am Körper eine mediane dorsale weiße Linie und je eine weiße seitliche entlang. Es ist zu beachten, daß die dorsale Mittellinie nur bis an das weiße Kopfschild mit dem halbkreisförmigen rothen Stirnfeld hinanzieht, dieses mithin nicht halbiert, und daß eine mediane weiße Linie am Bauche fehlt. Die Längslinien werden geschnitten von einer Anzahl weißer Ringe, welche ganz um den Körper herumgehen. Der erste Ring befindet sich dicht hinter den Kopffurchen und unmittelbar hinter der Mundöffnung. Nun folgen die Ringe in ziemlich gleichen Abständen (ca. 1 1/2 cm), welche nach hinten ganz allmählich geringer werden, jedoch nie so gering wie der Abstand von zwei Ringen bei Carinella annulata in der mittleren und hinteren Körperregion.

Fundort: Benta Palumma. Es ist C. Mc. Int. die gemeinste Nemertine im Golfe Neapels. — Die Seitenorgane sind große kuglige Gebilde, welche aus einer Masse von Drüsenzellen und einer imensen Menge von Kernen kleiner gangliöser Zellen bestehen. Sie sind von einem langen Canal durchsetzt. Die Organe liegen durchaus im Epithel, außerhalb der Basalmembran, der Canal dringt nicht etwa bis zum Gehirn. Mit dem Gehirn stehen die Kugeln durch

lange starke Nerven in Verbindung. Die Seitenorgane liegen unmittelbar hinter dem Gehirn.

6. *Carinella Banyulensis.* Joubin.

Es kamen mir drei verschiedene der Gestalt und Färbung nach Carinella Banyulensis nahe stehende Nemertinen zu Gesicht, von denen aber keine völlig mit der von Joubin beschriebenen übereinstimmt. Ich glaube auch nur in zwei der Formen echte Typen jener neuen von Joubin aufgestellten Art sehen zu dürfen, die 3. lasse ich als besondere Species folgen.

Joubins Art Diagnose ist kurz diese: Die Farbe ist braunroth. Es giebt eine oft nur punktierte mittlere weiße Rückenlinie, keine weißen Seitenlinien, aber jederseits begleiten die Rückenlinie breite rothe Streifen. Außerdem umgürten je nach der Größe des Thieres 3—10 weiße Ringel den Körper. Der Rücken erscheint durch die beiden rothen Streifen dunkler als der Bauch gefärbt. C. B. wird 3 cm lang und 1 bis 2 mm breit. Fundort: l'île Grosse zwischen Corallineen.

Ich beschreibe zuerst die häufigste Form, welche im Golfe 60 m tief vergesellschaftet mit Carinella Mc. Intoshii öfters gedredgt wurde. Sie bewohnt wie diese Corallineen.

Die kleine 6—8—12 mm lange, 1—1½ mm breite Nemertine sieht dem mit ihm vorkommenden Tetrastemma dorsalis sehr ähnlich, zumal da sie wie dieses eine starre Körperform besitzt und wie mit einer derben Cuticula ausgestattet erscheint. Der Kopf ist kaum verbreitert, nicht abgesetzt, vorne abgerundet. Der völlig cylindrische Körper verjüngt sich nach hinten und endet spitz.

Der Kopf ist weiß, rosa angehaucht (bei C. Banyl. Joub. ist er rothbraun gefärbt und durch eine weiße Binde gegen den Körper abgesetzt) und zeigt wie auch derjenige der Carinella der französischen Küsten 2 kleine schwarze Pigmentflecke, welche am vorderen Rande gelegen sind. Der Rücken ist lebhaft rothbraun oder kirschroth gefärbt, er setzt sich vermöge der Färbung scharf gegen die untere Körperhälfte, welche hellgelbroth gefärbt ist, jederseits wie mit dem Lineal gezogen, ab. Eine weiße Rückenlinie wie bei C. Banyl. Joub. ist auch nicht einmal punktiert angedeutet. Indes umgürten auch den Körper unserer Carinella weiße Ringel. Man kann sich aber von einer Art systematischer Anordnung überzeugen; denn es sind immer 3 Ringe einander genähert, dann folgen im beträchtlicheren Abstand wieder 3 Ringe und so fort. Und zwar sind die ersten und dritten Ringe die dickeren, der mittelste ist der feinere. Bei C. Banyl. Joub. sind die Ringe in ziemlich glei-

chen Abständen angeordnet. Unsere Carinellen besitzen nun trotz ihrer sehr minimalen Länge bedeutend mehr Ringe als die von der französischen Küste. Sie weisen nämlich meist 4—5 Ringperioden auf, d. h. 12—15 Ringe, aber sie sind nur halb so lang als die Exemplare Joubins von C. Banyl., welche höchstens 10 Ringe zeigen.

Eine andere mir zu Gesicht gekommene Form schließt sich den gekennzeichneten im wesentlichen an. Indes ist der Kopf breit und abgesetzt. Der Rücken ist schmutzig grün gefärbt, der Bauch hellrosa und nur die vordersten 3 Ringe sind als Periode gesondert. Zwischen den Nachfolgenden sind die Abstände nicht derart markiert, daß man je 3 Ringe als zusammengehörig bezeichnen könnte. Diese Nemertine weist 18 Ringel auf.

Als Seitenorgane fungieren wenig tiefe epitheliale Grübchen.

Fundort: Secca di Benta Palumma.

7. *Carinella nothus.* nov. sp.

Der Kopf ist doppelt so breit als der Rumpf, oval, abgesetzt. Der Körper ist vorn cylindrisch, nach hinten wird er bandförmig breit, abgeplattet. Die Länge beträgt 10 cm, die Breite 2—2½ cm. Die Farbe des Rückens ist schmutzig rothbraun, der Bauch ist etwas heller gefärbt. Der Kopf ist farblos und zeigt am vorderen Rande je einen halbmondförmigen Pigmentfleck. Es existiert sowohl eine freilich theilweis punktierte mittlere weiße Rückenlinie, als auch je eine punktierte weiße Seitenlinie. Außerdem umgürten den Körper weiße Ringel. Die vordersten sind zu dritt angeordnet und isoliert, es folgt noch eine Periode von 3 Ringen, sodann aber folgen noch über 30 Ringe nach, welche nichts von einer Ordnung zu je 3 u. 3 verrathen. Die Seitenorgane stellen winzige epitheliale Grübchen dar.

8. *Carinella inexpectata* Hubrecht.

Eine 3½ cm lange rothbraun gefärbte Nemertine, welche am Kopfe Querfurchen, in denen wieder kleine Grübchen sich befinden, aufweist. Der Canal des Seitenorgans dringt in das Gehirn ein.

Fundort: Capri.

9. *Carinella tubicola* v. Kennel.

Der Kopf ist doppelt so breit als der Rumpf. Er ist an der vorderen Kante eingebuchtet und herzförmig gestaltet. Der rundliche Körper verjüngt sich allmählich nach hinten und endet ziemlich spitz. Der Kopf ist fast rein weiß, der Rumpf schwefelgelb,

nach hinten zu wird er wieder heller. Zeichnung: am vorderen Rande des Kopfes befindet sich je ein schmaler schwarzer Pigmentfleck. Hinter dem Munde umgürtet den Körper ein brauner Ring, welcher auf dem Rücken nach hinten eingeknickt ist, einen stumpfen Winkel bildend, welcher nach vorn offen ist. Es folgt in weiterem Abstande ein zweiter gerader Ring und auf diesen in demselben Abstande, welcher zwischen den beiden vordersten Ringen besteht, ein dritter. Nunmehr folgen die braunen Ringe in sehr geringen Intervallen bis zur Schwanzspitze auf einander. Auf den Abstand zwischen 1. und 2. und 2. und 3. sind etwa 8 der hinteren Ringe mit ihren Intervallen zu rechnen.

Die Seitenorgane sind kleine flache Grübchen.

Die Länge des einzigen von mir zwischen Ulven entdeckten Exemplares betrug 6 cm, die Breite $1^1/_2$—2 mm.

10. *Carinella rubicunda.* nov. sp.

Diese prachtvolle Nemertine wird 40—50 cm lang und kaum 2 mm breit; ihr Körper ist rundlich, der Kopf kuglig, doppelt so breit als der Rumpf und von diesem scharf abgesetzt. Nach hinten zu verjüngt er sich allmählig. Bauch und Rücken sind gleichartig intensiv kirschroth gefärbt. Oefters geht die Färbung in Purpur über, oder sie ist hell feuerroth. Mitten über dem Kopf bemerken wir eine hellgelbe Querbinde. Der Kopf ist überdies von einem feinen hellgelben Saum eingefaßt. Hinter dem Munde befindet sich als erster ein feiner hellgelber Ringel, in einem Abstande von ca. 10—12 mm folgt als zweiter ein dicker Ringel und nach einem Abstande von ca. 20 mm folgen in nahen Intervallen (4 mm) bis zum Schwanzende dickere und dünnere Ringel. An günstigen Objecten kann man Perioden von Ringeln feststellen, deren jede aus einem sehr dicken, einem sehr feinen, einem mitteldicken, einem sehr feinen und einem sehr dicken Ringel in der aufgeführten Reihenfolge sich zusammensetzt.

C. rubicunda bewohnt die Rizome von Posidonia am Posilipo. Sie baut sich aus Muschelstückchen und Steinchen, die fest mit einander verklebt sind eine lange Röhre zwischen dem Wurzelwerk, aus der sie nur mit dem vorderen Ende herraussieht. Sie ist außer Carinella Mc. Intoshii die häufigste Carinella des Golfes.

Die Seitenorgane stellen tiefe Einschnitte mit einem längeren rein epithelialen Canal dar.

Bemerkenswerth sind die massenhaften dicken und langen bis in die Gehirnregion nach hinten sich erstreckenden Zellen einer nach dem Eupoliatypus gebauten Kopfdrüse.

Fam. **Hubrechtiadae** (mihi).

Die Seitenorgane sind kuglige Gebilde, welche innerhalb der Körperwand theilweis in den Seitengefäßen liegen. Außer den beiden Seitengefäßen ist noch ein Rückengefäß vorhanden.

III. Genus. **Hubrechtia** (mihi).

Die Seitenorgane liegen nicht epithelial, sondern sind in die Tiefe gerückt. Sie liegen innerhalb des Hautmuskelschlauches. Die kugelförmigen Organe ragen mit ihrer hinteren Kuppe in die erweiterten Seitengefäße hinein, werden mithin unmittelbar vom Blute umspült. Außer den beiden seitlichen Blutgefäßen ist noch ein Rückengefäß vorhanden, das anfangs in der Wand des Rhynchocoeloms verläuft und dem Rückengefäß der Heteromertinen entspricht. Der Mitteldarm ist mit regelmäßig angeordneten Taschen ausgestattet, die mit den Geschlechtssäcken alternieren.

11. *Hubrechtia desiderata.* (v. Kennel) Bürger.

Das Vorderende ist dünn und rundlich, in der Mitte und hinten ist der Wurmkörper breit und plattgedrückt; er verjüngt sich allmählich nach hinten. Die Lage des Rhynchocoeloms verräth sich im vorderen Ende durch eine beträchtliche Auftreibung des in diesem Abschnitt fadenartigen Leibes. Der kleine Kopf ist vom Körper abgesetzt und breiter als dieser. Er ist rautenförmig gestaltet.

Der vordere Körperabschnitt ist farblos weiß; der hintere rostfarben.

Fundort: Die von mir untersuchten Exemplare entstammen den Rizomen von Posidonia am Posilipo.

C. desiderata ist durch eine überaus mächtige periphere unter der Basalmembran gelegene reticuläre Schicht ausgezeichnet, in welche der Ganglienbelag des Gehirns und der Seitenstämme eingeschlossen ist. Diese Schicht ist nicht nur in der Nachbarschaft der nervösen Centren reich an Zellkernen, sondern überall sind solche reichlich in dieselbe eingestreut. Der Ganglienbelag fließt gleichsam in sie aus. Es ist eine periphere Nervenschicht von seltener Entwicklung.

Die Seitenorgane liegen hinter dem Gehirn in der Mundregion und stehen durch Nerven mit dem Gehirn in Verbindung. Durch eine tiefe und weite über den Seitenstämmen befindliche grubenartige Einstülpung treten die Seitenorgane mit der Außenwelt in Beziehung.

Das Gehirn besteht aus deutlich gesonderten dorsalen und ventralen Ganglien. Es gleicht im Bau dem für Carinella typischen Gehirn. Das Gehirn, so auch die Commissuren liegen nun aber,

da sich die periphere Nervenschicht eingeschoben hat, nicht mehr unmittelbar unter der Basalmembran, wie es bei Carinella der Fall ist. Ich glaube, daß wir in der reticulären subepithelialen Schicht die Einleitung zur Bildung einer Cutis sehen müssen, und Hubrechtia desiderata eine Uebergangsform zu den Heteronemertinen darstellt.

Der Mund befindet sich noch in der Region der Seitenorgane.

Die Seitengefäße besitzen in der Oesophagalregion eine so große Ausdehnung, wie sie bei keiner Carinella Statt hat. Sie umfassen den Darm seitlich völlig und reichen bis an das Rhynchocoelom hinauf, am Bauche sind die beiden weiten Gefäße nur durch ein schmales Muskelseptum der Länge nach getrennt. Erst hinter den Nephridien werden die Seitengefäße enger. Die Nephridien stellen ein Canalsystem dar, das sich an der ganzen Fläche der Außenwand der Seitengefäße verzweigt.

Das Rhynchocoelom ist kurz und nimmt höchstens $^1/_4$ der gesammten Länge des Körpers ein.

Der Rüssel besitzt eine äußere dickere Längs- und eine innere dünnere Ringmuskelschicht, auf letztere folgt die Schicht des hohen Epithels.

Eins der von mir untersuchten Thiere war ein Weibchen mit vielen fast reifen Eiern.

B. Ordnung II Mesonemertini.

Die Seitenstämme sind in den Hautmuskelschlauch hineingerückt. Die Körperwand baut sich auf aus dem Epithel, einer Ringmuskelschicht und einer Längsmuskelschicht.

Die Mundöffnung befindet sich hinter dem Gehirn.

Der Rüssel besitzt kein Stilett.

Familie **Cephalothricidae.** Mc. Intosh.

Die Seitenstämme liegen in der Längsmuskelschicht. Es sind weder Kopffurchen- oder Spalten noch Seitenorgane vorhanden.

IV. Genus. **Cephalothrix.** Oersted.

Nematodenartige, äußerst dünne, sehr bewegliche Würmer. Der Kopfabschnitt ist verjüngt, fein und lang ausgezogen. Ein Kopf ist nicht abgesetzt. Der Mund liegt sehr weit hinter dem Gehirn. (Etwa 3mal so weit als das Gehirn von der Kopfspitze entfernt ist.) Seitenorgane sind nicht vorhanden, demgemäß weder Kopffurchen noch Spalten. Es existieren nur zwei Seitengefäße.

12. *Cephalothrix linearis.* (Rathke, Oersted.)
Syn. Planaria linearis (Rathke)
Cephalothrix linearis Oersted.

Fadendünn, 3—4 cm lang. Farbe weiß, Kopfende röthlich. Ich konnte weder Augen noch andere Pigmentgebilde feststellen.

Fundort. Die wenigen von mir beobachteten Exemplare stammen aus dem Sande und lebten vergesellschaftet mit Amphioxus und Ceph. bipunctata.

13. *Cephalothrix signata.* Hubrecht.

Länge 15 mm. Der Bauch ist weiß, der Rücken gelb. „On the head the pigment takes the form of two club-like horns, longitudinal and parallel, with a white median streak between them and united at their base by a short yellow transverse bar. Two identical club-shaped yellow blotches appear on the ventral side of the head.“ 30—40 Augen stehen in einer Reihe an den Rändern des Kopfes, nahe an der Spitze sind dann noch zwei Augengruppen vorhanden, deren jede sich aus 4 oder 5 Augen zusammensetzt.

14. *Cephalothrix bipunctata.* nov. sp.

Erkennt man ohne weiteres als Cephalothrix: Das Vorderende verjüngt sich sehr stark, der schmale dünne Körper ist fortgesetzt in lebhafter Bewegung. Der Mund ist fast dreimal so weit vom Gehirn entfernt als dieses von der Kopfspitze. Von dieser Nemertine wurden Exemplare von 6—10 cm Länge und 1 mm Breite beobachtet; die Färbung ist ockergelb, sie verblaßt nach der Kopfregion zu, der vordere verjüngte Körperabschnitt ist weißlich. Charakteristisch sind zwei schwarze kleine Pigmentflecke, von denen je einer dicht vor dem Gehirn seitlich im Epithel gelegen ist.

Ceph. bipuncta findet sich nur im Sande, vergesellschaftet mit Amphioxus.

15. *Cephalothrix hymenaeus.* nov. sp.

Eine 3—4 cm lange äußerst dünne nematodenähnliche Nemertine, welche völlig farblos, weiß erscheint bis auf zwei sehr kleine leuchtend rothe Flecke an der Kopfspitze. Bei schwachen Vergrößerungen sieht man zunächst je einen minimalen schwarzen Pigmentfleck ganz am vorderen Rande der Kopfspitze und unmittelbar hinter diesen zwei größere rothe rundliche Flecke, in welche noch ein himmelblaues Pigment eingestreut ist. Diese schwarzblaurothen Flecke sind scharf begrenzt. Das Gehirn liegt von ihnen entfernt weiter hinten.

Ich war versucht, diese Form mit Ceph. bioculata (Oersted) zu identificieren. Aber sowohl aus der letzten ausführlichen von

Joubin gegebenen Beschreibung als auch aus der Abbildung von Mc. Intosh Tl. 4 Fig. 5 folgere ich, daß Cephalothrix bioculata die rothe Färbung des Kopfes einem diffus in ihm verteilten Pigment verdankt. Bei Ceph. hymenaeus ist aber nicht der Kopf überhaupt roth gefärbt, sondern es leuchten an der Spitze nur 2 rothe Flecke. Ueberdies würde Joubin gewiß nicht das blaue Pigment entgangen sein. Als Fundort von Ceph. liocülata bezeichnet Joubin „le sable très propre", wo man sie mit Lineus lacteus finden soll. Ceph. hymenaeus kommt nie im Sande, wie ihre Verwandten Cephalothrix linearis, und bipuncta vor, sondern ich fand diese Nemertine sehr zahlreich mit Tubularia, Schnecken, Bryozoen, röhrenbewohnenden Annneliden vergesellschaftet mit Tetrastemma coronata.

16. *Cephalothrix fragilis.* nov. sp.

Zeigt eine gleichartige braune Färbung; das vordere Körperende dagegen ist hellgelblich mit Ausnahme von zwei braunen, kurzen dicken, kommaartigen seitlichen Strichelchen. Die gelbliche Kopffarbe dringt als eine wenige Millimeter lange mediane dorsale Linie in die braune Farbe des Rumpfes ein. Auf der Oberfläche des Kopfes kommt durch die kurzen braunen Streifen und die mediane Fortsetzung der gelben Kopffarbe in die braune des Rumpfes ein Kreuz von der gelblichen Farbe des Kopfes zum Ausdruck. Mir kam nur ein Exemplar dieses Cephalothrix, welcher äußerlich einem kleinen Cerebratulus nicht unähnlich war, zu Gesicht. Derselbe maß 3 cm in der Länge und war 2—2½ mm breit. Der Kopf war nicht abgesetzt. Das vordere Körperende war abgerundet, das hintere endete, sich allmählig verjüngend, zugespitzt.

V. Genus. **Carinoma.** Oudemans.

Das vordere Körperende ist nicht verjüngt, sondern vielmehr verdickt. Der Mund liegt unmittelbar hinter dem Gehirn.

Carinoma Armandi. (Mc. Intosh) Oudemans.

Syn. Valencinia Armandi. Mc. Intosh.

Gleicht in Gestalt und Farbe Carinella linearis. Länge 7 bis 8 Zoll, die Dicke entspricht der eines starken Fadens. Der Vorderkörper ist weiß, der mittlere Abschnitt blaß röthlichgelb gefärbt, der Schwanz transparent.

Augen fehlen.

In die Tiefe des Epithels ist eine Schicht von Längsmuskelfibrillen eingelagert.

Die Seitenstämme verlaufen in der Oesophagalregion außerhalb, in der Mitteldarmregion aber innerhalb der Ringmuskulatur, also

erst im mittleren und hinteren Körperabschnitt in der Längsmuskelschicht des Hautmuskelschlauches.

In der Oesophagalregion hat sich zwischen Basalmembran und Ringmuskulatur eine (äußere) Längsmuskelschicht eingeschoben, die indes fehlt, sobald die Seitenstämme sich innerhalb der Ringmuskulatur gelagert haben.

Es existiren als Hauptblutbahnen nur zwei Seitengefäße; in der Oesophagalregion kommen noch zwei neben dem Rhynchocoelom verlaufende Gefäße hinzu. Ein Rückengefäß fehlt.

Der Darm besitzt in der mittelbaren Körperregion tiefe Taschen. Im Schwanzende fehlen die Taschen.

Das Rhynchocoelom ist kurz.

Fundort: Southport, im Sande lebend. (Mc. Intosh.)

C. Ordnung III Metanemertini.

Die Seitenstämme haben den Hautmuskelschlauch vollends durchbrochen, sie liegen innerhalb desselben im Leibesparenchym. Die Körperwand baut sich auf aus dem Epithel, einer Ringmuskelschicht und einer Längsmuskelschicht. Die Mundöffnung befindet sich vor dem Gehirn. Der Rüssel besitzt mit seltenen Ausnahmen Stilette.

(Die Bearbeitung dieser Ordnung M. Schulzes „Enopla“ folgt als zweite Abtheilung.)

D. Ordnung IV Heteronemertini.

Die Seitenstämme sind in einer ursprünglichen Ordnung I. entsprechenden Lage, nämlich außerhalb der Ringmuskelschicht, liegen geblieben, aber durch das Auftreten neuer Körperschichten, welche sich zwischen Epithel und Ringmuskulatur eingeschoben haben, in die Tiefe gerückt worden.

Die Körperwand baut sich auf aus dem Epithel, der Cutis, einer äußeren (neuhinzugekommenen) Längsmuskelschicht, der Ringmuskelschicht und der inneren (alten) Längsmuskelschicht. Die Seitenstämme liegen mithin zwischen der äußeren Längs- und der Ringmuskelschicht.

Der Mund liegt hinter dem Gehirn.

Der Rüssel besitzt keine Stilette.

Fam. Eupoliadae. Hubrecht.

Es sind am Kopfe in der Regel keine seitlichen horizontalen Spalten vorhanden; der Canal des Seitenorgans mündet entweder unmittelbar nach außen, oder mittelbar in flache ventrale Schlitze.

Der Querschnitt des Rüssels zeigt keine Muskelfaserkreuze. Sein Muskelschlauch besteht aus zwei Schichten. (Ring-Längs.)

VI. Genus. Eupolia. Delle Chiaje. Hubrecht.

Die Rüsselöffnung liegt subterminal. Das Kopfende ist verbreitert, der halbkreisförmige Kopf vermag sich vollständig in den Rumpf einzuziehen. Die umfangreichen massigen Kopfdrüsenzellen erstrecken sich über das Gehirn und selbst über den Mund hinaus nach hinten. Es sind unzählige kleine Eugen (ca. 80 + 80) jederseits am Kopfe vorhanden. Die epitheliale Drüsenschicht ist durch ein mächtiges Bindegewebslager von der äußeren Längsmuskulatur gesondert. Sie bildet eine eigene dicke Körperschicht.

17. *Eupolia delineata* (*Delle Chiaje*). Hubrecht.

Zu dieser Art gehören fadenartige Würmer, die gelegentlich 60 bis 70 cm Länge bei $1^1/_2$ bis 2 mm Durchmesser erreichen und daher zu den längsten Nemertinen des Neapler Golfes zählen; zugleich, wie schon Hubrecht angiebt, eine der gemeinsten darstellend. Der radförmige Kopf ist scharf abgesetzt. Der Körper verjüngt sich von vorne nach hinten allmählig.

Die Grundfarbe ist für Rücken Bauch und Kopf ein gleichartiges Hellbraun. Die Zeichnung besteht aus dunklen braunen Längslinien, welche sehr viel länger und in viel geringerer Anzahl vorhanden sind als bei Eup. curta, sowie auch ziemlich parallel verlaufen und so den Untergrund mehr streifen als reticulieren. Der Kopf zeigt Sprenkeln von der Farbe der Streifung des Rumpfes. Rücken und Bauch sind durchaus gleichartig gezeichnet. Der Kopf ist nicht gelb gesäumt.

Fundorte: J. dei Galli, Benta Palumma, Rizomi di Posidonia am Posilipo; ferner massenhaft im Sande nahe der Stazione. — Die ventralen Ganglien liegen horizontal über den dorsalen Ganglien, beziehungsweise den Seitenorganen, jedenfalls nicht schräg einwärts gedreht wie bei Eup. curta. Die Seitenstämme biegen sich ganz am Ende der Seitenorgane um (cf. Eup. curta).

18. *Eupolia curta*. Hubrecht.

Diese Art ist, wie Hubrecht angiebt, von Eupolia delineata durch ihre bedeutendere Breite im Vergleich zur Länge unterschieden. Sie weist verschiedene Farbenvarietäten auf.

Vom Scoglio Vervece brachten wir kleine $^1/_2$—2 cm lange Exemplare heim, welche nur vorne braun gesprenkelt, hinten dagegen lediglich weißgelb gefärbt waren. Die Seitenränder dieser Varietät waren opak.

Die häufigste Varietät, welche mit Eupolia delineata vergesellschaftet lebt, zeigt auf dem Rücken und am Bauche eine gelbgraue Grundfärbung. Der Rücken ist durch eine braune reticuläre Längsstreifung ausgezeichnet. Dieselbe läßt außer dem Bauche auch die Seitenränder und den Saum des Kopfes frei. Oefters tritt nun stärker eine Längsstreifung, so daß man die einzelnen braunen Linien längere Strecken deutlich von vorn nach hinten verfolgen kann, öfters ein Reticulum vorwiegend hervor, indem sehr viele kurze braune Längsstreifen schräg und gerade verlaufen, den Untergrund reticulierend. Die so gezeichneten Formen sind noch relativ dünn und lang 5—6 cm : $2^1/_2$ mm. Es kommen aber auch solche von 10 cm : 4 mm und größere vor.

Kräftige breite Formen, wie solche auch Joubin beschreibt, sind ab und zu in den Rizomen von Posidonia am Posilipo gefunden worden. Diese platten Varietäten von Eup. curta, maßen 15 cm : 8 bis 9 mm! Es sind prächtig gefärbte Würmer.

Die zinnoberrothe Grundfarbe ist auf dem Rücken und am Bauch gleich intensiv. Nur der Kopf ist oben durch einen hellgelben Saum eingefaßt und unten reingelb. Hier setzt eine kurze mediane gelbe Linie an, welche am Bauche nur 1 cm entlang verläuft. Bauch und Rücken zeigen eine feine gelbe reticuläre Musterung. Oefters tritt die Reticulierung so sehr zurück, daß der Wurm rein zinnoberroth gefärbt scheint.

Streng genommen sollte man von der an der Kopfkehrseite erhaltenen gelben Farbe auch bei diesen Varietäten als deren Grundfarbe reden, denn thatsächlich ist das Thier zinnoberroth geworden, indem die ursprünglich braunen Streifen stärker und dichter wurden, die rothe Farbe annahmen und nunmehr die Grundfarbe bis auf das gelbe Reticulum verdeckten. — Die Organisation von Eup. curta wiederholt diejenige von Eup. delineata. Nur sind vor allem die Körperschichten bei ersterer mächtiger entwickelt. Besonders die Cutis. Vergleichen wir ihren Durchmesser mit der Höhe des Epithels bei beiden Eupolien, so ergiebt sich für Eup. delineata: die Cutis ist doppelt so dick als das Epithel; bei Eup. curta dagegen ist sie um das vierfache stärker. Die ventralen Ganglien liegen bei Eup. curta auffallend schräg einwärts gedreht zu den dorsalen Ganglien und den Seitenorganen. Die Seitenstämme biegen sich aus den ventralen Ganglien unter den Seitenorganen ab, in die Seitenlinie empor steigend, so daß weiter hinten Seitenorgane und Seitenstamm neben einander, aber durch die betreffenden Mnskelschichten von einander getrennt liegen.

19. *Eupolia minor.* Hubrecht.

Aehnelt einem Amphiporus. Die Länge beträgt 15 mm, die Breite 4—5 mm.

Die graugelbe Farbe des Körpers geht nach vorn in Rothorange über. Die Seitenränder sind transparent.

Eup. minor schließt sich an Eup. pellucida im ganzen dem inneren Bau nach an. So ist für diese Species wie für Eup. pellucida eine sehr dicke gallertige Cutis charakteristisch. Indessen ist der Bau des Gehirns dieser beiden transparenten Eupolien ein durchaus verschiedener. Bei Eup. minor biegen sich nämlich die Seitenstämme unmittelbar hinter den Gehirncommissuren aus dem Gehirn ab, um die Seitenlage einzunehmen. Sie verlaufen weit abgerückt von den dorsalen Ganglien und den Seitenorganen lateral neben diesen. Zwischen Ganglien und Seitenorganen einerseits und den Seitenstämmen andererseits hat sich die Ring- und innere Längsmuskelschicht des Hautmuskelschlauches eingeschoben.

20. *Eupolia pellucida.* (v. Kennel) Bürger.

Synon. Balanocephalus pellucidus. v. Kennel.

Diese Nemertine ist eine der wenigen transparenten, welche ich aus dem Golfe von Neapel erhielt (Cerebratulus aerugatus). Der Körper erscheint besonders in der mittleren und hinteren Region glashell. Der Darm schimmert röthlich gelb durch. In der Kopfgegend, wo sich auch noch das Rhynchocoelom befindet, ist die Färbung des Thieres eine intensiv dunkelrothe.

Der kleine etwa dreieckige Kopf ist scharf gegen den viel breiteren Rumpf abgesetzt. Der Kopf ist in den Rumpf zurückziehbar.

Der Körper ist cylindrisch geformt und verjüngt sich allmählig nach hinten, er endigt abgerundet. Im Kopfe befinden sich jederseits ungemein zahlreich angehäuft die kleinen für das Genus in ihrer ungeheuren Anzahl charakteristischen Augen. Das Rhynchocoelom ist sehr kurz. Es nimmt kaum $^1/_8$ der gesammten Körperlänge ein.

Länge und Breite der gefangenen Exemplare von Eup. pellucida wechselt. Das größte Thier maß $3^1/_2$ cm : 2 mm.

Fundort nur Benta Palumma, selten.

v. Kennel stellt für diese Art ein neues Genus auf, indes alle die von jenem Autor zur Charakteristik desselben angeführten Merkmale — vor allem die Eigenthümlichkeit des retractilen Kopfes — sind solche, welche sozusagen der Gattungsdiagnose von Eupolia entnommen sind. Nichts appartes besitzt Eupolia pellucida, ausgenommen die gallertige Körperwand.

Die Zugehörigkeit dieser transparenten Nemertinen zum Eupolia-Typus wird durch das Studium der Organisation erhärtet.

Die Zellen einer kolossalen Kopfdrüse erstrecken sich fast bis zum Munde nach hinten. Von je einem kurzen seitlich ventral gelegenen Einschnitte begiebt sich ein Canal zum Seitenorgan. Es ist sehr bemerkenswerth, daß die Seitenstämme erst im hintersten Abschnitt der Seitenorgane sich allmählig seitwärts umbiegen, während bei den mir sonst bekannten Eupolien die Seitenstämme sich in der vordersten Gehirnregion, unmittelbar hinter den Gehirncommissuren, also weit vor den Seitenorganen in die Seitenlage begeben. Die Seitenorgane liegen folglich bei Eup. pellucida unmittelbar über den Seitenstämmen, eine Muskelschicht hat sich noch nicht zwischen sie trennend eingeschoben, während sich in der Regel gerade bei den Eupolien schon zwischen Seitenstämmen und Seitenorganen die innere Längs- und Ringmuskulatur als dicke Schicht eingelagert hat.

Uebrigens tritt die Entwicklung des Hautmuskelschlauches bei Eup. pellucida zu Gunsten einer gewaltigen bindegewebigen Cutis zurück. Drüsig ist die Cutis nur in ihrem äußersten Lager, wo sehr kurze Secretzellen in sie eingesenkt sind. Unter dem Epithel in der drüsigen äußeren Cutislage ist auch jenes Pigment angehäuft, welchem das Thier im vorderen Abschnitt seine Färbung verdankt. Das Bindegewebe der Cutis ist ein Gallertgewebe, daß im Bau durch seine sternförmigen Zellen und sein Balkengerüst dem Gallertgewebe von Pelagonemertes ziemlich ähnelt.

VII. Genus. Valencinia. Quatrefages.

Die Rüsselöffnung liegt nicht subterminal, sondern weit von der Kopfspitze entfernt ventral. Sie ist meist bis vor das Gehirn nach hinten gerückt. Das Kopfende vermag sich pfriemenförmig auszuziehen. Augen sind überhaupt nicht oder doch nur in sehr geringer Anzahl vorhanden. Die Kopfdrüsenzellen erstrecken sich nicht über das Gehirn hinaus nach hinten. Das subepitheliale Lager von Drüsenzellen bildet keine gesonderte Schicht. Es sind die Drüsenzellen in die äußere Längsmuskelschicht eingesenkt.

21. *Valencinia longirostris.* Quatrefages.

Das Kopfende ist dünn und pfriemenförmig ausgezogen. Der Kopf selbst ist lanzettlich gestaltet. Der Körper ist nach hinten verdickt und cylindrisch. Länge 15 cm, Breite 2—3 mm. Das vordere Körperende ist farblos, weiß. Das hintere rosa, zinnoberfarben, oder auch chokoladenbraun.

Fundort: Rizomi di Posidonia, Posilipo, 30 m. Auch vergesellschaftet mit Balanoglossus, Punta di Posilipo, 5 m.

Kopfspalten sind nicht vorhanden.

22. *Valencinia blanca* nov. sp.

Ist von glänzend weißer Farbe. Jede Zeichnung fehlt. Der Wurm wird nicht über 4½ cm lang. Er ist hinten am dicksten (2½—3 mm). Nach vorne verjüngt er sich allmählich, das Kopfende ist spitz wie ein Pfriemen.

Fundort: Scoglio Vervece. Dort häufig. Val. blanca wurde auch mit Drepanophorus rubrostriatus vergesellschaftet gefangen, aber nie zusammen mit Valenc. longirostris.

Der Mund liegt unmittelbar hinter den Seitenorganen, die Rüsselöffnung dicht vor dem Gehirn. Das Rhynchocoelom erstreckt sich fast bis in die äußerste Schwanzspitze nach hinten.

Fam. **Lineidae** Mac Intosh.

Der Canal des Seitenorgans mündet in der Regel nicht direkt nach außen, sondern in tiefe laterale horizontale Taschen, welche durch die Kopfspalten gebildet sind. Die Kopfspalten sind wechselnd tief, sie schneiden bis auf das Hirn ein, aber sie sind auch, obwohl nur in seltenen Fällen angedeutet durch flache laterale Längsbuchten.

Ein Querschnitt des Rüssels zeigt ein oberes und unteres von den Fibrillen der Ringmuskulatur gebildetes Kreuz. Der Muskelschlauch besteht aus drei Schichten (Längs-, Ring-, Längs-).

A. Amicrurae.

Am hinteren Körperende fehlt ein Schwänzchen; d. i. ein haarförmiger weißlicher Anhang.

VIII. Genus Lineus Sowerby.

Ist ausgezeichnet durch ungemein lange Formen. Der Körper ist rundlich fadenförmig oder schmal bandförmig. Der Kopf meist zugeschärft, spatelförmig, etwas verbreitert. Viele hierher gehörige Arten sind mit einer großen Anzahl kleiner Augen ausgestattet. Sie vermögen sich nicht schwimmend fortzubewegen, sondern lediglich durch Kriechen am Boden und Hingleiten am Wasserspiegel durch Flimmerthätigkeit. Sie knäueln sich zu Klumpen zusammen.

23. *Lineus molochinus* nov. sp.

Ein Exemplar stand mir von dieser Species zur Verfügung.

Dasselbe war 25 cm lang, fast 1 cm breit und hatte eine cylindrische Körperform. Schwanz und Kopf enden abgerundet stumpf, das Kopfende ist kaum erheblich dünner als das Schwanzende. Ein Kopf ist nicht abgesetzt. L. molochinus ist intensiv zinnoberfarbig; nach vorne geht die lebhafte Farbe in einen Fleischton über, der Kopf schließlich ist fast farblos, weiß.

Die Rüsselöffnung ist etwas von der äußersten Spitze abgerückt, es tritt ihre subterminal ventrale Lage deutlicher hervor als sonst bei den Lineiden. Am Kopfe befinden sich Kopfspalten, welche $2^1/_2$ mm lang sind. Sie furchen ihn aber nur, denn sie schneiden nur sehr wenig tief ein. Die flachen Spalten müßten 3—4mal tiefer sein, sollten sie an das Gehirn hinanreichen. Das Gehirn weicht im Bau vom Gehirntypus der Lineiden erheblich ab. Während bei letzteren in der Regel die ventralen Ganglien ganz in der unteren Körperhälfte, und die dorsalen in der oberen liegen, (beide Körperhälften werden durch die Kopfspalten genau abgetheilt), liegt das gesammte Gehirn von Lineus molochinus fast ganz an der Bauchseite, indem auch die dorsalen Gehirnganglien ventralwärts gerückt sind. Die ventralen Ganglien liegen nicht wie in der Regel bei den Lineiden horizontal genau unter den dorsalen, sondern sie haben sich schräg einwärts gedreht, mit der Tendenz, sich medial neben die dorsalen zu lagern. Von den Kopfspalten geht in der Mitte zwischen den Gehirncommissuren und den Seitenorganen ein horizontaler gerader Canal ab, welcher, am Gehirn angelangt, sich jäh nach hinten umbiegt, neben den dorsalen, nicht wie es bei Cerebratulus der Fall sein würde, zwischen ventralen und dorsalen nach hinten laufend. Die Seitenorgane aber liegen nicht in einem Blutgefäß-Sinus, der nur eine unmittelbare Erweichung der Seitengefäße darstellt, sondern in je einer langen seitlichen sackartigen blindgeschlossenen Ausstülpung der Seitengefäße, welche neben den Seitengefäßen liegt, aber von diesen durch die Ring- und innere Längsmuskelschicht getrennt ist. Diese Gefäßsäcke liegen gerade über den Seitenstämmen, also befinden sich auch die Seitenorgane genau über jenen.

Der Rüssel setzt sich aus nur zwei Muskellagen, nämlich einer Längs- und Ringmuskelschicht zusammen. Auf die starke Ringmuskelschicht folgt unmittelbar die hohe Papillenschicht, zwischen beiden sind die Nerven eingeschlossen. Es ist aber ein Muskelkreuz vorhanden. Der Rüssel ist dem Körperumfang proportional sehr dick.

Fundort: Golf der Stazione im Schlamm 30 m.

24. *Lineus geniculatus.* (Delle Chiaje) Bürger.

Syn. Polia geniculata delle Chiaje.
Cerebratulus geniculatus Quatrefages.
Cerebratulus geniculatus Hubrecht.

Farbe und Zeichnung wechseln nach den Fundorten.

C. geniculatus von den Isolotti dei Galli nächst Positano zwischen grünen Algen in Tiefen von ½—2 m lebend. Grundfarbe lebhaft hellgrün. Die Kopfspalten und das Gehirn leuchten roth. Die Kopfspalten sind weiß gesäumt. In der Mitte des Kopfes vor dem Gehirn fällt eine weiße stumpfwinklige Binde auf, welche nach hinten offen ist. Etwa ½ cm vom hinteren Ende der Kopfspalten entfernt folgt eine 2. Binde, welche um den Bauch herumgeht, aber in der mittleren Rückenlinie nicht geschlossen ist. Es folgen nunmehr in Abständen von 12—5 mm (nach hinten zu rücken sie allmählich näher aneinander) fortgesetzt weiße Binden (60—70), welche aber sämmtlich unvollständig sind, da sie in der Mitte des Rückens von der grünen Grundfarbe unterbrochen werden.

C. geniculatus aus den Rizomen di Posidonia Caulinii am Posilipo 5 m besitzt ein viel dunkleres Grün als die vorige Varietät, das Gehirn schimmert nicht roth durch, auch die Kopfspalten leuchten minder intensiv. Die Zeichnung ist indes so deutlich wie bei der ersten Varietät.

C. geniculatus von Capri. Farbe gleichartig tief dunkelbraun, lebhaft violett schillernd. Die Kopfspalten sind weiß gesäumt. Die stumpfwinklige Stirnbinde ist zu konstatieren, außer ihr aber nur 4—5 Binden und von diesen sind die hinteren schon fast verwischt. Dem bei weitem längeren Körperabschnitt fehlt also jegliche Zeichnung; er ist eintönig dunkel gefärbt.

Die Gestalt und die äußere Organisation ist bei allen Varietäten die gleiche. Der Körper ist platt und bandartig; im Verhältnis zur Länge (30—60 cm) schmal (5—8 mm br.). Das hintere Ende ist spitz, der Kopf spatelförmig, platt, zugeschärft. Die vordere Kante ist nierenförmig eingebuchtet. Die Kopfspalten sind ungemein lang, da das Gehirn weit von der Kopfspitze entfernt nach hinten gerückt ist. Der Mund wird durch einen Schlitz gebildet, welcher hinter der ersten Binde ansetzt und fast bis zur dritten verläuft.

Als Fundort ist außer den I. dei Galli, Posilipo und Capri noch zu nennen Benta Palumma. Ziemlich häufig.

Trotz ihrer Länge erreichen die Kopfspalten nicht die Seitenorgane, diese werden erst durch einen längeren Canal, welcher ähnlich wie bei Cerebratulus lividus sich vom hinteren Zipfel der Spalten aus

zum Organe nach hinten wendet, mit jenen verknüpft. Die Seitenorgane liegen in ihrer ganzen Länge über den Seitenstämmen. Der Mund liegt unmittelbar hinter den Seitenorganen.

L. geniculatus wird auch leicht erkannt an einer ganz auffällig stark entwickelten Bindegewebschicht, die unter dem subepithelialen Drüsenmantel eine Schicht bildet, welche an Dicke der äußeren Längsmuskulatur gleichkommt. Aehnlich wie bei Eupolia sind es wellig verlaufende Fasern, welche dieses starke, keine Muskelfibrillen führende Polster bereiten. L. geniculatus besitzt zahlreiche Augen, ca. 40—50 jederseits im Kopfe.

25. *Lineus lacteus.* Montagu.

Synon. Lineus lacteus. Mc. Intosh. 1873.
nec. Cerebratulus lacteus (Grube) Hubr. 1880.

Die Grundfarbe ist ein reines Weiß. Aber sowohl der Kopf als der mittlere und hintere Körperabschnitt zeigen eine lebhaft rothe Färbung, deren Intensität bei den verschiedenen Individuen übrigens sehr wechselt. Nicht selten ist nur der Kopf rosa gefärbt, während der übrige Körper völlig weiß erscheint. Bei manchen Thieren ist derselbe in der Region der Geschlechtsorgane im Gegensatz zum rothen Kopfabschnitt dunkelgrau oder selbst häufig grün gefärbt.

L. lacteus wird 15—20 cm lang. Der Körper ist fadenförmig, drehrund und sehr dünn; 1—2 mm Durchmesser. Der Kopf ist verbreitert, spatelförmig und nicht scharf abgesetzt. Ein Appendix fehlt dem zugespitzten Schwanzende bestimmt. Der Kopf ist stets mit einer Anzahl oft unregelmäßig gestalteter Augen versehen. Meist ist ihre Zahl rechts und links eine verschiedene. Ich beobachtete 7 + 8, 3 + 4 oder auch 6 + 6. Die Zahl ist nicht constant. Uebrigens finden sich kaum mehr als in Summa 15, kaum weniger als in Summa 7.

Der Mund liegt weit hinter dem Gehirn und den Seitenorganen, nämlich etwa ebenso weit vom Gehirn als dies von der Kopfspitze entfernt. Die Kopfspalten sind flach; sie müßten um das doppelte tiefer sein, sollten sie an das Gehirn reichen. Die Seitenorgane liegen nur über den Seitenstämmen.

Schließlich ist L. lacteus eine erstaunlich mächtig entwickelte subepitheliale Drüsenschicht eigenthümlich, welche sich in der äußeren Längsmuskulatur ausbreitet und bis auf die Ringmuskelschicht stößt.

Fundort beim Palaste der Donna Anna im Sande wenige Fuß tief. Ziemlich gemein.

26. *Lineus nigricans.* nov. sp.

Kommt mit Nemertes gracilis vergesellschaftet vor und wird leicht mit dieser bewaffneten Nemertine verwechselt. Der Körper ist cylindrisch fadenartig dünn, der Kopf ist nicht abgesetzt, spatelförmig zugeschärft endet er mit breiter Kante. Das hintere Ende verjüngt sich allmählich. Der Wurm ist schmutzig dunkelgrün gefärbt. Das Grün spielt ins Braune. Das Gehirn schimmert intensiv roth durch. Daher die beiden dunkelrothen Flecke auf der Rückseite des Kopfes. Die seitlichen und vorderen Ränder des Kopfes sind weiß gesäumt. Länge 6 cm., Breite 1—1½ mm.

Die Kopfspalten müßten mehr als doppelt so tief einschneiden, sollten sie an das Gehirn hinanreichen, sie erstrecken sich auch nicht bis zu den Seitenorganen nach hinten. Die Seitenorgane liegen über den Seitenstämmen. Der Mund liegt von den Seitenorganen entfernt weiter hinten.

Fundort: Palazzo donna Anna; Ulva. Selten.

27. *Lineus parvulus* nov. sp.

Stellt eine sehr kleine, 3 cm lange, 1 mm breite Nemertine vor, welche zwischen Ulven vergesellschaftet mit den kleinen Tetrastemmaarten lebt. Der rundliche Körper verjüngt sich nach hinten ziemlich spitz endigend; das vordere Ende ist zugeschärft, breit, abgekantet. Der Kopf ist nicht abgesetzt.

Die Grundfarbe ist grün, bald ins röthliche oder bräunliche spielend. Das Gehirn leuchtet rosa durch. Auf dem Rücken läuft eine mediane sehr feine gelbliche Linie vom Kopf zum Schwanze entlang. Außerdem sind feine helle in regelmäßigen weiteren Abständen angeordnete Querbinden auf dem Rücken, die mediane Linie schneidend, festzustellen. Ich zähle 11. Die Zeichnung ist am Schwanzende verwischt. Die Seitenränder wie auch der Kopf sind weiß gesäumt. Es sind 5 + 5 Augen in unregelmäßiger Stellung zu konstatieren.

Anstatt der Kopfspalten weist L. parvulus nur flache Seitenbuchten auf, welche sich nur am hinteren Ende vertiefen, wo der zu den Seitenorganen führende Canal entspringt. Die Seitenorgane liegen über den Seitenstämmen, der Mund unter den Seitenorganen.

Die beiden Excretionscanäle verlaufen an der Rückenfläche unmittelbar neben dem Rhynchocoelom über den seitlichen das Rhynchocoelom einschließenden Blutgefäßen. Es ist diese Lage eine abweichende, da die Excretionscanäle der Lineiden in der Regel neben den Seitenstämmen entlang ziehen.

28. *Lineus gilbus.* nov. sp.

Diese fadendünne lebhaft dunkelgelb gefärbte Nemertine wird 10—12 cm lang, 1—1½ mm breit. Der Kopf ist heller gefärbt und jederseits mit einem dunkelgelben Streifen geziert. Das Vorderende ist verbreitert, der Kopf ist spatelförmig, vorne abgekantet. Nach hinten verjüngt sich der Körper allmählich.

Die Kopfspalten müßten fast doppelt so tief sein, sollten sie bis ans Gehirn hinanreichen. Sie erstrecken sich kaum bis zu der Seitenorganen nach hinten. Die Seitenorgane liegen über den Seitenstämmen. Der Mund befindet sich in der vorderen Region der Seitenorgane. Die beiden Stämme des Excretionsapparates verlaufen an der Rückenfläche, jederseits dem Rhynchocoelom aufliegend. Auch die Pori öffnen sich am Rücken. Augen sind nicht vorhanden. Die Farbe verdankt das Thier Drüsenzellen mit intensiv gelb gefärbtem glänzenden Inhalt.

Fundort: Capri. Nicht selten.

29. *Lineus Lobianki.* nov. sp.

Zählt zu den längsten Nemertinen des Golfes, da sie 75 cm in der Längsachse erreicht. Der Körper ist schmal bandförmig platt. Das hintere Ende ist verjüngt und schließlich zugespitzt. Das vordere ist zugeschärft und endet mit breiter Kante. Der Kopf ist nicht abgesetzt. Die Farbe des Wurms ist überall eine gleichartig schwarzbraune, die oft lebhaft ins Violette spielt wie bei Micrura tristis. Bruchstücke, zumal Kopfstücke wird man deshalb leicht für solche jener Micrura Cerebratulus halten.

Fundort: Rizomi di Posidonia Caulinii; Posilipo. Dort nicht selten.

Die Kopfspalten schneiden nicht bis zum Gehirn ein. Sie reichen nicht bis zu den Seitenorganen nach hinten, sondern nur ein wenig über die Gehirncommissuren hinaus; ein nach hinten jederseits neben dem Gehirn entlang laufender Canal begiebt sich von ihnen zu den Seitenorganen. Die Seitenstämme biegen vor dem Seitenorgan in die Seitenlage ein, so daß die Seitenstämme neben den Seitenorganen liegen. Die Mundöffnung befindet sich in der hinteren Region der Seitenorgane.

30. *Lineus Grubei.* (Hubrecht) Bürger.
Cerebratulus Grubei. Hubrecht.

Grundfarbe: Bauch und Rücken gleichartig braungrün. Nach Hubrecht indes in der Grundfärbung mit M. purpurea übereinstimmend. Von dieser Art unterscheidet L. Grubei die Zeichnung der sonst

wie der Körper gefärbten Kopfspitze. Eine weiße Querbinde schneidet nämlich ein kleines braungrünes vorderes Schildchen ab und dieses ist jederseits noch mit einem weißen punktartigen Flecken gezeichnet.

L. Grubei wird länger als M. purpurea, das von mir untersuchte Exemplar maß fast 20 cm. Der Körper ist rundlich und etwa $2^1/_2$ mm breit; der Kopf ist verbreitert, ohne aber scharf abgesetzt zu sein. Die Kopfspalten sind lang und auffallend.

L. Grubei ist viel seltener als M. purpurea.

Fundort: Rizomi di Posidonia; Posilipo. 30 m. Ein Appendix fehlt.

Die Kopfspalten müßten doppelt so tief einschneiden, sollten sie das Gehirn erreichen. Sie erstrecken sich nicht bis zu den Seitenorganen nach hinten. Die Seitenstämme biegen sich unter den Seitenorganen seitlich um. Der Mund liegt unmittelbar hinter den Seitenorganen.

31. *Lineus bilineatus.* Renier.

Syn. Cerebratulus bilineatus Hubrecht.
Syn. Lineus bilineatus Mc. Intosh.

Für diesen halte ich eine dünne 1 mm breite, 8 cm lange Nemertine mit verbreitertem vorne abgestumpften Kopf, verjüngtem hinteren Ende und weichem platten Körper. Die Grundfarbe ist gleichartig braungelb. Auf dem Rücken zieht in der Mittellinie ein weißgelbes Band bis zum Schwanzende entlang, das am Kopfe mit einem großen weißgelben Kopfschild endet. Man konstatiert bei diesem Lineus also thatsächlich nur ein Band, aber man hat zu bedenken, daß jener Lineus bilineatus, welchen Mc. Intosh abbildet (Monograph Pl. VI Fig. 1), unserer Varietät gleichen würde, hätte sich die feine rothe Linie, welche dort auch nur streckenweis die beiden hellen Längsbänder trennt, vollständig verwischt. Die Kopfspalten schneiden nicht bis zum Gehirn ein und erstrecken sich nur bis zu den Seitenorganen nach hinten. Die Seitenorgane liegen über den Seitenstämmen; der Mund befindet sich unter den Seitenorganen.

Fundort: Torre dell' Annunziata.

32. *Lineus Kennelii.*

Wird 25—30 cm lang, 6–8 mm breit. Der Körper ist breit, plattgedrückt. Er verjüngt sich nach vorne und hinten, beide Enden laufen ganz allmählich spitz aus. Der Kopf ist nicht abgesetzt. Das vordere Ende sieht dem hinteren zum Verwechseln ähnlich.

Die Grundfarbe ist zimmet- oder dunkel honigfarben. Auf dem Rücken verlaufen von der Kopfspitze bis zum Schwanzende 2 hellgelbe sehr feine wie mit einer spitzen Feder gezogene Linien im Abstande von 1 mm parallel. Die beiden hellen scharfen Rückenlinien sind auch am Spiritusexemplare noch deutlich zu verfolgen.

Man könnte diesen Lineus, welchen nach dem Monographen von Malacobdella zu benennen ich mir erlaubte, mit Lineus bilineatus (Renier) verwechseln. Indes beachte man vor allem die sehr verschiedene Gestalt des Kopfes und auch die verschiedenartige Zeichnung. Bei Lineus bilineatus verlaufen am Rücken zwei breite Längsbänder, welche nur durch eine sehr feine, oft verwischte Linie von dem Aussehen der Grundfarbe getrennt sind, oder theilweis selbst mit einander verschmelzen. Am Kopfe werden die Bänder noch breiter, am Kopfende sind sie doppelt so breit als in der Mitteldarmregion. Der Kopf von L. bilineatus ist stark verdickt und verbreitert, mindestens $^1/_3$ mal breiter als der Rumpf. (cf. Mc. Intosh Monograph Pl. VI, Fig. 1.)

Die Kopfspalten schneiden fast bis zum Gehirn ein, erstrecken sich aber nicht bis zu den Seitenorganen nach hinten. Die Seitenorgane liegen über den Seitenstämmen. Der Mund liegt dicht hinter den Seitenorganen.

Fundort: Detritus. Posilipo. 30 m. Nicht häufig.

34. *Lineus Dohrnii.* (Hubrecht) Bürger.

Syn. Cerebratulus Dohrnii Hubrecht.

Die Grundfarbe ist schmutzig hellgelb. Eine mediane dunkelbraune breite Rückenlinie verläuft von der Kopfspitze bis zum Schwanzende. Sie wird jederseits von einer weißen Linie begleitet. Die Lage des Gehirns ist angedeutet durch einen dunkelbraunen ovalen Fleck, zu dem die Rückenlinie anschwillt. Je ein länglicher dunkelbrauner Fleck befindet sich am Rande der Kopfspalten sehr nahe der Kopfspitze.

Der schmale $1^1/_2$ mm breite Körper wird 4 cm lang, er verjüngt sich nach hinten. Der Kopf ist nicht abgesetzt und endet stumpf abgerundet.

Die Kopfspalten schneiden fast bis zum Gehirn ein, erstrecken sich nach hinten aber nur bis zu den Seitenorganen. Die Seitenorgane liegen über den Seitenstämmen, die Mundöffnung befindet sich in der hinteren Region der Seitenorgane.

35. *Lineus rufocaudatus.* nov. sp.

Dieser prächtig gefärbte Wurm wird 30 cm lang, 5 mm breit. Der Körper ist vorne mehr platt, hinten rundlich. Der sehr lange

Kopf ist spatelförmig zugeschärft und vorne abgekantet. Die Kopfspalten sind $1^1/_2$ cm lang.

Die Farbe der Körper ist ein gleichartiges Rothbraun. Dasselbe hat einen sammetartigen Schmelz. Ein 8 cm langes Schwanzende dagegen setzt sich durch seine gelbrothe Färbung scharf ab. Das hintere Ende verjüngt sich und endet zugespitzt.

Fundort: Rizomi di Posidonia; Posilipo. Selten.

Die Kopfspalten schneiden nicht bis zum Gehirn ein, erstrecken sich dagegen bis über die Seitenorgane hinaus nach hinten. Die Seitenorgane liegen über den Seitenstämmen. Der Mund liegt nicht unmittelbar hinter, sondern etwas entfernt von den Seitenorganen.

36. *Lineus versicolor.* nov. sp.

Repräsentiert eine der längsten der Angehörigen der Gattung Lineus, da sie über $^1/_2$ m erreicht. Die Breite beträgt nur 2 mm bis auf die Körperregion, in welcher der aufgewundene Rüssel das Rhynchocoelom und den Körper auftreibt. Das hintere Ende läuft spitz aus, das vordere endet völlig stumpf mit scharfer, breiter, gerader Kante. Der Kopf ist nicht im geringsten abgesetzt.

L. versicolor ist vorne gleichmäßig roth gefärbt. Der lebhafte rothe Farbenton geht nach hinten in einen graugrünen über. Am Kopfende, ganz nahe der Kante bemerkt man zwei weiße längliche Punkte, welche fast in einander übergehen, so daß es aussieht als ob hier ein schmaler weißer Querriegel vorhanden wäre.

Die Kopfspalten schneiden bis auf das Gehirn ein. Sie reichen nicht bis zu den Seitenorganen nach hinten. Die Seitenorgane liegen über den Seitenstämmen. Der Mund befindet sich weiter hinter den Seitenorganen. Die Ringmuskulatur des Rhynchocoeloms ist in der Oesophagalregion auffallend stark (fast so mächtig wie die Ringmuskulatur des Hautmuskelschlauches.) Die innere Längsmuskulatur umfaßt auch ventral das Rhynchocoelom, sich zwischen Rhynchocoelom und Darm als ein dickes Lager, in welchem das Rückengefäß eingeschlossen liegt, einschiebend.

37. *Lineus coccinus.* nov. sp.

Nur ein Exemplar wurde von mir beobachtet. Dasselbe war fast $^1/_2$ m lang, aber kaum breiter als 3—4 mm. Die Farbe mit Ausnahme des Kopfes, welcher farblos weiß erscheint, ist gleichartig dunkelrosa. Der Kopf ist nicht abgesetzt, aber zugeschärft, an der Spitze abgerundet. Das hintere Ende verjüngt sich allmählich und endet gleichfalls abgerundet stumpf.

Fundort: mit Cerebratulus marginatus vergesellschaftet im Schlamm.

Die ziemlich tief einschneidenden Kopfspalten erstrecken sich nur bis zum Gehirn nach hinten. In der Region der Gehirncommissuren geben sie je einen weiten Canal ab, welcher neben dem Gehirn (zuerst neben den dorsalen Ganglien) verläuft, sodann enger wird und tiefer an das ventrale Ganglien hinanrückt. Die Seitenstämme biegen vor den Seitenorganen in die Seitenlage ein, sie liegen daher nun neben den Seitenorganen, sind aber von ihnen durch die Ring- und innere Längsmuskulatur getrennt. Die Mundöffnung liegt theilweis noch in der Region der Seitenorgane.

Charakteristisch ist ein Querschnitt, welcher hinter dem Munde durch den Körper gelegt ist, für diese Species. Die Dicke der Cutis verhält sich zur Höhe des Epithels wie 5 : 1. Die Cutis ist ungemein reich an schlanken langen Drüsenzellen, welche in enger Nachbarschaft angeordnet sind. Die Lücken, welche sie lassen, füllen Längsmuskelfasern aus. Gegen den Muskelschlauch grenzt die Drüsenschicht, ein fest homogenes Bindegewebslager, das keine Muskelfibrillen führt, ab.

Das Rhynchocoelom ist mit einer Ringmuskulatur ausgestattet, welche fast doppelt so dick ist als die Ringmuskulatur des Hautmuskelschlauches. Auch zwischen Darm und Rhynchocoelom ist eine hauptsächlich aus Längsfasern bestehende Muskulatur entwickelt. Infolge dessen ist das Darmrohr weit vom Rhynchocoelom ab in die Tiefe gerückt, aber mehrere tiefe Längsfalten stülpen sich aus dem centralen Rohre zum Rücken hinauf, sich zwischen Rhynchocoelom und Hautmuskelschlauch einzwängend.

IX. Genus. Borlasia. Oken.

Der Körper der Arten dieser Gattung vermag keine Schwimmbewegungen auszuführen, er knäuelt gereizt sich auch nicht auf, sondern zieht sich wie eine Schnecke zusammen, indem er sich auf ein geringes Bruchstück seiner normalen Ausdehnung verkürzt und dementsprechend außerordentlich verdickt. Der Hautmuskelschlauch zeigt eine intensiv rothe Färbung. Der Körper ist cylindrisch geformt, Seitenränder treten an ihm nicht hervor. Das vordere Körperende ist kegelförmig zugespitzt, der Kopf nicht abgesetzt. Das hintere Körperende ist stumpf. Ein Schwänzchen fehlt.

38. *Borlasia Elisabethae.* Mac Intosh.

Der Körper des völlig ausgestreckten Wurmes ist cylindrisch, hinten abgestumpft, vorne zugespitzt und wenig dicker als

hinten. Der Kopf ist nicht abgesetzt. Borlasia Elizabethae zieht sich nach einem Reize wie eine Schnecke zusammen, es schwillt dann das hintere Ende mächtig an, es wird 3 bis 6mal breiter als es vordem bei dem nicht contrahierten Thiere war, und schließlich verkürzt sich der Wurm etwa auf ein Drittel seiner normalen Länge zu einem breiten oben gewölbten, unten concaven lang rechteckigen Klumpen, aus dem die Kopfspitze hervorlugt. In derselben Weise contrahieren sich viele Amphiporusarten. Der ausgestreckte Körper des Wurms weist eine unregelmäßige Ringelung in Folge ringartiger Einschnürungen auf, derselbe mißt 10—14 cm : 5 mm.

B. E. besitzt eine auf Rücken und Bauch gleichartige dunkelbraune Grundfarbe, welche gelegentlich mehr ins Rothbraune hineinspielt. Die Kopfspitze ($^1/_2$ cm lang) ist weiß oder hellgelb gefärbt. Sie ist ebenso wie der übrige Körper mit feinen hellbraunen Punkten gesprenkelt. Die hellbraunen Flecken treten besonders in der vorderen Körperregion massenhaft hervor, hinten verlieren sie sich. Endlich ist der Körper mit gelben oder weißlichen Querringeln geziert, welche in regelmäßigen Intervallen auf einander folgen.

Fundort: Rizomi di Posidonia; Posilipo. Häufig.

Die Kopfspalten schneiden nicht bis zum Gehirn ein und erstrecken sich nicht bis zu den Seitenorganen nach hinten, die Seitenstämme biegen sich unter den Seitenorganen seitlich ab. Der Mund liegt unmittelbar hinter den Seitenorganen.

39. *Borlasia inmaculata.* nov. sp.

Diese dicke walzenförmige Nemertine besitzt einen Durchmesser von 15 mm bei einer Länge von über 30 cm. Derart große Exemplare habe ich von B. Elizabethae niemals zu Neapel beobachtet. Kopf und Schwanzende sehen sich ziemlich ähnlich, beide sind mäßig verjüngt. Der Kopf endet stumpf, der Schwanz abgerundet.

B. inmaculata ist gleichartig schwarzblau gefärbt. Nur die Kopfspitze zeigt eine kirschrothe Färbung. Das Kopfende ist mit helleren (bräunlichen) Sprenkeln versehen. Jedenfalls ist die Kopfspitze nicht weiß abgesetzt und der Rumpf nicht von weißgelben Ringeln umgürtet.

Die Kopfspalten sind fast $1^1/_2$ cm lang. Fundort: Posilipo.

B. Micrurae.

Am hinteren Körperende befindet sich ein Schwänzchen.

X. Genus. Microura. Ehrenberg.

Umfaßt kleine weiche dünne Formen mit spatelförmig zugeschärftem, mit breiter Kante endigendem Kopf, welcher nicht gegen den Rumpf abgesetzt ist. Sie vermögen sich nicht durch Schwimmbewegungen frei im Wasser fortzubewegen, sondern lediglich durch Kriehen auf Gegenständen oder vermöge der Flimmerthätigkeit am Wasserspiegel hingleitend Ortsveränderungen vorzunehmen. Gereizt knäueln und falten sie sich zu einem Klumpen zusammen oder contrahieren sich schneckenartig stark. Sie sind mit einem Schwänzchen ausgestattet.

40. *Microura delle Chiajei.* (Hubrecht) Bürger.

Syn. Cerebratulus delle Chiajei Hubrecht.

Stellt die an Varietäten reichste Art des Golfs von Neapel vor. Bei der buntesten zeichnen den dunkelgrünen bis grünbraunen Rücken drei dunkelrothe breite Längslinien, parallel, am Kopfe ansetzend, nach hinten verlaufend. Sie sind durch breitere braungrüne Streifen der Grundfarbe getrennt, aber letztere durchzieht je eine weiße Linie, so daß also drei rothe und zwei weiße Linien mit einander abwechselnd, den Rücken zieren, von denen eine jede durch die dunkle Grundfarbe eingefaßt ist. Die Seitenränder treten überdies als weiße Säume hervor. Die Bauchfärbung ist eintönig dunkelgrün bis schwarzgrün, sie geht ins Bräunliche über.

Eine andere Varietät besitzt eine hellrothe Grundfarbe, der Bauch ist fast weiß mit einem rothen Anflug. Den Rücken zieren drei breite rothbraune Streifen, welche an der Kopfspitze ansetzend bis zum Schwanzende verlaufen. Eine dritte von mir beobachtete Varietät ist noch heller als die vorige und ist durch drei orangefarbene Rückenstreifen ausgezeichnet.

Außerdem giebt es dunkelgrüne Exemplare von M. delle Chiajei, welche zwei helle moosgrüne Rückenstreifen zieren, und schließlich solche von schwarzbrauner Grundfarbe, in der eine Zeichnung bis auf zwei dünne hellere Linien, welche aber nur in der Kopfregion deutlich sind, nicht zum Ausdruck kommt.

Die Gestalt all dieser bunten Nemertinen ist die nämliche. Es sind schmale bandförmige Formen, welche durchschnittlich 15 cm lang, 4—5 mm breit werden. Der Kopf ist nicht im geringsten gegen den übrigen Körper abgesetzt. Das vordere Ende schärft sich nach vorne zu, es ist breit und platt. Die Kopfspalten sind 3 mm lang. Am Kopfe befinden sich etwa 50 + 50 kleine Augen.

Die Kopfspalten müßten um $^1/_3$ tiefer sein, sollten sie das Gehirn erreichen. Die Seitenstämme liegen neben den Seiten-

organen, unter welchen sich auch die Mundöffnung befindet. Charakteristisch sind auch für M. delle Chiajei die stark entwickelten Kopfdrüsenzellen. Der Rüssel, welchen das Thier gerne auswirft, ist mehr als doppelt so lang als dieses selbst.

Fundort der helleren Varietäten I. dei Galli, der dunkleren Benta Palumma.

41. *Micrura tristis.* (Hubrecht) Bürger.

Syn. Cerebratulus tristis Hubrecht.

Färbung gleichartig schwarzbraun; oftmals lebhaft dunkelviolett, ohne jegliche Zeichnung. Aber ein hinteres etwa 1 cm langes Körperstück ist wie bei Cerebratulus liguricus oftmals scharf durch seine hellere bräunlichgrüne Färbung abgesetzt. Der haarfeine Appendix wird bis zu $1^1/_2$ cm lang.

Der Kopf ist nicht gegen den Körper abgesetzt, er ist zugeschärft und auch zugleich zugespitzt. Die Kopfspalten sind 5 mm lang. Die Länge des Körpers beträgt gewöhnlich 10—12 cm, gelegentlich ist sie bedeutender. Die Breite beträgt 3 mm.

Fundort: Benta Palumma, aber besonders bei Capri in größeren Tiefen häufig. Von hier stammen die schwarzblauen Exemplare.

Die Kopfspalten reichen nicht ganz an das Gehirn hinan. Die Seitenorgane liegen über den Seitenstämmen, der Mund befindet sich unmittelbar hinter den Seitenorganen.

42. *Micrura purpurea.* (Dalyell) J. Müller.

Syn. Micrura purpurea J. Müller.
Micrura purpurea Mc. Intosh.
Cerebratulus purpureus Hubrecht.

Grundfarbe oben und unten Vandykbraun. Nur der vorderste Kopfabschnitt ist rein weiß gefärbt und mit einer gelben Querbinde geziert.

Der Kopf ist nicht abgesetzt, er ist nach vorne zugeschärft und abgerundet. Der Körper ist wie der von M. tristis geformt und wird selten länger als 10 cm, die Breite beträgt 2 mm.

Fundort vor allem Benta Palumma; dort recht häufig. Die nordische M. purpurea, welche mit einem helleren Braun gefärbt ist, wird viel länger als die des Mittelmeers. Cf. Mc. Intosh, Monograph. Pl. 7 Fig. 3.

Die Kopfspalten schneiden fast bis zum Gehirn ein. Sie erstrecken sich bis zu den Seitenorganen nach hinten. Die Seitenorgane liegen über den Seitenstämmen. Der Mund liegt weiter von den Seitenorganen nach hinten entfernt.

43. *Micrura aurantiaca.* (Grube) Mc. Intosh.

Syn. Meckelia aurantiaca Grube.
Micrura aurantiaca Mac Intosh.
Cerebratulus aurantiacus Hubrecht.

Farbe des Rückens glänzend mennigroth, des Bauches weiß oder hellrosa; nur das Schwanzende besitzt auch unten die mennigrothe Färbung. Auch die Kopfspitze ist weiß. Auf diesem reinweißen Untergrunde hebt sich ein großer herzförmiger rother Fleck ab.

Varietäten: Die Größe und Farbe des Kopfflecks wechselt, bei manchen Thieren ist er sehr klein und lebhaft violett. Vom Scoglio Vervece stammt eine Varietät mit vandykbrauner Färbung des Rückens und des Kopfflecks. Der Bauch ist bis zum äußersten Schwanzende schneeweiß.

Der Kopf ist zugeschärft, nicht zugespitzt! breit und nicht nach hinten abgesetzt. Der Bauch ist platt, der Rücken gewölbt. Länge 3—4—6 cm, Breite 1½—2 mm. Größere Exemplare sind selten.

Das Thier rollt sich nie spiralig auf und verknäuelt sich auch nicht, wenn es gereizt wird, sondern contrahiert sich wie eine Schnecke.

Fundorte: Benta Palumma 60 m. Corallineen bewohnend. I. dei Galli, Sc. Vervece. Häufig.

Die Kopfspalten reichen fast bis an das Gehirn hinan, die Seitenorgane liegen über den Seitenstämmen, der Mund befindet sich dicht hinter den Seitenorganen.

44. *Micrura fasciolata.* Ehrenberg.

Syn. Cerebratulus fasciolatus Hubrecht.

Der Rücken ist dunkelgrün gefärbt, der Bauch weiß. Auch die Kopfspitze ist weiß. Die grüne Grundfarbe des Rückens ist durch eine Anzahl weißer Querbinden (12, indes auch weniger oder mehr) unterbrochen, welche in ziemlich regelmäßigen Intervallen auf einander folgen. Auch die rothe von Mc. Intosh abgebildete Form ist dem Neapler Golf eigenthümlich und wohl mit Carinella Banyulensis zu verwechseln. Wenige Augen sind in der weißen Kopfspitze jederseits zu constatieren. Der Kopf ist nicht abgesetzt. Er ist abgerundet. Der Körper ist rundlich und ziemlich starr. Länge 12—20 mm, Breite 1 mm.

Fundort: Benta Palumma, Posilipo, Sc. Vervece. Häufig.

Die Kopfspalten reichen nicht an das Gehirn hinan. Die

Seitenstämme biegen sich unter den Seitenorganen seitwärts um. Der Mund liegt unmittelbar hinter den Seitenorganen.

45. *Micrura candida*. Bürger.

Synon. Nemertes lactea Grube.
Cerebratulus lacteus Hubrecht.

Darf nicht mit Lineus lacteus Montagu (cf. Mc. Intosh Monograph. Pl. V, 3) verwechselt werden, wozu schon leicht die gleiche Speciesbezeichnung verleitet, die ich darum in die von mir gewählte umzuändern vorschlage.

Micrura candida wird höchstens 8 cm lang und 1—1½ mm breit. Der Körper verjüngt sich allmählig nach hinten und endet mit einem haarförmigen Appendix. Der Kopf ist nicht abgesetzt, spatelförmig, abgekantet.

Die Farbe ist gleichartig milchweiß mit einem leichten gelblichen Anflug. Es giebt indes Varietäten, deren Körper mit Ausnahme der weißen Kopfspitze gleichmäßig lebhaft rosa gefärbt erscheint. Höchst charakteristisch für diese Art sind die massenhaften Hautdrüsen, welche den Körper völlig undurchsichtig machen. Dieselben führen stets ein geformtes sehr feinkörniges Sekret, das in langen Strahlen ausgeworfen wird, wenn die Thiere z. B. auf einen Objectträger kriechen. Die Drüsenzellen sind auch im Appendix zahlreich vorhanden.

In der Kopfspitze beobachtete ich gelegentlich jederseits drei dunkle halbmondförmige Flecke.

Bei Micrura candida ist die Kopfspitze ganz erfüllt von Kopfdrüsenzellen. Auch die Cutis ist auffallend reich an Drüsenzellen. Die Kopfspalten müßten fast um ⅓ tiefer sein, sollten sie bis zum Gehirn einschneiden. Sie treten nicht über die Seitenorgane nach hinten hinaus. Die Seitenorgane liegen über den Seitenstämmen. Die Mundöffnung befindet sich unmittelbar hinter den Seitenorganen.

Fundort: Benta Palumma, Sc. Vervece, Capri. Häufig.

XI. Genus. Cerebratulus. Renier.

Zu dieser Gattung gehören relativ breite, kräftige Formen, welche sich wohl spiralig aufrollen aber nicht zu Klumpen aufknäueln können, und sich nur mäßig zusammenzuziehen vermögen. Indes sind sie vorzügliche Schwimmer; mit aalartigen, schlängelnden Bewegungen durchmessen sie das Wasser. Der Querschnitt des Körpers ist länglich elliptisch, die Seitenränder treten auffallend als Längsschwülste hervor. Der Kopf ist lanzettlich zugeschärft

und zugespitzt. Sie besitzen sämmtlich ein Schwänzchen. Sie leben meist in geringer Tiefe am Ufer im Schlamm.

46. *Cerebratulus ferrugineus.* nov. sp.

Erinnert der Körperform nach an Valencinia. Der Körper ist rundlich, 8 cm lang, 2 mm breit, vorne und hinten abgestumpft, und überall ziemlich gleichmäßig dick. Der Kopf ist nicht abgesetzt. Die innere Organisation ist die eines Cerebratulus.

Fundort: Rizomi di Posidonia; Posilipo. Es wurde nur ein Exemplar gedredgt.

Die Seitenränder treten als Längswülste hervor. Das vordere Körperende ist farblos weiß; das Weiß geht nach hinten allmählig in einen grauröthlichen Farbenton über.

47. *Cerebratulus notabilis.* nov. sp.

Ist schlank, bandförmig, der Kopf ist nicht abgesetzt; das vordere Ende allmählig verjüngt, schließlich abgerundet. Länge 20 cm, Breite 5—6 mm. Das einzige mir vorliegende Exemplar zeigt am hinteren, dünneren rundlichen Körperabschnitt zwei Reihen kleiner weißer Punkte: die Genitalporen. Farbe: Der Rücken ist in der vorderen Körperregion chokoladebraun, der Bauch orange. Das hintere Körperende ist gleichartig braungelb gefärbt.

Fundort: Rizomi di Posidonia, Posilipo.

Die Kopfspalten schneiden nicht bis zum Gehirn ein und reichen nicht bis zu den Seitenorganen nach hinten. Die Seitenorgane liegen fast in ihrer ganzen Länge über den Seitenstämmen. Die Mundöffnung befindet sich dicht hinter den Seitenorganen. Der Darm besitzt eine tiefe mediane ventrale Längsrinne, die fast bis auf die Ringmuskulatur hinabreicht.

48. *Cerebratulus roseus* (*delle Chiaje*). Hubrecht.
Syn. Polia rosea delle Chiaje.

Farbe: Vorderes Körperende fleischroth, hinteres gelb-rosa. Das Gehirn schimmert roth durch die Haut. Der Kopf ist abgesetzt und zugespitzt. Dieser Cerebratulus ist schlank, relativ dünn. Seine Länge beträgt 50 cm, die Breite 5—6 mm. Auffallend ist der ungemein lange Appendix; er mißt 2 cm.

Die Kopfspalten müßten um $^1/_8$ tiefer sein, sollten sie an das Gehirn hinanreichen. Außerdem sind sie kurz, sie gehen nicht über das Gehirn nach hinten hinaus, die Seitenorgane verknüpft mit ihnen ein langer Canal. Die Seitenorgane liegen in ihrer ganzen Länge nur über den Seitenstämmen. Die Mundöffnung befindet sich unter den Seitenorganen.

49. *Cerebratulus marginatus.* Renier.

Bauch und Rücken sind gleichartig grau, braun oder dunkel graugrün gefärbt. Die Seitenränder sind stets farblos, auch die Kopfspalten erscheinen weiß gesäumt. Ein hinterstes 3—4 cm langes Ende setzt sich in der Regel scharf gegen den übrigen Körper ab, da es fast farblos ist. Der Körper erreicht bei einer Länge von 30—40 cm eine Breite von 12—14 mm. Doch wechseln die Dimensionen dieser Thiere sehr. Es wurden gelegentlich bedeutend größere Exemplare angetroffen. Der Kopf ist lanzettlich geformt und gegen den Rumpf nicht abgesetzt. Der Körper ist platt, sein Querschnitt besitzt eine elliptische Form.

Die Kopfspalten sind tief, sie reichen fast bis an das Gehirn hinan. Die Seitenorgane liegen über den in die Seitenstämme sich verlängernden ventralen Ganglien. Der Mund liegt unmittelbar hinter den Seitenorganen.

C. m. ist eine der gemeinsten Nemertinen des Golfs von Neapel, sie bewohnt in geringen Meerestiefen den Schlamm.

50. *Cerebratulus pantherinus.* Hubrecht.

Unterscheidet sich von Cerebratulus marginatus durch die Färbung des Kopfendes. Dasselbe ist nicht gleichmäßig graugrün gefärbt, sondern mit verschiedenfarbigen Sprenkeln gefleckt. Es erscheint daher scheckig von schmutzig grünen, bräunlichen, gelblichen und weißen Flecken. Die Tiegerung zeichnet etwa ein 6—7 cm langes vorderes Körperende aus. Die Exemplare von C. pantherinus pflegten dicker zu sein als die von C. marginatus. Im Gegensatz zu Joubin bin ich überzeugt, daß C. pantherinus eine besondere Art, nicht eine Varietät von C. marginatus vorstellt, ich habe C. pantherinus sehr häufig beobachtet und bei den Thieren, welche die Tiegerung aufwiesen, auch im Bau des Gehirnes Abweichungen von dem für C. marginatus typischen Gehirn feststellen dürfen.

C. pantherinus lebt mit C. marginatus vergesellschaftet, und wurde nicht selten mit diesem zusammen gefischt.

51. *Cerebratulus liguricus.* (Blanchard) Hubrecht.
Syn. Nemertes ligurica Blanchard.

Wird mit C. pantherinus verwechselt werden können, da auch für C. liguricus die Tiegerung des vorderen Körperabschnittes charakteristisch ist. Indes ist die Grundfarbe bei C. liguricus rostbraun. Die Seitenränder sind durch hellere ockergelbe Farbenstreifen hervorgehoben und auch die vorderste Spitze des Kopfes

ist gelbgefärbt. Die Seitenspalten leuchten bluthroth. Das gelbe vordere Kopfschild ist hinten durch einen braunen Querstrich eingefaßt. Nun folgt eine gelbe und grüne Punktelung des Kopfabschnittes; dieselbe reicht etwa 3—4 cm nach hinten. Die Grundfarbe kann auch einen grauen und graubraunen Ton aufweisen. Ein hinteres etwa 2 cm langes Körperende ist durch seine besondere, grünliche Färbung abgesetzt. Vor allem charakteristisch ist dieser Art die schlanke Gestalt, der lange sehr schlanke allmählich zugespitzte Kopfabschnitt. Die Breite beträgt bei einer Länge von 30 cm nur 6—7 mm.

Es sind äußerst lebhafte Thiere.

C. liguricus lebt mit C. marginatus zusammen und findet sich nicht selten.

52. *Cerebratulus hepaticus.* Hubrecht.

Farbe dunkelbraun. Rücken und Bauch sind gleichartig gefärbt. Die Seitenränder treten nicht scharf hervor, da sie grau gefärbt, nur wenig heller gegen die Grundfarbe sich absetzen. Bei manchen Exemplaren findet man in der vorderen Körperregion zerstreut hellere Flecken.

Characteristisch ist der scharf abgesetzte lanzettliche, zugespitzte, 10—12 mm lange Kopf.

Die Kopfspalten dringen bis an das Gehirn. Die Seitenorgane liegen mit ihrem vorderen Abschnitt über, mit ihrem hinteren neben den Seitenstämmen. Unmittelbar hinter den Seitenorganen befindet sich die Mundöffnung.

53. *Cerebratulus urticans.* (J. Müller) Hubrecht.
Cnidon urticans J. Müller.

Sieht C. hepaticus sehr ähnlich. Rücken und Bauch sind gleichmäßig braun gefärbt, etwa rehfarben. Der vordere Körperabschnitt erscheint dunkler als der hintere und sein Farbenton zeigt einen bläulichen Hauch. An der Kopfspitze ansetzend, zieht sich auf dem Kopfe nach hinten ein kurzer dunkler, nur etwa 3—4 mm langer Strich.

Der Kopf ist abgesetzt, lanzettlich zugespitzt.

Bei einer Länge von 25 cm erreicht das Thier eine Breite von 14 mm. Der vordere Körperabschnitt ist äußerst schlank und verjüngt sich stark. In der Gestalt erinnert C. urticans an C. liguricus.

Die Kopfspalten sind sehr tief, erreichen das Gehirn und erstrecken sich über die Seitenorgane nach hinten hinaus bis zum

Munde. Die Lage der Seitenorgane zu den Seitenstämmen ist die nämliche wie bei C. hepaticus.

54. *Cerebratulus ventrosulcatus.* nov. sp.

Ist vor allem gekennzeichnet durch eine weißgelbe mediane schmale Bauchlinie, welche in der hinteren Körperregion violett gefärbt ist. Bis zur Mitte ist dieser Cerebratulus grau gefärbt, der Bauch heller als der Rücken. Die hintere Hälfte setzt sich scharf gegen die vordere durch eine Bronzefärbung, welche nach hinten an Intensität zunimmt, ab. Der Körper ist schlank, das vordere Ende ist breit und platt gedrückt, das hintere cylindrisch. Ein Kopf ist nicht abgesetzt, das Kopfende verjüngt sich stark, endet aber schließlich stumpf. Das hintere Ende ist spitz.

Das einzige mit Cerebratulus marginatus vergesellschaftete Exemplar maß annähernd 20 cm : 9 mm.

Die Seitenspalten reichen fast unmittelbar an das Gehirn hinan und erstrecken sich bis zum Munde nach hinten, die Seitenstämme liegen unter dem Gehirn, die Mundöffnung befindet sich unmittelbar hinter den Seitenorganen (beziehungsweise sie beginnt in der hinteren Region derselben). (cf. Cerebratulus anguillula.)

55. *Cerebratulus aureolus.* nov. sp.

Erinnert durch die weiche Körperform und besonders den dreieckigen abgesetzten Kopf an C. lividus. Die Farbe ist oben und unten gleichmäßig intensiv gelbroth-granatroth. Der Kopf ist gelblich. Wie bei C. marginatus ist ein hinteres hier 2 cm langes heller gefärbtes Ende markiert.

Länge des einzig gefangenen Exemplares 24 cm, Breite 13 mm.

In Gemeinschaft mit C. marginatus lebend.

56. *Cerebratulus lividus.* nov. sp.

Bauch und Rücken erscheinen gleichmäßig braun gefärbt mit violettem Anflug. Die Farbe wechselt mit der Contraction des Thieres: je mehr dasselbe sich ausstreckt, je mehr geht der tief dunkelbraun-violette Ton in einen grünlich-braunen über. Die Kopfspalten sind weiß gesäumt. Der Körper ist weicher als z. B. der von C. marginatus, seine Form ist weniger scharf an den Seitenrändern begrenzt, dieselben kräuseln sich beim Kriechen wie die Ränder eines Turbellars. Die Länge des einzigen mir zugekommenen Exemplares betrug 24 cm, die Breite 8—9 mm. Der Kopf ist ein wenig gegen den Rumpf abgesetzt, er ist vorn zugeschärft, dreieckig.

Die Kopfspalten sind zwar tief, sie reichen fast bis an das Gehirn hinan, aber sie erstrecken sich nicht so weit nach hinten als es die Norm ist, sie überragen nämlich das Gehirn nicht nur nicht, sondern endigen schon ein wenig hinter den Gehirn-Commissuren, jederseits sich nunmehr in einen Canal ausziehend, der am Gehirn seitlich entlang nach hinten läuft, um mit dem Canal der Seitenorgane sich zu verbinden. Die Seitenstämme biegen gerade unter den Seitenorganen in die Seitenlage ein und liegen so vorne unter, hinten neben ihnen.

Fundort: Rizomi di Posidonia. 5 m. Posilipo.

57. *Cerebratulus anguillula.* nov. sp.

Der Bauch ist hell rehbraun gefärbt, der Rücken dunkelbraun bis schwarzbraun mit violettem Anflug. Eine Zeichnung fehlt. Das einzige von mir beobachtete Exemplar maß 16 cm : 10 mm. Die Seitenränder waren besonders in der hinteren Körperregion ventralwärts umgebogen, die Bauchfläche erscheint daher im Querschnitt concav, der Rücken convex, er ist gewölbt. Der Kopf ist nicht abgesetzt, am Ende abgerundet.

Die Kopfspalten schneiden bis zum Gehirn ein. Sie reichen über die Seitenorgane hinaus bis zur Mundöffnung nach hinten. Die Seitenstämme liegen unter den Seitenorganen. Die Mundöffnung befindet sich unmittelbar hinter den Seitenorganen (beziehungsweise sie beginnt noch in ihrer hinteren Region). (cf. Cerebratulus ventrosulcatus.)

58. *Cerebratulus fuscus.* (Mc. Intosh) Hubrecht.
Syn. Micrura fusca Mc. Intosh.

Grundfarbe hell graubraun, gelb mit röthlichem Hauch. Der Körper, besonders der Rücken ist von vorne bis hinten mit dunkleren länglichen grün-grauen oder bräunlichen Flecken gesprenkelt, welche indes in der vorderen Körperregion schärfer hervortreten, in der hinteren sich verwischen. Auffallend ist ein intensiv rother Kopf-Fleck, hier schimmert das Gehirn durch. Auch die Kopfspalten leuchten roth. Sehr charakteristisch ist die Körperform. Der Körper, welcher selten länger als 5—6 cm wird, ist nach hinten zu stark, etwa um das Dreifache im Vergleich zur Kopfregion verbreitert. Er ist aber äußerst dünn. Die farblosen Seitenränder erscheinen deshalb opak. Das hintere Ende verjüngt sich nicht, sondern der Körper endet wie mit der Scheere abgeschnitten. Der Appendix erscheint darum sehr unvermittelt angesetzt. Das vordere Ende ist schlank, der Kopf ist nicht abgesetzt, er verjüngt

jüngt sich allmählich, sein vorderes Ende ist stumpf. Zahlreiche Variationen werden erzeugt, indem die Flecke bald lebhaft, bald minder lebhaft hervortreten, und oft nur in der Kopfregion zu sehen sind.

Fundort: Rizomi di Posidonia Caulinii; Posilipo. Mit Valencinia longirostris, Carinella rubicunda, und albida vergesellschaftet. Häufig.

Die Kopfspalten schneiden so tief ein, daß sie fast bis an das Gehirn hinanreichen. Sie setzen sich noch über die Seitenorgane hinaus nach hinten fort. Die Seitenorgane liegen in ihrer ganzen Länge nur über den Seitenstämmen. Der Mund liegt unmittelbar hinter den Seitenorganen.

59. *Cerebratulus fuscoïdes.* nov. sp.

Erinnert seiner Körperform nach an Cerebratulus fuscus. Das hintere Ende erscheint wie abgeschnitten, der Körper ist nach hinten sehr verbreitert, der Kopf ist nicht abgesetzt, aber zugeschärft und schließlich abgekantet. Das vordere Körperende ist hellgelb gefärbt, dieser Ton geht nach hinten allmählich in einen grau-gelben und schließlich in einen grauen über. Die Seitenränder treten hellgrau bis fast weiß gefärbt scharf hervor. Das Gehirn leuchtet viel intensiver als bei irgend einem C. fuscus, die Kopfnerven selbst sind noch als dunkelrothe Stämme mit unbewaffnetem Auge zu erkennen. Auch die Seitenstämme fallen bis zur Körpermitte, wo sie die mehr graue Färbung verdeckt, als lebhaft roth gefärbte Längsbänder ins Auge. Auch die Kopfspalten leuchten intensiv roth.

Fundort: Rizomi di Posidonia. Posilipo. Vergesellschaftet mit C. fuscus.

60. *Cerebratulus acutus.* nov. sp.

Steht Cerebratulus fuscus nahe. Indes ist der relativ kleine Kopf durch eine Einschnürung des Körpers scharf abgesetzt. Er ist breiter als das vordere Rumpfstück, zugespitzt, lanzettlich. Der Körper zeigt einen elliptischen Querschnitt. Er ist entfernt nicht derart stark abgeplattet wie der Körper von C. fuscus. Die Seitenränder sind nicht zugeschärft. Das hintere Ende verjüngt sich plötzlich. Die Kopfspitze ist lebhaft gelb gefärbt, die seitlichen Ränder des Kopfes sind weiß gesäumt. Der Rumpf ist in der vorderen und mittleren Region gelb und braun marmoriert, im hinteren Körperabschnitt mehr grau und grün. Die Länge beträgt etwa 10 cm, die Breite 5 mm.

Fundort: Posilipo; Rizomi di Posidonia.

Die Kopfspalten schneiden bis auf das Gehirn ein und erstrecken sich über die Seitenorgane hinaus nach hinten. Die Seitenorgane liegen über den Seitenstämmen. Der Mund befindet sich dicht hinter den Seitenorganen.

61. *Cerebratulus simulans.* nov. sp.

Grundfarbe ist braunroth, nach dem Kopfe zu wird die Färbung dunkler und leuchtender. Die Oberfläche des Kopfes erscheint zinnoberfarbig. An der Kopfspitze sind hellere Flecke so angeordnet, daß ein Effect wie ihn die Kopffurchen bei Amphiporus marmoratus hervorbringen, erzielt wird. Die Täuschung ist so stark, daß ich diesen Cerebratulus zuerst für den genannten A. in Anspruch nahm und erst sein Genus, nachdem ich das Schwänzchen bemerkt hatte, erkannte, denn die Amphiporus marmoratus für gewöhnlich kennzeichnende Tiegerung mit dunkelbraunen Flecken auf hellbraunem Grunde ist öfters nicht mehr vorhanden, indem die Grundfarbe sich in eine dunkelbraune oder rothbraune umgewandelt hat.

Der Körper verjüngt sich allmählig nach vorne. Der Kopf ist nicht abgesetzt, zugespitzt und schließlich wieder abgestumpft. Das hintere Ende ist abgerundet. Die Länge des einzigen mir zugekommenen Exemplares betrug $8^1/_2$ cm, die Breite in der Mitte 7—8 mm. Kopfspalten waren zu constatieren.

Fundort. Detritus, vergesellschaftet mit A. marmoratus, der in diesem zahlreich lebt. Die Kopfspalten schneiden fast bis zum Gehirn ein. Sie ragen über die Seitenorgane hinaus bis zum Munde nach hinten. Die Seitenstämme biegen unter dem hinteren Abschnitt der Seitenorgane in die Seitenlage ein.

Die Kopfspalten sind in ihrem hinteren Abschnitt dreitheilig, d. h. das obere und untere Grenzepithel der Kopfspalte ist eingestülpt, je eine flache Längsfurche erzeugend, um welche massenhaft Kerne (Kerne von Zellen nervöser Natur) gelagert sind. Die Furchen einander vis à vis verlaufen etwa in der halben Tiefe der Spalten.

62. *Cerebratulus Eisigii.* Hubrecht.

Ist gleichmäßig schwarzgrün, nach hinten zu röthlich gefärbt. Die innere Fläche der $4^1/_2$ mm langen Kopfspalten ist weiß. Die Breite des Körpers beträgt 4 mm. Die Länge konnte nicht festgestellt werden. Charakteristisch ist der eigenthümlich gefärbte Rüssel. Derselbe zeigt nämlich eine grüne Grundfärbung und dunkelbraune Längsstreifen. An einem in Canadabalsam einge-

schlossenen Rüssel dieser Art, welcher mir vorliegt, constatiere ich mit unbewaffnetem Auge drei parallele dunkle Längslinien, welche neben einander an einer Seite entlang laufen.

Die Kopfspalten schneiden bis auf das Gehirn ein; sie erstrecken sich nicht bis zu den Seitenorganen nach hinten. Die Seitenstämme biegen unter den Seitenorganen seitlich um.

63. *Cerebratulus aerugatus.* nov. sp.

Farbe lebhaft gelbroth, die Kopfspitze ist weiß, ähnlich wie bei Micrura aurantiaca, aber es fehlt bei C. aerugatus der herzförmige Fleck.

Varietäten: Die Grundfärbung wechselt von orangeroth bis zum intensiven zinnoberroth. In größeren Tiefen bei Capri wurden röthliche oder rostfarbene Exemplare gedredgt, bei denen die Kopfspitze nicht weiß, sondern wie der Körper gefärbt war und die, weil sehr transparent, lebhaft an Eupolia pellucida erinnerten.

Cerebratulus aerugatus besitzt eine schlanke Körperform, welche sich allmählig nach hinten bis zum Appendix verjüngt. Der spatelförmige, zugeschärfte, nicht zugespitzte, sondern mit breiter Kante endigende Kopf ist gegen den Rumpf nicht abgesetzt. Länge 3—4 cm, Breite $1^1/_2$—2 mm.

Fundort: Benta Palumma, Capri. Häufig.

Die Kopfspalten schneiden nicht bis zum Gehirn ein (—$^1/_3$). Sie reichen genau bis zu den Seitenorganen rückwärts. Die Seitenstämme biegen unter den Seitenorganen in die Seitenlage ein. Der Mund befindet sich unter den Seitenorganen. Besonders über dem Rhyochocoelom lagernd, sind in der Kopfspitze vor dem Gehirn größere Massen von Kopfdrüsenzellen eingeschlossen.

XII. Genus. **Langia.** Hubrecht.

Die Seitenränder sind zum Rücken hinauf gekrümmt, so daß der Wurmkörper eine tiefe dorsale Längsrinne zeigt. Die Seitenränder sind zugeschärft und sehr dünn, sie kräuseln sich und sind vielfach gelappt. Indem die Seitenränder aufgeklappt sind, münden nunmehr die Pori des Excretionsgefäßes nicht lateral, sondern am Rücken nach außen.

64. *Langia formosa.* Hubrecht.

Der Kopf ist nicht deutlich gegen den Rumpf abgesetzt. Das hintere Ende ist abgekantet und nicht spitz. Ein Appendix ist vorhanden. L. formosa wird 10—20 cm lang, 4—6 mm breit. Der

Körper ist öfters blaßgelb, öfters rothgelb bis orange gefärbt. Der Kopf ist farblos. Das Gehirn schimmert roth durch. Auch die dünnen Seitenränder sind farblos und opak. Vor allem in der vorderen Körperregion erscheint der Rücken tief ausgehöhlt.

L. formosa schließt sich der Körperorganisation nach unter den Lineiden am vollständigsten Cerebratulus an.

Die Kopfspalten schneiden nicht bis zum Gehirn ein. Sie hören vor den Seitenorganen auf. Die Seitenorgane liegen vorne über, hinten neben den Seitenstämmen. Der Mund liegt etwas hinter den Seitenorganen.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse gleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

August, September, Oktober 1891.

(Fortsetzung.)

K. K. Sternwarte zu Prag: Magnetische u. Meteorologische Beobachtungen im Jahre 1890. 51. Jahrg. Prag 1891.
Akademie der Wissensch. in Krakau: Anzeiger 1891. April. Krakau 1891.
Akademische Lesehalle an der k. k. Franz-Josefs-Universität in Czernowitz. XXXI. u. XXXII. Semester. Czernowitz 1891.
Ungarische Revue 1891. VI.—IX. Heft, Juni—Nov. 11. Jahrg. Budapest 1891.
Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg: Kudatku Bilik Facsimile der Uigarischen Handschrift der k. k. Hofbibliothek in Wien, herausgegeben v. Dr. W. Radloff. St. Petersburg 1890.
Physikalisches Central-Observatorium: Annalen. Jahrg. 1890. Theil I. St. Petersburg 1891.
Société Imperiale des Naturalistes de Moscou. Bulletin. Année 1891. N. 1. Moscou 1891.
МАТЕМАТИЧЕСКІЙ СБОРНИКЪ. XV 4. Москва 1891.
Societatis Scientiarum Fennicae:
a. Acta. Tomus XVII.
b. Bidrag till Kännedom af Finlands Natur och Folk. H. 49. 50.
c. Ofversigt af Förhandlingar. XXXII. 1889—90. Helsingfors 1890—1891.
Kongl. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademien in Stockholm. Antiquarisk Tidskrift for Sverige. 10: 5, 11: 1 2 3, 12: 1 2 3 4. Stockholm 1889—1891.
Regiae Societatis Scientiarum Upsalensis. Nova Acta. Seriei tertiae. Vol. XIV. Fasc. II. 1891. Upsalae 1891.
Christiania Videnskabs-selskabst:
a. Forhandlingar 1890. N. 1—8.
b. Oversigt over Vidensk. Selsk. Mødes i 1890. Christiania 1891.
Magnetische Beobachtungen und stündliche Temperaturbeobachtungen im Aug. 1882—Aug. 1883 angestellt auf der Universitätssternwarte in Christiania nach dem Tode von Prof. Fearnley von H. Geelmuiden.
Supplement zu den Zonenbeobachtungen in Christiania von H. Geelmuiden. Christiania 1891.
Arshives du Musée Teyler. Série II. Vol. III. Sixième Partie. Haarlem 1891.

L'École Politechnique de Delft. Annales. Tome VI. 1891. 3me et 4me livr. Tome VII. 1891. 1re livr. Leide 1891.
La Société Hollandaisedes sciences a Haarlem Archives Neerlandaises des sciences Exactes et Naturelles. Tome XXV. 2me Livr. Haarlem 1891.
Koninklijke Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië:
Natuurkundig Tijdschrift. Deel L. Achtste Serie. Deel XI. Batavia, s'Gravenhage 1891.
Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden. Tijdschrift voor Nederlandsche Taal- en Letterkunde. 10. Deel. Nieuwe Reeks, 2. Deel. 2. Aflever. Leiden 1891.
Koninklijk Institut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië. Bijdragen. 1891. 5e Volgr. VI 4. s' Gravenhage 1891.
Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen:
a. Notulen van de Allgemeene en Bestuurs-Vergaderingen. Deel XXVIII. 1890. Aflever IV. Deel XXIX 1891. Aflever I. (Titel zu Deel XXVIII. 1890.)
b. Tijdschrift voor Indische Taal-, Land- en Volkenkunde. Deel XXXIV. Aflever 3en 4. 5.
c. Plakaatboek 1602—1811. 8 Deel 1765—1775. Batavia, s' Hage 1891.
Flora Batava. 293, 294e Aflever. Leiden.
Annales du Musée Guimet. Revue de l'histoire des Religions. Onzième année. Tome XXII N. 3 Nov. Dec. Douzième année. Tome XXIII N. 1 Jan. Febr. Paris 1890—91.
Société des Antiquaires de Picardie. Bulletin Année 1890. N. 3, 4.
l'École Polytechnique. Journal. 60me cahier. Paris 1890.
Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux: Mémoires. 3e Série. Tome 5. 2e Cahier. Paris, Bordeaux 1890.
Commission Météorologique de la Gironde: Observations Pluviométriques et Thermomotriques de Juin 1889 à Mai 1890. Bordeaux 1890.
Ville de Paris. Annuaire de l'Observatoire Municipal de Montsouris pour l'an 1891. Paris.
Academie Royale de Belgique:
a. Mémoires couronnées et autres mém., en 4°. Tome L 1890. Tome LI 1889.
b. Mémoires couronnées et autres mém., en 8°. Tome XLIII 1889. Tome XLIV. 1891. Tome XLV. 1891.
c. Commission Royale d'histoire Chroniques. Vol. III. 1891. Histoire des troubles des Pays-Bas. 1891. Vol. VII. Prem. Partie Correspondence du Cardinal de Granvelle. Vol. VIII. Seconde Partie. — Table chronologique des Chartes et Diplômes inprimés 1889. Tome VIII. — Relations politiques des Pays-Bas et l'Angleterre sous Philippe II. 1889—1891. Corresp. du Cardinal de Granvelle. 1890. Tome VIII—X.
d. Catalogue des livres de la Bibliothèque. Seconde Partie. Ouvrages non périodiques. 3e fasc. Nos. 10908—15545.
e. Notices biographiques et bibliographiques 1874.
f. Obituarium Sancti Johannis. Nécrologe de l'Eglise St.-Jean (St. Bavon). A. Gand par Nap. de Pand.
g. Bulletin, 61e année. 3e série, tome 22. N. 7, 8. Bruxelles.

Charles Horion:
a. Tumeurs du Genou.
b. Rétrégissements Uréthraux.
c. Uréthromie Interne.
d. Défense de mès Uréthromés.
e. Opération de Hernie Crurale Etranglée.
f. Notice de M. Horion (Extrait du Bulletin de la Société Géologique de France. a) 2e série t. XVI p. 635. b) 2e série t. XX p. 766.
g. Observations au sujet des travaux Géologiques de M. M. Cornet et Briart sur la meule de Bracquegnies.
h. Miscelles (Extrait du Bulletin de l'Académie Royale de Médecine. Tome XIV, 3e série. N. 5.
i. André Dumont et la philosophie de la Nature. Seconde Édition.
k. Lettre ouverte a M. Légius.
l. La question sociale etc. Bruxelles et Liège.

Société Géologique de Belgique: Annales. Tome XVIII, 1re Livr. Liège 1891.
The Royal Society of London:
a. Philosophical Transactions A) for the year 1890. Vol. 181. B) for the year 1890. Vol. 181. (2 Exempl. v. A u. B.)
b. Proceedings. Vol. XLIX. N. 301. Vol. L. N. 302.
c. Mitgliederverzeichniß: The Royal Society 1. Dec. 1890. (2 Expl.)
Nature. Vol. 44. N. 1135—1148.
The Linnean Society:
a. Transactions. a) Botany. 2nd Serie. Vol. III. Part 2, 3. b) Zoology. 2nd Serie. Vol. V. Part 5—7.
b. Journal. a) Zoology. Vol. XX. N. 124—125. Vol. XXIII. N. 145—147. b) Botany. Vol. XXVI. N. 175. Vol. XXVII. Nos. 183—188. Vol. XXVIII. Nos. 189—193.
c. List 1890—91. London 1890—91.
Publications of West Hendon House Observatory, Sunderl. The structure of the Sidereal Universe. N. 1. Sunderland 1891.
London Mathematical Society. Proceedings. N. 414—420.
Royal Astronomical Society. Monthley notices. Vol. LI. N. 9.
The Zoological Society of London. Proceedings 1891. Part II. March and April. London 1891.
The Royal Microscopical Society 1891. Journal 1891. Part 4, 5, Aug. Oct.
Liverpool Biological Society. Transactions. Vol. V. Session 1890—91. Liverpool 1891.
The Royal Society of Edinburgh:
a. Transactions. Vol. XXXIV. 1890. Vol. XXXVI. Part I. Nos. 1—8 for the Session 1889—90.
b. Proceedings. Vol. XVII. Session 1889—90. Edinburgh 1891.
Royal Irish Academy. Proceedings 1891. Third Series. Vol. II. N. 1.
The Royal Dublin Society:
a. Transactions. Vol. IV. Series II. VI, VII, VIII.
b. Proceedings. Vol. VI (N. S.). Part 10 1890. Dublin 1891. Vol. VII (N. S.). Part 1, 2. 1891. Dublin 1890—91.
Department of Mines. Sidney. Geological Survey of New South Wales:
a. Memoires. Palaeontology N. 5. A Monograph etc. Part 1. Coelenterata.
b. Records. 1890. Vol. II. Part 1. 2. 1891. Vol. II. Part III. Sidney.
Geological Survey of India. Records. Vol. XXIV. Part III. 1891.
La Reale Accademia Dei Lincei Atti.
a. Rendiconti 1891. Serie Quarta. Vol. VII. Fasc. 11 u. 12. 1. Semestre. Fasc. 1—7. 2. Semestre.
b. 1890. Serie Quarta. Vol. VIII. Parte 2a. Classe di Scienze morali, storiche e filologiche. Gennaio al Dicembre. 1891. Gennaio al Marzo. Indice per 1890.
La Reale Accademia delle Science di Torino. Atti. Vol. XXVI. Disp. 12a, 13a, 1890—91. Torino.
Il Reale istituto Lombardo di Scienze e Lettere:
a. Rendiconti. Serie II. Vol. XXIII.
b. Memorie. Classe di lettere e scienze storiche e morali. Vol. XVIII, IX della Serie III, fasc. III—V. Milano 1891.
Fondazione Scientifica Cagnola. Atti. Vol. X, l'anno 1890. Milano 1891.
Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze. Bollettino delle Pubblicazioni Italiane. Indice alfabetico 1889, p. 113—28. 1890. N. 117. 1891. N. 134—140. Firenze.
Biblioteca Nazionale Centrale Vittorio Emanuele di Roma. Bollettino. Vol. IV 1889. Indice Alfabetico. Vol. VI, N. 7, 8, 9, 1891. Roma 1891.

(Fortsetzung folgt.)

Inhalt von No. 5.

Otto Bürger, zur Systematik der Nemertinenfauna des Golfs von Neapel. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Simroth*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

30. März. **№ 6.** 1892.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 6. Februar 1892.

Unser Platontext.

Von

Hermann Usener.

Zweiter Theil.

Wir haben freilich hören müssen, daß die Alexandrinischen Grammatiker die Sünder waren, welche die großen Prosaiker Athens *from a rhetorical stand-point* überarbeitet und den kräftigen Wein der Originale durch das Wasser ihrer Interpolationen verdünnt haben[1]). Männern wie Lobeck, Lehrs, Ritschl, welche den Weg zum Verständniß der alten Nationalgrammatiker bahnten,

1) Es freut mich ein entgegengesetztes Urtheil anführen zu können, das mir durch die Güte eines Freundes zukam, als die erste Hälfte dieses Aufsatzes schon in Druck gegeben war. Herr Dr. G. Wentzel schreibt in Bonghi's Zeitschrift „La Cultura“ 1892 N. 2 p. 28 „si riconosce chiaramente, che i filologi alessandrini, cui dobbiamo il nostro testo di Platone, hanno con critica acuta giudicato il materiale che avevano, e non lo hanno alterato o svisato, come si è creduto in causa di questo papiro: giacchè la lezione di questo non merita per nulla la preferenza sugli altri nostri manoscritti“.

würden jene Urtheile unverständlich sein. Sie lehrten uns die Wohlthat solcher Texte schätzen, welche die revidierende Thätigkeit antiker Philologen erfahren hatten. Heute würden sie sich freuen es erlebt zu haben, daß Aegyptische Gräber der Ptolemäerzeit sich aufthun um mit urkundlichem Beweis zu zeigen, in wie raschem Verlauf unter der Willkür von Lesern und Schreibern ein classischer Text verwildern konnte, und wie hoch das Verdienst derer steht, welchen wir unsere guten handschriftlichen Texte verdanken. Aber nicht durch empfindsame Betrachtung, sondern durch geschichtliche Erkenntniß kann die Klarheit verbreitet werden, welche einen Rückfall in Urtheile, wie wir sie hören mußten, ausschließt. Ich will, um über die Grundsätze und Hilfsmittel antiker Philologie jene Zweifel zu zerstreuen, von elementaren Bemerkungen ausgehn.

Der Begriff der Ueberlieferung ist den Alten so geläufig und wichtig gewesen wie uns. Einen bis aufs Wort, ja bis auf den Buchstaben getreuen und zuverlässigen Text mußte nicht nur der Erklärer sondern auch der grammatische Forscher verlangen. Dessen nächste und dringendste Aufgabe war, den Sprachgebrauch der Classiker zu ermitteln: denn dieser (*ἡ τῶν παλαιῶν χρῆσις*, wie Herodianos zu sagen pflegt) ist ihm nicht nur die Norm um die Abirrungen und Verderbnisse der lebendigen Sprache — *ἡ (νῦν* oder *κοινὴ) συνήθεια, ἡ ἀνὰ χεῖρα ὁμιλία*[2]) — zu berichtigen, sondern auch der Ausgangspunkt seiner genetischen Erklärung der Spracherscheinungen. Aber da die Alten nicht aus inschriftlichen Urkunden sondern aus den Denkmälern der Litteratur zu schöpfen pflegten, so ist die letzte Quelle des classischen Sprachgebrauchs die schriftliche Ueberlieferung, die *παράδοσις*. Es hat im Alterthum so wenig wie bei uns an schulmeisterlichen Seelen gefehlt, welche einem vermeintlichen Gesetz zu lieb sich nicht scheuten der Sprache, geschweige denn schriftlicher Ueberlieferung Gewalt anzuthun: Ptolemaios von Askalon ist ein bekanntes Beispiel, selbst Didymos war von Willkür nicht frei. Aber das sicherste Merkmal echten, gewissenhaften Wahrheitssinnes ist in grammatischen Dingen die Achtung vor der Ueberlieferung. Und die großen Grammatiker des griechischen Alterthums bewähren sich an diesem Maaßstabe, vor allem Aristarchos und am Ende der langen Reihe würdiger Nachfolger Herodianos. Es ist oft genug bemerkt wor-

2) So Herod. *π. μον. λέξ.* p. 25, 10. 29, 4 (Lentz II p. 931, 24. 935, 8) vgl. *ἡ ἀνὰ χεῖρα χρῆσις* bei Lentz II p. 173, 23.

den[3]), aber kann hier nicht nachdrücklich genug betont werden, daß der bleibende Werth der Herodianischen Leistungen in seiner strengen Urkundlichkeit liegt. Die *παράδοσις* d. h. in seinem Sinne die in der handschriftlichen Lesung sich aussprechende Ueberlieferung der Schule, gibt ihm ebenso den Stoff oder die Bestätigung seiner Auffassung, wie sie ihm eine Schranke wird, die ihn auf anderen Weg zwingt[4]). Das Homerische *τῷ* hat er vorgezogen aus (*διὰ*) *τὸ* durch Annahme einer Dehnung abzuleiten statt es einfach als Dativ zu nehmen, weil eine Ueberlieferung, die nachlautendes Iota sonst treu wahrte, in diesem Wort es nicht anerkannte[5]). Gleichbedeutend mit *παράδοσις* wird auch zuweilen *ἀνάγνωσις*[6]) gesetzt; das ist der „gelesene Text", kurzweg der Text. So weist uns der Sprachgebrauch auf die Quelle der *παράδοσις*, auf die handschriftlichen Texte. Obwohl er sich meist begnügt die beweiskräftige Stelle des Schriftstellers anzuführen, ruft auch Herodian wiederholt das Zeugniß von Handschriften an[7]). Soll er sein Haus auf Sand gebaut haben? Hätte er für besondere, vereinzelte Spracherscheinungen oder gar Schreibungen glauben können sich auf die gewöhnlichen Fabricate des antiken Buchhandels verlassen zu dürfen? Man braucht nur wenige Seiten Herodians zu lesen um zu begreifen, daß für diese Grammatiker die handschriftliche Ueberlieferung nur als Präcisionsinstrument Werth haben konnte und hatte; ihr sprachgeschichtliches Material konnte für gewissenhafte Forscher nur insofern nutzbar sein, als es sich auf handschriftliche Zeugnisse stützte, deren Alter und Gehalt die

---

3) Auch von mir, Fleckeisens Jahrb. 1865 S. 236 ff.

4) Daher die gewöhnlichen Wendungen *ἡ παράδοσις οἶδεν* oder *οὐκ οἶδεν*, *ἔχει* oder *οὐκ ἔχει*: vgl. z. B. *μον. λ.* 23, 20 (L. II 930, 1) Hom. pros. *E* 31 und Lentz II p. 218, 19. 362, 17. 411, 28. 416, 23. 420, 28. 430, 4 Choerob. dict. p. 497, 18 (vgl. 851, 24. 857, 19). 571, 23. 848, 30. 866, 4 Gaisf.

5) s. Fleckeisens Jahrb. 1865 S. 252.

6) Herod. *μον. λ.* 34, 18 (L. II 939, 26) *οὐκ ἔχει δὲ οὕτω τὰ τῆς ἀναγνώσεως* und umgekehrt Hom. pros. *Λ* 652 *οὕτως δὲ ἔχει καὶ τὰ τῆς ἀναγνώσεως T* 105 *Φ* 110 *Ω* 247 *καὶ οὕτως ἔχει τὰ τῆς ἀναγνώσεως Ψ* 387 *καὶ οὕτως τὰ τῆς ἀναγνώσεως Ω* 316 *καὶ οὕτως ἔχει ἡ ἀνάγνωσις*. Vgl. unten S. 188 Anm. 15.

7) Herod. *μον. λ.* 37, 2 (L. II 942, 16) *οὕτως ἐν τοῖς ἀντιγράφοις* (des Antimachos) *εὕρηται*; Pathologie fr. 28 (Et. M. 197, 52) bei Lentz II 414, 8 *τινὰ γὰρ τῶν ἀντιγράφων διὰ τῆς ει διφθόγγου γράφουσι τὴν λέξιν* (*βινεῖν*), *τινὰ δὲ διὰ τοῦ ῑ*; Hom. pr. *I* 73 *καὶ οὕτως ἔχει ἡ τῶν ἀντιγράφων παράδοσις*; bei Choerob. dict. p. 335, 26 Gaisf. 312, 36 Hilg. (Lentz II 645, 11) *τὰ ἀρχαῖα τῶν ἀντιγράφων ἐν τοῖς εἰς ω̄ ληγούσαις εὐθείαις εἶχον τὸ ι προσγεγραμμένον, οἷον ἡ Λητώι, ἡ Σαπφώι*; ebend. 310, 14 G. 292, 10 H. *ἡ δὲ παράδοσις τῶν ἀντιγράφων οὐκ ἔχει οὕτως* (*τέττικος*) *ἀλλὰ διὰ τοῦ γ*; vgl. S. 184.

Bürgschaft der Zuverlässigkeit gab. Getäuscht werden und irren konnten natürlich sie wie wir.

Wird jemand glauben, daß Herodianos, der den griechischen Sprachschatz bis in seine entlegensten Winkel selbständig durchgearbeitet hat um sich in vollen Besitz des Stoffes für Prosodie, Orthographie, Pathologie und Flexionslehre zu setzen, nicht nur die ganze Litteratur, einschließlich verschollener Horographen, ausgezogen, sondern auch die alten Handschriften selbst nachgeschlagen habe? Schon als der systematische Ausbau der Grammatik unter Führung eines Tyrannion und Tryphon begann, lag eine fast unübersehbare Fülle von Einzelbeobachtungen vor, die den letzt erreichbaren Quellen entnommen waren. Sie waren vorzugsweise in den Commentaren und Monographien zu den einzelnen Autoren niedergelegt, und wie an den Texten durch kritische Zeichen auf sie hingewiesen wurde, so pflegten wohl auch in den Einleitungen zu Commentaren die bemerkenswerthesten Eigenthümlichkeiten des Sprachgebrauchs in Zusammenhang mit der Charakteristik des Schriftstellers übersichtlich zusammengefaßt zu werden, wie uns heute noch Markellinos' Einleitung zu Thukydides 52 f. oder der Auszug aus einer Einleitung zu Platon bei Laert. Diog. 3, 63 f. lehren kann; von lexikalischen Sammlungen brauche ich nicht erst zu reden. Solchen Quellen entnahm Herodian, oft wohl auch schon seine Vorgänger, die Kenntniß der handschriftlichen Ueberlieferung. Wir sehen das π. μον. λ. 39, 25 (II p. 945, 5 L.) εἰσὶ μέντοι οἳ καὶ διὰ τοῦ γ̄ (näml. τὸ κνέφαλλον) γράφουσιν· ἔν τισιν (näml. ἀντιγράφοις) ἐν Μαλθακοῖς Κρατίνου παρεφύλαξε Σύμμαχος, und Orthogr. t. II p. 566, 32 nach Et. M. 663, 24 καὶ λέγει ὁ Ἐπαφρόδιτος ὅτι τινὰ τῶν ἀρχαίων ἀντιγράφων σὺν τῷ ι εἶχον αὐτὰ (die Adv. ἐγγυτέρω ἐγγυτάτω usw.) γεγραμμένα. Wir können noch weiter zurück gehn. Der grammatische Forscher hat neben dem regelmäßigen Sprachgebrauch die σεσημειωμένα oder σημειώδη zu beachten. Dieser stehende, allmählich zu dem allgemeinen Begriff des Bemerkenswerthen abgeschwächte Ausdruck ist bezeichnend. Die Abschriften eines von Grammatikerhand durchgearbeiteten Textes bewahrten am Rand die kritischen Zeichen (σημεῖα), durch welche der Herausgeber auffallendere Erscheinungen auch der Sprache hervorhob, die er auf Grund seiner Handschriften als Eigenthümlichkeit des Schriftstellers festgestellt hatte im Gegensatz sei es zur herrschenden Sprache sei es zur Ansicht anderer Gelehrter. Auch wo die Ausgabe nicht von Commentar oder anderweitiger Rechenschaftsablage begleitet war, machten jene kritischen Zeichen es jedem Gelehrten leicht, die sprachlichen

Besonderheiten eines Werks zu übersehn: *ἀναλέγεσθαι ἐκ τῶν δοθέντων κατὰ τὴν ἀνάγνωσιν σημείων* hieß das (Eunapios p. 7 Boiss.). Aber schon die Ordnung der Alexandrinischen Bibliothek und die Anlage der Kataloge erforderte eine planmäßige Durcharbeitung der Autoren und Handschriften; und die Gelehrten, die sich derselben unterzogen, pflegten nicht nur das pinakographische Facit zu ziehen, sondern auch die geschichtlichen Untersuchungen und die sprachlichen Beobachtungen, die sie zu dem Zweck gemacht, vorzulegen. Lykophrons grundlegendes Werk über die Komoedie und die Gegenschrift des Aristophaneers Diodoros[8]), ebenso noch die tiefer eindringenden Bücher des Eratosthenes über die alte Komoedie hatten zu grossem Theil glossographischen Inhalt. Am deutlichsten spricht der Titel von Kallimachos' *Πίναξ τῶν Δημοκρίτου γλωσσῶν καὶ συνταγμάτων*, der zu übel angebrachten Bedenken[9]) Anlaß gegeben hat, weil er nicht verstanden wurde. Apollodoros der Athener war, wie man ehedem sich ausdrückte, der *sospitator* des Sophron und des Epicharmos; wenigstens von letzterem hat er eine Ausgabe in zehn *τόμοι* veranstaltet[10]): über beide Syrakusaner hat er Werke verfaßt, die ohne eigentliche Commentare zu sein nicht nur Biographie und Pinakographie behandelten, sondern auch das sprachlich und sachlich bemerkenswerthe, besonders Glossen besprachen. Aehnliche Arbeiten muß die ältere Generation römischer Grammatiker geschaffen haben, aus denen wir Auszüge bei Varro im VII B. de lingua latina finden[11]); noch bei Valerius Probus arbeitet Kritik und Beobachtung ebenso zusammen. Wir sind hiermit zur letzten Quelle des reichen Beobachtungsschatzes zurückgeführt, über den Männer wie Herodianos verfügten. Die maaßgebenden Handschriften der Alexandrinischen Bibliothek waren es, aus welchen jene Beobachtungen stammten,

---

8) s. A. Uppenkamp De origine conscribendae historiae litterarum apud Graecos (Münster [1853]) p. 69 ff.

9) Noch bei O. Schneider Callim. II p. 13. 322 (fr. 29).

10) Porphyrios Leben Plotins 24. Die beiden Werke führten den Titel *Περὶ Σώφρονος* (bis Buch IV angeführt) und *Περὶ Ἐπιχάρμου* (bis B. VI); aber in einzelnen Büchern wurden im Anschluß an den fortlaufenden Text sprachliche und sachliche Schwierigkeiten besprochen, daher Athen. VII p. 281e *ἐν τῷ τρίτῳ Περὶ Σώφρονος τῷ εἰς τοὺς ἀνδρείους μίμους*. s. C. Muellers *FHG* I 461 f.

11) Vgl. Rhein. Mus. 23, 682; am deutlichsten ist die Excerptenreihe aus Naevius 7, 107 f. Noch Varro selbst hat in seinen *quaestiones Plautinae* Pinakographie und Glossenerklärung vereinigt, s. Ritschls Parerga S. 179 f. Probus' *silva observationum sermonis antiqui* (Suet. gr. 24 vgl. Steup de Probis p. 47 f.) stand in engem Zusammenhang mit dem *adnotare*.

einerlei ob dieselben einer kunstgerechten Ausgabe als Unterlage gedient hatten oder ob schon vor und unabhängig von einer solchen an ihnen jene σημειώσεις gemacht waren.

Wie jene Männer die Aufgabe der Textbehandlung gefaßt haben, darüber sollte es unnöthig sein ein Wort zu sagen. Von den Acten der Homerischen Textgeschichte ist genug erhalten. Die Linie von Zenodot bis zu Aristarch bezeichnet den von Schritt zu Schritt siegreicheren Durchbruch objectiver Kritik und die Erhebung über Vorurtheile und Willkür. Von Zenodot an, der zuerst über die Schätze der Ptolemäersammlung gebot, konnte es keinem Gelehrten einfallen andere als die ältesten und treusten Exemplare heranzuziehn. Um solche Hss., wie sie damals in Masse umliefen und uns jetzt durch eine dürftige Probe, den von Mahaffy entzifferten Fetzen aus Ilias Λ näher gerückt sind, haben sie sich nicht gekümmert; die Verse, durch welche daraus ihr Homer hätte bereichert werden können, haben sie nicht des Obelos werth gehalten sondern — οὐδὲ ἔγραψαν, aus eben so guten Gründen als sie sich beispielsweise die Vervollständigung von Ψ 81 aus Aeschines' Timarchea § 149 oder die Berichtigung von Ι 539 f. aus Aristoteles' Thiergeschichte 6, 28 verbeten haben. Denn mit welchen Hilfsmitteln man einen zuverlässigen und treuen Text herzustellen habe, war unseren Vorgängern im Alterthum gerade so bekannt als es uns seit I. Bekker und C. Lachmann geläufig ist: εἴ (τις) τοῖς ἀρχαίοις ἀντιγράφοις ἐντυγχάνοι καὶ μὴ τοῖς ἤδη διωρθωμένοις (Laert. Diog. 9, 113); wäre noch hinzugefügt ἢ διεσκευασμένοις, so wäre auch die Klasse von Hss. berücksichtigt, zu der unsere Phaidonreste zu rechnen sind. Natürlich waren die Alten abhängig von den vorhandenen und erreichbaren Hilfsmitteln; wo sie nur verwahrloste Hss. kannten, hatten sie eben so schwere und undankbare Arbeit als wir, wenn wir aus der Abschrift eines ungeübten oder flüchtigen Copisten einen neuen Text herausgeben sollen. Aber wenn sie die Wahl hatten, haben sie zu wählen verstanden, deß dürfen wir gewiß sein.

Freilich nicht die Alexandriner, aber spätere Grammatiker sind die Sünder gewesen: so sagt ein anderer und warnt uns vor dem Glauben an eine „naive aber unerhört gewissenhafte Ueberlieferung" der großen Prosaiker. Es ist wahr, Helikonios und seine drei Genossen haben verhältnißmäßig spät den Isokrates durchverglichen und das Stammexemplar der Urbinatischen Hs. hergestellt: nicht unmöglich, daß das erst im Anfang des fünften Jahrh. geschehn[12]).

12) Suidas Ἑλικώνιος σοφιστὴς Βυζάντιος. ἔγραψε χρονικὴν ἐπιτομὴν ἀπὸ

Waren diese es, welche den Text gemacht? Oder haben sie vielmehr nach Exemplaren eines guten alten Textes die Vorlage berichtigt? Die Antwort darf ich dem geehrten Leser überlassen. Aber gesetzt, jene Fälscherbande hätte sich vereinigt, einen Isokrates nach ihrem Sinne zurechtzudrechseln, und so eine andere den Platon usw., so bitte ich mir zu sagen, was denn die Herren ändern, welche Grundsätze sie durchführen wollten? Das müßte sich doch wohl noch erkennen lassen. Mangel an Gewissenhaftigkeit zeigt sich Texten gegenüber immer zuerst und unwillkürlich in der Modernisierung erst der Schreibung, dann der Formbildung, schließlich der Wortwahl. Trotz des Buchdrucks, hinter dem doch immer ein Corrector steht, hat das die Luthersche Bibelübersetzung erfahren müssen. Aber jene alten Fälscher waren Archaisten? Haben sie etwa die Herodianische Orthographie durchgeführt, die für sie Gesetz sein mußte so gut wie für die Verfasser unserer Schulbücher die Puttkammersche? Es wäre recht raffiniert gewesen, die grobe Willkür, mit welcher Worte und Stellung geändert wurden, durch den Schein peinlicher Genauigkeit im Aeußeren zu decken. Nur schade daß so viele Spuren alterthümlicher Ueberlieferung in unseren besten Hss. stehn geblieben sind, aus denen selbst Herodianos hätte lernen können[13]). Aber hat man denn ganz vergessen, daß lange bevor solche Diorthosen wie im Urb. des Isokrates und in gewissen Hss. des Demosthenes vorgenommen wurden, über den Sprachgebrauch dieser Autoren schon grammatische Beobachtungen nicht nur gemacht sondern auch gesammelt waren[14]), die durch unsere Hss., zuweilen nur in Spuren und Corruptelen, bestätigt werden?

Ich wende mich lieber der Frage zu, welche geschichtliche Bürgschaft unser bisheriger Platontext für seine Zuverlässigkeit bietet. Zu ihrer Beantwortung dürfen wir einen Umweg nicht scheuen. Von keinem Attischen Prosaiker liegen die Acten der

---

τοῦ Ἀδὰμ μέχρι Θεοδοσίου τοῦ μεγάλου ἐν βιβλίοις ῑ. Er hat also unter Arcadius geschrieben. Der Professor der Beredsamkeit würde zur *recognitio* des Isokrates eine passende Persönlichkeit sein.

13) Vgl. Fleckeisens Jahrb. 1865 S. 250 f. 255 Anm. 22 über den Bodleianus des Platon. Der Urbinas des Isokrates ist weit mehr modernisiert, doch ist auch aus ihm zu lernen, s. z. B. Bekkers Beobachtung über ἐκεῖνος und κεῖνος zu Paneg. 18.

14) Ich erinnere an Boethos' (sog. Didymos) Schriftchen *Περὶ τῶν ἀπορουμένων παρὰ Πλάτωνι λέξεων* bei E. Miller, Mél. de lit. gr. S. 399 ff. vgl. Photios Bibl. cod. 155, und an die zahlreichen Arbeiten über die Redner, deren Ertrag schon in den atticistischen Lexika der Hadrianischen Zeit registriert war.

Textgeschichte uns noch in solcher Reichhaltigkeit vor wie von Demosthenes; nirgends sind wir so wie hier in der Lage, unsere wichtigsten hsl. Textformen bis in das Alterthum zurück zu verfolgen. Seine Textgeschichte erhält dadurch exemplarische Bedeutung und verdient das Interesse, das ihr seit L. Spengels Untersuchung über die dritte Philippika (1839) und H. Sauppes *Epistola critica ad G. Hermannum* (1841) zugewandt worden ist.

Zwei Scholien zur Midiana, deren Werth schon W. Dindorf erkannt hat, schaffen eine feste Unterlage. Zu § 147 p. 562, 16 *ἀφανίζειν ἱερὰν ἐσθῆτα* wird bemerkt: *ἱερὰ μόνον ἡ ἀρχαία*[15]) *ἔχει, ἐμφαντικὴ οὖσα* (lies *ἐμφαντικὸν ὄν*, die Hss. *ἐμφαντικῶς οὖσα*) *πολλῶν, οἷον στεφάνων, ἐσθῆτος, αὐτῆς τῆς ἐν ἱερῷ πανηγύρεως .... ἐπεὶ τό γε τὴν ἐσθῆτα προσθεῖναι πολλὴν ἔχει ἐλάττωσιν.* Hier wird die Lesung unserer Hss. treffend abgewiesen zu gunsten der kürzeren Fassung *ἀφανίζειν ἱερά*, diese gab der 'alte Text': nur die Pariser Hs. *Σ* bewahrt dieselbe; sie hat von erster Hand nichts mehr als *ἱερα*, die zweite setzte die Endung *ν* darüber und ergänzte am Rande *ἐσθῆτα*. Ein Vertreter der *ἀρχαία ἔκδοσις* liegt uns also noch in *Σ* vor. Den Gegensatz zum 'alten' bildet nicht etwa der 'neue' Text, sondern der 'gemeine'. Das erfahren wir zu § 133 p. 558, 16 *ἐπ' ἀστράβης δὲ ὀχούμενος: προσέθηκεν ἀργυρᾶς· τὸ γὰρ ἠργυρῶσθαι τὴν καθέδραν δεῖγμα ἦν τοῦ ἐπιτηδεύοντος καὶ ἐντρυφῶντος τούτῳ τῷ εἴδει. τὸ δὲ ἐξ Εὐβοίας, ὅτι μὴ εἰωθότων τῶν Ἀθήνησι τοιαύτας ἐργάζεσθαι αὐτὸς ἐξ Εὐβοίας ὠνήσατο. ἡ δὲ δημώδης ἐξ Ἀργούρας ἔχει ἀπὸ τόπου τῆς Εὐβοίας. ἀλλὰ τὰ ἑξῆς δηλοῖ, ὅτι μαλακίαν αὐτῷ καὶ τρυφὴν ὀνειδίζει, χλανίδας λέγων καὶ ἱμάτια τρυφερὰ καὶ σκεύη ἐπιτήδεια πρὸς ἀνειμένον βίον.* Die Fassung, welche dem verständigen Erklärer vorlag, ist uns in *Σ* erhalten: *ἀργυρᾶς τῆς ἐξ Εὐβοίας*. Die abgelehnte Lesung der Vulgatausgabe steht in *AFB*. Für ihre Unechtheit spricht ein noch triftigerer Grund. Die Reiterei, zu welcher der bequeme Meidias gehörte, war nach Argura auf Euböa ausgerückt: der Zusatz *τῆς Εὐβοίας* findet sich nicht einmal da, wo der Ort zuerst genannt wird, § 132, konnte also noch weniger hier oder

---

15) Das Verbum *ἔχει* und das Scholion zu § 133 lehrt daß *ἔκδοσις* zu verstehen ist, ebenso wie in dem Citat bei Laert. Diog. 7, 125 *Ἀπολλόδωρος δὲ ἐν τῇ φυσικῇ κατὰ τὴν ἀρχαίαν* (s. Fowler, Panaetii et Hecatonis frr. p. 49). Die Schreiber, welche *ὄν* in *οὖσα* verdarben, hatten wohl *ἀνάγνωσις* verstanden. Für die Sache würde das keinen Unterschied bedeuten, vgl. oben S. 188 Anm. 6. Tryphon schrieb *Περὶ ἀρχαίας ἀναγνώσεως* (A. v. Velsen, Tryphonis frr. p. 62 ff.), das Werk galt dem Homertexte.

§ 164 gemacht werden. Wie ist diese Lesung entstanden? ΠΤΩ lesen ἐπ' ἀστράβης δὲ ὀχούμενος ἀργούρας τῆς ἐξ Εὐβοίας: das ist durchsichtige und einfache Verderbniß; ἀργυρᾶς hatte sich unter dem Einfluß des kurz vorher genannten Ortsnamens zu 'Αργούρας verschoben. Aber so bedenklich, ja undenkbar nun die Syntax geworden war, eine Aenderung ist in jenen Hss. unterblieben. Was *AFB* und die Vulgata des Scholiasten geben, setzt jene Corruptel voraus, kann erst aus ihr durch willkürliche Nachhilfe geschaffen sein. Wir besitzen also noch heute Hss., deren Text die ältere Grundlage desjenigen ist, welchen die römische Kaiserzeit als Vulgata las. Danach ordnen sich unsere Hss., um nur die maaßgebenden in Betracht zu ziehn, zunächst in drei Gruppen:

I ἀρχαία ἔκδοσις: *Σ* und die erste Hand des von F. Schultz hervorgezogenen Laurentianus

II reiner, nicht überarbeiteter Vulgattext: Pariser Hs. n. 2935 *Υ*, Florentiner (Laur. 59, 9) *Π*, und Urbinas n. 113 in der Vaticana[16])

III jüngerer, überarbeiteter Vulgattext (δημώδης ἔκδοσις des Schol. Mid.): *A*(ugustanus) n. 485 in München und die beiden Venezianischen *F Φ* nebst *B*(avaricus = Monac. 85).

Diesem ungesuchten Ergebniß habe ich nur das eine hinzuzufügen, was sich auf anderem Wege ergibt und zur Hälfte später (S. 196) Begründung finden wird, daß die dritte interpolierte Klasse sich in zwei ganz verschiedene Familien spaltet: 1) den Augustanus und seine Sippe (die Pariser Hss. Bekkers *k s* und den jüngeren Augustanus), deren Text im wesentlichen auf der ersten Klasse beruht, aber von einem späteren Grammatiker[17]), nicht Rhetor, mit großer Willkür und nicht ohne Benutzung der Vulgathss. überarbeitet ist; und 2) eine Familie, deren Text aus der alten Vulgata (Kl. II) abgeleitet, aber durch vergleichende, natürlich nicht consequente, Heranziehung von Hss. der ersten Klasse umgestaltet ist: *F Φ B*. Daß hiermit die festen Grundlinien für unsere *recensio* des Demosthenes wirklich gegeben sind, kann hier nicht gezeigt werden, so zeitgemäß es auch dem Krebsgang gegenüber sein möchte, den neuerdings die Demostheneskritik angetreten hat.

Fragen wir, wie sich das gelehrte Alterthum zu diesen Ermittelungen stellt, so finden wir zwar einzelne, welche die Vorzüge des alten Textes zu würdigen wußten, wie bei der Stelle

16) Vgl. Voemel zu Dem. Demeg. p. 251.

17) s. L. Spengel über die III Philipp. in den Abhandl. der Münch. Akad. III, 1 S. 162 f. Eine Monographie über die Hs. hat Andr. Spengel veröffentlicht.

der Midiana 133 den Rhetor Menandros (schol. p. 618, 6 Dind.) und den Grammatiker Helladios (in Phot. bibl. p. 533ª 35). Aber mit Ausnahme des einen Rhetors Aristeides[18]) haben seit Dionysios von Halikarnaß alle Fachmänner, die Demosthenes lasen und erklärten, sich mit Vulgathss. begnügt: nichts ist gewisser als daß in den Scholien der Mid., denen der Text der *ἀρχαία* zu Grund liegt, nicht ein Rhetor, sondern ein Grammatiker zu uns spricht. Noch heute gewährt uns im wesentlichen denselben Text, den der wichtigste Rhetor Hermogenes benutzte, die Urbinatische Hs. Und durch die Rhetorenschule ist die ursprünglichere Gestalt der Vulgata erhalten worden. Der maaßgebende Vertreter der II Klasse *Υ* repraesentiert die Demosthenesausgabe des Zosimos von Askalon, der in der Zeit des K. Anastasios (491—518) die abschließende Redaction unserer Scholien zu Isokrates und Demosthenes vollzogen hat. Man könnte, da auch im Urbinas[19]) die Einleitung des Zosimos steht, diese Klasse unter der Bezeichnung „Zosimoshandschriften" zusammenfassen. Denn auf Zosimos selbst darf wohl diese letzte erkennbare Demosthenesausgabe des Alterthums zurückgeführt werden. Aber nicht Zosimos kann der verantwortliche Urheber einer Textgestalt gewesen sein, welche schon die Voraussetzung der alten Vulgata gewesen ist: er hat nur den in der Rhetorenschule gangbaren Text in verhältnißmäßig unverfälschter Gestalt für die Ausgabe festgehalten, die mit Einleitung und Commentar auszustatten seine Aufgabe war. Es versteht sich, daß die Verderbnisse dieses ursprünglichen Vulgattextes zu verschiedenartigen Ueberarbeitungen herausfordern mußten, um so dringender, weil er den Zwecken der Schule zu dienen pflegte, und wir können gewiß sein, daß mit den beiden uns zufällig vorliegenden Familien überarbeiteter Hss. keineswegs alle Wandelungen erschöpft sind, denen die Vulgata im Alterthum unterworfen war. Aber wichtig ist es festzustellen, wie alt diese Ueberarbeitungen sind. Bereits Herodianos führt *μον. λ.* 13, 21 (Lentz II p. 920, 9) die Worte der Mid. 133 genau in der Fassung an, welche im Scholion der *δημώδης* zugeschrieben wird, *ἐξ Ἀργούρας τῆς Εὐβοίας*. Kein Zweifel, daß er diesen Beleg für *Ἄργουρα* nicht eignem Studium des Redners, sondern einer älteren, vermuthlich lexikalischen Sammlung verdankt: die jüngste Schicht, in der seine Quelle ge-

18) L. Spengel a. a. O. S. 164 f.

19) Voemel a. a. O. (Anm. 16). Im Laurent. 59, 9 (*Π*) fehlen die ersten 8 Reden und mit ihnen die Einleitung, s. Voemel ebend. p. 202.

sucht werden darf, sind doch die Atticistischen Lexika der Hadrianischen Zeit.

Wenn die Ueberarbeitung sich so weit zurück verfolgen läßt, so ist die Herkunft der ursprünglichen und reinen Vulgata eigentlich schon klar gestellt. H. Sauppe (*ep. cr.* p. 49) hat erkannt und Rehdantz[20]) es weiter ausgeführt, daß die Anordnung und die Titel der Demosthenischen Reden aus den *πίνακες* des Kallimachos abgeleitet sein müssen, wovon die *ἀναγραφὴ τῶν ῥητορικῶν* näml. *συγγραμμάτων* (Athen. XV p. 669[d]) einen besonderen Theil bildete. Zu Sauppes Beweisen, die ich nicht wiederhole, kommt hinzu, was Dionysios Hal. ad Amm. 4 p. 724 f. von der XIV Rede sagt, die er selbst durch Umschreibung zu bezeichnen pflegt: *δημηγορίαν ἣν ἐπιγράφουσιν οἱ τοὺς ῥητορικοὺς πίνακας συντάξαντες Περὶ τῶν συμμοριῶν*: so nennen die Rede sowohl Lexikographen und Rhetoren als unsere Hss. Während eine ganze Anzahl zweifellos unechter Reden in unserem Demosthenischen Corpus stehn, welche in die Liste des Kallimachos aufgenommen waren (wie R. LVIII gegen Theokrines), wird von keiner der im Corpus erhaltenen Reden berichtet, daß sie in den *πίνακες* angezweifelt oder gar einem anderen Redner zugetheilt war; und Reden, die von kenntnißreicheren Forschern wie Dionysios und Caecilius dem Demosthenes zugesprochen wurden, sind uns verloren, weil sie bei Kallimachos unter anderem Namen standen, so die Rede für Satyros (Caecilius bei Phot. bibl. p. 491[b] 29) und die für Diphilos verfaßte Demegorie (Dion. de Din. 11 p. 659, 1) unter Deinarchos. Ueberhaupt hat die Kritik des Dionysios und Caecilius unserer Sammlung nicht die leiseste Spur aufgedrückt. Wichtig ist sodann der Umstand, daß die auf die beste Zeit zurückweisenden stichometrischen Unterschriften der einzelnen Reden sich keineswegs nur im Σ und in der nach Hss. der ersten überarbeiteten Familie der dritten Klasse finden, sondern ebenso der alten Vulgata (II) eigenthümlich sind; für den wichtigsten Vertreter Υ kann ich das aus eigner Anschauung bezeugen[21]). Meinem Freunde W. v. Christ, der unsere Kenntniß der Demosthenischen Ueberlieferung so erheblich erweitert hat, verdanken wir die scharfsinnig aus jenen Zeilenzahlen abgeleitete Beobachtung, daß die Einzelrollen, aus denen sich einstens die

---

20) In Fleckeisens Jahrb. 1857 Band 75, 814 f. 1858 B. 77, 464.

21) Ausgeschrieben habe ich mir nur die Subscription der Kranzrede Υ f. 109[r], welche mit Σ f. 196[v] genau stimmt, und die der dritten Philippika, wo in Υ 44[r] die Stichenzahl correct geschrieben ist, während in Σ 41[v] die erste Hand die beiden Ligaturen für 500 und 50 in ΓΗ ΓΔ aufgelöst hatte.

Sammlung der Demosth. Reden zusammensetzte, zum Theil sehr verschiedene Zeilengröße hatten[22]). Dieser Umstand steht in unvereinbarem Widerspruch zu der gewöhnlichen Annahme, daß die stichometrischen Angaben einer maaßgebenden Gesammtausgabe des Redners entnommen sein könnten, für welche Gleichheit der Zeilen- und Seitengröße eine selbstverständliche Forderung war. Eine zureichende Erklärung vermag ich nur in der Annahme zu finden, daß die so treu bis in das XI Jahrh. fortgeführten Zeilensummen aus den Stammexemplaren der Bibliothek Alexandreias herrühren. Wir überzeugen uns noch heute an den Resten der Bibliothek von Herculaneum, daß jede Rolle ihre Stichenzahl zu tragen pflegte, und haben Grund anzunehmen daß das schon zu den Zeiten Theopomps Brauch war[23]). Im Katalog des Kallimachos waren bei jedem Titel eines Werks behufs leichterer Recognoscierung sowohl die Eingangsworte als die Zahl der Zeilen angegeben (z. B. Athen. VI p. 244[a]). Alexandreia hat bis zur Zeit Caesars ein selbst durch Pergamon kaum geschmälertes Monopol des Buchhandels besessen, dessen Lebensbedingung nicht nur die heimische Papyrusbereitung, sondern vor allem die Bibliothek war. Man vergegenwärtige sich, daß bis zur Erfindung des Drucks die gewerbmäßige Vervielfältigung und Vertreibung von Büchern von selbst an große Lehranstalten und die damit verbundenen Bibliotheken sich anlehnen mußte[24]). Die Vermittelung zwischen den Schätzen der königlichen Sammlung und dem Buchhandel konnten nur Gelehrte bilden, welche mindestens aus der Bibliothek diejenigen Rollen auszuwählen hatten, welche als die zuverlässigsten der buchhändlerischen Ausgabe untergelegt werden sollten, in der Regel aber durch Vergleichung verschiedener Textquellen und durch eigne Beobachtung eine Ausgabe herstellten d. h. ein zur Vorlage an die Schreiber bestimmtes Exemplar mit den verfügbaren Mitteln berichtigten. Daß die Texte der Lyriker und Dramatiker durch solche Ausgaben Alexandrinischer Grammatiker,

---

22) Die Attikusausgabe des Demosthenes, ein Beitrag zur Textesgeschichte des Autors, München 1882 S. 75 f. oder Abhandl. der Münchner Akad. XVI, 3 S. 227 f.

23) Theop. bei Photios bibl. p. 120[b] 39 f.

24) Ich erinnere für das spätere Rom an das *forum Martis* mit seiner Rhetorschule und einer Station von *antiquarii* (s. G. B. de Rossi's schöne Combinationen im Bull. di archeol. crist. 1874 p. 52 ff.), und verweise für das Mittelalter auf Savignys Gesch. d. röm. Rechts Kap. 25 B. III[2] 575 ff. Auch den Freunden stichometrischer Studien kann der mittelalterliche Buchhandel Analogien liefern (Savigny 3, 579. 649 ff.).

namentlich des Aristophanes von Byzanz, für alle Zeit festgestellt und durch den dortigen Buchhandel aller Welt zugänglich gemacht worden sind, wird nach der siegreichen Darlegung U. v. Wilamowitz-Moellendorffs[25]) um so weniger in Zweifel gezogen werden können, als uns Reste aus Medea und Hippolytos den Beweis in die Hände geben, daß abgesehn von unvermeidlichen Schreibfehlern das Alterthum seit dem II Jahrh. v. Chr. denselben Text las wie wir.

Auch die großen Prosaiker sind natürlich durch Ausgaben des Alexandrinischen Buchhandels unter Benutzung der dortigen Bücherschätze verbreitet worden. Ihre Herstellung schien technische Schulung in geringerem Maaße zu fordern als die Bearbeitung der Dichter. Keiner der großen Grammatiker hat, so viel wir hören, Hand an solche Aufgaben gelegt. Kallimachos' Werk über Demokritos (oben S. 185) ist die einzige Spur, die man entgegen stellen könnte; aber hier waren durch dialektische und glossographische Schwierigkeiten die Anforderungen gesteigert, wie zur Beschäftigung mit dem Hippokratischen Nachlaß das Bedürfniß der ärztlichen Kunst trieb. Kein Wunder also, wenn die Alexandrinischen Urheber der Prosaikerausgaben verschollen sind; sie haben in den meisten Fällen schwerlich mehr gethan als die Schreibervorlage nach dem jedesmal geeignetsten Exemplar der Bibliothek durchzucorrigieren. Noch ein anderer Vorzug der Dichterhss. vor denen der Prosaiker darf nicht übersehen werden. Die aus der Schreibstube des Buchhändlers (s. unten S. 197 f.) hervorgehenden Rollen mußten von all den Fehlern wimmeln, wie sie bei gedankenlosem Nachschreiben sich einstellen; um verläßlich und lesbar zu werden bedurften sie sorgfältiger Durchsicht, ja einer Nachvergleichung mit der Vorlage[26]). Der Buchhändler, der seine Waare auf den Markt zu werfen eilte und die Herstellungskosten möglichst herabzudrücken streben mußte, konnte nur ausnahmsweise oder auf besondere Bestellung diese eigentlich unerläßliche

25) Euripides' Herakles 1, 134 ff.

26) Strabon p. 609 schildert die im Buchhandel umlaufenden Exemplare des Aristoteles und Theophrast mit den Worten: *βιβλιοπῶλαί τινες γραφεῦσι φαύλοις χρώμενοι καὶ οὐκ ἀντιβάλλοντες, ὅπερ καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων συμβαίνει τῶν εἰς πρᾶσιν γραφομένων βιβλίων καὶ ἐνθάδε* (zu Rom) *καὶ ἐν Ἀλεξανδρείᾳ.* Hieronymus Brief an Lucinius 71, 5 t. I p. 433e Vall. „Opuscula mea .... ad describendum hominibus tuis dedi, et descripta vidi in chartaceis codicibus; ac frequenter admonui ut conferrent diligentius et emendarent. ego enim tanta volumina prae frequentia commeantium et peregrinorum turbis relegere non potui". Cobet zum N. Test. p. XXVII f.

Vorsichtsmaaßregel anwenden. Die Klagen über die Fehlerhaftigkeit der buchhändlerischen Waare sind im Alterthum allgemein[27]), sie treffen aber vorzugsweise die prosaische Litteratur. Der Text des Dichters hatte einen Schutz schon im Verse, der abgesetzt wurde und eine Controle des einzelnen Wortes übte; die Schwierigkeit der Sprache nöthigte zu langsamerem Tempo und größerer Sorgfalt, und zum Ueberfluß fanden etwaige Fehler bei der Schullectüre Berichtigung. Prosaschriften, an sich gewöhnlich umfangreicher, meist ohne Unterbrechung bis zum Buchende fortlaufend, waren Fehlern aller Art um so mehr ausgesetzt, als das scheinbar leichtere Verständniß des Inhalts die Sorglosigkeit bei der Herstellung begünstigte. Fehler *per scripturam dictationemve fiunt*, sagt Varro (p. 211, 3 Wilm.): der Vorleser, nach dessen Dictat geschrieben wurde, mag bei Dichtern oft genug genöthigt gewesen sein, unverstandene Worte den Schreibern vorzubuchstabieren[28]); bei Prosawerken kam er nicht leicht in diese Lage; er las frischweg, was er zu sehen oder zu verstehen glaubte: *scribunt non quod inveniunt sed quod intellegunt, et dum alienos errores emendare nituntur ostendunt suos*, wie diesen Vorgang Hieronymus[29]) einmal treffend beschreibt. Mißworte wie *ῥαδίως* und *πλάττοντες* im Phaidon (oben S. 39) sind auf diese Weise, schon vor der Alexandrinischen Ueberlieferung entstanden. Revision war aber für Prosarollen des Alterthums noch in weit höherem Maaße Ausnahme als für Dichter. Aber dieser immerhin bedauernswerthe Zustand war, das möge man sich klar machen, noch immer golden gegen den früheren, nicht durch die Bibliothek und Ausgaben gebundene. Während vordem jeder Unternehmer die erste beste Handschrift, deren er habhaft geworden, vervielfältigen ließ und so in wenigen Jahrzehnten classische Texte einer Verwilderung unterlagen, wie sie uns jetzt die Phaidonreste zeigen, wurde nun nach den erlesensten Quellen eine Ausgabe hergestellt, und jede Auflage — die Auflage aber war immer klein und bestand aus so viel Exemplaren, als Schreiber in einem Zimmer damit beschäftigt werden konnten — von neuem aus der Mutterrolle abgeleitet.

Auch die im Alterthum verbreitete Sammlung der Demosthenischen Reden ist also zu Alexandreia hergestellt worden: Anord-

---

27) Strabon in Anm. 26, Cicero ep. ad Quintum fr. III, 4, 5. 5, 6; mehr bei Villoison praef. Iliad. p. XXXIV f.

28) Wie es im Pastor Hermae Vis. II 1, 4 von dem Schreiber heißt: *μετεγραψάμην πάντα πρὸς γράμμα· οὐχ ηὕρισκον γὰρ τὰς συλλαβάς.*

29) Im Brief 71 an Lucinius c. 5 p. 434[a].

nung und Titel wurden dem Kallimacheischen Katalog entnommen, und den einzelnen Reden der Text der geeignetsten Exemplare der Bibliothek zu grund gelegt, deren Stichenzahlen in die Abschriften übergiengen. Diese Ausgabe ist die Vulgata des Alterthums geworden; sie hat unwillkürlichen Einfluß auch auf abweichende spätere Ausgaben üben müssen, deren Urheber nicht umhin konnten mindestens Titel und Ordnung der Reden beizubehalten und die stichometrischen Unterschriften herüberzunehmen.

Je einleuchtender dies alles sein mag, um so dringlicher wird die Frage, wie neben dieser Alexandrinischen Vulgata der „alte" Text sich erhalten und bis in das Mittelalter in wenigstens zwei Abschriften fortdauern konnte. Dank der Treue des Σ ist es möglich auch hierüber zu einer, ich denke, vollen Klarheit zu gelangen. Wiederholt wird im Lexikon des Harpokration die Autorität der *Ἀττικιανὰ* (*ἀντίγραφα*) herangezogen[30]). Schon H. Sauppe (*ep. cr.* 50) hat daraus geschlossen, daß unser Σ die Ueberlieferung der *Ἀττικιανά* enthalte. Am überzeugendsten ist die Angabe (Harp. 69, 5), daß in Demosthenes' Philippischen Reden, wo *ἐκπολεμῶσαι* „in Krieg verwickeln" vorkomme, jene Hss. *ἐκπολεμῆσαι* gäben. Eine synonymische Beobachtung, die wir aus Ammonios p. 47 Valck. kennen, wollte beide Verben in der Weise auseinanderhalten, daß *ἐκπολεμῶσαι* nur *εἰς πόλεμον ἐμβαλεῖν*, die Form auf *-εω* aber „erobern" (*πόλιν ἑξελεῖν*) bedeuten solle. Der Attische Sprachgebrauch hatte nicht so scharf geschieden, er ließ beide Worte in der Bedeutung „in Krieg verwickeln" „verfeinden" zu. Aber man begreift, daß die Lehre der Schule Einfluß auf die Texte gewann. An den beiden Stellen, an welche Harpokration denken konnte, Olynth. I 7 p. 11, 1 und III 7 p. 30, 19 steht allen übrigen Hss., die nur *ἐκπολεμῶσαι* kennen, allein Σ gegenüber mit seinem schulwidrigen aber echten *ἐκπολεμῆσαι* von erster Hand. Damit ist der wichtige weitere Satz erwiesen, daß die *ἀρχαία ἔκδοσις* der Scholien, die wir in Σ wiedergefunden, durch die *Ἀττικιανά* repräsentiert wurde.

In erwünschter Weise greift hier die hsl. Ueberlieferung selbst bestätigend ein. Ich habe schon (S. 189) erwähnt, daß die zweite

30) Abgeleitete Adjectiva zweiten Grades werden in Abkürzung bekanntlich von den primären (*αἰσθητικός* neben *αἰσθητός*, *Ἀττικιανός* neben *Ἀττικός*) dadurch unterschieden, daß die Endung hoch geschrieben wird. Dieser Umstand, die Quelle zahlreicher Irrthümer, hat auch verschuldet, daß unsere Hss. statt *ἐν τοῖς Ἀττικιανοῖς* fast regelmäßig *ἐν τοῖς ἀττικοῖς* oder *ἀττικισμοῖς* überliefern. Erst Hemsterhuis Anecdot. I p. 244 hat den stehenden Fehler berichtigt mit Heranziehung des Lukianischen Zeugnisses (unten S. 197 Anm. 34). Dobree zu Phot. lex. p. 740 hat dann die richtige Schreibung auch aus Hss. nachgewiesen.

Familie der interpolierten Vulgata außer conjecturaler Umbildung auch eine Ueberarbeitung nach Handschriften der ersten Klasse erfahren habe. In dem Archetypus dieser Familie, den wir aus den beiden treusten Exemplaren *FB* herstellen, befand sich unter der XI Rede Gegen den Brief Philipps nach der Unterschrift und der Zeilenangabe die Bemerkung *διώρθ(ωται) ἐγ δύο Ἀττικιανῶν*[31]. Diese diorthotische Thätigkeit ist noch weiter zu verfolgen. Gleich unter der nächsten Nummer, dem Brief Philipps, ist in *B* f. 22^{r} der Vermerk $\dot{\Delta}^{\omega}$ d. h. *διώρθωται* zu sehn; er wiederholt sich unter der Rede wider Androtion (Nr. 18 *B* f. 31^{r}) in der Weise, daß auf eine vom Schreiber unverstandene Ligatur, ein in eine Art Kreis eingeschriebenes *αο*, wahrscheinlich ursprünglich ∞ d. h. *ω* das bekannte $\dot{\Delta}$ folgt: das sollte doch heißen *ἕως ὧδε διώρθωται*; zum letzten Mal beobachtete ich dies *δ(ιώρθωται)* in der Unterschrift der zweiten Rede gegen Onetor (Nr. 31) am Ende der *λόγοι ἐπιτροπικοί* in *B* f. 90^{v}. Es war also ein stark überarbeitetes Exemplar der Vulgata (vgl. den Fall Mid. 133) durch Vergleichung zweier Atticushss. berichtigt worden. Diese Arbeit hat sich, wenn nicht über den ganzen Demosthenes, doch mindestens über die ersten drei Fünftel des Ganzen erstreckt. Die Berichtigung ist nicht ernst zu nehmen. Die Vergleichung der so wesentlich abweichenden Textquellen hat nicht zu einer Umgestaltung der Vulgata geführt, sondern ihre Spur meist nur in Randbemerkungen mit *γρ(άφεται)* hinterlassen, welche am vollständigsten in *Φ*[32] bewahrt scheinen. Aber in diesen Variantenangaben[33] sind in der That zahlreiche Lesungen enthalten, welche in *Σ* wiederkehren, in einzelnen Fällen sogar zur Berichtigung von Fehlern in *Σ* dienen können, also zweifellos aus Atticushss. entnommen sind.

31) Die oben gegebene Lesung steht (das wird mir zugeben, wer griechische Hss. zu lesen gelernt hat) genau so in *F*, von dessen Subscription Voemel in seinen Tafeln zu den Demeg. unter Nr. *L* glücklicher Weise ein Facsimile gegeben hat. *Ἀττικιανῶν* schreibt abgesehn von dem auch hier fehlenden Strich für das auslautende *ν* auch *B* correct nach dem Anm. 30 berührten Gesetz; aber die bekannte Ligatur für *ε* in der Praeposition *ἐγ* ist nach landläufigem Mißverständniß für *α* angesehn worden, und so gibt nun *B* deutlich *αγ*. Wie Cobet Var. lect. p. 94 zu seinem Orakelspruch „veterem subscriptionem male et imperite descriptam ita esse legendam: *διωρθώθη πρὸς δύο Ἀττικιανά*“ kommen konnte, begreife ich nicht. Die Nachfolger haben das zurechtzurücken sich bemüht: Voemel demeg. p. 736 f. wollte *ἀνὰ δύο Ἀττικιανά*, Christ Attikusausg. S. 33 (185) wegen des Vocals der Endung *ἀπὸ δύο Ἀττικιανῶν* lesen.

32) s. Voemel zu den Demeg. p. 205.

33) Christ, Attikusausg. S. 35 (187) ff. hat dieselben für die dritte Philippische und die Kranzrede aus *B* zusammengestellt.

Noch zur Zeit des Lukianos standen in Gelehrtenkreisen die Handschriften in hohem Ansehn, „die der berühmte Attikos mit vollendeter Sorgfalt geschrieben“ [34]). Der Name war diesen durch Zuverlässigkeit hervorragenden Hss. verblieben, und er wurde nach landläufiger Analogie auf einen Schreiber gedeutet. Aber die peinlichste Sorgfalt hätte der Handarbeit eines Copisten nimmer einen textkritischen Werth verleihen können, wenn ihr nicht die benutzte Vorlage diesen gesichert hätte. Und da Harpokration nicht etwa von éinem Demosthenes oder éinem Aischines des Schreibers Attikos, sondern von *Ἀττικιανά* dieser Redner spricht, da überdies gelegentlich diese selbst von einander abwichen (Harp. 20, 2), wird es unmöglich den Namen auf einen Schreiber zu beziehen. Attikos kann nur der Herausgeber gewesen sein, aber nicht als gelehrter Kritiker — in dem Falle würde seine Leistung als *Ἀττικιανὴ* (*ἔκδοσις*) auftreten und nicht von *Ἀττικιανὰ* (*ἀντίγραφα*) geredet werden —, sondern als Buchhändler und Unternehmer.

Worauf uns die Erwägung des üblichen Ausdrucks führt, das findet in bekannten geschichtlichen Thatsachen die beste Bestätigung. Der größte buchhändlerische Unternehmer des Alterthums, den wir kennen, war T. Pomponius Atticus, der Freund Ciceros. Dieser gewiegte Finanzmann hat ja freilich auch in anderen Werthen als Bücherrollen speculiert. Aber wie sehr der haushälterische Mann auf seine wichtigste und sicherste Unternehmung alles auch in seinem privaten Leben zugeschnitten hatte, zeigt die Zusammensetzung seines Hausgesindes, wie Cornelius Nepos sie schildert v. Att. 13, 3: „usus est familia, si utilitate iudicandum est, optima; si forma, vix mediocri. namque in ea erant pueri litteratissimi, anagnostae optimi et plurimi librarii, ut ne pedissecus quidem quisquam esset qui non utrumque horum pulchre facere posset, pari modo artifices ceteri, quos cultus domesticus desiderat, apprime boni“. Das ganze Hauswesen des Atticus war Bücherfabrik. Und freilich mußte ein Großunternehmer wie er über eine ganze Anzahl Schreibstuben verfügen, in denen jedesmal eine Abtheilung Schreiber (*librarii*, später *antiquarii*) nach dem Dictat des

34) Luk. adv. ind. 2 *ὅσα ὁ Καλλῖνος εἰς κάλλος ἢ ὁ ἀοίδιμος Ἀττικὸς σὺν ἐπιμελείᾳ τῇ πάσῃ γράψειαν* vgl. 24 *τὸν Ἀττικὸν καὶ Καλλῖνον τοὺς βιβλιογράφους*. Die Worte *εἰς κάλλος* sind nicht verstanden und darum gestrichen worden. Die Praeposition bezeichnet hier Zweck und Absicht, wie schon Xenophon Kyrup. VIII 1, 33 *εἰς κάλλος ζῆν* gesagt hat. So Phrynichos *BAG* 48, 3 *καλλιγραφῆσαι: εἰς κάλλος γράψαι* Philostr. v. Apoll. 1, 18 *μετὰ δυοῖν θεραπόντοιν, οἵ περ αὐτῷ πατρικὼ ἤστην, ὃ μὲν εἰς τάχος γράφων, ὃ δὲ εἰς κάλλος*; Beispiele aus Galen für diese beiden Verbindungen mit *γράφειν* gibt Gomperz Wiener Stud. 2, 3.

Vorlesers (*anagnostes*, *lector*) eine Schrift vervielfältigten. Als Vorleser bei Atticus kennen wir noch Salvius; zum schreiben und buchbindern verwendete Sklaven werden von Cicero mehrere genannt[35]). Tüchtige Kräfte müssen darunter gewesen und herangebildet worden sein. Atticus' Haus war eine förmliche Schule praktischer Philologie; Gelehrte wie sein Freigelassener Q. Caecilius Epirota *tenellorum nutricula vatum* (Suet. gr. 16) sind daraus hervorgegangen.

Die sparsame und berechnete Zusammensetzung des Hausgesindes legt die Vermuthung nahe, daß Atticus schon bevor ihm die reiche Erbschaft seines mütterlichen Oheims Q. Caecilius im J. 58 zugefallen war, seine Schreiberstuben eingerichtet hatte. In der That macht er bereits im Anfang der 60er Jahre große Büchergeschäfte (Anm. 38), und im J. 60 sehn wir ihn auf der Höhe seiner Unternehmungen[36]). Schon damals hatte er mit dem Alexandrinischen Buchhandel auf dessen eigenstem Absatzgebiet den Wettkampf aufgenommen: er besaß Commanditgeschäfte in Athen und anderen Orten Griechenlands, und seine Geschäftsführer in Asien waren wohl auch mit Buchhandel betraut. Denn Atticus vertrieb nicht nur lateinische sondern auch griechische Litteratur: so kauft Cicero von ihm im J. 59 das geographische Werk des Serapion[37]). Und er beschränkte sich nicht auf die neuesten Erzeugnisse der Beredsamkeit und Wissenschaft: sicherer war das Geschäft mit Büchern, nach denen das große Lesepublicum begehrte, und am sichersten wie heute so damals der Absatz anerkannter Schulbücher, der Classiker. Um aber den vollen Begriff dieses großartigen Betriebs zu gewinnen, darf man nicht übersehen, daß Atticus auch ganze Bibliotheken bereit hielt[38]). In der Zeit der italiänischen Humanisten hat Vespasiano Fiorentino nicht wenige Bibliotheken lateinischer Litteratur hergestellt: das Bedürfniß, die römischen Classiker in sauberen, schön ausgestatteten Hss. zu besitzen, hatte sich vor allem unter den Fürsten Italiens rasch verbreitet und beschäftigte viele Schreiberstuben. Aehnlich war es in dem Rom der Ciceronischen Zeit eine Forderung des guten Tons, seine Pa-

35) Eine Uebersicht gibt Drumann Gesch. Roms 5, 66 f.

36) s. Cic. ad Att. II 1, 2 f. aus dem J. 60.

37) Ebend. II 4, 1.

38) Ebend. I 7 „velim cogites, id quod mihi pollicitus es, quem ad modum bibliothecam nobis conficere possis“ (J. 67); I 10, 4 „bibliothecam cave cuiquam despondeas, quamvis acrem amatorem inveneris. nam ego omnis meas vindemiolas eo reservo, ut illud subsidium senectuti parem“ und 4, 3 (J. 66) „libros tuos conserva et noli desperare eos me meos facere posse“.

läste und Villen mit erlesenen Büchersammlungen auszustatten. Die rasch durchgedrungene griechische Bildung verlangte die griechischen Classiker und die dazu unentbehrlichen Nachschlagebücher; die ältere Periode der lateinischen Litteratur war abgelaufen und ihren Werken hatte eine damals auf ihre Höhe gelangte nationale Philologie die Bedeutung von Classikern verliehen; ein jüngeres Geschlecht regte sich zu neuem dichterischem Flug, fast ausschließlich an das lesende Publicum gewendet: für das Gedeihen und die Verbreitung dieser Poesie der Caesarischen und Augusteischen Zeit war der Aufschwung des Buchhandels eine Voraussetzung. Alle diese Bedingungen seiner Thätigkeit hat Atticus erfaßt und in einer Weise, wie vor der Zeit des Buchdrucks keiner außer ihm es vermocht hat, auszubeuten verstanden.

Eine feine und vielseitige Bildung machte Atticus in hohem Grade zur Leitung buchhändlerischer Unternehmungen geeignet. Er war ein gelehrter Kenner der römischen Geschichte, wie sein *liber annalis* bewiesen hat; über die Technik des buchhändlerischen Betriebs hat er sich sogar schriftstellerisch versucht, als er für das Vervielfältigungsverfahren seiner Bilderhandschriften durch eine Flugschrift Reclame machte (Plin. n. h. 35, 11). Aber auch den Inhalt seiner Verlagswerke zu prüfen und den Rothstift zu gebrauchen verstand er[39]). Für Cicero war er der „Aristarch seiner Reden", es ist etwas mehr als Schmeichelei, wenn er von demselben *grammaticus* genannt wird[40]). Aber auch wenn er ein zweiter Aristarch gewesen wäre, hätten ihn doch die vielartigen Geschäfte, die ihm die Verwaltung seines seit 58 so stark angewachsenen Vermögens auferlegte, außer Stand setzen müssen, die streng philologischen Vorarbeiten auch nur annähernd selbst zu bestreiten, welche eine zweckmäßige Beschäftigung seiner Schreibstuben erheischte. Es gehörte dazu nicht nur die Durchsicht, beziehungsweise urkundliche Herstellung der in die Hände des Anagnosten zu legenden Vorlage, sondern vor allem die Ermittelung der besten Textquellen, ja nöthigenfalls (man denke an eine für das Lesepublicum berechnete Sammlung Plautinischer Komoedien) eine Untersuchung über Echtheit und Unechtheit der Bestandtheile eines schriftstellerischen Nachlasses: Dinge die schließlich doch eine über Vermögen und Wissen auch des gebildetsten Römischen Geschäftsmannes weit hinausgehende Schulung und Gelehrsamkeit

39) Ebend. XV 14, 4 XVI, 11, 1.

40) Ebend. XV 3, 10 „sed quoniam grammaticus es" I 14, 3 (J. 61) „meis orationibus, quarum tu Aristarchus es".

erforderten. Atticus bedurfte dazu technischer Leiter und außerdem gelehrten Beiraths. Ueber diese Verhältnisse fehlt es an unmittelbaren Nachrichten; aber ein wenig läßt sich der Schleier wohl noch lüften.

Wer die Lebensbeschreibung des Atticus liest, die einige Jahre vor dem Tode des Gefeierten herausgegeben worden ist, wird aus dem kammerdienerischen Ton der Lobrede[41]) unschwer herausfühlen, daß die *familiaritas*, deren der Verfasser sich rühmen darf (13, 7), auf einem Verhältniß der Unterordnung beruhte, wie sehr auch die Liebenswürdigkeit des Gönners demselben den Anstrich der Vertrautheit und Freundschaft gegeben haben mochte. Cornelius Nepos muß des Atticus angestellter Leiter der lateinischen Verlagsunternehmungen gewesen sein. Ich folgere das aus einer nicht unbeachtet gebliebenen Andeutung Frontos ep. ad M. Caesarem I 7 p. 20 Nab. Eine Rede Frontos war von dem kaiserlichen Schüler mit eigner Hand abgeschrieben worden; in dem Jubel, in den der eitle Schriftsteller darüber ausbricht, sagt er: „Contigisse quid tale M. Porcio aut Quinto Ennio aut Titio poetae? quid Scipioni aut Numidico, quid M. Tullio tale usu uenit? quorum libri pretiosiores habentur et summam gloriam retinent, si sunt [a] Lampadione aut Staberio aut [Ser]vio [Cl]au[dio] aut Aelio [emendati] aut Attico aut Nepote: mea oratio extabit M. Caesaris manu scribta". Man kann hier doch nur an *'Αττικιανά*, genauer gesagt, an Musterexemplare lateinischer Schriftsteller denken, die von Atticus selbst (wie er das für Freund Cicero wohl that) oder von Cornelius Nepos revidiert waren. Nepos war also an den Verlagsunternehmungen des Gönners betheiligt; in welcher Weise, das ergibt sich von selbst. Ungesucht fällt von hier ein Streiflicht auf die Gönnerschaft, die Nepos jüngeren Dichtern, seinem Landsmann Catullus und vielleicht auch dem T. Lucretius (Att. 12, 4) bewiesen hat. Der Briefwechsel mit Cicero scheint nach den Ueberbleibseln in erster Linie litterarische Fragen behandelt zu haben.

Als gelehrten Berather des Atticus für lateinische Dinge kennen wir M. Terentius Varro. Atticus hatte allen Grund, die Mittheilsamkeit und Hilfsbereitschaft des einzigen Mannes warm zu halten. Für den Grad der Verpflichtung, welche ihm gegenüber Atticus empfand, haben wir einen Maaßstab an dem Eifer, mit welchem er Cicero zu einer litterarischen Huldigung an Varro anhielt[42]). Schon im J. 54 hatte das Atticus in so nachdrücklicher Weise

41) Es genügt auf v. Att. 10, 6 hinzuweisen.

42) Näheres bei Krische in den Göttinger Studien 1845 Abth. II S. 129 ff.

gefordert, daß Cicero sich zu eingehender Entschuldigung gedrungen sah und seine Bereitwilligkeit zusagte. Inzwischen war ihm von Varro die Widmung des Werks *de lingua latina* angekündigt, und eine erneute Mahnung des A. bewirkte, daß er bei der Umarbeitung der Academica den Wunsch des Freundes verwirklichte; Varros Gegengabe folgte erst im nächsten Jahre (44) nach[43]). Nur bei gutem Willen und freundschaftlichem Interesse konnte Varro den Plänen des Buchhändlers so förderlich sein als dieser wünschen mußte. Erst einige Jahre nach Ciceros Tod trat ein Werk an die Oeffentlichkeit, in welchem — wir dürfen es sagen — der Gelehrte geradezu in den Dienst des Buchhändlers gestellt war. Das große Bilderwerk der *Hebdomades*[44]) kann nicht dem inneren Drang des Gelehrten, sondern nur dem äußeren Anstoß des buchhändlerischen Unternehmers seinen Ursprung verdankt haben. Die kurzen Sprüchlein und geschichtlichen Mittheilungen über die berühmten Männer Griechenlands und Roms waren bestelltes Beiwerk, die Hauptsache blieben die Bilder, über deren Vervielfältigung Atticus selbst gehandelt hatte *edito de iis volumine* (S. 199). Die Herstellung eines Werks von 700 Portraitbildern, das „in alle Lande" Verbreitung fand[45]), also massenhaft vervielfältigt ward, setzt nicht nur eine großartige Schreibfabrik, sondern auch besondere und kostspielige Einrichtungen voraus. Solche Einrichtungen trifft ein berechnender Kaufmann nicht für eine vereinzelte Unternehmung. F. Leo hat die Vermuthung zu begründen gewußt[46]), daß die Bilderhandschriften des Terentius mit ihren unmittelbar der Praxis der alten Bühne entnommenen Darstellungen (man denke nur an den Maskenstand vor jedem Stück) aus einer von Atticus veranstalteten Ausgabe abgeleitet sind; seine Ausführungen sind für mich überzeugend. Die Frage, durch welchen Vorgang die Varronische Auswahl der Plautinischen Stücke in unserer Ueberlieferung zur Herrschaft gelangt ist, beantwortet sich nun von selbst.

---

43) s. L. Spengel Ueber die Kritik der Varron. Bücher *de l. l.* S. 16 f. (Abh. d. Münchn. Ak. VII, 2 S. 444 f.), Wilmanns de Varronis libris gramm. p. 37 f. Ich möchte auch auf Cic. Tim. 4, 13 „quae graece *ἀναλογία*, latine (audendum est enim, quoniam haec primum a nobis novantur) conparatio proportiove dici potest" hinweisen: wer das schrieb, hatte Varros Bücher *de l. l.* (s. besonders X 2) noch nicht gesehn.

44) s. Ritschls Opuscula 3, 508 ff.

45) Plinius 35, 11 sagt von Varros *Imagines* „inmortalitatem non solum dedit, verum etiam in omnes terras misit, ut praesentes esse ubique ceu di possent".

46) Rhein. Museum 38, 317—347.

Für die griechische Litteratur mußte Atticus, so weit es nicht um neue Schriften wie Ciceros *ὑπόμνημα* oder Demetrios' Homonymenlexikon sich handelte, entweder abhängig von Alexandreia bleiben oder in Wettbewerb treten. Er konnte die Alexandrinischen Rollen zu Massenpreisen erstehn und durch Einzelverkauf immerhin beträchtlichen Gewinn erzielen. Aber die zahlreichen Sklaven griechischer Herkunft bürgen dafür, daß er den griechischen Bedarf durch die eignen Schreibstuben deckte. Wir müssen zugeben daß wie bei Dichtern wohl durchweg, so auch für manchen Prosaiker den Schreibern des Atticus kein anderer Text vorlag als der durch den Alexandrinischen Buchhandel zum gemeingültigen gewordene. Aus Anführungen Harpokrations[47]) ersehen wir, daß der in den *Ἀττικιανά* enthaltene Text des Redners Aischines von unserer keineswegs glänzenden handschriftlichen Ueberlieferung durchaus nicht zu seinem Vortheil abstach. Aber daß das Verhältniß auch das gerade umgekehrte sein konnte, steht durch Thatsachen fest. In Demosthenes, von dem wir ausgiengen, behaupteten die Atticushandschriften eine Ueberlegenheit über den Alexandrinischen Text, die nur durch Benutzung ganz außergewöhnlicher, die Hilfsmittel der Alexandriner an Güte und Zuverlässigkeit weit überbietender Quellen erklärt werden kann. Im Mittelpunkt der Frage steht hier nach wie vor die dritte Philippische Rede, welche in Σ schon äußerlich durch den wesentlich verringerten Umfang ein ganz anderes Aussehn hat als in den übrigen Hss. Aber wenn auch der Unterschied nirgends so auffällig ist wie dort, die Ueberlegenheit und Ursprünglichkeit unserer Atticushs. bewährt sich überall in den Staatsreden und in den Gerichtsreden aus politischen Processen. Wie aber konnte ein Römer der Caesarischen Zeit über handschriftliche Hilfsmittel verfügen, denen die Alexandriner nichts ebenbürtiges zur Seite zu stellen hatten? Es gibt darauf nur eine Antwort.

Nach den im wesentlichen übereinstimmenden und auf dieselbe Quelle, ich denke, Andronikos zurückweisenden Berichten des Strabon und Plutarch[48]) war die Bibliothek des Aristoteles und Theo-

---

47) Harpokr. p. 32, 22 (Aesch. 2, 99 *ἀργᾶς* : *ἅρπαξ* Att., schlechte Conjectur) und 99, 14 (Aesch. 3, 122).

48) Strabon XIII p. 608 f. *Ἐκ δὲ τῆς Σκήψεως . . . Νηλεύς, ... διαδεδεγμένος τὴν βιβλιοθήκην τοῦ Θεοφράστου, ἐν ᾗ ἦν καὶ ἡ τοῦ Ἀριστοτέλους . . . . ὃ δ' εἰς Σκῆψιν κομίσας τοῖς μετ' αὐτὸν παρέδωκεν, ἰδιώταις ἀνθρώποις, οἳ κατάκλειστα εἶχον τὰ βιβλία οὐδ' ἐπιμελῶς κείμενα . . . . ὑπὸ δὲ νοτίας καὶ σητῶν κακωθέντα ὀψέ ποτε ἀπέδοντο οἱ ἀπὸ τοῦ γένους Ἀπελλικῶντι τῷ Τηΐῳ πολλὰν*

phrast, nachdem sie durch eine testamentarische Verfügung des letzteren (Laert. Diog. 5, 52) in den Besitz des Neleus von Skepsis übergegangen und von dessen Nachkommen lange verborgen gehalten war, von Apellikon aus Teos, dem bekannten Führer der Mithridatischen Partei in Athen[49]), um eine bedeutende Summe angekauft worden. Wie es sich mit den fehlerhaften Ausgaben Aristotelischer und Theophrasteischer Werke verhielt, zu welchen nach Strabo Apellikon seinen Schatz verwerthet haben soll, wissen wir nicht, eine Spur haben sie nicht hinterlassen. Aber unter den Münzen, mit welchen Athen damals diesen letzten Freiheitstaumel begleitete, tragen einige die bezeichnende Beischrift *'Απελλικῶν 'Αριστοτέλης*[50]). Die Bibliothek des erbitterten Gegners der Römer wurde von Sulla bei seiner Rückkehr aus Asien im J. 84 confisciert und nach Rom übergeführt. Dort, hören wir dann weiter, habe der Grammatiker Tyrannion den Vorsteher der Bibliothek zu gewinnen und deren Schätze nutzbar zu machen gewußt. So seien die Werke der Stifter der Peripatetischen Schule nach langer Vergessenheit wieder hervorgezogen worden, indem Tyrannion nach jenen Hss. den größten Theil der Werke herstellte und dann Andronikos sie ordnete und eine bibliographische Uebersicht (*πίνακας*) verfaßte. Man begreift und verzeiht es, wenn Andronikos im stolzen Vorgefühl der Wendung, welche er durch seine Wiederherstellung des Aristoteles dem ganzen Studium der Philosophie bis auf die neue Zeit gegeben hat, den Sachverhalt übertrieb und die Thatsache, daß die jüngeren Peripatetiker von der Pflege der philosophischen Disciplinen im engeren Sinne ganz abgekommen waren, aus der bisherigen Unzugänglichkeit der Aristotelischen Schriften ableitete. Seitdem Brandis diese Uebertrei-

---

ἀργυρίων τά τε 'Αριστοτέλους καὶ τὰ τοῦ Θεοφράστου βιβλία . . . . . εὐθὺς μετὰ τὴν 'Απελλικῶντος τελευτὴν Σύλλας ἦρε τῆν 'Απελλικῶντος βιβλιοθήκην ὁ τὰς 'Αθήνας ἑλών, δεῦρο δὲ κομισθεῖσαν Τυραννίων τε ὁ γραμματικὸς διεχειρίσατο φιλαριστοτέλης ὤν, θεραπεύσας τὸν ἐπὶ τῆς βιβλιοθήκης, καὶ βιβλιοπῶλαί τινες κτλ. (Anm. 26). Die Zeit der Confiscation durch Sulla gibt Plut. Sulla 26, aus dessen Bericht wir folgende Ergänzung des Strabonischen erhalten: *λέγεται δὲ κομισθείσης αὐτῆς εἰς 'Ρώμην Τυραννίωνα τὸν γραμματικὸν ἐνσκευάσασθαι τὰ πολλὰ καὶ παρ' αὐτοῦ τὸν 'Ρόδιον 'Ανδρόνικον εὐπορήσαντα τῶν ἀντιγράφων εἰς μέσον θεῖναι καὶ ἀναγράψαι τοὺς νῦν φερομένους πίνακας*, vgl. Porphyrios Leben Plotins 24 *ὁ δὲ ('Ανδρόνικος) τὰ 'Αριστοτέλους καὶ Θεοφράστου εἰς πραγματείας διεῖλε τὰς οἰκείας ὑποθέσεις εἰς ταὐτὸν συναγαγών.*

49) s. R. Weil in der Archaeol. Zeit. 1876 B. 33, 165 f. und in den Mittheil. des arch. Inst. in Athen 6, 315. 327.

50) Beulé monn. d'Athènes p. 210 Friedländer in Sallets Zeitschr. f. Numismatik 1883 B. 11, 49 f.

bungen zurückgewiesen hat[51]), pflegt man den obigen Bericht mit Mißtrauen zu betrachten. Aber wer gibt uns das Recht, in den thatsächlichen Gehalt der Nachricht den leisesten Zweifel zu setzen? Es läßt sich anderweitig beweisen, daß es seit Tyrannion und Andronikos eine besondere Römische Ueberlieferung des Aristoteles und Theophrast gab im Gegensatze zur Alexandrinischen. Benutzung der Alexandrinischen wird sich schwerlich über die Citate des Athenaios hinaus verfolgen lassen: die Römische blieb Siegerin, sie hat den Aristoteles ins Morgen- und Abendland getragen, und wie sie den Commentatoren des Aristoteles vorlag, so ist sie unsere Quelle geworden.

Tyrannion war im Mithridatischen Kriege, wahrscheinlich bei der Eroberung seiner Vaterstadt Amisos im J. 71 Kriegsgefangener des Lucullus geworden; der Feldherr trat ihn seinem Legaten L. Murena ab[52]). So kam er, schwerlich vor dem J. 67, nach Rom[53]). Ein Schüler des greisen Dionysios Thrax, den er zu Rhodos gehört hatte[54]), war er vielleicht der erste griechische Gelehrte, welcher der Aristarchischen Kunst und Lehre Römischen Boden eroberte, und gelangte, nachdem er freigelassen worden war, zu einem Ansehn[55]), das aus den spärlichen Splittern seiner Leistungen noch uns begreiflich wird. Den Einfluß, den er auf Varro ausübte, darzuthun ist nicht dieses Ortes. Aber nahe berührt uns das Verhältniß des Tyrannion zu Atticus. Er hat diesem im J. 46 sein Werk über die Accentlehre (*περὶ προσῳδίας*) gewidmet, und Atticus vermochte nach dieser Schrift subtilsten fachmännischen, von dem *finis bonorum* weit abliegenden Inhalts sogar seinen Freund

---

51) Im alten Rhein. Mus. (1827) 1, 236 ff. 259 ff.

52) Suidas u. *Τυραννίων*: *ἦχθη δ' εἰς Ῥώμην ληφθεὶς αἰχμάλωτος ὑπὸ Λουκούλλου, ὅτε κατεπολέμησε Μιθριδάτην τὸν Πόντου βασιλεύσαντα.* Varro (p. 187, 9 Wilm.) bei Sergius in Keils *GL* IV p. 529, 10 „Tyrannio Amisenus, quem Lucullus Mithridatico bello captum Lucio Murenae concessit, a quo ille libertate simul et civitate donatus est".

53) s. A. W. Zumpt zu Cic. pro Murena p. X.

54) Suidas *Τυραννίων* . . . . *μαθητὴς ἄλλων τε καὶ Ἑστιαίου τοῦ Ἀμισηνοῦ* . . . . *εἶτα διήκουσε καὶ Διονυσίου τοῦ Θρᾳκὸς ἐν Ῥόδῳ. ἀντεσοφίστευσε δὲ Δημητρίῳ τῷ Ἐρυθραίῳ· ἦχθη δ' εἰς Ῥώμην κτλ.* (Anm. 52).

55) Suidas: *διαπρεπὴς δὲ γενόμενος ἐν Ῥώμῃ καὶ πλούσιος ἐκτήσατο καὶ βιβλίων ὑπὲρ τὰς τρεῖς μυριάδας.* Den nach Zahl und innerem Werth bedeutendsten Theil dieser Bibliothek müssen die Rollen ausgemacht haben, welche von Tyrannion kritisch durchgearbeitet und berichtigt worden waren und den Schreibern des Atticus als Vorlage gedient hatten; die hatte Atticus anzuschaffen, nach gemachtem Gebrauch mochte sie der Grammatiker an sich nehmen.

Cicero neugierig zu machen[56]). Die Verbindung des großen Verlegers mit Tyrannio muß über das J. 60 zurückreichen. Denn Cicero, auf den sie natürlich übergieng, denkt schon im J. 59 daran, Nutzen aus ihr zu ziehen. Im J. 56 unterrichtet Tyrannio den Sohn seines Bruders Quintus und bringt ihm mit Hilfe gewandter Sklaven des Atticus seine Bibliothek in Ordnung; im J. 54 sucht er den Beirath des gelehrten Griechen, um die Bibliothek seines Bruders zu vervollständigen: die Art wie bei dieser Gelegenheit Cicero von ihm redet, beweist, daß ihm Tyrannion als selbständiger und selbstbewußter Mann gegenüber trat. Noch ein äußerlicher Umstand verdient unsere Beachtung: es wird als Merkwürdigkeit berichtet (Anm. 55), daß Tyrannion seine Privatsammlung auf die Höhe von mehr als 30000 Rollen gebracht habe. Diese Bändezahl würde auch für einen reichen Privatmann unbegreiflich sein, wenn nicht besondere Umstände (Anm. 55) die Erwerbung begünstigten. Ich denke, wir haben in Tyrannion den — wir dürfen ihn so nennen — gelehrten Dirigenten der griechischen Abtheilung in Atticus' Verlagsgeschäft wieder entdeckt. Einen berufeneren und bedeutenderen hätte Atticus nicht finden können; er war der rechte Mann am rechten Ort. Natürlich hat Atticus durch seine Verbindungen und zum eignen Vortheil dem gelehrten Gehilfen die im Besitze von Sullas Erben verbliebene Bibliothek des Apellikon zu öffnen gewußt.

Diese Bibliothek enthielt noch einiges andere als Schriften des Aristoteles und seiner Schüler: wenn unsere Berichte nur von Aristoteles und Theophrast reden, so ist das selbstverständlich; sie entstammen der Einleitung, welche Andronikos seinen *Πίνακες τῶν Ἀριστοτέλους καὶ Θεοφράστου* vorausgeschickt hatte. Aristoteles war der erste Privatmann, der eine umfangreiche und planmäßige Büchersammlung angelegt hat[57]), ohne welche die von ihm und seinen Mitarbeitern ausgeführten Werke undenkbar wären.

---

56) Cic. ad Att. XII 2, 2. 6, 2 (vgl. Wilmanns de Varr. l. gr. p. 59). Um über die Schwierigkeiten der mathematischen Geographie sich hinwegheben zu lassen denkt er im J. 59 an Tyrannion, ad Att. II 6, 1. Unterricht von Quintus' Sohn: ep. ad Quintum II 4, 2. Ordnung der Bibliothek: ad Att. IV 4^b 1. 5, 3. 8^a 2. Sorge für die Bibliothek des Bruders: ep. ad Quintum III 4, 5 (dabei „Chrysippo tamen imperabo et cum Tyrannione loquar") 5, 6 („de libris, Tyrannio est cessator").

57) Strabon p. 608 *Ἀριστοτέλης . . . πρῶτος ὧν ἴσμεν συναγαγὼν βιβλία καὶ διδάξας τοὺς ἐν Αἰγύπτῳ βασιλέας βιβλιοθήκης σύνταξιν* vgl. Athen. I p. 3^a *Ἀριστοτέλην τε τὸν φιλόσοφον <καὶ Θεόφραστον> καὶ τὸν τὰ τούτων διατηρήσαντα βιβλία Νηλέα.*

Man vergegenwärtige sich (von den philosophischen Disciplinen will ich gar nicht reden) Aristoteles' Forschungen über die Dichtkunst und Beredsamkeit, über die Geschichte der Staatsverfassungen, über die Naturgeschichte, um eine Vorstellung von dem Umfang der Litteratur zu erhalten, die Aristoteles um sich versammelt haben mußte und Theophrast gewiß entsprechend vervollständigte; die Conception einer Centralstätte der hellenischen Litteratur und wo möglich der orientalischen, welche von den Ptolemaeern verwirklicht wurde, stammte von Aristoteles und war durch seinen Schüler Demetrios nach Alexandreia getragen. Wir sind zur Frage berechtigt, ob Tyrannion von der Hinterlassenschaft der beiden großen Peripatetiker so angelockt worden wäre, daß er ihretwegen die verschlossene Sammlung sich zu öffnen gesucht hätte. Er hat sich ernstlich damit beschäftigt, hat die gröbste Arbeit verrichtet, den vielfach zerstörten Rollen ihren Wortlaut abzugewinnen, er hat sogar ihre Lehre auf sich einwirken lassen; aber die letzten Früchte mühevoller Vorarbeit hat er nicht selbst gepflückt: die Anordnung und Herausgabe überließ er dem Rhodier Andronikos. Also ganz anderes suchte Tyrannion hinter den Schlössern der Sullanischen Sammlung, und er fand was er suchte. Nicht bloß wissenschaftlich werthlose Raritäten wie die Ilias des Apellikon: in seinem Werk über die Accentuation der Ilias hat er sich gehütet davon Gebrauch zu machen. Aber von den großen Prosaschriftstellern Athens, die am raschesten unter der Unbill von Lesern und Schreibern zu leiden gehabt hatten, mußten sich, wenn irgendwo noch auf Erden, dann dort zeitgenössische Exemplare ihrer Schriften finden; hier konnten Isokrates, Platon, Demosthenes wieder erstehn in der Gestalt, wie sie zu Lebzeiten der Verfasser gelesen worden waren. Die Erwartung ist nicht getäuscht worden. Die Ausgaben, die Tyrannion einst nach diesen Rollen für Atticus herstellte, tragen den Abglanz der Ursprünglichkeit noch in den späten, um fast ein Jahrtausend jüngeren Abbildern, dem Parisinus Σ des Demosthenes und dem Urbinas des Isokrates [58]).

---

58) Ich wünsche und hoffe nicht so mißverstanden zu werden, als ob ich die in der Zeit des Atticus umlaufenden Alexandrinischen Texte dieser Autoren, oder gar die ursprünglichen Alexandrin. Ausgaben ohne weiteres mit der Gestalt unserer Vulgathss. identificieren wolle. Diese Texte haben unter dem Einfluß fleißiger Schulstudien im Alterthum selbst und noch im Mittelalter lebhafte Umbildung erfahren. Von der Alexandrinischen Vulgata müssen wir uns aus alten Citaten wie des Dionysios, und aus unmittelbar überkommenen Resten wie dem Isokrates-

Ich dürfte sofort hinzusetzen: auch im Bodleianus und Parisinus A des Platon, wenn ich mich nicht gerade hierfür zu besonderer Beweisführung verpflichtet fühlte.

Es gab auch von Platon Atticushandschriften. Sie werden einmal erwähnt von Galenos in seinem Commentar zum physiologischen Abschnitt des Timaios[59]), wo er eine Besprechung der Stelle Tim. p. 77c mit folgenden Worten beschließt: *αὕτη μὲν ἡ ἐξήγησίς μοι γέγονε κατὰ τὴν τῶν Ἀττικιανῶν*[60]) *ἀντιγράφων ἔκδοσιν. ἐν ἑτέροις δ' εὑρὼν γεγραμμένον „διὰ τὸ τῆς ἐξ ἑαυτοῦ κινήσεως" ἐνενόησα λείπειν τὸ ω στοιχεῖον, γράψαντος τοῦ Πλάτωνος „διὰ τὸ τῆς ἔξω ἑαυτοῦ", ἵνα τὴν μεταβατικὴν κίνησιν ἀποφήσῃ τῶν φυτῶν μόνην.* Die fraglichen Worte, mit deren Verbesserung sich Galenos hier, nicht so glücklich als sein Herausgeber meint, beschäftigt, lauten in seiner vorhergehenden Erörterung *διὰ τὸ τῆς ὑφ' ἑαυτοῦ κινήσεως ἑστερῆσθαι.* Dies also war die Lesung der Atticushss. Es ist zugleich die aller unserer Hss., voran des Parisinus A. Von dem *ἐξ* seiner „anderen" Hss. ist keine Spur erhalten, geschweige von seiner Conjectur *ἔξω*. Es könnte ja der Zufall gespielt haben. Aber wenn wir uns erlauben aus dem einen Fall einen Schluß aufs Ganze zu ziehn, so müssen wir schließen, daß unsere ganze heutige Ueberlieferung Platons aus Atticushss. geflossen ist.

In der That ist unsere Platonüberlieferung[61]) eine einheitliche; gespalten hat sie sich erst im Mittelalter. Titel und Anordnung der Dialoge stehen fest. Beim Uebergang von Papyrus zu Pergament wurde die Sammlung in zwei Bände zusammengefaßt, deren

---

Papyrus von Marseille (A. Schöne in den *Mélanges Graux* p. 481 ff. und B. Keil Hermes 19, 596 ff.) eine Vorstellung machen: sie stand den Atticushss. weit näher als unsere handschriftliche Vulgata. Selbst in der dritten Philippischen Rede war der Unterschied noch nicht so erheblich: wenn ich die stichometrischen Angaben richtig auf die Stammrollen der Alexandr. Bibliothek zurückführe, so hatte das der Vulgatausgabe zu Grund gelegte Exemplar jener Rede nur 21 Zeilen mehr, als es nach der Fassung des Σ hätte haben sollen; es ist bemerkenswerth, daß die wichtigste der Zosimoshss., T in einer Anzahl von Auslassungen mit Σ zusammengeht, s. § 37. 38. 44. 60.

59) Fragments du commentaire de Galien sur le Timée de Platon, publiés ... par Ch. Daremberg (Par. 1848) p. 12. Schneidewin Philol. 3, 127 hat das Verdienst die Stelle zuerst hervorgezogen zu haben.

60) Natürlich auch hier (die Hs. Par. gr. 2283 ist eine Papierabschrift des XVI Jahrh.) wieder die übliche Verlesung *ἀττικῶν* s. Anm. 30; doch hat bereits Daremberg das richtige erkannt.

61) Für das folgende darf ich die grundlegenden Untersuchungen des hochverdienten Platonherausgebers M. Schanz als bekannt voraussetzen.

erster die sieben ersten Tetralogien, der zweite die durch Staat und Gesètze angeschwellte VIII und IXte Tetralogie nebst dem Anhang unechter Schriften enthielt. Die Schicksale beider Bände waren, wie das auch anderwärts, z. B. bei Johannes Stobaeus, Livius usw. vorgekommen ist, verschiedenartig. Aber die jetzige Einheitlichkeit war vor dem Mittelalter nicht vorhanden. Nicht nur Galenos, sondern auch die Neuplatoniker des III und IVten Jahrh. haben neben den Atticushss. andere Texte Platons benutzt, manche haben ihnen vielleicht sogar den Vorzug vor jenen gegeben. Mit der Anordnung nach Tetralogien waren die Platoniker nicht einverstanden [62]), sie sind im IV Jahrh. zur Aufstellung eines eigenen Kanons [63]) von 12, später 10 Schriften, der *διάλογοι πραττόμενοι* [64]), übergegangen; die Wahl des Alkibiades als Eingangsschrift beweist, daß sie sich an eine andere Ausgabe anlehnten, die mit jenem Dialog begann und uns aus Laertius Diog. 3, 62 bekannt ist (Anm. 71). Die Durchmusterung der oben behandelten Phaidonstücke ergibt Belege dafür, daß Iamblichos einen aus der alten Vulgata und aus unserer hslichen Recension gemischten Text vor sich hatte. Wir verstehen den Vorgang durch die Beobachtung, die wir an einer Klasse interpolierter Demosthenesshss. (S. 196) machten und an der Geschichte der lateinischen Bibel machen können: gewöhnliche Exemplare des Buchhandels sind eben nach dem zu kanonischem Ansehn gelangten Text der tetralogisch

62) Vgl. J. Freudenthal, Hellenist. Studien, Heft III (Der Platoniker Albinos) S. 268.

63) Der Kanon des Iamblichos stellte folgende Ordnung der Hauptschriften auf (proll. philos. Plat. 26 in Hermanns Platon t. VI p. 219 f.): Alkibiades I Gorgias Phaidon Kratylos Theaitetos Phaidros Symposion Timaios Parmenides Philebos Gesetze Staat; Proklos strich Gesetze und Staat. Vgl. Proklos zum I. Alk. c. 6 p. 11 Cr. Als Inbegriff der Platonischen Philosophie hatte Iamblichos zwei Dialoge, Timaios und Parmenides bezeichnet (s. Proklos z. Tim. p. 5 Bas. 10ª Schn.). Hier haben wir einen Fall, wo wir die Verengerung der Schullectüre, wie sie uns besonders bei den dramatischen Dichtern bekannt ist, zeitlich fixieren können.

64) Proll. phil. Plat. 26 p. 219 *τούτων δὲ* (d. h. der 10 kanonischen Dialoge) *ἄξιόν ἐστι τὴν τάξιν ζητῆσαι, διότι καὶ τούτους ἠξίωσαν πάντες πράττεσθαι*: über die technische Bedeutung dieses Wortes s. Lobeck Aglaoph. p. 567 und Meineke hist. cr. com. p. 560; ich bitte auch das Scholion zu Greg. Naz. bei Piccolomini *Estratti ined.* p. 19 zu beachten: *παρὰ τῷ Ὑπερείδῃ ἑνὶ τῶν πραττομένων δέκα ῥητόρων*. Auch absolut wird *πράττειν* etwa wie unser „lesen" „studieren" gebraucht, Joh. Mosch. im pratum spirit. 77 (Migne 87, 3 p. 2929d) *ἀπήλθομεν ἐν μιᾷ εἰς τὸν οἶκον Στεφάνου τοῦ σοφιστοῦ . . ., ἵνα πράξωμεν*, und ebend. p. 2932c *κῦρι ἀββᾶ, μὴ πράξωμεν σήμερον*.

geordneten Hss. berichtigt worden. Keine der ehemals gewiß zahlreichen Hss. Platons, welche den neuplatonischen Kanon gaben, ist fortgepflanzt worden. Die beiden Bände der tetralogischen Ausgabe sind ein jeder nur in zwei Exemplaren auf die Höhe des Mittelalters gelangt; ein glücklicher Zufall hat den zugleich gelehrten und wohlhabenden Bibliophilen Arethas veranlaßt die 6 ersten Tetralogien nach einer sehr alten Handschrift abschreiben zu lassen und den Metropoliten von Hierapolis Konstantinos zum Besitzer des für die IXte Tetralogie jetzt allein dastehenden Parisinus A gemacht. Es war eine Folge der geistigen Wandelung, welche durch die Schließung der Schule von Athen im J. 529 markiert wird, daß das Mittelalter uns keine reichere Auswahl von Platontexten hat zukommen lassen. Der Kirchenbann, der auf der Platonischen Philosophie lastete, hat das Studium dieser Werke ertödtet; nach der Zeit des Herakleios ist Platon aus der Schule verschwunden. Erst im elften Jahrhundert, wo Michael Psellos dafür wirkte, wird er wieder hervorgezogen, und von nun an mehrt sich rasch die Zahl der Abschriften [65]).

Unsere Hss. gehn, wie schon bemerkt, auf eine Ausgabe zurück, die nach Tetralogien geordnet war. Diese Anordnung wird Thrasyllos dem bekannten Astrologen des Kaisers Tiberius zugeschrieben. Und an diese Nachricht hat sich dann begreiflicher Weise der Mythus angerankt, daß eine Ausgabe des Thrasyllos die Quelle unserer tetralogischen Hss. sei [66]). Wo ist überhaupt der Zeuge auch nur dafür, daß Thrasyllos diese Anordnung geschaffen [67])? Der es am deutlichsten zu bezeugen schien, Laertius Diog. drückt sich in einer Weise aus, die zu jenem Mißverständniß nicht hätte Anlaß geben dürfen, III 56 *Θρασύλος δέ φησι* [*καὶ*] *κατὰ τὴν τραγικὴν τετραλογίαν ἐκδοῦναι αὐτὸν* (d. h. Platon) *τοὺς διαλόγους*; dann gibt er § 57—61 die ganze Reihe der erhaltenen Schriften bis einschließlich der Briefe in genauer Aufzählung, eingeleitet durch ein *φησί* (Thrasyllos), und geschlossen

---

65) s. de Stephano Alex. commentatio (auch im Bonner ind. schol. 1879) p. 6 f.

66) So kürzlich noch Wentzel a. O. (Anm. 1) p. 28 „i nostri codici manoscritti si connettono, com' è noto, all' edizione fatta da Trasillo all' epoca dell' imperatore Tiberio".

67) Meinen Freund W. v. Christ bitte ich es zu entschuldigen, wenn ich durch seine Bemerkungen in den Platon. Studien S. 5 f. (Abh. d. Münchner Akad. B. XVII, 2 S. 455 f.) mich der Pflicht einer schärferen Beweisführung nicht enthoben glaubte. Die wesentlichen Momente hatte übrigens schon Mullach Democr. p. 97 f. hervorgehoben.

durch die Angabe: *καὶ οὗτος μὲν οὕτω διαιρεῖ καὶ τινές*. Wenn Thrasyllos kein Lügner oder Fälscher war, so müssen ihm Platons Dialoge tetralogisch geordnet vorgelegen haben in einer Ausgabe, die ihm mehr als andere den Eindruck der Ursprünglichkeit machte und als Authentikon Platons gelten konnte. Daß der Leibsternseher des Tiberius Platoniker war, begreifen wir; daß er Philologe und kritischer Herausgeber gewesen, ist etwas weniger wahrscheinlich. Warum soll Thrasyllus nicht jene von Laertius ausgezogene pinakographische Uebersicht der Dialoge in einer Einleitungsschrift zu Platon gegeben haben, wo er dann auch Gelegenheit finden konnte den Stammbaum des Philosophen bis auf den Gott Poseidon zurückzuführen (Laert. D. 3, 1), also über sein Leben zu handeln? Wir können sogar noch den Titel dieser Schrift nach dem Vorbild eines gleichartigen Buchs, das Thrasyllos über Demokritos verfaßt hat (Laert. Diog. 9, 41), angeben: *Τὰ πρὸ τῆς ἀναγνώσεως τῶν Πλάτωνος βυβλίων* oder meinethalben *διαλόγων*.

Die pinakographische Liste des Thrasyllos hat Laertius eingeschoben in den Auszug aus einer älteren Einleitung in Platon (§ 47—81). Dieser Auszug war allem Anschein nach bereits Bestandtheil desjenigen Werks über die Philosophenschulen, das Laertius als Manuscript für seine eilfertige Compilation benutzt hat; denn zu Anfang jenes Auszugs hat er § 47 eine Anrede an die gelehrte Dame stehn lassen, der jenes Werk gewidmet war[68]). Das letztere aber kann nicht später als in den letzten Jahren des I Jahrh. n. Chr., unter den Flaviern, entstanden sein, da die Abfolge der Stoa, der dämals hervorragendsten Schule, darin mit Cornutus abgeschlossen wurde[69]). Die dafür benutzte Einleitungsschrift zu Platon reichte also über die Neronische Zeit zurück, wie denn auch, was darin z. B. über die verschiedene Anordnung (§ 61 f.) und über die kritischen Zeichen der Dialoge (§ 65 f.) gesagt wird, uns in den Bereich Alexandrinischer Ueberlieferung versetzt. Nun wird in der Stelle über andere Ordnungen der Platonischen Schriften, die gegenwärtig den Einschub aus Thrasyllos unterbricht[70]), die tetralogische Sammlung ausdrücklich erwähnt:

---

68) s. Epicurea p. XXXIII Anm.

69) s. V. Rose im Hermes 1, 371 f.

70) Da Laertius die vollständige Liste der Platonischen Schriften § 57—61 aus Thrasyllos nimmt, so muß er diesem auch das Verzeichniß der unechten Dialoge § 62 entlehnen; der Beweis dafür liegt in der Thatsache, daß die in die Tetralogien vertheilten unechten Dialoge in diesem Verzeichniß der *νόθοι* fehlen, während doch Thrasyllos selbst die Echtheit jener keineswegs gläubig hingenom-

§ 62 ἄρχονται[71]) δ' οἱ μέν, ὡς προείρηται, ἀπὸ τῆς Πολιτείας (Aristophanes Byz. § 61), οἱ δ' ἀπὸ Ἀλκιβιάδου τοῦ μείζονος (s. S. 208), οἱ δ' ἀπὸ Θεάγους, ἔνιοι δὲ Εὐθύφρονος usf. Man könnte sagen, daß diese Wiederholung ohne rückweisenden Zusatz nur eine Probe der bei Laertius nicht ungewöhnlichen Gedankenlosigkeit sei. Aber Freudenthal hat gezeigt, daß dieselbe Einleitung zu Platon, welche bei Laertius ausgezogen ist, auch von Albinos benutzt wurde[72]); und hier hören wir c. 4 p. 324, 5 Fr. οἱ μὲν ἀπὸ τῶν ἐπιστολῶν ἄρχονται· οἱ δέ τινες ἀπὸ τοῦ Θεάγους· εἰσὶ δὲ οἱ (so die Hs., οἱ die Ausgaben) κατὰ τετραλογίαν διελόντες αὐτοὺς κατατάττουσι (καὶ τάττουσι Hs.) πρώτην τετραλογίαν περιέχουσαν τὸν Εὐθύφρονα καὶ τὴν Ἀπολογίαν καὶ τὸν Κρίτωνα καὶ τὸν Φαίδωνα .... ταύτης τῆς δόξης εἰσὶ Δερκυλλίδης καὶ Θράσυλλος, welche Ansicht dann bekämpft wird. Durch diese vollständigere Fassung der alten Platon-Einleitung wird es sicher gestellt, daß Laertius die obige Stelle bereits in seiner Quelle gefunden hat, und wir hören weiter, daß außer Thrasyllos auch der als gelehrter Commentator Platons bekannte Derkyllides die tetralogische Anordnung empfohlen hatte. Wir können die Zeit des Mannes nicht genauer bestimmen: aber der zeitlich dem Thrasyllos sehr nahe stehende Verfasser der Einleitung hat ihn ohne Zweifel als Vorgänger des Thrasyllos angesehn[73]). Wir wissen nun daß unter den τινές des Laertius 3, 61 (S. 210) auch ältere Gelehrte eingeschlossen sind.

Daß nicht die pinakographische Liste, geschweige denn eine Ausgabe des Thrasyllos unseren Hss. zu Grund liegt, dafür glaube ich noch einen weiteren Beweis zu haben. Die Liste der unechten Dialoge bei Laertios 3, 62 kann nicht wohl von dem vorausgehenden Pinax des Thrasyllos getrennt werden (Anm. 70). Zu bequemerer Vergleichung stelle ich die Reihenfolge der im Anhang un-

---

men hatte, vgl. Laert. 9, 37 εἴ περ οἱ Ἀντεφασταὶ Πλάτωνος εἰσί, φησὶ Θρασύλος, und erst hierdurch die Eingangsformel dieses Verzeichnisses § 62 νοθεύονται δὲ τῶν διαλόγων ὁμολογουμένως Μίδων κτλ. verständlich wird. Der Zusatz aus Thrasyllos ist also von den Schreibern zerrissen worden, was nach den in den Epicurea p. XXIII ff. vorgeführten Beobachtungen niemanden wundern wird.

71) Dieses ἄρχονται wird verständlich erst aus Albinus c. 4, durch den es feststeht, daß es sich um den Anfangsdialog zweckmäßiger Lectüre des Platon handelt. Daß dieser für viele mit dem Anfang der gesammelten Werke zusammenfallen konnte, ist selbstverständlich und trifft zu beim Staat und beim Euthyphron, wahrscheinlich auch beim Alkibiades; aber es war nicht nothwendig.

72) Freudenthal a. O. (Anm. 62) S. 257 ff.

73) So auch W. v. Christ, Platon. Studien S. 6 (456).

seres Platonischen Corpus erhaltenen unechten Schriften[74]) und die von Laertius gegebene Liste neben einander, indem ich bei der letzteren die Ordnungszahlen der ersteren beifüge:

(Hss.)	(Laertius 3, 62)
I* *Ὅροι*	*Μίδων ἢ Ἱπποτρόφος*
II* *Περὶ δικαίου*	(VII) *Ἐρυξίας ἢ Ἐρασίστρατος*
III* *Περὶ ἀρετῆς*	(VI) *Ἀλκυών*
IV *Δημόδοκος*	*ἀκέφαλοι η̄*[75])
V *Σίσυφος*	(V) *Σίσυφος*
VI *Ἀλκυών*	(VIII) *Ἀξίοχος*
VII *Ἐρυξίας*	*Φαίακες*
VIII *Ἀξίοχος*	(IV) *Δημόδοκος*
	Χελιδών
	Ἑβδόμη
	Ἐπιμενίδης.

Die drei ersten Bestandtheile unserer Sammlung fehlen der zweiten Liste, ohne daß wir diesem Umstand Gewicht beimessen dürften. Denn die Definitionen (I) sind erst nachträglich, sicher nach der Augusteischen Zeit zugewachsen, und die beiden Schusterdialoge (II. III) hat jeder das Recht unter dem Sammelbegriff der *ἀκέφαλοι* in der Tafel des Laertius zu suchen. Aber außer diesen 8 (bezw. 6) eingangslosen Disputationsübungen zählt die letztere fünf unechte Dialoge mehr als unsere Sammlung, und zeigt die uns erhaltenen fünf in ganz abweichender Reihenfolge. In der Gesammtausgabe eines so anerkannten Schriftstellers wie Platon wurden sorgsam auch die als unecht betrachteten Stücke fortgeführt. Wenn also, wie wir annehmen müssen, Laertius diese Liste aus Thrasyllos entnommen hat, so ist es unmöglich, daß dieser irgend welchen Einfluß auf unsere Ueberlieferung geübt habe. Daß er mehr unechte Schriften nennt als sich in der von ihm vorgezogenen tetralogischen Ausgabe fanden, erklärt sich aus dem Charakter seiner Schrift; er hat den unechten Bestand aus dem Alexandrinischen Katalog oder einer ebendaher stammenden Ausgabe ergänzt.

Nachdem Thrasyllos hoffentlich für immer von dem Verdacht befreit ist zu unserer tetralogischen Ausgabe eine andere Beziehung zu haben als daß er sie benutzte, können wir weiter vor-

---

74) Ueber Parisinus A s. Bekkers Plato t. I 1 p. VII, im übrigen s. M. Schanz, Studien zur Geschichte des Platonischen Textes S. 13 ff.

75) Die Benennung *ἀκέφαλοι* kann sich nicht auf die nachher einzeln genannten Dialoge beziehn, da deren nur 7 sind und die Bezeichnung wenigstens für Sisyphos und Axiochos ganz unzutreffend sein würde.

dringen. Einen festen Halt gewährt uns dabei Varro de lingua lat. VII 37 p. 323 „Plato in quarto de fluminibus apud inferos quae sint, in his Tartarum appellat. quare Tartari origo Graeca“. Von den Flüssen der Unterwelt und dem grundlosen Wasser der ungeheuren Tartaros-Schlucht spricht Platon nur im Phaidon p. 112ᵃ—114ᵇ. Der Phaidon aber ist nach der tetralogischen Ordnung der vierte Dialog der ganzen Reihe, während er nach Aristophanes der XIVte, für die mit der Apologie beginnenden der dritte war. Das hätte, seitdem Petrus Victorius es ausdrücklich bemerkt hatte[76]), von niemandem verkannt werden sollen. Daraus folgt, daß Varros Platon dieselbe Anordnung hatte wie unsere Handschriften.

Wer konnte auf diese tetralogische Anordnung verfallen? Hat Platon auch in zwei Fällen die Absicht gehabt ein viergliedriges Werk zu verfassen, so ist doch keiner dieser Pläne zu voller Ausführung gelangt. Es ist bei zwei Trilogien geblieben. Aristophanes von Byzanz, welcher fünf Trilogien Platonischer Schriften aufstellte und die übrigen Dialoge einzeln ohne Ordnungsprincip folgen ließ[77]), hat nur die eine derselben, Staat Timaios Kritias, als solche erkannt und darum in den Anfang gestellt. Durch die bloße Analogie der Attischen Tragoedie konnte ebenso wenig ein Alexandrinischer Gelehrter darauf geführt werden, für Platons Dialoge tetralogische Composition zu fordern. Denn trotz der Didaskalien gab es für Apollonios Rhodios, Aristophanes und Aristarch nur Trilogien attischer Tragoedien[78]): die Satyrdramen, großentheils verloren, wurden nicht in Betracht gezogen. In der Dreigliederung, wie sie Aristophanes versucht hatte, traf aber die Analogie der Tragoedie mit Thatsachen Platonischer Schriftstellerei zusammen. Davon abgehn konnte nur wer von außen her ein der Sache selbst fremdartiges persönliches Motiv, den Wunsch die Vierzahl durchzuführen, heranbrachte; einem solchen war es freilich noch leichter einen scheinbaren Grund dafür aus der Geschichte der Tragoedie beizubringen (Laert. D. 8, 56) als sämmtliche Dia-

76) P. Victorius Var. lect. 18, 2 p. 268 (Flor. 1553). Die mit Platon streitende Aenderung, welche Scioppius vorgeschlagen und C. O. Müller voreilig in den Text aufgenommen hat, *in quattuor fluminibus*, ist von Mullach Democr. p. 97 f. Anm. treffend zurückgewiesen worden, und hat auch Christ, Plat. Stud. S. 5 f. nicht getäuscht.

77) Laertius Diog. 3, 61 f.

78) Schol. Ven. zu Arist. Fröschen 1124 *τετραλογίαν φέρουσι τὴν Ὀρέστειαν αἱ διδασκαλίαι . . . Ἀρίσταρχος καὶ Ἀπολλώνιος τριλογίαν λέγουσι χωρὶς τῶν σατυρικῶν* (lies *σατύρων*).

loge in angemessene Gruppen von vieren zu vertheilen. Nun kennen wir einen bedeutenden griechischen Grammatiker, der sein noch in vielen versprengten Resten erkennbares System der Philologie mit durchgeführter Viertheilung aufgebaut hatte [79]). Das war Tyrannion von Amisos. Seine Zeit und Verhältnisse passen wohl zu der bei Varro nachgewiesenen Spur seiner Ausgabe.

Eine Ausgabe Platons hatte Tyrannion geschaffen. Das folgt schon aus dem Wortlaut Varros; denn man citiert nach der Ausgabe, die man einsieht, aber nicht nach einem abweichenden Katalog. Es ist ferner selbstverständlich nach dem, was oben über die Thätigkeit dieses Grammatikers in Rom ermittelt wurde. In unserem Falle wird es aber auch ausdrücklich bezeugt. Während wir sonst nur von Handschriften des Atticus hören, hat Galen für sie die bezeichnenden Worte *τὴν τῶν Ἀττικιανῶν ἀντιγράφων ἔκδοσιν* (oben S. 207). Hinter der „Ausgabe" des Platon, die in den Atticushss. vorlag, stand also ein Gelehrter, der verschieden war von dem Manne, dessen Namen die „Abschriften" trugen. Es wird dadurch unserer bisherigen Erörterung über die Atticushss. ein urkundliches Siegel aufgedrückt.

Die neu entdeckten Phaidonreste können uns veranschaulichen, daß Tyrannion bei Platon mindestens so viel, wahrscheinlich weit mehr zu leisten vermochte als bei den großen Rednern. Vor Erfindung des Buchdrucks haben wohl kaum Prosawerke so gewaltigen Erfolg gehabt wie Platons Dialoge. Nach ihrem Erscheinen riß man sich um sie; die glücklichen Besitzer konnten Geldgeschäfte durch Verleihen machen [80]). Ein Schüler Platons Hermodoros kam dem Bedürfniß entgegen, indem er die Vervielfältigung und Verbreitung der Schriften kaufmännisch betrieb. „Es treibt mit Büchern Hermodor Exportgeschäft" klang es aus der gleichzeitigen Komoedie zurück [81]). In Massen wurden die Rollen dem Westen zugeführt; ganz Sicilien und Unteritalien war der Bewunderung für den Schriftsteller voll, auch in der Ferne wurde er eine geistige Macht [82]). Die niemals wieder erreichte Anmuth

79) Vorläufig verweise ich auf meine Schrift Philologie und Geschichtswissenschaft S. 22 f.

80) Antigonos Karystios (v. Wilamowitz p. 122 vgl. 116) bei Laertius Diog. 3, 66.

81) s. E. Zeller De Hermodoro Ephesio et Herm. Platonico (Marburger Gratulationsschrift von 1859) p. 17 f. und Anm. 82.

82) Hercul. Katalog der Akademiker p. 6 der Büchelerschen Ausgabe (Greifsw. Progr. 1869) *Ἑρ[μόδ]ωρος Συρακόσιος ὁ καὶ πε[ρὶ αὐτοῦ γ]ράψας καὶ τοὺς λό[γους ε]ἰς Σικελίαν [ἐμπ]ορε[υσάμενο]ς.* Die Wirkung schildert der untergeschobene Brief des Xenophon Ep. Socr. 22 p. 625 Hercher *Πλάτων μὲν γὰρ δή-*

mimetischer Einkleidung gab der Gedankentiefe und dem Adel der Gesinnung einen Geleitbrief, der diesen Dialogen über die Kreise der litterarisch Gebildeten hinaus Verbreitung erwirkte. Aristoteles konnte es wagen seinen Korinthischen Dialog mit der Fiction einzuleiten, daß ein Bauer durch die Lectüre des Platonischen Gorgias von Begierde nach dem Unterrichte des Meisters ergriffen Acker und Weinberg im Stich gelassen habe; ein anderer Dialog jener Zeit muß die Quelle der Legende gewesen sein, daß eine Arkadierin Axiothea durch Platons Staat zur Akademie hingezogen worden sei und dort in Männerkleidern unerkannt den Vorträgen beigewohnt habe[83]). Diese Wirkung der Dialoge erklärt den raschen Verfall ihres Textes, woran, wie wir gesehn, auch denkende Leser, die vorwärts und rückwärts zu blicken verstanden, thätigen Antheil genommen haben. Es läßt sich kaum erwarten, daß die Stammexemplare der Alexandrinischen Bibliothek erheblich besser und getreuer gewesen sein sollten, als es die Phaidonrolle von Arsinoe war. Um so augenfälliger mußte sich vor den gangbaren Exemplaren der Text auszeichnen, der von Tyrannion mit Hilfe von Rollen hergestellt werden konnte, die bis in die Zeit Platons zurückreichten.

ναταί τι μέγα καὶ ἀπὸν τοῖς λόγοις (durch die Dialoge), *ὅθεν ἤδη καὶ περὶ Ἰταλίαν θαυμάζεται καὶ περὶ Σικελίαν πᾶσαν.*

83) Beides bei Themistios R. XXXIII p. 356 Dind., vgl. Bernays Dialoge des Arist. S. 89 f. und V. Rose Arist. frr. 64 p. 74 (III. Ausg.).

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

August, September, Oktober 1891.

(Fortsetzung.)

La Reale Scuola Normale superiore di Pisa. Annali. Filosofia e Filologia. Vol. VII. Pisa 1890.

Rassegna Delle Scienze Geologiche in Italia. Anno 1. 1° Semestre. 1891. fasc. 1° e 2°. Roma 1891.

Universidad Central de España. Memoria del Curso de 1889—90. Annuario del 1890—91. Madrid 1891.

Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas. Vol. X. N. 3. Coimbra 1891.

U. S. Coast and Geodetic Survey. Report of the fiscal year ending with June 1889. Part I Text. Part II Plates. Washington 1890.

The Washington University Eclipse Party. Report. The total Eclipse of the Sun. Jan. 1. 1889. Cambridge 1891.
Missouri Botanical Garden. Second annual report. St. Louis, Mo. 1891.
Museum of Comparative Zoology at Harvard College. Bulletin a) Vol. XXI. N. 5. b) Whole series. Vol. XVI. N. 10. Cambridge. U. S.
American Philosophical Society. Proceedings. Vol. XXIX. N. 135. Philadelphia.
Nova Scotian Institute of Natural Scienne. Proceedings. Vol. VII. Part IV. Halifax 1890.
Boston Society of Natural History. Vol. XXV. Part I. Mai 1890—Dec. 1890. Boston 1891.
The Journal of Comparative Neurology. Vol. I, June 1891. Cincinnati Ohio.
American Geographical Society. Bulletin. Vol. XXIII. N. 3. Sept. 1891. New York
The Academy of Natural Sciences of Philadelphia. Proceedings. 1891. Part I. Jan.—March. Philadelphia.
The Alumni Association. Annual Report. 27th. 1890—91. Philadelphia 1891.
University of Nebraska. Bulletin. N. 17. Vol. IV. Lincoln Nebr.
Observatorio Nacional Argentino. Observaciones de Año 1880. Vol. XIII. Buenos Aires 1891.
La Sociedad Cientifica Argentina. Anales. Julio, Agosto, Setiembre 1891. Entrega 1. 2. 3. Tomo XXXII. Buenos Aires 1891.
Revista Argentina de Historia Natural. Tomo I. Agosto 1° de 1891. Entrega 4a. Buenos Aires 1891.
Deutsche Gesellschaft für Natur- u. Völkerkunde Ostasiens in Tokio. Mittheilungen. 46. Heft. Band V. Seite 235—294. Yokohama.

Nachträge.

Kleinere Schriften von Theodor Benfey herausgeg. von Ad. Bezzenberger. 2. Band. 3. u. 4. Abth. Berlin 1892.
Fauna. Verein Luxemburger Naturfreunde. Année 1891. No. 3. Luxemburg.
La Société Mathématique de France. Bulletin. Tome XIX. N. 6. Paris.
Iconography of Australian Salsolaceous Plants by Baron F. v. Mueller. Seventh Deeade. Melbourne 1891.

November 1891.

Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Sitzungsberichte. XLI—XLVI. Berlin 1891.
Königl. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig. Abhandlungen. a. mathematisch-physische Classe. Band XVII. N. VI. b. philologisch-historische Classe. Band XIII. N. II. Leipzig 1891.
Das Gibbon-Hirn von W. Waldeyer. Sonderabdruck aus „Internationale Beiträge zur wissenschaftl. Medicin". Festschrift für R. Virchow. Band I.
Naturwissenschaftlicher Verein in Hamburg. Abhandlungen. Band XI. Heft II u. III mit Titel und Register zu Band XI. Hamburg 1891.
Physikalischer Verein zu Frankfurt a. M. Jahresbericht für 1889—1890. Frankfurt a. M. 1891.
Deutsche Morgenländische Gesellschaft. Zeitschrift. 45. Band. III. Heft. Leipzig 1891.
Leopoldina. Heft XXVII. N. 19—20. Halle a. S. 1891.

(Fortsetzung folgt.)

Inhalt von No. 6.
Hermann Usener, Unser Platontext. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

6. April. **№ 7.** 1892.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 5. März.

Wieseler schickt „Bemerkungen zu den Attributen und Symbolen des Dionysos“ ein.

Wallach legt einen Aufsatz vor: „Ueber neue chemische Verbindungen aus Pflanzenstoffen“ und fügt einen zweiten desselben Inhalts von Herrn Professor Marmé bei.

Liebisch legt eine Arbeit des Herrn Privatdocenten Dr. Hecht in Königsberg in Pr. vor: „Beiträge zur geometrischen Krystallographie“.

Klein legt vor: 1. von Herrn Prof. Dr. Hurwitz in Königsberg in Pr.: „Zur Theorie der Abelschen Funktionen“.

2. vom Herrn Privatdocenten Dr. Schönflies: „Ueber geradlinig-begrenzte Theile von Riemannschen Flächen“.

3. von Herrn Fricke in Kiel: „Drei kleine Noten:
   a. über gewisse discontinuirliche Gruppen;
   b. über Modularcorrespondenzen 7^r Stufe;
   c. über die s Function (2. 3. 7.)“.

4. von Ritter in Cassel: „Die eindeutigen automorphen Formen vom Geschlecht 0“.

Der Sekretar legt eine Abhandlung von Herrn Prof. Dr. Lindemann in Königsberg in Pr., Korrespondenten in d. Mathemat. Klasse, vor: „Ueber die Auflösung algebraischer Gleichungen durch transcendente Functionen. II.“.

Zu den Attributen und Symbolen des Dionysos.

Von

Friedrich Wieseler.

1.

Ueber den Stier als Attribut des Dionysos.

Es ist manchmal schwer mit Sicherheit zu bestimmen, ob der Stier als Attribut des Dionysos zu fassen ist oder als der Gott selbst. Dennoch steht fest, daß er als Attribut öfter vorkommt als man bisher bemerkt hat, wenn auch verhältnißmäßig nur selten.

Einige hierher gehörende Münztypen sind schon in dem Aufsatze über den Stierdionysos in diesen Nachrichten 1891 n. 11, S. 368 (wo es sich um die von Imhoof-Blumer herausgegebene Münze von Skepsis „Griech. Münzen“ Taf. VIII n. 9 handelt), angeführt; vgl. auch die Vasenbilder, welche Stephani im Compte rendu de la commiss. archéol. pour l'ann. 1863, p. 134, Anm. 5 erwähnt.

Ein sicheres Beispiel bietet ferner das Mosaikbild bei Bartoli Gli ant. sepolcri tav. 14, wo nebst anderen Thierattributen des Dionysos auch der Stier um die Darstellung des Gottes herum angebracht ist.

Besonders interessant ist Folgendes. Stephani hat im Compte rendu pour l'ann. 1873, Taf. III, n. 15 einen in der Krima gefundenen goldenen Stierkopf herausgegeben und S. 57 besprochen, „welcher im Wesentlichen fünf anderen, schon früher den Gräbern des südlichen Rußlands entnommenen Stierköpfe entspricht und ebenso wie jene augenscheinlich aus dem vierten Jahrhundert v. Chr. stammt“. Die Köpfe dienten als Amulet. Man bemerkt „an der Stirn auch dieses Kopfs den zarten, ursprünglich mit Email verzierten Epheu-Kranz, welcher nicht daran zweifeln läßt, daß der Verfertiger den Stier als dem Dionysos gewähltes Thier bezeichnen wollte“.

Der Stier kommt ferner als Reitthier des Dionysos vor auf dem bekannten alterthümlichen Vasenbilde in Gerhard's auserlesenen Vasenbildern Taf. 47, der El. d. mon. céramogr. T. III, pl. 4, bei Panofka Poseidon und Dionysos Taf. I, n. 1, welchem Beispiele Stephani Compte rendu pour l'ann. 1863, p. 128 fg. noch ein zweites auch von einem alterthümlichen Vasenbilde (Fiorelli

Notizia dei vasi del conte di Siracusa tav. 1, 2, Bull. Nap., N. S., T. V, t. 10, 1. 2) hinzufügt.

Auch als Zugthier vor den Wagen des Gottes finden wir ihn. Auf einem rothfigurigen Vasenbilde aus der Cyrenaica erscheint er nebst einem Greifen und einem Panther vor dem Wagen des jugendlichen mit einem Thyrsos versehenen Dionysos dahingaloppirend, vgl. Heuzey Le char de Dionysos in Association des études Grecques, 1879, Bildtafel. Auf einem geschnittenen Steine des Britischen Mus. ist nach Murray Catal. of engraved gems in the Brit. Mus. p. 123, n. 956 dargestellt Dionysos, youthfull, seated in car drawn by two oxen; thyrsos in l. haud, kantharos in r.

Ferner gehört nach unserem Dafürhalten ein ausgezeichnetes Wandgemälde aus Pompeji hieher. Es ist das von Helbig Wandgemälde der vom Vesuv verschütteten Städte n. 379 verzeichnete, bei Zahn Die schönsten Ornamente Th. III, Taf. 3, bei Fausto e Felice Niccolini Le case ed i monumenti di Pompei Fasc. I, tav. 1 abgebildete, welcher letzteren Abbildung Welcker in den A. Denkm. IV, Taf. 1 verkleinert wiedergegeben hat, wo auf S. 205 fg. auch seine schon in den Mon. Ann. e Bull. d. Inst. arch. 1856 p. 35 fg. gegebene ausführliche Erklärung wiederholt wird. Man erblickt auf einem mit zwei Stieren bespannten speichenrädrigen Wagen sitzend Silen mit dem nakten Dionysosknaben auf dem Schooße, der mit dem von dem Alten bebänderten Thyrsis spielt. Rechts von dem Wagen gewahrt der Beschauer Bacchantinnen und Satyrn, von denen einige Musik machen, vor dem Wagen neben dem einen Stier auch Pan, auf der linken Seite drei Weiber, von denen das eine auf dem Erdboden steht, die beiden anderen noch auf dem Wagen. Das vordere dieser Weiber reicht dem auf dem Erdboden stehenden ein großes glockenförmiges Gefäß hin, welches von diesem am oberen Rande gefaßt wird. Es ist durchaus irrig, wenn man durchweg angenommen hat, daß das auf dem Erdboden stehende dem anderen das Gefäß reiche. Was das dritte wenig zu Gesicht kommende Weib auf dem Wagen mache, ist nicht deutlich zu erkennen. Vermuthlich beschäftigt es sich mit einem anderen Gegenstande, der auch von dem Wagen herabgegeben werden soll. Welcker nimmt an, daß das Gefäß (oder der „Korb“) mit Trauben gefüllt sei: „über den Rand des Gefäßes ragen die Trauben nicht hervor, weil diesen gerade die unten stehende, die Last hebende Figur faßt“. Aber dieses geschieht doch nur mit der einen Hand und neben derselben wäre Platz genug für die Trauben gewesen. Die Trauben sollen auf den Wagen gehoben werden „um dem Kind nahe zu

seyn, wenn es Lust zu Trauben haben wird, die ihm oft in andern Bildern gereicht werden". Von einer solchen Lust findet sich hier bei dem Kinde keine Spur. Der Inhalt des Gefäßes geht offenbar das Kind nicht an, wenigstens nicht allein. Man hat sich ihn als Wein zu denken. Ebenso klar ist es, daß es sich nicht um den Anfang eines Zuges handelt, sondern um das Ende. Es soll nun ein Trinkgelage abgehalten werden von der ganzen festfeiernden Menge. Das Fest wird als ländliches zu denken sein. Deshalb paßt das Stiergespann besonders gut. An eine eigentliche gewöhnliche Erntefeier ist aber nicht zu denken.

Endlich kommt noch ein Metopenrelief aus Terracotta von Pästum in Betracht, welches E. Maaß in den Annali d. Instituto di corresp. archeol. Vol. LIII, tav. d'agg. E. herausgegeben und p. 87 fg. besprochen hat. Man erblickt den unbärtigen Dionysos und die Selene auf einem mit zwei sprengenden Stieren, welche von der letzteren gelenkt werden, bespannten Wagen neben einander stehend. Es handelt sich um den nächtlichen Dionysos (*Νυκτέλιος*) und Selene seine Begleiterin (Nonnos Dion. XLIV, 218). Dieselben sind nach meiner in den Götting. gel. Anzeigen 1891 S. 612 dargelegten Ansicht auch auf dem Diptychon zu Sens dargestelt, auf der einen Seite Selene mit dem Stiergespann, auf der anderen Dionysos auf dem Kentaurengespann, beide im Emporfahren aus dem Meere begriffen. Auf der in Rede stehenden Metope hat man sich beide vereinigt als am Himmel einherfahrend zu denken. Beiden Göttern kommt das Stiergespann zu. Auf der Metope wird man dasselbe zunächst dem Dionysos zuschreiben müssen, weil dieser größer dargestellt ist und durch das Scepter als der vornehmere bezeichnet wird, und weil der Wagenlenker nicht der zu sein pflegt, dem das Gespann gehört.

2.

Dionysos mit Widderhörnern.

Zu den schwierigsten Fragen gehört die über den unbärtigen Kopf mit Widderhörnern. Sie ist schon von Eckhel Doctr. num. IV, p. 118 beantwortet und zwar dahin, daß der Libysche Dionysos gemeint sei, der Sohn des Ammon. Der Eckhel'schen Ansicht ist von mehreren früheren Gelehrten kurz beigeflichtet, vgl. die Anführungen bei L. Müller Numismatique de l'anc. Afrique p. 103. Am ausführlichsten hat sie dieser Dänische Gelehrte zu begründen versucht, namentlich durch genaue Herausgabe und Verwerthung neuer Münzen aus der Cyrenaica und Vergleichung anderer ent-

sprechender bis dahin noch nicht gehörig berücksichtigter. Müller nimmt auch an, daß dieser jugendliche gehörnte Kopf einen Cyrenaischen Lokalgott, den Libyschen Dionysos, ursprünglich dargestellt hat und für gewöhnlich darstellt, seit der Zeit des Alexander aber vielleicht auch das Bild des Alexander oder des einen oder anderen Ptolemäers. Dazu fügt R. Lepsius in der Zeitschr. für Aegyptische Sprache und Alterthumskunde Jahrg. XX, 1877, H. 1 S. 19 fg. Einiges, was sich vom Aegyptischen Standpunkte darüber sagen läßt. An Müller's Ansicht schließt sich durchaus an Stephani im Compte rendu pour l'ann. 1862, p. 75 fg., welcher den Libyschen Dionysos auch in anderen Gattungen der Kunstübung nachweisbar erachtet. Gegen die Annahme L. Müller's und Stephani's erklärt sich Thraemer „Dionysos in der Kunst" in Roscher's Lexikon der griech. und röm. Mythologie S. 1151 fg.: „Daß der jugendliche Kopf mit Widderhörnern ein Dionysos sein soll, erregt doch Bedenken. Diodor teilt Ammon und Dionysos nur *ὁμοίαν πρόσοψιν* zu, bei Hygin scheinen allerdings beiderseits Widderhörner gedacht zu sein, doch darf man auf diese Stelle kein zu großes Gewicht legen [1]). Allenfalls ließe sich eine kyrenäische Assimilation des Dionysos an Ammon denken; aber soll man eine solche auch auf Münzen von Abydos, Thasos [2]), Mytilene, Tenos, Metapont Nuceria erblicken". Wie viel einfacher ist die Anerkennung eines jugendlichen Dionysos in allen Fällen. — In der That liegt in der Ausbildung eines jugendlichen Ammonsideals neben dem bärtigen nichts Auffälligeres als in der Existenz

1) Es wird zweckmäßig sein, die beiden Schriftstellen, von denen die erste schon Eckhel anführte, die zweite zuerst Müller, hier auszuschreiben. Bei Diodor heißt es III, 73: *Εἰσὶ δ' οἱ μυθολογοῦντες αὐτῷ* (nämlich *τῷ Ἄμμωνι*) *πρὸς ἀλήθειαν γενέσθαι φυσικῶς καθ' ἑκάτερον μέρος τῶν κροτάφων κεράτια· διὸ καὶ τὸν Διόνυσον, υἱὸν αὐτοῦ γεγονότα, τὴν ὁμοίαν ἔχειν πρόσοφιν, καὶ τοῖς ἐπιγενομένοις τῶν ἀνθρώπων παραδεδόσθαι τὸν θεὸν τοῦτον γεγονότα κερατίαν.* In Hygins poet. astron. II, 20 lesen wir: Qui simulacra faciunt Hammonis, capite cornuto instituunt ut homines memoria teneant, eum primum pecus ostendisse. Qui autem Libero factum voluerunt assignare, quod non petierit ab Hammone, sed ultro ad eum sit adductum, Liberi cornuta simulacra fecerunt et arietem memoriae causa inter sidera fixum dixerunt. Daß der Ausdruck *ὁμοία πρόσοψις* sich wesentlich darauf beziehe, daß auch Dionysos Widderhörner habe, liegt doch wohl auf der Hand und um so eher darf man auf die Angabe Leon's bei Hygin so viel Gewicht legen, daß man annimmt, auch er bezeuge die Widderhörner des Dionysos. Wer das Gewicht beider Stellen beschränken wollte, der könnte nur sagen, es erhelle nicht, ob Dionysos unbärtig gedacht werde.

2) Daß der unbärtige widdergehörnte Kopf auch auf Münzen von Thasos vorkomme, beruht meines Wissens nur auf Irrthum.

eines jugendlichen Dionysosideals". Auch andere neuere Gelehrte, namentlich Numismatiker, haben den unbärtigen widdergehörnten Kopf anders bezogen als auf den Libyschen Dionysos.

Es wird zweckmäßig sein gleich vorweg einige Punkte ins Auge zu fassen, die nicht genügend berücksichtigt sind.

Eine Cyrenaische Geldmünze, welche L. Müller p. 25, n. 55 herausgegeben hat, zeigt auf der Vorderseite den bärtigen Kopf des Ammon im Profil und auf der Rückseite einen unbärtigen widderhörnigen Kopf in der Vorderansicht. Folgt hieraus nicht, daß zwei verschiedene Wesen gemeint sind? Gewiß. Aber wird man nicht annehmen können, daß noch ein anderes Wesen in entsprechender Bildung wie der „Libysche Dionysos" oder der jugendliche Ammon gemeint sei?

Wenn Eckhel a. a. O. äußert: Cyrenaei Ammonis cultui impense dediti hujus quoque filio locum in moneta concesserint atque ut a patre disttinguerat videntur finxisse imberbem, so ist die in den letzten Worten ausgesprochene Meinung eine sehr mißliche.

Wir betrachten nun die einzelnen hiehergezogenen Bildwerke genauer.

Sie bestehen hauptsächlich in Münzen, zudem in einigen bemalten Thongefäßen, in einer Doppelherme aus Marmor, einem geschnittenen Steine und einem Thonbilde.

Unter den Münzen berücksichtigen wir zuerst die aus der Cyrenaica, von wo aus, wie man annimmt, der Cultus und die Darstellung des Libyschen Dionysos in Verbindung mit dem Ammonscultus nach Kleinasien, den Griechischen Inseln und Unteritalien übergegangen sein soll.

a. Cyrene. Abbildungen: L. Müller, Numism. de l'Afrique p. 24, n. 47 u. 48) (wiederholt in der zw. Ausgabe der Denkmäler d. a. Kunst Taf. XXXIII, n. 384), p. 25, n. 55, p. 26, n. 36, 68, 69, 71, 73, 75, p. 27, n. 83, p. 45, n. 142, 143, 145, 147, 148, 149, p. 46, n. 153, p. 47, n. 159, 160. Head Hist. num. p. 731, Fig. 391.

b. Barce: Rev. num. Fr. 1850 pl. XVI n. 3, L. Müller a. a. O. p. 82, n. 325 u. 328, Fox Gr. coins Pt. II, pl. VIII, n. 167. Head meint, daß den jungen Kopf probably den Aristäos darstellen soll, p. 726. L. Müller vermuthet den Battos oder den Aristäos in einem bärtigen Kopfe Suppl. p. 3. Daß Aristäos auch unbärtig dargestellt werden konnte, unterliegt keinem Zweifel, da er auf Münzen von der Insel Ceos so vorkommt, vgl. die bei Wroth Catal. of the Gr. coins of Crete and the Aegean islands pl. XXI, n. 22 (und dazu Head a. a. O. p. 411), XXI, n. 24 u. 25, XXII, n. 11, 12, 13. Aber daß er mit Widderhörnern versehen worden sei, dafür läßt

sich kein Beleg beibringen, weder ein schriftlicher noch ein bildlicher. Dagegen kann recht wohl einmal Apollon Karneios gemeint sein, der ja auch in Cyrene hoch verehrt wurde und auf den Münzen der Stadt in der gewöhnlichen Apollobildung ohne Hörner mehrfach vorkommt. Wir meinen die oben an erster Stelle erwähnte Goldmünze, die wir schon S. 222 im Sinne hatten. Daß der Apollon Karneios mit und ohne Widderhörner gebildet wurde und zwar an demselben Ort, werden wir unten S. 224 fg. sehn. In der That weicht der Kopf auf der Rückseite von allen anderen unbärtigen widderhörnigen ab und kann man ihn sich immerhin im Nacken mit längerem Haare denken. Trifft diese Deutung das Richtige, so steht nichts entgegen alle übrigen unbärtigen widdergehörnten Köpfe für solche des jugendlichen Ammon zu halten. Diese haben nie einen Lorbeerkranz, der doch bei dem bärtigen Ammon mehrfach vorkommt, wohl aber einige Male p. 45, n. 143 u. 148, p. 47 n. 15 (Müller) ein Diadem. Das Haar ist, namentlich hinten, sehr kurz.

Unter den Inseln ist zuerst zu erwähnen Tenos. Die Münzen von Tenos, welche wir jetzt durch die Abbildungen im Catal. of the Gr. coins in the Brit. Mus., Crete and the Aegean islands, pl. XXVIII u. XXIX genauer kennen, zeigen den bärtigen und unbärtigen Kopf. Dieser erscheint stets lorbeerbekränzt, mit kurzem, aber doch etwas losem auf den Hals hinabfallendem Haare. Schon Eckhel bezog ihn auf Dionysos. Dagegen wollte Duchalais in der Rev. num. Fr. 1850 p. 394 fg. den Apollon Karneios erkennen. Gegen ihn wandte L. Müller p. 104 ein, daß die Bewohner von Tenos Ionier waren und es deshalb nicht wahrscheinlich sei, daß sie einen Dorischen Gott angenommen haben würden. Aber konnten sie nicht, ebenso wie sie den Ammon aus der Cyrenaica bezogen, ebendaher auch den „Libyschen Dionysos" entlehnen? Wenn L. Müller zu Gunsten dieses hervorhebt, daß die Münzen von Tenos mit dem unbärtigen widdergehörnten Kopf noch eine Weintraube enthalten, bald hinter dem Kopfe bald auf der Rückseite, so will das gar nichts sagen, da dasselbe sich auch in Betreff des bärtigen widderhörnigen Kopfes findet und keine Spur dafür vorhanden ist, daß dem „Libyschen Dionysos" das Attribut der Traube eignete. Die neueren Numismatiker Head Hist. num. p. 420 fg. und Wroth Catal. p. 128 fg. bezeichnen den in Rede stehenden Kopf als den des jungen Zeus Ammon, und wir mit ihnen.

Dann Lesbos. Hier kommt der unbärtige widdergehörnte Kopf zu Mytilene vor, vgl. Consinéry Voyage en Macédoine I, pl. IV

n. 10, Mionnet Descr. d. méd. T. III, p. 45, n. 94—96, Suppl. T. VI, p. 61, n. 67 u. 68, p. 62, n. 69, hie und da mit dem „Diadem". Daneben auch der bärtige (ein Exemplar abgebildet bei Overbeck Griech. Kunstmyth. Bd. I, Münztaf. IV, n. 22). Auch der unbärtige Kopf betrifft den Ammon.

Weiter kommen die kleinen Goldstücke des westlichen Kleinasiens in Betracht. So z. B. das von Abydos bei Sestini Descr. d. ant. Stateri p. 72, 8 und tab. VII, f. 13, welches von dem Herausgeber so beschrieben wird: Caput Bacchi imberbe cum cornu arietis ad aurem adstituto, R. Aquila ad sinistram stans rastro reflexo intra quadrum et quadratum incusum. Aber hier ist der jugendliche Ammon zu erkennen schon wegen des Adlers auf dem Revers. Vgl. die durchaus übereinstimmenden Bronzemünzen von Aphytis, über welche unten S. 226 die Rede sein wird.

Von den unteritalischen Städten wollen wir zunächst Nuceria Alfaterna in Canpanien berücksichtigen. Hier finden wir den jugendlichen Kopf mit Widderhorn und langem Haar, aber auch einen Kopf ohne Widderhorn, welcher demselben vollkommmen gleicht, aber ein schmales Band im Haare zeigt. Abbildungen bei Carelli Num. Ital. vet. t. LXXXVI, J. Friedlaender Oskische Münze Taf. IV und Garrucci Mon. d. Ital. ant. t. XC, n. 1—4. Außerdem kommt auf Kleinerzmünzen von Nuceria ein sich dem Apollonischen Typus nähernder Kopf vor, der aber nach Friedlaender a. a. O. S. 23 und H. Dressel in Sallet's Zeitschr. für Numismatik XIV S. 183 keinen Lorbeerkranz trägt, welcher letztere bemerkt, daß vier wohlerhaltene Exemplare der Berliner Sammlung ein sehr schmales Band, das über der Stirn in zwei Spitzen ausläuft, zeigen und Garrucci's Angabe, daß ein in seiner Sammlung befindliches Exemplar (Taf. XC, 5) den lorbeerbekränzten Kopf habe, dahingestellt sein läßt. Doch führt Poole Catal. of the Gr. coins in the Brit. Mus., p. 122 vier Exemplare des Kopfes bound with wreeth an; vgl. auch Head Hist. num. p. 35. Die von Anellier und von Willingen (Considér. sur la numismatique de l'anc. Italie p. 198) herrührende von L. Müller Num. de l'anc. Afrique p. 102, n. 2 gebilligten Beziehungen des widdergehörnten Dionysos auf den Ledulheros haben durchaus keine Wahrscheinlichkeit. Wenn Stephani im Compte rendu pour 1862, p. 77 keinen ausreichenden Grund sieht, weshalb man nicht glauben sollte, daß der Libysche Dionysos gemeint sei, da das lange Haar gerade einen Dionysos sehr wohl zukomme und nicht weniger der Delphin und die Diota, welche wir in Nuceria als Beizeichen hinzugefügt finden, so ist das sehr befremdend. Ein so lang herabfallendes

Haar ist bei keinem „Libyschen Dionysos“ nachweisbar, auch der Delphin und die Diota nicht, und was sollen die Eule und Biene, die wir sonst als Beizeichen kennen (Catal. of Gr. coins in the Brit. Mus., Ital., p. 121, 1 u. 6? Ebensowenig paßt Thraemer's Gedanke an den jugendlichen Ammon. Weit eher läßt sich die von Garrucci p. 96 gemißbilligte Ansicht Duchalais' Rev. num. Fr. 1850, p. 394 fg. hören, daß Apollon Karneios gemeint sei. Daß Apollon zu Nuceria verehrt wurde, nimmt Garrucci p. 97 zu t. CX, 4 u. 5 selbst an. Warum sollte er nicht hier auch als Karneios verehrt sein? Aber woher wissen wir, daß der Karneios mit Widderhörnern versehen gedacht wurde? L. Müller bemerkte Num. de l'anc. Afr. I, p. 104: Il n'y a pas de traces qu' Apollon Carnéius en Lacédémone ou dans les autres pays doriens, où ce dieu était honoré et où l'on célébraît les jeux Carnées, ait été figuré cornu; c'est la tête d'Apollon, qu'on voit sur les monnaies de ces pays. Auch ich habe bisher keine Spur davon gefunden. Inzwischen wissen wir aus Pausanias VIII, 34, 3, daß in der Aegytis in Arkadien ein Tempel τοῦ Ἀπόλλωνος τοῦ Κερεάτα war, unter welchem die Quelle des Flusses Karnion entsprang. Die nahe Verwandtschaft des Kereatas mit den Karneios hat auch Welcker Griech. Götterlehre I, S. 471 sich nicht entgehen lassen. Der auffallende Umstand, daß auf den Münzen von Nuceria derselbe Kopf vollkommen gleich vorkommt, nur daß er mehrfach mit dem Widderhorn versehen ist, einmal aber desselben entbehrt, erklärt sich leicht, wenn man den Kopf als den des Apollon Karneios faßt und sich daran erinnert, daß an diesem das Mangeln der Widderhörner auf Münzen sonst das gewöhnliche ist.

Dann kommt der unbärtige widdergehörnte Kopf wiederholt vor auf Münzen von Metapont in Lucanien. Neuere Abbildungen: Head Hist. num. p. 63, Garrucci Mon. t. CIV, n. 13, Garrucci CIV, n. 25, 26, 27. Garrucci faßt p. 138 den ersten Kopf, welcher bekränzt ist, gewiß mit Lorbeerblättern, nicht mit olive leaves (Catal. of Gr. numism. in the Brit. Mus., Italy, p. 246, n. 67), als den des Dionysos, Sohn des Ammon, während er den drei anderen unbekränzten keinen besonderen Namen giebt und nur zu dem letzten bemerkt, daß allein Metapont dem Ammon einen Cult gezollt habe. Einen bärtigen Kopf mit Widderhörnern giebt er unter n. 24 ohne Namen, einen anderen auf CV, n. 33 mit der Bezeichnung als Ammon, ein Exemplar des Berliner Museums Overbeck Griech. Kunstmyth. I, Taf. IV, n. 19 als Ammon. Head sagt von dem bärtigen Kopf p. 64, daß er may be Zeus Ammon (wie denn auch Poole a. a. O. p. 258, n. 155 dem Namen Ammon

ein Fragezeichen beigesetzt hat), der unbärtige sei entweder the Libyan Dionysos, or possibly Apollo Karneios. Wir zweifeln nicht, daß mit diesem der jugendliche Ammon gemeint. Der Umstand, daß in dem ersten Beispiele thierische, in denen bei Garrucci n. 26 und 27 aber menschliche Ohren gegeben sind, verschlägt nichts, da der Wechsel zwischen beiden Arten von Ohren sich auch bei dem bärtigen Ammon findet.

Weiter findet man auf einer Münze von Laus in Lucanien den unbärtigen widdergehörnten Kopf mit menschlichen Ohren bei Garrucci Mon. t. CXVIII, n. 19, welcher Kopf von den eben erwähnten durch emporgesträubtes Haar abweicht, aber doch von dem Herausgeber p. 171 auf den „Libyschen Dionysos" bezogen wird. Auch hier ist der jugendliche Ammon durchaus wahrscheinlich.

Endlich sind noch einige ganz übersehene Bronzemünzen von Aphytis in Macedonien hieher gehörend zu erwähnen. Auf den Münzen dieser Stadt ist bekanntlich der bärtige Kopf des Ammon auf der Vorderseite und weiter ein Adler oder ein Paar auf der Rückseite dargestellt. Bei Mionnet Descr. d. méd., Suppl. T. III, p. 47, n. 319 finden wir aber noch angegeben: Tête imberbe cornue, à gauche, et quelquefois à droite. R. ΑΦΤ. Aigle debout, dans le champ une feuille de lierre. Daß hier der unbärtige Ammon gemeint ist, liegt auf der Hand. Das Epheublatt im Felde wird Niemand auf den „Libyschen Dionysos" beziehen wollen.

Wir kommen nun zu den bemalten, auch mit Reliefschmuck verzierten Thongefäßen.

Eine jugendliche männliche widdergehörnte Figur findet sich auch auf einem Apulischen Vasenbilde der Petersburger Ermitage handelnd dargestellt; vgl. Compte rendu de la commiss. imp. arch. pour l'ann. 1862, pl. V, 3, und Stephani p. 79 fg., so wie in dem Verz. der Vasensammlung der Ermitage n. 880. Stephani erklärt sie als den Libyschen Dionysos. Ihm stimmen kurz bei Gerhard in dem Arch. Anzeiger XXII, S. 255* und Robert Schreiber im Jahrb. der kunsthistor. Sammlungen des allerhöchsten Kaiserhauses S. 50, A. 2. An einem andern Apulischen Thongefäße der Ermitage, welches Stephani Vasensamml. n. 1119 beschreibt, „ist dargestellt ein auf einer Erhöhung sitzender Jüngling, dessen Haupt offenbar ursprünglich mit großen, gegenwärtig zum Theil verwischten Widderhörnern versehen war (Dionysos). In der Rechten hält er eine Schale, in der Linken eine Leier. Eine Frau bringt ihm in der Linken eine Weintraube, in der Rechten einen Kranz dar". An einem gleichfalls Apulischen Thongefäße des Berliner Museums, abgebildet bei Gerhard Apul. Vasenbilder Taf. II,

beschr. von Furtwängler Beschr. der Vasensamml. II, n. 3264, S. 917 erscheint ein aus Blättern und Ranken hervorkommender Jünglingskopf mit kurzem lockigem Haare. Stephani bezieht ihn Compt. r. a. a. O. auf Dionysos; Furtwängler hat dem Namen Dionysos ein Fragezeichen beigesetzt. Auf andern unteritalischen Vasen findet man an den Voluten den jugendlichen Kopf mit Widderhörnern in Relief ausgeführt; vgl. Stephani Compte rend. pour l'ann. 1862 pl. IV, n. 5, Vasensamml. der Ermitage n. 350 und 421. Auch hier denkt Stephani an den Dionysos, so wie in andern Fällen, in denen derselbe Volutenschmuck im Relief an Thongefäßen vorkommt, an der Vase in den Ann. d. inst. arch. Vol. XIX, t. L und an der in den Nouv. Ann. de l'inst. arch. T. II, 1, pl. B. Andere haben an Arne, die Geliebte des Poseidon, gedacht. „Beides kann kaum gehalten werden, da das Antlitz ganz nach Art des Gorgokopfes völlig in die Breite gezerrt ist. Das Fehlen des Halses, der Ort der Anbringung, das breite Rund des Antlitzes weisen eher auf Gorgo hin" (Walther Müller „Eine Terracotta der Göttinger Sammlung", Gött. 1889, S. 8, A. 2). Die stierhörnige Gorgo bildet nach unserer Ansicht auch den Reliefschmuck an den Volute ähnlicher Thongefäße, s. meinen Aufsatz über den Stierdionysos in den Götting. Nachrichten 1891, S. 380. Widderhörner dürften der Gorgo ebensowohl zugetheilt sein können wie Ziegenhörner der bei Canina Descriz. dell' ant. Tusculo t. 49. Nimmt man indessen an, daß das Gesicht mit Widderhörnern den jugendlichen Ammon angehe, so würde dieser für den Platz wohl passen. Dieses gilt sicherlich von dem jugendlichen Kopf an der Vase des Berliner Museums bei Gerhard a. a. O. Auch sonst ist Ammon in der späteren Vasenmalerei nicht ganz unbezeugt. Was aber die beiden Petersburger Vasenbilder betrifft, deren Gesammtdeutung mit den jetzigen Mitteln unmöglich ist, so hat man in der Figur mit Widderhörnern gewiß Apollon Karneios zu erkennen. Für einen Apollon spricht auch die Leier auf dem an zweiter Stelle erwähnten, wenn auch diese dann und wann bei Dionysos vorkommt (aber nur bei dem echt Griechischen).

Auch eine Doppelherme aus Marmor hat man hiehergezogen. Es ist die von mittelmäßiger Arbeit, aber sehr wenig ergänzte, von Pistolesi Il Vaticano descr. ed illustr. VI, t. CIII als die des Lysimachos ungenügend herausgegebene in der Galleria delle carte geografiche des Vatican, in welchem ein jugendlicher mit leichtem Anflug eines Backenbarts versehener widdergehörnter Kopf mit dem des jugendlichen Stierdionysos verbunden erscheint, „beide mit Stirnbinden und auffallend weichlichen Zügen". Während

Gerhard in der Beschreibung der Stadt Rom II, 2, S. 281, n. 33 den widdergehörnten auf Ammon bezog, meinte Stephani Compte rend. p. 77 fg., „der Verfertiger habe offenbar den Dionysos, wie wie man ihn sich in Griechenland dachte, der Form gegenüberstellen wollen, unter welcher ihn die Bewohner Nord-Afrikas zu denken gewohnt waren". Dieser Ansicht pflichtet durchaus bei R. Schneider im Jahrb. der kunsthistor. Samml. des allerhöchsten Kaiserhauses Bd. II, S. 46 fg. Gegen dieselbe erklärt sich aber Thraemer a. a. O. S. 1152 mit den Worten, „daß hier als Gegenstück zu Dionysos ein Ammon gedacht sein kann, beweisen zwei Berliner Doppelbüsten, in welchen dem jugendlichen Stierbalchos der gewöhnliche Typus des völlbärtigen Ammon entgegengesetzt ist". Die Doppelbüsten in Berlin sind nebst andern hieher gehörenden in dem Aufsatze über den Stierdionysos in den Götting. Nachrichten 1891, S. 375 fg. aufgeführt und besprochen. Auch wir uehmen einen jugendlichen Ammon an.

Auch eine ebenda behandelte Gemme der Sammlung Bergau mit tief geschnittenen Steinen, abgebildet Taf. I, n. 1, zeigt den „unbärtigen jugendlichen Ammon".

Noch nicht veranschlagt ist bisher folgendes Beispiel.

Ein auf Kypros erworbenes, jetzt im K. Museum zu Berlin befindliches, in der Arch. Ztg. 1850 Taf. XV, n. 3 abgebildetes und von Gerhard S. 151 besprochenes Thonbild zeigt auf einem stehenden Widder von roher Bildung liegend eine unbärtige Figur mit Widderhörnern in einen Mantel gehüllt. Die Figur kann nur den unbärtigen Ammon darstellen sollen, wie auch der bärtige auf einem Widder sitzend vorkommt.

So viel über den unbärtigen Dionysos mit Widderhörnern.

Man hat auch daran gedacht, daß der bärtige Dionysos mit Widderhörnern dargestellt sein könne. So Eckhel Doctr. num. I, p. 155 und 204 in Betreff der Münzen von Metapont und Catana. Aber dort und hier ist ohne Zweifel Ammon gemeint, wenn auch Head hinsichtlich der Münzen von Metapont das nur vermuthungsweise und Poole nur fragweise ausspricht (s. oben S. 223 fg.). Noch Stephani meinte Compte rend. p. 1862, p. 78, A. 2, in Beziehung auf Doppelbüsten: „wenn beide Köpfe bärtig und mit Widderköpfen (soll heißen Widderhörnern) versehen sind, wie in der Lampe im Mus. Disneianum pl. 61 mag der eine auf Dionysos, der andere auf Ammon zu beziehen sein". Gegen ihn hat schon zur Genüge gesprochen Overbeck Griech. Kunstmyth. I, S. 289, n. 44. Zu erwähnen ist noch ein Marmordiscus in Woburn Abbey Marbles pl. 28, 3, so beschrieben von Michaelis Anc. marbles in Great Britain

p. 730, n. 94: Bearded Bacchic head with brutish ears and Ammon's horns, a filled passed over the forehead and through the curly hairiusually entitled Ammon. Daß diese Bezeichnung die richtige ist, unterliegt keinem Zweifel, vgl. Denkm. d. a. Kst. XXXV, 411 und XL, 480 und Stephani a. a. O. Ob sich noch ein bärtiger Dionysos finden wird, welcher den Angaben bei Diodor und Hygin (oben S. 221, A. 1) sicher entspricht, müssen wir jetzt dahin gestellt sein lassen.

3.

Ueber den Widder als Attribut des Dionysos.

Als solches finden wir ihn nur verhältnißmäßig selten.

Als Reitthier des erwachsenen Gottes erscheint er auf einem bemalten Thongefäße aus Caere, vgl. Gerhard Arch. Ztg. 1846, S. 286, n. 22, ferner als solches des Dionysoskindes in der Berliner Terracottagruppe in der Arch. Ztg. 1851, Taf. XXXIV, n. 1 und auf dem Münchener Sarkophagrelief in den Denkm. d. a. K. II, 34, 402[1]).

Als Zugthier vor dem Wagen des Dionysos erinnere ich mich nicht den Widder gefunden zu haben. In Raspe's Cataloge der von Tassie gesammelten Gemmenabdrücke wird unter n. 4358 ein Carneol der früheren Sammlung des Herzogs von Orleans erwähnt, der Ariadne auf einem von einem Löwen und einem Widder gezogenen Triumphwagen zeige, welcher Stein aber ohne Zweifel als modern zu betrachten ist.

Daß der Widder oder der Widderkopf als Opfer des Dionysos sich mehrfach findet, ist bekannt, vgl. z. B. Petersen Ann. d. inst. arch. 1863, p. 385 fg., Benndorf und Schöne Lateran. Mus. n. 125, S. 18, Michaelis Anc. marbles in Great Britain p. 263, n. 77. Besonders interessant für das Widderattribut im Bacchischen Kreise ist die einzige Goldmünze der Bundesgenossen nach Friedlaender Osk. Münzen S. 73: Av. Kopf einer Bacchantin mit einem Epheukranze; Rev. Cista mystica, darüber die Nebris oder eine Bockshaut, an die Cista ein Zweig gelehnt, an dessen Spitze ein Widderkopf gesteckt und eine Binde befestigt ist.

1) Auch der Silen kommt auf dem Widder vor Arch. Ztg. 1850, Taf. XV, n. 1.

Ueber neue chemische Verbindungen aus Pflanzenstoffen.

Von

Otto Wallach.

Unsere Kenntnisse bezüglich der Structur vieler chemischer Verbindungen, welche von den Pflanzen gebildet werden und in den ätherischen Oelen sich finden, haben in letzter Zeit erheblich an Umfang gewonnen. Es giebt aber immer noch eine ganze Reihe von pflanzlichen Sekreten, über die man so gut wie nichts weiß und deren Natur aufzuklären ebenso im Interesse der Chemie wie der Pflanzenphysiologie liegt. Zu den hinsichtlich ihres chemischen Verhaltens kaum erforschten Stoffen gehören u. a. die aus den Pflanzen ungemein häufig sich absondernden Kohlenwasserstoffe der Formel $C_{15}H_{24}$. Die Untersuchung dieser in verschiedenen isomeren Modificationen vorkommenden Körper gilt mit Recht als eine schwierige Aufgabe. Nur einen einzigen der Kohlenwasserstoffe $C_{15}H_{24}$ kann man bisher überhaupt charakterisiren. Er bildet nämlich ein schön krystallisirendes Halogenwasserstoff-Additionsproduct. Von den anderen weiß man eben nur, daß sie dicke, leicht verharzende Oele von hohem Siedepunkt vorstellen.

Nun kennt man einige wenige, sehr selten vorkommende, gut krystallisirte Pflanzenstoffe, deren Zusammensetzung, $C_{15}H_{26}O$, auf einen Zusammenhang mit den Kohlenwasserstoffen $C_{15}H_{24}$ hinweist. Zu diesen Körpern gehört u. a. der im Patschouliöl in geringer Menge enthaltene, s. g. „Patschouli-Campher“. Es liegen auch schon Angaben darüber vor, daß diese Verbindung unter dem Einfluß Wasser entziehender Mittel in einen Kohlenwasserstoff $C_{15}H_{24}$ übergeht. Ich habe gefunden, daß dieser Uebergang in den, beiläufig wie Cedernholzöl riechenden Körper schon erfolgt, wenn man die Verbindung mit verdünnter Schwefelsäure erwärmt. Es liegt also unzweifelhaft im Patschoulicampher ein Hydrat eines Kohlenwasserstoffs vor und es war zu untersuchen, ob man nicht durch Wasser-Anlagerung aus dem Kohlenwasserstoff $C_{15}H_{24}$ wieder Patschoulicampher künstlich würde bilden können. Das ist nun zwar nach dieser Richtung noch nicht geglückt, dagegen hat sich herausgestellt, daß man sehr leicht zu einem krystallisirten Isomeren des Patschoulicamphers gelangen kann, wenn man

den im Nelkenöl enthaltenen Kohlenwasserstoff $C_{15}H_{24}$ in geeigneten Lösungsmitteln mit wässrigen Säuren erwärmt.

Von der neuen Verbindung $C_{15}H_{26}O$ lassen sich leicht große Mengen darstellen und ich bin in Gemeinschaft mit Hrn. Walker in Begriff dieselbe näher zu untersuchen.

Vorläufig kann folgendes über die Eigenschaften mitgetheilt werden. Die Substanz schmilzt bei 94°—95° und siedet ohne Zersetzung zwischen 287°—289°. Mit Wasserdämpfen ist sie leicht flüchtig, die Dämpfe besitzen einen schwachen, auffallend an Tannennadeln erinnernden Geruch. Die Zusammensetzung ist durch die Analyse sicher gestellt:

1) 0.1850 Gr. lieferten 0.5468 CO_2 und 0.1976 H_2O
2) 0.1385 „ „ 0.4114 „ „ 0.1505 „

Berechnet für $C_{15}H_{26}O$	Gefunden	
	1	2
C = 81.08	80.80	81.09
H = 11.71	11.86	12.06.

Beim Erwärmen mit Chlorzink verliert die Verbindung Wasser und es entsteht ein Kohlenwasserstoff $C_{15}H_{24}$, der zwischen 258°—263° siedet, das spezif. Gewicht ist = 0,925 bei 20°, n_D = 1.4988 bei 20°, Bisher ist es nicht gelungen, diesen Kohlenwasserstoff wieder in den Ausgangskörper zurückzuverwandeln.

Die Bildung der bei 94° schmelzenden Verbindung $C_{15}H_{26}O$ giebt nun ein vorzügliches Mittel an die Hand, um festzustellen, ob der im Nelkenöl enthaltene Kohlenwasserstoff auch sonst vorkommt. So konnte seine Anwesenheit, wenn auch nur in geringer Menge, im Copaivaöl nachgewiesen werden und es ist kaum zu bezweifeln, daß er auch noch in vielen anderen Pflanzen sich finden wird.

Eine vergleichende Untersuchung des allgemeinen Verhaltens der Kohlenwasserstoffe $C_{15}H_{24}$ ist gleichzeitig in Angriff genommen worden, namentlich auch in Rücksicht auf die Frage, in was für Verbindungen dieselben durch Wasserstoffzufuhr übergehen. So ist durch Reduction des krystallisirten Chlorhydrats $C_{15}H_{24}.2HCl$ durch Jodwasserstoffsäure ein hydrirter Kohlenwasserstoff (wahrscheinlich $C_{15}H_{28}$, oder auch $C_{15}H_{30}$) erhalten worden, von folgenden Eigenschaften:

Siedepunkt: 257°—260°, Specif. Gewicht = 0,872 bei 18°, n_D = 1,47439 bei 18°.

Es ist weiter gelungen einige Sauerstoff haltige Pflanzenstoffe näher zu charakterisiren und in neue chemische Verbindungen überzuführen, welche auch in Rücksicht auf ihr physiologisches Verhalten Interesse beanspruchen können. Die in ätherischen Oelen vorkommenden Ketone kann man leicht auffinden, wenn man die Oele mit Ammoniumformiat erhitzt. Die Gruppe CO geht dabei in die Gruppe $CHNH_2$ über und es entstehen Formylverbindungen von Basen. Auf diesem Wege hat zuerst Leuckart aus Campher das Bornylamin erhalten. Ich habe in entsprechender Weise aus Fenchon Fenchylamin, aus Carvol Hydrocarvylamin und aus Menthon Menthylamin gewonnen und diese anderen Orts schon beschriebenen Basen jetzt eingehender untersucht. Ganz besonders interessante Resultate sind aber mit den im Thujaöl und im Oleum Pulegii enthaltenen Bestandtheilen erzielt worden.

Es blieb früher dahingestellt, ob das aus Carvol und Ammoniumformiat gewonnene Hydrocarvylamin, $C_{10}H_{17}NH_2$, identisch oder verschieden sei von dem „Carvylamin", das H. Goldschmidt durch Reduction von Carvoxim dargestellt hat. Um einen Vergleich der beiden auf verschiedenem Wege gewonnenen Basen durchführen zu können, habe ich Carvoxim reducirt, das von Goldschmidt eingeschlagene Verfahren aber etwas abgeändert. Es wurde nämlich eine Auflösung des Oxim in Alkohol mit metallischem Natrium behandelt. Ein Theil des Oxims wird dabei allerdings unter Ammoniak-Bildung zerstört, man erhält aber doch eine recht befriedigende Ausbeute an einer Base von folgenden Eigenschaften:

Siedepunkt: 218°—220°, fast ohne Zersetzung; specif. Gew. = 0,8875 bei 20°, n_D = 1.48168 bei 20°.

Das Chlorhydrat der Base lieferte beim trockenen Erhitzen glatt Salmiak und einen Kohlenwasserstoff, welcher die Terpinen-Reaction zeigte. Die Base muß also die Formel $C_{10}H_{17}NH_2$ gehabt haben, sonst könnte sich bei der Ammoniak-Abspaltung kein Terpen bilden. Die chemische Identität der auf verschiedenem Wege gewonnenen Basen ist dann auch durch die Darstellung und einen Vergleich der Acetyl-Verbindung und des durch Einwirkung von Phenylsenföl auf die Basen sich bildenden Sulfophenylcarbamids noch sicher gestellt worden.

Das Acetyl-Hydrocarvylamin, $C_{10}H_{17}NHCOCH_3$, wird am besten durch kurzes Erhitzen der freien Base mit Essigsäureanhydrid bereitet. Die anfangs etwas harzige Verbindung wird zunächst durch Lösen in Alkohol und Wiederausfällen mit Wasser gereinigt und schließlich aus kochendem Wasser umkrystallisirt.

Die so erhaltenen schneeweißen, seideglänzenden, verfilzten Nädelchen schmelzen bei 130°—131°. Auch das Phenylsulfocarbamid der Base erhält man zunächst als Syrup, der aber beim Behandeln mit etwas Methylalkohol erstarrt und dann aus diesem Lösungsmittel gut umkrystallisirt werden kann. Die Verbindung $CS\begin{matrix}NHC_6H_5\\NHC_{10}H_{17}\end{matrix}$ krystallisirt in kleinen bei 126°—127° schmelzenden Prismen.

Die günstigen Erfahrungen, welche bezüglich der leichten Reducirbarkeit von Carvoxim in alkoholischer Lösung mit Natrium gemacht waren, veranlaßten Versuche darüber, ob auch die anderen jüngst von mir aus Ketonen und Ammoniumformiat hergestellten Basen sich auf dem angedeuteten Wege aus den Oximen würden gewinnen lassen.

Die Darstellung von Fenchylamin aus Fenchonoxim gelingt sehr leicht und bequem. Die Derivate der auf verschiedenem Wege gewonnenen Basen zeigten übereinstimmende Eigenschaften.

Ganz andere Erfahrungen wurden bei der Reduction von Menthonoxim gemacht. Die Angabe von Mehrländer [Annal. d. Ch. 250, 359], daß Linksmenthon-Oxim in siedender alkoholischer Lösung durch Natrium nicht reducirt werde, beruht auf einem Irrthum. Man kann nach dieser Methode reichliche Mengen Menthylamin darstellen. Die so erhaltene freie Base erwies sich dem auf anderen Wege erhaltenen Menthylamin sehr ähnlich.

Bei einer näheren Untersuchung, welche Hr. Kuthe weiter zu führen in Begriff ist, ergab sich nun aber die höchst überraschende Thatsache, daß die Eigenschaften der Derivate des aus dem Oxim dargestellten Menthylamin ganz erheblich von denen des Menthylamin abweichen, welches durch Umsetzung von Menthon mit Ammoniumformiat erhalten worden war. Z. B. zeigen die Acetylverbindungen ganz verschiedene Schmelzpunkte. Es giebt also verschiedene Menthylamine und es hat den Anschein, als wenn die durch die Theorie vorherzusehenden optisch verschiedenen isomeren Modificationen des Menthylamin in ihren Derivaten auch eine erhebliche Verschiedenheit der sonstigen physicalischen Eigenschaften hervortreten ließen. Ueber diesen Punkt und die nahe liegende interessante Frage, ob man auch für das Menthol analoge Verhältnisse wird aufdecken können, werden Versuche angestellt.

Im Thujaöl soll nach den vorliegenden Untersuchungen eine mit dem Campher isomere, flüssige Substanz enthalten sein. Es hat sich nun herausgestellt, daß in den zwischen 190°—200° sie-

denden Antheilen des Oels zwei isomere, wesentlich von einander verschiedene Körper sich finden. Der eine, nur in geringer Menge vorhandene, ist identisch mit dem bisher nur in gewissen Fenchelölen nachgewiesenen, von mir näher charakterisirten Fenchon. Der zweite ist eine mit dem Fenchon isomere, ungesättigte Verbindung und soll Thujon genannt werden.

Das Thujon läßt sich zu einem Alkohol reduciren, giebt mit Hydroxylamin ein flüssiges Oxim und beim Erhitzen mit Ammoniumformiat eine neue Base: das Thujonamin.

Das Thujonamin siedet constant zwischen 197°—198°, das specif. Gewicht bei 20° wurde = 0,894, n_D = 1.46633 gefunden.

Die Base ist ungesättigt, wässrige Lösungen ihrer Salze entfärben Brom. Die ungesättigte Natur der Verbindung kommt in besonders interessanter Weise in dem Verhalten ihres Chlorhydrats beim trockenen Erhitzen zum Ausdruck. Es spaltet sich dabei Salmiak ab und es entsteht glatt ein ungesättigter Kohlenwasserstoff, der bisher mit keinem der bekannten identificirt werden konnte.

Das salzsaure Salz des Thujonamins läßt sich aus einer ätherischen Lösung der Base durch gasförmige Salzsäure ausfällen

0.2240 Gr gaben 0.1690 AgCl.

Berechnet für $C_{10}H_{19}N.HCl$	Gefunden
Cl = 18.71	18.66.

Das Platindoppelsalz fällt bei Zusatz Platinchlorid zu einer Lösung des Chlorhydrats krystallinisch aus.

0.2340 Gr gaben 0.2862 CO_2 und 0.1199 H_2O

0.2701 „ „ 0.0737 Pt.

Berechnet für $(C_{10}H_{19}N.HCl)_2PtCl_4$	Gefunden
C = 33.53	33.36
H = 5.61	5.69
Pt = 27.21	27.29.

Durch Umsetzung des Thujonaminchlorhydrats mit Kaliumcyanat entsteht ein gut krystallisirtes, bei 155°—157° schmelzendes Carbamid.

Das Poleiöl besteht nach Pleissner [Annal. d. Chem. 262. 1; s. ferner Ber. ch. G. 25, R. 110] der Hauptmenge nach aus einer mit Campher isomeren Verbindung, $C_{10}H_{16}O$, dem Pulegon. Da die Natur des Pulegons als Keton sicher gestellt ist, durfte man erwarten, aus ihm durch Erhitzen mit Ammoniumformiat zu einer neuen isomeren Base $C_{10}H_{17}NH_2$ zu gelangen. Es wurde daher rohes Poleiöl in der üblichen Weise mit dem Reagens um-

gesetzt. Unerwarteter Weise entstanden dabei gleichzeitig zwei Basen von ganz verschiedenen Eigenschaften. Die eine siedete etwa zwischen 160°—170°, die andere bis gegen 250°. Aus diesem Resultat wurde zunächst geschlossen, daß im Poleiöl zwei Ketone enthalten sein dürften und das Oel wurde sorgfältig fractionirt. Entgegen dem was man nach den vorliegenden Angaben hätte erwarten sollen, wurden recht ansehnliche Mengen selbst unter 175° siedender Antheile im Poleiöl gefunden. Eine von 170°—180° destillirende Fraction vom specif. Gewicht 0,8735 bei 20° wurde für sich mit Ammoniumformiat erhitzt und dabei neben einer nicht veränderten Quantität von Oel die erwähnte niedrig siedende Base erhalten.

Die Hauptmenge des Poleiöls siedete dagegen zwischen 215°—220°, das specif. Gewicht dieser Fraction war bei 21° = 0,932, n_D = 1.48168.

Trotzdem man diese Fraction für eine ziemlich einheitliche Substanz halten muß, entstanden aus ihr beim Erhitzen mit Ammoniumformiat doch wieder die beiden Basen gleichzeitig. Ueber diese beiden basischen Substanzen ist nun bisher folgendes ermittelt worden.

Die niedrig siedende Base bildet leicht lösliche Salze. Das aus ätherischer Lösung mit Salzsäure gefällte Chlorhydrat schmilzt bei 174°—176° und destillirt ohne wesentliche Zersetzung.

0.2070 Gr gaben 0.1976 AgCl.

Berechnet für $C_7H_{15}N.HCl$	Gefunden
C = 23.71	23.61.

Das Platindoppelsalz läßt sich aus heißem Wasser umkrystallisiren:

1) 0.2187 Gr gaben 0.2124 CO_2 und 0.0997 H_2O und 0.0675 Pt
2) 0.2052 „ „ 0.1987 „ „ 0.0943 „
3) 0.2053 „ „ 0.2728 AgCl „ 0.0649 Pt
4) 0.1745 „ „ 0.0536 Pt.

Berechnet für $(C_7H_{15}N.HCl)_2PtCl_4$	Gefunden			
	1	2	3	4
C = 26.43	26.49	26.41	—	—
H = 5.05	5.07	5.10	—	—
Cl = 33.47	—	—	32.87	—
Pt = 30.64	30.82	—	31.12	30.71.

Die niedrig siedende Base enthält demnach nur sieben Atome Kohlenstoff und ist vielleicht nichts weiter als ein Heptylamin oder Heptylenamin.

Die hochsiedende Base zeichnet sich durch Schwerlichkeit ihrer Salze aus. Das Chlorhydrat läßt sich aus Wasser gut umkrystallisiren. Das Nitrat ist in kaltem Wasser fast unlöslich und kann durch Fällen einer Salpeterlösung mit einer wässrigen Lösung des Chlorhydrats leicht gewonnen werden. Auch das Nitrit ist sehr schwer löslich in kaltem Wasser. Das Platinsalz fällt harzig, wird aber krystallinisch und krystallisirt unter günstigen Bedingungen in großen, sehr leicht wieder dissociirenden Krystallen. Die Analyse des Chlorhydrats führte zu folgendem Resultat:

1) 0.1228 Gr gaben 0.3103 CO_2 und 0.1313 H_2O
2) 0.1340 „ „ 0.3399 „ „ 0.1416 „
3) 0.1596 „ „ 0.0908 Ag Cl
4) 0.3625 „ „ 0.2082 „
5) 0.1052 „ „ 5,3 ccm N bei 755 mm B und 11° C.

Berechnet für		Gefunden				
$C_{14}H_{27}N.HCl$	$C_{15}H_{29}N.HCl$	1	2	3	4	5
C = 68.41	69.33	68.93	69.18	—	—	—
H = 11.43	11.62	11.87	11.74	—	—	—
N = 5.72	5.40	—	—	5.96	—	—
Cl = 14.44	13.65	—	—	—	14.07	14.20.

Diese Analysen geben noch keine genügend sichere Auskunft darüber, ob die hochsiedende Base 14 oder 15 Kohlenstoffatome enthält und ob sie in einem ganz einfachen Verhältniß (etwa in dem von secundärer zu primärer Base) zu der niedrig siedenden Verbindung steht. Keinenfalls ist aber nach dem benutzten Verfahren aus dem Pulegon zu einer Base mit 10 Kohlenstoffatomen zu gelangen. Eine solche Verbindung scheint sich jedoch zu bilden, wenn das flüssige Pulegon-Oxim mit Natrium in alkoholischer Lösung reducirt wird. Es entsteht dabei eine Kohlensäure stark anziehende, von den beiden eben beschriebenen völlig verschiedene Base, die Aehnlichkeit mit Fenchylamin und Menthylamin zeigt. Wieder ganz andere Resultate erhält man, wenn man das krystallisirte, von Pleissner beschriebene, Pulegonoxim reducirt.

Die Untersuchung wird nach den hier nur kurz angedeuteten Richtungen fortgesetzt. Auf Grund der schon vorliegenden Beobachtungen darf man wohl erwarten, daß auf dem eingeschlagenen Wege ganz neue Aufschlüsse über die Constitution der hier behandelten Pflanzenstoffe sich werden gewinnen lassen.

Ueber die Wirkung der Pinyl-, Fenchyl, Carvyl-, Menthyl- und Thujolamine auf den thierischen Organismus.

Vorläufige Mittheilung.

Von

W. Marmé.

Die nachstehenden Beobachtungen über physiologische und toxische Wirkung von Aminderivaten einiger Terpene, welche ich in reiner, krystallinischer Form der Güte des Herrn Collegen Wallach verdanke, sind im Laufe einer noch nicht abgeschlossenen, experimentellen Arbeit über ätherische Oele gemacht und schließen sich in mehrfacher Beziehung an eigenthümliche und erst einmal beschriebene Wirkungen von Aminen der Benzolreihe auf den thierischen Organismus an.

Sämmtliche Versuche sind mit den in Wasser leicht löslichen Chlorhydraten des Pinyl-, Fenchyl-, Carvyl-, Menthyl- und Thujolamin hauptsächlich an Fröschen, Kaninchen, Hunden und Katzen angestellt. Die genannten Salze wurden in wässriger Lösung meist subcutan injicirt, aber auch wiederholt in den Conjunctivalsack eingeträufelt.

Bei Fröschen kommt den genannten Aminen eine locale Wirkung auf die motorische und vielleicht auch auf die sensible Peripherie zu. Injicirt man Fröschen unter die Haut eines Oberschenkels einige Milligramm, so ist letztere bald und früher als die andere Extremität gelähmt und die motorische Erregbarkeit der betreffenden Muskeln ist sehr herabgesetzt.

Nach subcutaner Injection von 0,01 g bis 0,025 g unter die Rücken-, Bauch- oder Oberschenkelhaut zeigen männliche Frösche nach Verlauf von 10—15—20 Minuten beginnende Lähmung der Hinterbeine. Letztere werden, wenn sie ausgestreckt waren, garnicht, oder nur etwas unter Zittern an den Rumpf herangezogen. Auf den Rücken gelegt, bleibt das Thier ruhig liegen. Die Respiration ist jetzt noch nicht völlig erlahmt, die Herzaction aber bereits verlangsamt, wird durch Atropin nicht mehr beschleunigt, erfolgt immer seltener, überdauert aber stets die Respiration, manchmal sogar um mehrere Stunden.

Kaninchen von 1,5—2,0 k Körpergewicht, werden schon durch

0,1 g schwer vergiftet und gehen nach Application von 0,2 g innerhalb 2—3 Stunden zu Grunde. Nach Injection von großen Gaben (0,5 g) sterben Thiere von 2,0—3,0 k meist innerhalb einer Stunde. Allerdings finden sich Ausnahmen, denn einzelne Thiere zeigen selbst nach Einspritzung von 0,5 g nur einige Zeit hindurch Vergiftungssymptome, erscheinen bald wieder ganz normal, nehmen aber kein Futter an und gehen innerhalb 12 Stunden zu Grunde. Andere erholen sich, trotz schwerer Vergiftung durch 0,075 g.

Werden die erstgenannten Mengen injicirt, so machen die Thiere nach wenigen Minuten Kaubewegungen, als ob sie einen besonderen Geschmack empfänden. Etwa 10—15 Minuten später werden sie unruhig, strecken den Kopf vor, spitzen die Ohren, bewegen sich rasch hin und her und schlagen wiederholt mit den Hinterpfoten heftig auf. Unter zunehmender Unruhe stellt sich Unsicherheit in den Bewegungen ein; das Thier bekommt heftige Zuckungen, durch welche öfters der ganze Körper vorwärts oder rückwärts gedrängt wird. Manchmal erhebt sich das Thier zitternd und zuckend hoch auf den Hinterbeinen, knirscht dabei mit den Zähnen, schlägt mit den Vorderbeinen in die Luft, fällt auf eine Seite und macht mit Vorder- und Hinterbeinen heftige Schwimmbewegungen. Erschöpft bleibt es liegen und wird nach kurzer Ruhepause von neuen Krämpfen befallen. Die Körpertemperatur ist jetzt in der Regel um 1—2° gesteigert, von 38,5 vor der Vergiftung auf 40,5 oder 41,0 C. Manchmal, aber nicht instant, sind die Pupillen stark erweitert, verengen sich aber bei einfallendem Sonnenlicht, wenn auch nicht so stark wie bei normalen Thieren. Die Ohrgefäße sind häufig stark contrahirt und zwar um so stärker, je größer die Vergiftungsdosis; jedoch kann die Contraction während der krampffreien Intervalle völlig nachlassen. Allmählich wird das Thier matt, legt sich ausgestreckt auf den Bauch, stützt den Kopf auf die Schnauze, oder legt ihn seitlich auf den Boden. Die Respiration ist mühsam, die Expiration manchmal laut stöhnend, endlich steht dieselbe still und bald danach auch das Herz.

Die Section zeigt meist nur geringe Blutextravasate auf der Schleimhaut des Darms und bisweilen Oedem der Lunge.

Die Vergiftungserscheinungen ähneln denjenigen, welche Filehne[1]) und Stern[2]) mit salzsaurem Tetrahydronaphtylamin bei Thieren erhielten. Aber die von diesen Autoren beobachtete, erregende Wirkung auf den dilatator pupillae und auf die glatten

1) Berichte d. d. G. G. XXI. 1124 u. XXII. 777.

2) Inaug. Dissert. Breslau 1888 und Virchow's Archiv Bd. 115 S. 14 ff.

Muskelfasern der Ohrgefäße des Kaninchens tritt bei Einwirkung der Terpenamine weder so constant noch so energisch auf.

Auch nach Einträufelung von 0,005 bis 0,02 g in den Conjunctivalsack von Hunden, Katzen und Kaninchen habe ich keine erhebliche Erweiterung der Pupille zu erzielen vermocht, wohl aber eine mehr oder minder heftige Schwellung und Entzündung der Conjunctiva, zuweilen unter gleichzeitigem Speichelfluß.

Beiträge zur geometrischen Krystallographie.

Von

B. Hecht in Königsberg i. Pr.

(Vorgelegt von Th. Liebisch.)

I.

Es seien π_1, π_2, π_3 die krystallographischen Axen, $N_{\mathrm{I}}, N_{\mathrm{II}}, N_{\mathrm{III}}, N_{\mathrm{IV}}$ vier Flächennormalen, von denen nicht drei in einer Ebene liegen. Bezeichnet man:

$$\begin{aligned} c_{hk} &= \cos(\pi_h \pi_k), \\ c_{hK} &= \cos(\pi_h N_K), \\ c_{HK} &= \cos(N_H N_K), \end{aligned}$$

dann gelten von der Determinante:

$$E = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{1\mathrm{I}} & c_{1\mathrm{II}} & c_{1\mathrm{III}} & c_{1\mathrm{IV}} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{2\mathrm{I}} & c_{2\mathrm{II}} & c_{2\mathrm{III}} & c_{2\mathrm{IV}} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{3\mathrm{I}} & c_{3\mathrm{II}} & c_{3\mathrm{III}} & c_{3\mathrm{IV}} \\ c_{\mathrm{I}1} & c_{\mathrm{I}2} & c_{\mathrm{I}3} & c_{\mathrm{II}} & c_{\mathrm{III}} & c_{\mathrm{IIII}} & c_{\mathrm{IIV}} \\ c_{\mathrm{II}1} & c_{\mathrm{II}2} & c_{\mathrm{II}3} & c_{\mathrm{III}} & c_{\mathrm{II\,II}} & c_{\mathrm{II\,III}} & c_{\mathrm{II\,IV}} \\ c_{\mathrm{III}1} & c_{\mathrm{III}2} & c_{\mathrm{III}3} & c_{\mathrm{III\,I}} & c_{\mathrm{III\,II}} & c_{\mathrm{III\,III}} & c_{\mathrm{III\,IV}} \\ c_{\mathrm{IV}1} & c_{\mathrm{IV}2} & c_{\mathrm{IV}3} & c_{\mathrm{IV\,I}} & c_{\mathrm{IV\,II}} & c_{\mathrm{IV\,III}} & c_{\mathrm{IV\,IV}} \end{vmatrix} = 0$$

folgende Sätze:

1. Jede Unterdeterminante vierten Grades ist gleich Null.

2. Die Unterdeterminanten dritten Grades einer beliebigen Reihen- oder Columnencombination verhalten sich wie die entsprechenden Unterdeterminanten einer beliebigen anderen Reihen- oder Columnencombination.

Der erste Satz ist als Grundgleichung der räumlichen Goniometrie bekannt. Der zweite Satz läßt sich leicht erweisen, wenn man auf eine Reihe von Unterdeterminanten vierten Grades den bekannten[1]) Satz anwendet:

„Wenn eine Determinante gleich Null ist, so verhalten sich die Adjunkten einer Zeile zu einander, wie die Adjunkten jeder anderen Zeile".

Bezeichnet man die Indices von N_H mit $f_{H1} f_{H2} f_{H3}$ und die Axeneinheiten mit $a_1 a_2 a_3$, so ist:

$$c_{Hi} = \frac{P_H f_{Hi}}{a_i},$$

worin P_H ein noch zu bestimmender Faktor ist.

Setzt man diese Werthe in E ein und multiplizirt die drei ersten Reihen und Columnen mit a_1 resp. a_2 und a_3, so folgt:

$$E' = \begin{vmatrix} a_1^2 c_{11} & a_1 a_2 c_{12} & a_1 a_3 c_{13} & P_{\mathrm{I}} f_{\mathrm{I}1} & P_{\mathrm{II}} f_{\mathrm{II}1} & P_{\mathrm{III}} f_{\mathrm{III}1} & P_{\mathrm{IV}} f_{\mathrm{IV}1} \\ a_2 a_1 c_{21} & a_2^2 a_{22} & a_2 a_3 c_{23} & P_{\mathrm{I}} f_{\mathrm{I}2} & P_{\mathrm{II}} f_{\mathrm{II}2} & P_{\mathrm{III}} f_{\mathrm{III}2} & P_{\mathrm{IV}} f_{\mathrm{IV}2} \\ a_3 a_1 c_{31} & a_3 a_2 c_{32} & a_3^2 c_{33} & P_{\mathrm{I}} f_{\mathrm{I}3} & P_{\mathrm{II}} f_{\mathrm{II}3} & P_{\mathrm{III}} f_{\mathrm{III}3} & P_{\mathrm{IV}} f_{\mathrm{IV}3} \\ P_{\mathrm{I}} f_{\mathrm{I}1} & P_{\mathrm{I}} f_{\mathrm{I}2} & P_{\mathrm{I}} f_{\mathrm{I}3} & c_{\mathrm{I\,I}} & c_{\mathrm{I\,II}} & c_{\mathrm{I\,III}} & c_{\mathrm{I\,IV}} \\ P_{\mathrm{II}} f_{\mathrm{II}1} & P_{\mathrm{II}} f_{\mathrm{II}2} & P_{\mathrm{II}} f_{\mathrm{II}3} & c_{\mathrm{II\,I}} & c_{\mathrm{II\,II}} & c_{\mathrm{II\,III}} & c_{\mathrm{II\,IV}} \\ P_{\mathrm{III}} f_{\mathrm{III}1} & P_{\mathrm{III}} f_{\mathrm{III}2} & P_{\mathrm{III}} f_{\mathrm{III}3} & c_{\mathrm{III\,I}} & c_{\mathrm{III\,II}} & c_{\mathrm{III\,III}} & c_{\mathrm{III\,IV}} \\ P_{\mathrm{IV}} f_{\mathrm{IV}1} & P_{\mathrm{IV}} f_{\mathrm{IV}2} & P_{\mathrm{IV}} f_{\mathrm{IV}3} & c_{\mathrm{IV\,I}} & c_{\mathrm{IV\,II}} & c_{\mathrm{IV\,III}} & c_{\mathrm{IV\,IV}} \end{vmatrix} = 0.$$

Um die Unterdeterminanten dritten Grades bequem bezeichnen zu können, soll gesetzt werden:

$$\begin{vmatrix} c_{\mathrm{I\,I}} & c_{\mathrm{I\,II}} & c_{\mathrm{I\,III}} & c_{\mathrm{I\,IV}} \\ c_{\mathrm{II\,I}} & c_{\mathrm{II\,II}} & c_{\mathrm{II\,III}} & c_{\mathrm{II\,IV}} \\ c_{\mathrm{III\,I}} & c_{\mathrm{III\,II}} & c_{\mathrm{III\,III}} & c_{\mathrm{III\,IV}} \\ c_{\mathrm{IV\,I}} & c_{\mathrm{IV\,II}} & c_{\mathrm{IV\,III}} & c_{\mathrm{IV\,IV}} \end{vmatrix} = D,$$

$$\begin{vmatrix} c_{H+\mathrm{I},\,K+\mathrm{I}} & c_{H+\mathrm{I},\,K+\mathrm{II}} & c_{H+\mathrm{I},\,K+\mathrm{III}} \\ c_{H+\mathrm{II},\,K+\mathrm{I}} & c_{H+\mathrm{II},\,K+\mathrm{II}} & c_{H+\mathrm{II},\,K+\mathrm{III}} \\ c_{H+\mathrm{III},\,K+\mathrm{I}} & c_{H+\mathrm{III},\,K+\mathrm{II}} & c_{H+\mathrm{III},\,K+\mathrm{III}} \end{vmatrix} = (-1)^{H+K} D_{HK},$$

1) Baltzer, Determinanten. Leipzig 1881. pag. 21.

$$\begin{vmatrix} f_{H+\mathrm{I},1} & f_{H+\mathrm{I},2} & f_{H+\mathrm{I},3} \\ f_{H+\mathrm{II},1} & f_{H+\mathrm{II},2} & f_{H+\mathrm{II},3} \\ f_{H+\mathrm{III},1} & f_{H+\mathrm{III},2} & f_{H+\mathrm{III},3} \end{vmatrix} = (-1)^H F_H.$$

Es ist dann nach Satz 2:

$$P_{H+\mathrm{I}}\ P_{H+\mathrm{II}}\ P_{H+\mathrm{III}}\ F_H = QD_{HK},$$

worin Q ein von H unabhängiger Proportionalitätsfaktor ist. Ersetzt man denselben durch M nach folgender Gleichung:

$$Q\sqrt{D_{KK}} = MP_{\mathrm{I}}P_{\mathrm{II}}P_{\mathrm{III}}P_{\mathrm{IV}},$$

so folgt:

$$P_H = \frac{F_H\sqrt{D_{KK}}}{MD_{HK}}.$$

Setzt man diese Werthe in E' ein und multiplicirt die Reihen und Columnen der Reihe nach mit:

$$\frac{M, M, M, D_{\mathrm{I}K}}{\sqrt{D_{KK}}},\ \frac{D_{\mathrm{II}K}}{\sqrt{D_{KK}}},\ \frac{D_{\mathrm{III}K}}{\sqrt{D_{KK}}},\ \frac{D_{\mathrm{IV}K}}{\sqrt{D_{KK}}},$$

so folgt, da auch

$$D_{HK}D_{JK} = D_{HJ}D_{KK}$$

ist:

$$E'' =$$

$$\begin{vmatrix}
M^2a_1^2c_{11} & M^2a_1a_2c_{12} & M^2a_1a_3c_{13} & F_{\mathrm{I}}f_{\mathrm{I}_1} & F_{\mathrm{II}}f_{\mathrm{II}_1} & F_{\mathrm{III}}f_{\mathrm{III}_1} & F_{\mathrm{IV}}f_{\mathrm{IV}_1} \\
M^2a_2a_1c_{21} & M^2a_2^2c_{22} & M^2a_2a_3c_{23} & F_{\mathrm{I}}f_{\mathrm{I}_2} & F_{\mathrm{II}}f_{\mathrm{II}_2} & F_{\mathrm{III}}f_{\mathrm{III}_2} & F_{\mathrm{IV}}f_{\mathrm{IV}_2} \\
M^2a_3a_1c_{31} & M^2a_3a_2c_{32} & M^2a_3^2c_{33} & F_{\mathrm{I}}f_{\mathrm{I}_3} & F_{\mathrm{II}}f_{\mathrm{II}_3} & F_{\mathrm{III}}f_{\mathrm{III}_3} & F_{\mathrm{IV}}f_{\mathrm{IV}_3} \\
F_{\mathrm{I}}f_{\mathrm{I}_1} & F_{\mathrm{I}}f_{\mathrm{I}_2} & F_{\mathrm{I}}f_{\mathrm{I}_3} & D_{\mathrm{II}}c_{\mathrm{II}} & D_{\mathrm{I\,II}}c_{\mathrm{I\,II}} & D_{\mathrm{I\,III}}c_{\mathrm{I\,III}} & D_{\mathrm{I\,IV}}c_{\mathrm{I\,IV}} \\
F_{\mathrm{II}}f_{\mathrm{II}_1} & F_{\mathrm{II}}f_{\mathrm{II}_2} & F_{\mathrm{II}}f_{\mathrm{II}_3} & D_{\mathrm{II\,I}}c_{\mathrm{II\,I}} & D_{\mathrm{II\,II}}c_{\mathrm{II\,II}} & D_{\mathrm{II\,III}}c_{\mathrm{II\,III}} & D_{\mathrm{II\,IV}}c_{\mathrm{II\,IV}} \\
F_{\mathrm{III}}f_{\mathrm{III}_1} & F_{\mathrm{III}}f_{\mathrm{III}_2} & F_{\mathrm{III}}f_{\mathrm{III}_3} & D_{\mathrm{III\,I}}c_{\mathrm{III\,I}} & D_{\mathrm{III\,II}}c_{\mathrm{III\,II}} & D_{\mathrm{III\,III}}c_{\mathrm{III\,III}} & D_{\mathrm{III\,IV}}c_{\mathrm{III\,IV}} \\
F_{\mathrm{IV}}f_{\mathrm{IV}_1} & F_{\mathrm{IV}}f_{\mathrm{IV}_2} & F_{\mathrm{IV}}f_{\mathrm{IV}_3} & D_{\mathrm{IV\,I}}c_{\mathrm{IV\,I}} & D_{\mathrm{IV\,II}}c_{\mathrm{IV\,II}} & D_{\mathrm{IV\,III}}c_{\mathrm{IV\,III}} & D_{\mathrm{IV\,IV}}c_{\mathrm{IV\,IV}}
\end{vmatrix}$$
$$= 0.$$

Durch die vorgenommenen Umformungen sind die oben angeführten Eigenschaften der Determinante nicht geändert. Jede Unterdeterminante vierten Grades, welche nur eine der Größen $a_\lambda a_\varkappa c_{\lambda\varkappa}$ enthält, giebt mir also einen Werth für diese Größe. Insbesondere ergiebt z. B. die Determinante:

$$\begin{vmatrix} M^3 a_h a_k c_{hk} & F_{\rm I} f_{{\rm I}k} & F_{\rm II} f_{{\rm II}k} & F_{\rm III} f_{{\rm III}k} \\ F_{\rm I} f_{{\rm I}k} & D_{\rm II} c_{\rm II} & D_{\rm II\,III} c_{\rm II} & D_{\rm I\,III} c_{\rm III} \\ F_{\rm II} f_{{\rm II}k} & D_{\rm II\,I} c_{\rm II\,I} & D_{\rm II\,II} c_{\rm II\,II} & D_{\rm II\,III} c_{\rm II\,III} \\ F_{\rm III} f_{{\rm III}k} & D_{\rm III\,I} c_{\rm III\,I} & D_{\rm III\,II} c_{\rm III\,II} & D_{\rm III\,III} c_{\rm III\,III} \end{vmatrix} = 0$$

folgende Gleichung:

$$M^3 a_h a_k a_{hk} D_{\rm II} D_{\rm II\,II} D_{\rm III\,III} D_{\rm IV\,IV}$$
$$= \sum_{H=1}^{3} \sum_{K=1}^{3} F_H F_K f_{Hh} f_{Hk} D_{H+{\rm I},\,H+{\rm II}} D_{K+{\rm I},\,K+{\rm II}}$$
$$\times (c_{H+{\rm I},\,K+{\rm I}} c_{H+{\rm II},\,K+{\rm II}} - c_{H+{\rm I},\,K+{\rm II}} c_{H+{\rm II},\,K+{\rm I}}).$$

Dividirt man die Gleichung durch:

$$D_{H+{\rm I},\,H+{\rm II}} D_{K+{\rm II},\,K+{\rm II}} D_{H\,{\rm IV}} D_{K\,{\rm IV}} = D_{\rm II} D_{\rm II\,II} D_{\rm III\,III} D_{\rm IV\,IV},$$

so ergiebt sich:

$$M^3 a_h a_k c_{hk} =$$
$$= \sum_{H=1}^{3} \sum_{K=1}^{3} (c_{H+{\rm I},\,K+{\rm I}} c_{H+{\rm II},\,K+{\rm II}} - c_{H+{\rm I},\,K+{\rm II}} c_{H+{\rm II},\,K+{\rm I}}) \cdot$$
$$\times \frac{F_H}{D_{H\,{\rm IV}}} \cdot \frac{F_K}{D_{K\,{\rm IV}}} \cdot f_{Hh} f_{Kk}.$$

Diese Gleichung ist früher auf einem anderen Wege[1]) abgeleitet worden.

II. Die rationalen Funktionen der Winkel, welche zwischen fünf Flächennormalen liegen.

Fügt man zu der Determinante E als achte Columne die Glieder $c_{1\,{\rm V}}$, $c_{2\,{\rm V}}$, $c_{3\,{\rm V}}$, $c_{{\rm I}\,{\rm V}}$, $c_{{\rm II}\,{\rm V}}$, $c_{{\rm III}\,{\rm V}}$, $c_{{\rm IV}\,{\rm V}}$ und als achte Reihe die Glieder $c_{{\rm V}\,1}$, $c_{{\rm V}\,2}$, $c_{{\rm V}\,3}$, $c_{{\rm V}\,{\rm I}}$, $c_{{\rm V}\,{\rm II}}$, $c_{{\rm V}\,{\rm III}}$, $c_{{\rm V}\,{\rm IV}}$, $c_{{\rm V}\,{\rm V}}$ hinzu, so erhält man eine Determinante $G = 0$, für welche die Sätze 1. und 2. ebenfalls gelten. Setzt man hierin:

$$c_{Hk} = \frac{P_H f_{Hk}}{a_k},$$

so ergiebt sich eine Determinante $G' = 0$.

---

1) B. Hecht: N. Jahrb. f. Min. Beil. Bd. V, 593. 1887.

Es sei nun:

$$\begin{vmatrix} c_{\text{II}} & c_{\text{III}} & c_{\text{IIII}} & c_{\text{IIIV}} & c_{\text{IV}} \\ c_{\text{III}} & c_{\text{IIII}} & c_{\text{IIIII}} & c_{\text{IIIIV}} & c_{\text{IIIV}} \\ c_{\text{IIII}} & c_{\text{IIIII}} & c_{\text{IIIIII}} & c_{\text{IIIIIV}} & c_{\text{IIIIV}} \\ c_{\text{IIIV}} & c_{\text{IIIIV}} & c_{\text{IIIIIV}} & c_{\text{IIIIIIV}} & c_{\text{IIIIIV}} \\ c_{\text{IV}} & c_{\text{IIIV}} & c_{\text{IIIIV}} & c_{\text{IIIIIV}} & c_{\text{IIIIIIV}} \end{vmatrix} = \Delta,$$

$$\begin{vmatrix} c_{H+\text{I},K+\text{I}} & c_{H+\text{I},K+\text{II}} & c_{H+\text{I},K+\text{III}} & c_{H+\text{I},K+\text{IV}} \\ c_{H+\text{II},K+\text{I}} & c_{H+\text{II},K+\text{II}} & c_{H+\text{II},K+\text{III}} & c_{H+\text{II},K+\text{IV}} \\ c_{H+\text{III},K+\text{I}} & c_{H+\text{III},K+\text{II}} & c_{H+\text{III},K+\text{III}} & c_{H+\text{III},K+\text{IV}} \\ c_{H+\text{IV},K+\text{I}} & c_{H+\text{IV},K+\text{II}} & c_{H+\text{IV},K+\text{III}} & c_{H+\text{IV},K+\text{IV}} \end{vmatrix} = \Delta_{HK},$$

$$(-1)^{R+S} \begin{vmatrix} c_{H+(R+\text{I}),K+(S+\text{I})} & c_{H+(R+\text{I}),K+(S+\text{II})} & c_{H+(R+\text{I}),K+(S+\text{III})} \\ c_{H+(R+\text{II}),K+(S+\text{I})} & c_{H+(R+\text{II}),K+(S+\text{II})} & c_{H+(R+\text{II}),K+(S+\text{III})} \\ c_{H+(R+\text{III}),K+(S+\text{I})} & c_{H+(R+\text{III}),K+(S+\text{II})} & c_{H+(R+\text{III}),K+(S+\text{III})} \end{vmatrix}^{1)} = \Delta_{H,K}^{H+R,K+S}$$

$$(-1)^{R} \begin{vmatrix} f_{H+(R+\text{I}),1} & f_{H+(R+\text{I}),2} & f_{H+(R+\text{I}),3} \\ f_{H+(R+\text{II}),1} & f_{H+(R+\text{II}),2} & f_{H+(R+\text{II}),3} \\ f_{H+(R+\text{III}),1} & f_{H+(R+\text{III}),2} & f_{H+(R+\text{III}),3} \end{vmatrix}^{1)} = F_H^{H+R}.$$

Für die Größen Δ und F gelten dann folgende Relationen:

$$\Delta_{H,K}^{H+R,K+S} = -\Delta_{H,K+S}^{H+R,K} = -\Delta_{H+R,K}^{H,K+S} = \Delta_{H+R,K+S}^{H,K}.$$

$$F_H^{H+R} = -F_{H+R}^{H}.$$

Nach Satz 2 besteht folgende Proportion:

$$\Delta_{H,K}^{H+R,K+S} : \Delta_{H,K}^{H+T,K+S}$$
$$= P_{H+(R+\text{I})} P_{H+(R+\text{II})} P_{H+(R+\text{III})} F_H^{H+R} :$$
$$P_{H+(T+\text{I})} P_{H+(T+\text{II})} P_{H+(T+\text{III})} F_H^{H+T}$$
$$= P_{H+T} F_H^{H+R} : P_{H+R} F_H^{H+T}.$$

1) Hierin sind die in den Klammern stehenden Ausdrücke mod. IV und dann der ganze Index mod. V zu nehmen.

Analog folgt:

$$\Delta_{H+U,L}^{H+R,L+V} : \Delta_{H+U,L}^{H+T,L+V} = P_{H+T} F_{H+U}^{H+R} : P_{H+R} F_{H+U}^{H+T}.$$

Durch Division dieser Proportionen erhält man dann:

$$\frac{\Delta_{H,K}^{H+R,K+S}\,\Delta_{H+U,L}^{H+T,L+V}}{\Delta_{H,K}^{H+T,K+S}\,\Delta_{H+U,L}^{H+R,L+V}} = \frac{F_H^{H+R} F_{H+U}^{H+T}}{F_H^{H+T} F_{H+U}^{H+R}}.$$

Die links stehenden Funktionen der Winkel zwischen den fünf Flächen müssen also rationale Größen sein.

Diese Gleichungen enthalten als spezielle Fälle die ebenfalls früher[1]) abgeleiteten Relationen, wenn man $K = L = H + R$ und $K + S = L + V = H + T$ setzt, und ergeben die von Gauß[2]) aufgestellten Relationen, wenn man darin nach Satz 2

$$\Delta_{H,K}^{H+R,K+S} = \pm\sqrt{\Delta_{H,H}^{H+R,H+R} \cdot \Delta_{K,K}^{K+S,K+S}}$$

setzt.

Die Werthe der rationalen Größen auf der rechten Seite lassen sich auf folgende zehn Verhältnisse zurückführen:

$$F_{H+\mathrm{I}}^{H+\mathrm{II}} F_{H+\mathrm{III}}^{H+\mathrm{IV}} : F_{H+\mathrm{I}}^{H+\mathrm{III}} F_{H+\mathrm{IV}}^{H+\mathrm{II}} : F_{H+\mathrm{I}}^{H+\mathrm{IV}} F_{H+\mathrm{II}}^{H+\mathrm{III}}$$
$$= a_{H\mathrm{I}} : a_{H\mathrm{II}} : a_{H\mathrm{III}}.$$

Diese 10 Werthe lassen sich auf fünf zurückführen, da

$$a_{H\mathrm{I}} + a_{H\mathrm{II}} + a_{H\mathrm{III}} = 0$$[3])

ist, was durch Einsetzen der Werthe leicht zu erweisen ist.

Die weitere Reduktion auf nur zwei von einander unabhängige Werthe geschieht mittelst der Relationen:

$$\frac{a_{H\mathrm{I}} a_{H+\mathrm{I},\mathrm{II}} a_{H+\mathrm{IV},\mathrm{II}}}{a_{H\mathrm{II}} a_{H+\mathrm{I},\mathrm{III}} a_{H+\mathrm{IV},\mathrm{III}}} = -1, \frac{a_{H\mathrm{I}} a_{H+\mathrm{II},\mathrm{III}} a_{H+\mathrm{III},\mathrm{III}}}{a_{H\mathrm{II}} a_{H+\mathrm{II},\mathrm{I}} a_{H+\mathrm{III},\mathrm{I}}} = -1,$$

deren Richtigkeit sich ebenfalls leicht ergiebt.

Ist z. B. $a_{\mathrm{I}\,\mathrm{III}}/a_{\mathrm{I}\,\mathrm{II}} = p$, $a_{\mathrm{II}\,\mathrm{III}}/a_{\mathrm{II}\,\mathrm{I}} = q$, so folgt:

$a_{\mathrm{I}\,\mathrm{III}}/a_{\mathrm{I}\,\mathrm{II}} = -(p+1)$, $a_{\mathrm{I}\,\mathrm{III}}/a_{\mathrm{I}\,\mathrm{II}} = -(p+1)/p$,

$a_{\mathrm{II}\,\mathrm{III}}/a_{\mathrm{II}\,\mathrm{I}} = -(q+1)$, $a_{\mathrm{II}\,\mathrm{III}}/a_{\mathrm{II}\,\mathrm{II}} = -(q+1)/q$,

---

1) B. Hecht: N. Jahrb. f. Min. 1888. I. 76.

2) C. Fr. Gauß: Werke II, 308.

$$a_{\text{III}}/a_{\text{III III}} = -a_{\text{II II}}/a_{\text{II I}} \cdot a_{\text{I III}}/a_{\text{I II}} = q(p+1)/p,$$

$$a_{\text{III I}}/a_{\text{III III}} = -(p+q+pq)/p,\ a_{\text{III I}}/a_{\text{III II}} = -(p+q+pq)/q(p+1),$$

$$a_{\text{IV I}}/a_{\text{IV II}} = -a_{\text{I I}}/a_{\text{I III}} \cdot a_{\text{II I}}/a_{\text{II III}} = -1/(p+1)(q+1),$$

$$a_{\text{IV III}}/a_{\text{IV II}} = -(p+q+pq)/(p+1)(q+1),\ a_{\text{IV III}}/a_{\text{IV I}} = p+q+pq,$$

$$a_{\text{V II}}/a_{\text{V III}} = -a_{\text{I II}}/a_{\text{I I}} \cdot a_{\text{II III}}/a_{\text{II II}} = p(q+1)/q,$$

$$a_{\text{V I}}/a_{\text{V III}} = -(p+q+pq)/q,\ a_{\text{V I}}/a_{\text{V II}} = -(p+q+pq)/p(q+1).$$

III.

Es soll jetzt gezeigt werden, daß es Krystallflächencomplexe mit rationalen Indices und mit einer 3-zähligen Symmetrieaxe S giebt von der Beschaffenheit, daß unter den Flächen des Complexes die zu jener Symmetrieaxe senkrecht stehende Ebene nicht auftritt.

Es seien N_1, N_2, N_3 drei Flächennormalen, welche bei den Drehungen um S in einander übergehen. Drei weitere Flächennormalen von derselben Beschaffenheit seien bezeichnet mit N_4, N_5, N_6.

Setzen wir:

$$\begin{vmatrix} c_{41} & c_{42} & c_{43} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = \Delta_1, \quad \begin{vmatrix} c_{41} & c_{42} & c_{43} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} \end{vmatrix} = \Delta_2, \quad \begin{vmatrix} c_{41} & c_{42} & c_{43} \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{vmatrix} = \Delta_3,$$

so erhalten wir mit Rücksicht auf:

$$c_{51} = c_{42},\ c_{52} = c_{41},\ c_{53} = c_{43},\ c_{12} = c_{23} = c_{31}$$

die folgenden Werthe:

$$\begin{vmatrix} c_{51} & c_{52} & c_{53} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = \Delta_3, \quad \begin{vmatrix} c_{51} & c_{52} & c_{53} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} \end{vmatrix} = \Delta_1, \quad \begin{vmatrix} c_{51} & c_{52} & c_{53} \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{vmatrix} = \Delta_2.$$

Sollen nun N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 im Zonenverband stehen, so müssen nach den auf S. 244 abgeleiteten Bedingungen die Verhältnisse:

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_3} : \frac{\Delta_2}{\Delta_1} : \frac{\Delta_3}{\Delta_2}.$$

rational sein.

Hieraus folgt:

$$\Delta_1^2 = M_1 \Delta_2 \Delta_3,\ \Delta_2^2 = M_2 \Delta_3 \Delta_1,\ \Delta_3^2 = M_3 \Delta_1 \Delta_2,$$

worin $M_1 M_2$ und M_3 rationale Zahlen bedeuten, deren Produkt gleich 1 ist.

Durch Multiplikation je zweier dieser Gleichungen ergiebt sich:

$$M_3 \Delta_2^3 = M_2 \Delta_3^3, \quad M_1 \Delta_3^3 = M_3 \Delta_1^3, \quad M_2 \Delta_1^3 = M_1 \Delta_2^3,$$

woraus dann folgt:

$$\Delta_1 : \Delta_2 : \Delta_3 = \sqrt[3]{M_1} : \sqrt[3]{M_2} : \sqrt[3]{M_3}.$$

Wenn daher N_4 gegen N_1, N_2, N_3 eine solche Lage hat, daß diese Bedingungen erfüllt sind, so kann daraus N_5 abgeleitet werden und da N_6 gegen N_5, N_4, N_3, N_1 ebenso liegt, wie N_5 gegen N_4, N_1, N_2, N_3, so gehört auch N_6 zu dem Flächencomplex. Daß der ganze weiter abzuleitende Flächencomplex eine dreizählige Symmetrieaxe besitzt, ist nun klar. Indessen gehört zu demselben die Ebene, welche auf der Symmetrieaxe senkrecht steht, im Allgemeinen nicht. Soll diese Ebene auftreten, so müssen die Verhältnisse $\Delta_1 : \Delta_2 : \Delta_3$ rational, also die Größen M dritte Potenzen von rationalen Zahlen sein.

IV.

Der Satz: „Ein Krystallflächencomplex kann nur 2-, 3-, 4- oder 6-zählige Symmetrieaxen besitzen, läßt sich auf folgendem Wege beweisen.

Mit der n-zähligen Symmetrieaxe S bilde die Flächennormale N_1 den Winkel φ. Die Normalen N_2, N_3, N_4, N_5 mögen durch Drehung um die Axe S, um die Winkel $2\pi/n$, $4\pi/n$, $6\pi/n$, $8\pi/n$ mit N_1 zur Deckung kommen. Dann ist:

$$\begin{aligned}
c_{12} = c_{23} = c_{34} = c_{45} &= 1 - 2\sin^2\varphi \sin^2\psi \\
c_{13} = c_{24} = c_{35} &= 1 - 2\sin^2\varphi \sin^2 2\psi \\
c_{14} = c_{25} &= 1 - 2\sin^2\varphi \sin^2 3\psi \\
c_{15} = &\quad 1 - 2\sin^2\varphi \sin^2 4\psi,
\end{aligned}$$

worin $\pi = n\psi$ gesetzt ist.

Für drei beliebige der Flächennormalen N erhält man:

$$\begin{aligned}
c_{\lambda,\lambda+p} &= 1 - 2\sin^2\varphi \sin^2 p\psi \\
c_{\lambda+p,\lambda+p+q} &= 1 - 2\sin^2\varphi \sin^2 q\psi \\
c_{\lambda,\lambda+p+q} &= 1 - 2\sin^2\varphi \sin^2 (p+q)\psi.
\end{aligned}$$

Also wird:

$$\sin^2(N_\lambda N_{\lambda+p} N_{\lambda+p+q}) = \begin{vmatrix} c_{\lambda,\lambda} & c_{\lambda,\lambda+p} & c_{\lambda,\lambda+p+q} \\ c_{\lambda+p,\lambda} & c_{\lambda+p,\lambda+p} & c_{\lambda+p,\lambda+p+q} \\ c_{\lambda+p+q,\lambda} & c_{\lambda+p+q,\lambda+p} & c_{\lambda+p+q,\lambda+p+q} \end{vmatrix}$$

$$= 1 - c_{h,h+p}^{\,2} - c_{h+p,h+p+q}^{\,2} - c_{h,h+p+q}^{\,2} + 2c_{h,h+p}\,c_{h+p,h+p+q}\,c_{h,h+p+q}$$

$$= 4\sin^4\varphi\,[2\sin^2 p\psi\sin^2 q\psi + 2\sin^2 p\psi\sin^2(p+q)\psi + 2\sin^2 q\psi\sin^2(p+q)\psi$$
$$- \sin^4 p\psi - \sin^4 q\psi - \sin^4(p+q)\,\psi$$
$$- 4\sin^2\varphi\sin^2 p\psi\sin\, q\psi\sin^2(p+q)\,\psi]$$

$$= 16\sin^4\varphi\cos^2\varphi\sin^2 p\psi\sin^2 q\psi\sin^2(p+q)\,\psi.$$

Benutzt man die Bedingung für die Winkel zwischen 5 Flächennormalen in der von Gauß aufgestellten Form, so muß z. B. folgendes Verhältniß einen rationalen Werth haben:

$$\frac{\sin(N_1N_2N_4)}{\sin(N_1N_4N_5)} : \frac{\sin(N_1N_2N_3)}{\sin(N_1N_3N_5)}.$$

Setzt man hierin die soeben abgeleiteten Werthe ein, so wird das Verhältniß gleich dem folgenden:

$$\pm\frac{\sin\psi\sin 2\psi\sin 3\psi}{\sin 3\psi\sin\psi\sin 4\psi} : \frac{\sin^2\psi\sin 2\psi}{\sin^2 2\psi\sin 4\psi}$$

$$= \pm\sin^2 2\psi : \sin^2\psi = \pm 4\cos^2\psi. = \pm 2(1+\cos 2\pi/n).$$

Und dieser Werth wird nur für $n = 2, 3, 4, 6$ rational.

Königsberg i. Pr., December 1891.

Zur Theorie der Abel'schen Functionen.

Von

A. Hurwitz in Königsberg i. Pr.

(Vorgelegt von F. Klein).

Untersuchungen über diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich besitzen[1]), haben mich dazu geführt, gewisse Systeme von Functionen auf einer Riemann'schen Fläche zu betrachten, welche das System der eindeutigen algebraischen Functionen der Fläche als einen speciellen Fall umfassen. In den folgenden Zeilen möchte ich einige auf diese Functionssysteme bezüglichen Sätze mittheilen. Ich beginne damit, die zu betrachtenden Functionen durch ihre charakteristischen Eigenschaften zu definiren.

---

1) Vgl. eine demnächst in den Mathematischen Annalen erscheinende Abhandlung: „Ueber algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich".

Es sei F eine Riemann'sche Fläche vom Geschlecht p. Wir wählen auf dieser Fläche einen beliebigen Punkt O und zerschneiden dieselbe durch $2p$ Schnitte

$$A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots A_p, B_p,$$

welche sämmtlich in O beginnen und endigen, in eine einfach zusammenhängende Fläche. Wir nehmen ferner auf der zerschnittenen Fläche w feste Punkte

$$a_1, a_2, \ldots a_w$$

an und legen von O aus nach diesen Punkten bez. die Schnitte

$$l_1, l_2, \ldots l_w,$$

welche weder sich selber noch einander (außer im Punkte O) treffen. Die Schnitte seien so gewählt, daß man ihnen bei einem positiven Umlauf um den Punkt O in der Reihenfolge

$$l_1^+ l_2^+ \ldots l_w^+ A_1^+ B_1^+ A_1^- B_1^- \ldots A_p^+ B_p^+ A_p^- B_p^-$$

begegnet. Hier bedeutet der an den einzelnen Schnitt gesetzte obere Index + bez. −, daß man den betreffenden Schnitt vom negativen zum positiven Ufer, bez. vom positiven zum negativen Ufer überschreitet.

Die Fläche, welche aus F durch Ausführung der Schnitte l, A, B hervorgegangen ist, bezeichnen wir mit F'. In dem besonderen Falle, in welchem das Geschlecht p der Fläche F den Wert Null hat, kommen natürlich die Schnitte A, B in Fortfall, und es bleiben dann nur die Schnitte l bestehen.

Wir nehmen jetzt irgend $w+2p$ nicht verschwindende Constante

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_w, \alpha_1, \beta_1, \ldots \alpha_p, \beta_p$$

an, welche der Bedingung

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \ldots \gamma_w = 1$$

genügen, und betrachten alle Functionen des Ortes auf der Riemann'schen Fläche F, welche folgende Eigenschaften besitzen:

Erstens: Bezeichnet f eine der Functionen, so ist f, außer etwa an den Stellen $a_1, a_2, \ldots a_w$, nirgends verzweigt, so daß also der einzelne Zweig der Function f auf der Fläche F' eindeutig ist.

Zweitens: Sind für einen solchen eindeutigen Zweig f^+ und f^- die Werte, welche in zwei gegenüberliegenden Punkten des positiven und negativen Ufers eines der Schnitte Statt finden, so ist

$$\text{längs } l_i : f^+ = \gamma_i f^-, \ (i = 1, 2, \ldots w),$$
$$\text{längs } A_i : f^+ = \alpha_i f^-, \ (i = 1, 2, \ldots p),$$
$$\text{längs } B_i : f^+ = \beta_i f^-, \ (i = 1, 2, \ldots p).$$

Drittens: An jeder Stelle der Fläche F bleibt das Produkt aus f in eine endliche Potenz von t endlich, eindeutig und von Null verschieden.

Dabei bezeichnet t, wie stets im Folgenden, eine an der betreffenden Stelle von der ersten Ordnung verschwindende Function.

Wir bemerken zunächst, daß der Logarithmus einer solchen Function f sich offenbar als eine Summe von Abel'schen Integralen 3. Gattung darstellen lassen muß. Es ist aber auch umgekehrt leicht zu zeigen, daß eine Summe S von Abel'schen Integralen 3. Gattung stets auf mannigfaltige Weise so gewählt werden kann, daß die Function e^S alle genannten Eigenschaften besitzt. Hieraus folgt, daß es stets unendlich viele Functionen f giebt.

Das ganze System dieser Functionen f möge in der Folge mit

$$(1) \ldots \quad \begin{pmatrix} l_1, & l_2, & \ldots & l_w, & A_1, & B_1, & \ldots & A_p, & B_p \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \ldots & \gamma_w, & \alpha_1, & \beta_1, & \ldots & \alpha_p, & \beta_p \end{pmatrix}$$

bezeichnet werden. Die Constanten γ, α, β sollen die „Multiplicatoren" der Functionen f heißen[1]), und, wenn es nur darauf ankommt, diese Multiplicatoren in Evidenz zu setzen, so möge an Stelle der Bezeichnung (1) die kürzere

$$(\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_w, \alpha_1, \beta_1, \ldots \alpha_p, \beta_p)$$

benutzt werden.

Ich lasse hier zunächst einige Sätze folgen, welche sich unmittelbar aus der Definition der Functionen f ergeben:

I. Ein Schnitt l, dessen zugehörige Constante γ den Wert 1 besitzt, kann einfach beseitigt werden, ohne daß das Functionssystem sich ändert. Umgekehrt können beliebig viele Schnitte l, welchen die Constante $\gamma = 1$ zugeordnet wird, aufgenommen werden.

II. Bezeichnet f eine Function des Systemes

$$(\gamma_1, \ldots \gamma_w, \alpha_1, \beta_1 \ldots \alpha_p, \beta_p)$$

1) Ich lehne mich in den Bezeichnungen an eine sogleich zu nennende Abhandlung von Herrn P. Appell an.

und f' eine Function des Systemes

$$(\gamma_1', \ldots \gamma_w', \alpha_1', \beta_1', \ldots \alpha_p', \beta_p'),$$

so gehört das Produkt $f \cdot f'$ dem Functionssysteme

$$(\gamma_1\gamma_1', \ldots \gamma_w\gamma_w', \alpha_1\alpha_1', \beta_1\beta_1', \ldots \alpha_p\alpha_p', \beta_p\beta_p')$$

an. Die Systeme lassen also eine „Composition" zu.

III. Das Functionssystem, dessen Multiplicatoren sämmtlich gleich 1 sind, besteht aus allen eindeutigen algebraischen Functionen der Riemann'schen Fläche F.

Dieses besondere System spielt in der erwähnten „Composition" die Rolle der Einheit.

IV. Zwei Functionssysteme mögen „invers" heißen, wenn jeder Multiplicator des einen Systemes der reciproke Wert des entsprechenden Multiplicators des anderen Systemes ist. Gehören die Functionen f und f' inversen Systemen an, so ist das Produkt $f \cdot f'$ eine eindeutige algebraische Function.

V. Sind die Multiplicatoren eines Functionssystemes (1) Einheitswurzeln, so enthält das System nur algebraische Functionen, welche Wurzeln aus eindeutigen algebraischen Functionen der Fläche F sind.

Ich wende mich jetzt dazu, einige tiefer liegende Sätze über die hier betrachteten Functionen zu entwickeln.

Es sei f irgend eine Function des Systemes

$$(1) \ldots \quad \begin{pmatrix} l_1, & l_2, & \ldots l_w, & A_1, & B_1, & \ldots A_p, & B_p \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \ldots \gamma_w, & \alpha_1, & \beta_1, & \ldots \alpha_p, & \beta_p \end{pmatrix},$$

ferner z irgend eine eindeutige algebraische Function. Wir bezeichnen dann das Integral

$$(2) \ldots \quad J = \int f dz$$

als eine zu dem Functionssysteme (1) gehörige „Integralfunction".

Diese Integralfunctionen lassen sich nach denselben Principien behandeln, wie die Abel'schen Integrale, welche übrigens nach dem oben Bemerkten einen speciellen Fall jener Functionen bilden. Ich beschränke mich hier darauf, die überall endlichen unter den Integralen J näher zu betrachten. Eine erste Frage, welche sich darbietet ist dann die, wie viele linear unabhängige es unter diesen Integralen giebt. Diese Frage findet durch die folgenden Sätze ihre Erledigung.

Man setze

$$(3)\ldots\quad \gamma_1 = e^{-2i\pi\varkappa_1},\ \gamma_2 = e^{-2i\pi\varkappa_2},\ \ldots\ \gamma_w = e^{-2i\pi\varkappa_w},$$

wo die Größen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_w$ durch die Forderung eindeutig bestimmt sind, daß ihre reellen Bestandtheile nicht negativ und kleiner als 1 sein sollen. Bezeichnet nun $\mathfrak{p}$ die Anzahl der linear unabhängigen überall endlichen Integralfunctionen, welche zu dem Functionssysteme (1) gehören, so ist

$$(4)\ldots\qquad \mathfrak{p} = \varkappa_1+\varkappa_2+\ldots\varkappa_w+p-1.$$

Dieser Satz erleidet jedoch eine Ausnahme in folgendem Falle.

„Sind die Multiplicatoren $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_w$ sämmtlich reell, also die reellen Bestandtheile von $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_w$ gleich Null, und sind zugleich die Multiplicatoren $\alpha_1, \beta_1, \ldots \alpha_p, \beta_p$ so beschaffen, daß ein Ausdruck der Gestalt

$$e^{\varkappa_1 \Pi_{a,a_1}+\varkappa_2\Pi_{a,a_2}+\ldots+\varkappa_w\Pi_{a,a_w}+u}$$

zu dem Functionssysteme (1) gehört, so verliert der vorige Satz (welcher $\mathfrak{p} = p-1$ ergeben würde) seine Gültigkeit. Vielmehr ist in diesem Falle die Anzahl $\mathfrak{p}$ der linear unabhängigen überall endlichen Integralfunctionen gleich p."

Hier bedeutet a eine willkürlich gewählte Stelle der Riemann'schen Fläche, Π_{a,a_i} ein Integral 3. Gattung, welches an der Stelle a wie lgt, an der Stelle a_i wie $-$lgt unstetig wird, und u ein Integral 1. Gattung oder eine Constante.

Man bestätigt diese Sätze leicht im Falle $p = 0$. Ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen kann man in diesem Falle die complexe Zahlenebene als die Riemann'sche Fläche F, auf welcher die Functionen betrachtet werden, annehmen. Bezeichnet z die complexe Variable in der Ebene, und werden die Punkte der Ebene ebenso benannt, wie die Werte von z, welche sie repräsentiren, so findet man als allgemeinsten Ausdruck einer überall endlichen Integralfunction des Functionssystemes

$$\begin{pmatrix} l_1, & l_2, & \ldots & l_w \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \ldots & \gamma_w \end{pmatrix}$$

das Integral

$$\int \frac{g(z)dz}{(z-a_1)^{\varkappa_1}(z-a_2)^{\varkappa_2}\ldots(z-a_w)^{\varkappa_w}},$$

wo $g(z)$ eine ganze Function vom Grade $\varkappa_1+\varkappa_2+\ldots+\varkappa_\omega-2$ bedeutet. Eine solche Function (und also auch das Integral) enthält aber in der That $\varkappa_1+\varkappa_2+\ldots+\varkappa_\omega-1$ willkürliche Constante linear und homogen. Wird diese Anzahl negativ, also $\varkappa_1+\ldots+\varkappa_\omega=0$, so tritt der auf den Ausnahmefall bezügliche Satz in Kraft[1]).

Es bedeute jetzt J irgend eine überall endliche Integralfunction des Functionssystemes (1). Die Entwicklung von J an irgend einer Stelle P, welche nicht mit einer der Stellen $a_1, a_2, \ldots a_\omega$ zusammenfällt, lautet dann

$$J = c+c_1t^r+c_2t^{r+1}+\ldots, \quad (c_1\neq 0);$$

dagegen hat die Entwicklung von J an der Stelle a_i die Gestalt

$$J = c+t^{-\varkappa_i+r}(c_1+c_2t+\ldots), \quad (c_1\neq 0).$$

Wenn nun die Zahl r, welche stets eine positive ganze Zahl ist, größer als 1 ist, so wollen wir die betreffende Stelle als eine „Nullstelle“ des Differentials dJ bezeichnen. Und zwar soll eine solche Stelle mit der Multiplicität $r-1$ gerechnet werden. Es ist nur eine andere Ausdrucksweise der letzteren Festsetzung, wenn wir sagen, daß in einer solchen Stelle $r-1$ Nullstellen von dJ vereinigt liegen.

Dies vorausgeschickt, besteht nun folgender Satz:

„Bezeichnet J eine überall endliche Integralfunction des Functionssystemes (1) so beträgt die Anzahl der Nullstellen des Differentials dJ stets

$$\varkappa_1+\varkappa_2+\ldots+\varkappa_\omega+2p-2.“$$

Es seien jetzt $J_1, J_2, \ldots J_\mathfrak{p}$ $\mathfrak{p}$ linear unabhängige überall endliche Integralfunctionen des Functionssystemes (1) und $x_1, x_2, \ldots x_\mathfrak{p}$ homogene Coordinaten in einem Raume von $\mathfrak{p}$ Dimensionen. Dann wird in diesem Raume durch den Ansatz

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_\mathfrak{p} = dJ_1 : dJ_2 : \ldots : dJ_\mathfrak{p}$$

---

1) Die hier auftretenden Integrale stehen in engem Zusammenhange mit denjenigen, welche in der Theorie der allgemeineren hypergeometrischen Differentialgleichungen betrachtet werden.

Es würde zu weit führen hierauf näher einzugehen. Doch will ich noch bemerken, daß allgemein die Integralfunctionen (2), wenn man sie als Functionen der Verzweigungsstellen $a_1 \ldots a_\omega$ ansieht, linearen Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten genügen.

eine algebraische Curve definirt, welche man als „Normalcurve" des Functionssystemes (1) bezeichnen kann. Die Ordnung dieser Normalcurve ist nach dem vorigen Satze offenbar

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_w + 2p - 2 - \varrho,$$

wo ϱ die Anzahl der allen Differentialen dJ gemeinsamen Nullstellen bezeichnet.

Jeder Stelle der Riemann'schen Fläche entspricht ein einziger Punkt der Normalcurve. Umgekehrt wird auch im Allgemeinen jedem Punkte dieser Curve nur eine Stelle der Fläche entsprechen. Doch giebt es specielle Fälle, in welchen jedem Punkte der Normalcurve immer mehrere Stellen der Fläche entsprechen.

Ich wende mich jetzt von den Integralfunctionen wieder zurück zu den Functionen f des Systemes (1), um für sie denjenigen Satz aufzustellen, welcher dem Riemann-Roch'schen Satze in der Theorie der eindeutigen algebraischen Functionen entspricht. Dabei will ich mich der Einfachheit halber auf den Fall beschränken, in welchem die Factoren γ sämmtlich gleich 1 sind, oder, was auf dasselbe hinauskommt, in welchem die Punkte $a_1, a_2, \ldots a_w$ und Schnitte $l_1, l_2, \ldots l_w$ in Fortfall kommen.

Dieser Fall eines Functionssystemes

$$(5) \ldots \quad \begin{pmatrix} A_1, & B_1, & \ldots & A_p, & B_p \\ \alpha_1, & \beta_1, & \ldots & \alpha_p, & \beta_p \end{pmatrix}$$

ist schon früher von den Herren Prym und Appell[1]) untersucht worden, und bietet wegen seines einfachen Charakters auch ein besonderes Interesse.

Für die Functionen eines solchen Systems gilt nun der folgende Satz:

Der allgemeine Ausdruck der Functionen des Systemes (5), welche an m gegebenen Stellen der Riemann'schen Fläche von der ersten Ordnung unendlich werden, enthält

---

1) F. Prym, Zur Integration der gleichzeitigen Differentialgleichungen $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Crelle's Journal, Bd. 70.

P. Appell, Sur les intégrales de fonctions à multiplicateurs et leur application au développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques. Mémoire couronné. Acta mathematica, Bd. 13.

$$m-p+1+\tau$$

willkürliche Constante linear und homogen. Dabei hat die Zahl τ die folgende Bedeutung. Man betrachte die überall endlichen Integralfunctionen J des zu (5) inversen Functionssystemes

$$\begin{pmatrix} A_1, & B_1, & \ldots & A_p, & B_p \\ \frac{1}{\alpha_1}, & \frac{1}{\beta_1}, & \ldots & \frac{1}{\alpha_p}, & \frac{1}{\beta_p} \end{pmatrix}.$$

Dann giebt τ an, wie viele linear unabhängige Differentiale dJ die m gegebenen Stellen zu Nullstellen besitzen.

Dieser Satz bleibt auch dann noch gültig, wenn die m gegebenen Stellen nicht sämmtlich getrennt liegen, sondern irgendwie gruppenweise zusammenrücken. Man hat dabei nur zu beachten, daß unter dem Ausdruck „eine Function werde an r in eine Stelle P zusammengerückten Stellen von der ersten Ordnung unendlich" nichts Anderes zu verstehen ist, als daß sie an der Stelle P von der r^{ten} Ordnung unendlich wird; man hat ferner zu beachten, was oben über die Multiplicitäten der Nullstellen eines Differentials dJ bemerkt wurde.

Unser Satz geht in dem besonderen Falle

$$\alpha_1 = \beta_1 = \cdot = \alpha_p = \beta_p = 1$$

in den Riemann-Roch'schen Satz über und dürfte in der Theorie jener allgemeineren Functionssysteme eine ähnliche wichtige spielen, wie der Riemann-Roch'sche Satz in der Theorie der eindeutigen algebraischen Functionen einer Riemann'schen Fläche.

Königsberg i. Pr., 15. Februar 1892.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse gleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

November 1891.

(Fortsetzung.)

Geschichts- u. Alterthumsforschende Gesellschaft des Osterlandes zu Altenburg. Mittheilungen. 1. Band. Zweite Ausgabe. Altenburg 1891.
Nassauischer Verein für Naturkunde. Jahrbücher. Jahrg. 44. Wiesbaden 1891.
K. K. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus. Jahrbuch. Jahrg. 1889. Neue Folge. XXVI. Band. Wien 1890.
K. K. geologische Reichsanstalt. Verhandlungen. N. 14. 1891. Bericht v. 31. Oktober. Wien 1891.
Historischer Verein für Steiermark:
a. Mittheilungen. XXXIX. Heft. Graz 1891.
b. Beiträge zur Kunde steiermärkischer Geschichtsquellen. 23. Jahrg. Graz 1891.
Akademie der Wissenschaften in Krakau. Anzeiger. 1891. Juli. Oktober. Krakau 1891.
Naturforschende Gesellschaft in Zürich. Vierteljahrschrift. 33. Jahrg. 3. u. 4. Heft. 34. Jahrg. 3. u. 4. Heft. 36. Jahrg. 2. Heft.
Nature. Vol. 45. Nos 1149—1152.
Zoological Society of London:
a. Transactions. Vol. XIII. Part 3.
b. Proceedings for 1891. Part III. Mai and June. London 1891.
Cambridge philosophical society. Proceedings. Vol. VII. Part IV. und The foundation and early years of the society. An adress by the President J. W. Clark on resigning his office. 1890. Cambridge 1891.
Manchester literary and philosophical society. Memoirs and proceedings fourth series. Vol. 4. N. 4, 5. 1890-91. Manchester.
Geological Survey in India:
a. Records. Vol. XXIV. Part 1. 1891.
b. Contents and Index of the first twenty volumes of the records 1868—1887.
c. Memoirs. Vol. XXIV. Part 3. Calcutta 1891.
Royal Society of New South Wales:
a. Journal and Proceedings. Vol. XXIV. 1890. Part II. Sidney.
Annual report of the department of Mines New South Wales for the year 1890. Sidney 1891.
Reale Accademia delle scienze di Torino:
a. Memorie. Serie seconda. Tomo XLI.
b. Atti Vol. XXVI. Disp. 14ª, 15ª. 1890—91. Torino.
Reale Accademia dei Lincei. 1891:
a. Atti Rendiconti. Vol. VII°. fasc. 8°. 2. Semestre.
b. Atti Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. IX. Parte IIª. Aprile e Maggio 1891. Roma 1891.
Le opere di Galileo Galilei. Vol. II. Firenze 1891.
Biblioteca nazionale centrale Vittorio Emanuele di Roma. Bollettino delle opere moderne straniere. Vol. VI. N. 10. Roma 1891.
Biblioteca nazionale Centrale di Firenze. Bollettino delle pubblicazioni italiane. 1891. N. 141. Firenze 1891.
Académie impériale des sciences de St. Petersbourg. Bulletin. Nouvelle série II (XXXIV). Feuilles 13—25. N. 2. St. Petersbourg 1891.
Математическій Сборникъ издав. Математическимъ Обществомъ Томъ VIII: 2 u. XVI: 1. Москва 1876. 81.

Johns Hopkins University:
a. American journal of Mathematics. Vol. XIII. Number 3, 4.
b. Johns Hopkins University studies in historical and political science. Ninth series. N. I—II, III—IV, V—VI, VII—VIII. Baltimore 1891.

The Journal of comparative Neurology. Vol. I. October 1891. Pages 201—286. Cincinnati. Ohio. 1891.

Revista Argentina de historia natural. Tomo I. Entrega 5ª. Octobre 1. 1891. Buenos Aires 1891.

Academia nacional de ciencias en Córdoba (Republica Argentina). Boletin. Julio 1889. Tomo XI. Entrega 4ª. Buenos Aires 1889.

Boletin da Comissão geographica e geologica do Estado de St. Paulo. N. 4, 5, 6, 7. S. Paulo. 1890.

Dezember 1891.

Königl. Pr. Akademie der Wissensch. zu Berlin:
a. Sitzungsberichte 1891. XLVII, XLVIII, XLIX, L, LI, LII.
b. C. G. J. Jakobi's gesammelte Werke herausgeg. v. K. Weierstraß. 7. Band. Berlin 1891.

Politische Correspondenz Friedrich's des Großen. 18. Band. II. Hälfte. Juli bis Dez. 1759. Berlin 1891.

Kön. Sächs. meteorologisches Institut. Jahrbuch 1890. II. Hälfte. Abth. III. Chemnitz 1891.

Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Abhandlungen a. des XIII. Bandes der philologisch-historischen Classe. N. III. Afrikanische Bögen von Fr. Ratzel. b. des XVIII. Bandes der mathematisch-physischen Classe. N. 1. Die Entwickelung des Herznervensystems bei Wirbelthieren von W. His. Jun. Leipzig 1891.

Fürstl. Jablonowski'sche Gesellschaft zu Leipzig. Preisschriften. N. XI der mathematisch-naturwissensch. Section. XXIX. Reinhard Brauns, die optischen Anomalien der Krystalle. Leipzig 1891.

Astronomische Gesellschaft. Vierteljahrsschrift. 26. Jahrg. 3. Heft. Leipzig 1891.

Leopoldina. Heft XXVII. N. 21—22. Nov. 1891. Halle a. S.

Acta Mathematica. 15: 3. u. 4. Berlin. Stockholm. Paris. 1891.

Naturwissenschaftl. Verein in Magdeburg. Jahresbericht u. Abhandlungen. 1890. Magdeburg 1891.

Naturwissenschaftlicher Verein für Schleswig-Holstein. Schriften. Band 3—7 u. 9. Heft 1. Kiel 1878—91.

Historischer Verein der fünf Orte Luzern, Uri, Schwyz, Unterwalden u. Zug. Der Geschichtsfreund. Mittheilungen. Band XLVI. 1891. Einsiedeln. Waldshut.

Académie Royale Danoise des sciences et des lettres de Copenhague:
a. Mémoires. Classe des sciences. 6me série. a. Naturvidenskabelig og mathematisk Afd. 5te Bd. 4. 7de Bd. 3. 4.
b. Oversigt over det Forhandlinger i Aaret 1891. No. 2. Kopenhague.

Verein für Landeskunde in Niederösterreich:
a. Blätter. Neue Folge. XXIV. Jahrg. N. 1—12.
b. Urkundenbuch von Niederösterreich. I. Das Urkundenbuch des aufgehobenen Chorherrenstiftes in St. Pölten. I. Band. Bogen 41—45, 46—53.
c. Festgabe am 25jährigen Jubiläum. 1864—1889. Wien 1890.
d. Topographie von Niederösterreich. Dritter Band. Alphabetische Reihenfolge der Ortschaften etc. Zweiter Band. 7. u. 8. Heft. Bogen 49—64. Wien 1891.

(Fortsetzung folgt.)

Inhalt von Nr. 7.

Friedrich Wiesler, Zu den Attributen und Symbolen des Dionysos. — *Otto Wallach*, Ueber neue chemische Verbindungen mit Pflanzenstoffen. — *W. Marmé*, Ueber die Wirkung der Pinyl-, Fenchyl, Carvyl-, Menthyl- und Thujolamine auf den thierischen Organismus. — *B. Hecht*, Beiträge zur geometrischen Krystallographie. — *A. Hurwitz*, Zur Theorie der Abel'schen Functionen. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (*W. Fr. Kaestner*).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

20. April. **№ 8.** 1892.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 5. März 1892.

Ueber gewisse geradlinig begränzte Stücke Riemann'scher Flächen.

Von

A. Schönflies.

(Vorgelegt von F. Klein.)

1. Die folgenden Bemerkungen laufen in geometrischer Hinsicht einigen Sätzen parallel, welche von Heine, Klein und Stieltjes über gewisse, in der Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung auftretende Polynome aufgestellt worden sind. Es handelt sich um diejenigen Polynome, welche der Differentialgleichung

$$A\frac{d^2y}{dx^2} + B\frac{dy}{dx} + Cy = 0$$

genügen, wenn der Quotient $B:A$ die Form

$$\frac{B}{A} = \frac{\alpha_1}{x-e_1} + \frac{\alpha_2}{x-e_2} + \cdots + \frac{\alpha_{n-1}}{x-e_{n-1}}$$

hat, die Größen α_i und e_i sämmtlich reell sind, und C eine ganze Function $(n-3)$ter Ordnung von x ist. Haben alle α_i den Werth

$\frac{1}{2}$, so liegt der ursprünglich von Heine betrachtete Fall vor, welcher die sogenannten Lamé'schen Polynome betrifft. Wie Heine fand[1]), giebt es bei gegebenen e_i und bei gegebenem k stets

$$\frac{(k+1)(k+2)\ldots\ldots(k+n-3)}{1.\quad 2\ldots\ldots n-3}$$

Polynome $k$ter Ordnung $\varphi_k(x)$, welche einer Differentialgleichung der obigen Form genügen; sie haben lauter reelle Wurzeln, die sämmtlich innerhalb der Intervalle e_1e_2, $e_2e_3\ldots\ldots e_{n-2}e_{n-1}$ liegen, und jedem Polynom entspricht eine ganz bestimmte Function C, also auch eine ganz bestimmte Differentialgleichung. Herr Klein hat sodann darauf hingewiesen[2]), daß die Zahl dieser Polynome $\varphi_k(x)$ mit der Zahl der möglichen Vertheilungsweisen von k Punkten auf $n-2$ Intervalle übereinstimmt, daß in der That jeder Vertheilungsweise ein Polynom entspricht, und daß daher jedes Polynom durch die Art, wie sich seine k Nullstellen auf die Intervalle e_1e_2, $e_2e_3\ldots e_{n-2}e_{n-1}$ vertheilen, eindeutig bestimmt ist. Endlich zeigte unlängst Herr Stieltjes[3]), daß diese Sätze unverändert bestehen bleiben, wenn man alle α_i positiv, im übrigen aber beliebig voraussetzt.

Es ist für das Folgende zweckmäßig, die Größen α_i durch $1-\lambda_i$ zu ersetzen; der Fall Stieltjes ist alsdann durch $\lambda_i<1$ characterisirt. Man weiß nun[4]), daß das Integral

$$\eta = \int \frac{dx}{\Pi(x-e_i)^{1-\lambda_i}\varphi_k^2}$$

die Halbebene der x auf ein geradliniges Polygon der η-Ebene abbildet, dessen Ecken W_1, $W_2\ldots\ldots W_n$ den Punkten e_1, $e_2\ldots e_{n-1}$, $\overline{\infty}$ entsprechen, und dessen Winkel in den Punkten W_1, $W_2\ldots W_{n-1}$ bezüglich $\lambda_1\pi$, $\lambda_2\pi\ldots\lambda_{n-1}\pi$ sind. Nun ist evident, daß wenn $\varphi_k(x)$ ν Wurzeln im Intervall e_ie_{i+1} besitzt, die Polygonseite W_iW_{i+1} ν-mal durch den Unendlichkeitspunkt zieht, und daß beim Auftreten complexer Wurzeln von φ_k die von den polygonalen Grenzlinien eingeschlossene Fläche den Unendlichkeitspunkt in ihrem Innern enthält. Damit ist die geometrische Fragestellung, zu welcher die im Eingang genannten Sätze hinleiten, kenntlich gemacht. Es wird

1) Vgl. z. B. Handbuch der Kugelfunctionen, 2. Aufl. Bd. I, S. 472.

2) Ueber Lamé'sche Functionen. Math. Ann. Bd. 18. S. 237.

3) Sur certains polynômes etc. Acta Math. VI, p. 321.

4) Von Hrn. Klein in Vorlesungen dargelegt. Das Wesentliche ist, daß die geradlinigen Polygon-Kanten, sofern sie nicht im Unendlichen enden, durch das Unendliche ungebrochen hindurchgehen.

sich vor Allem darum handeln, ob und wie die geradlinigen Polygone morphologisch festgelegt sind, wenn man einerseits die Winkel $\lambda_1\pi$, $\lambda_2\pi \ldots . \lambda_{n-1}\pi$ und andrerseits die Zahlen ν_{12}, $\nu_{23} \ldots \nu_{n-2,n-1}$, die angeben, wie oft die bezüglichen Seiten des Polygons durch den Unendlichkeitspunkt ziehen, beliebig vorschreibt. Der Beantwortung dieser Frage, auf die ich durch Herrn Klein gelegentlich aufmerksam gemacht worden bin, ist die folgende Mittheiluug im wesentlichen gewidmet.

2. Gemäß dem Vorstehenden sind die bezüglichen „Polygone" genauer als einfach zusammenhängende Flächenstücke zu definiren, die in ihrem Innern von Windungspunkten frei sind, deren gerade Begrenzungslinien beliebig oft durch den Unendlichkeitspunkt ziehen können und in deren Ecken Windungspunkte beliebig hoher Ordnung liegen dürfen. Für die so definirten Flächenstücke möchte ich den Ausdruck *„polygonale Fläche"* vorschlagen, werde aber der Kürze halber auch die Bezeichnung *„Polygon"* beibehalten. Ferner soll eine Seite s, die ν-mal durch den Unendlichkeitspunkt zieht, ν-fach umlaufend heißen[1]); und wenn das Polygon p-mal den Unendlichkeitspunkt im Innern enthält, so wollen wir sagen, daß es p Flächendurchgänge besitzt.

Es sei nun $\mathfrak{P}$ irgend eine polygonale Fläche der betrachteten Art. Wir nehmen zunächst an, daß alle Ecken W_i im Endlichen liegen; alsdann lassen sich leicht folgende zwei Sätze beweisen:

Jeder Seitenumlauf erhöht die Winkelsumme um 2π.

Jeder Flächendurchgang erhöht die Winkelsumme um 4π.

Hieraus folgt, daß in jeder polygonalen Fläche, deren Ecken im Endlichen liegen, die Zahlen λ_i, $\nu_{i,i+1}$ und p durch die Relation

$$\text{I)} \qquad \Sigma\lambda_i = n - 2 + 2\Sigma\nu_{i,i+1} + 4p$$

mit einander verbunden sind. Setzen wir noch

$$\lambda\pi = 2w\pi + \lambda'\pi,$$

wo w die Ordnungszahl des bezüglichen Windungspunktes angiebt und $\lambda'\pi$ der *„Winkelrest"* heißen möge, so wird

$$\text{Ia)} \qquad \Sigma\lambda_i' + 2\Sigma w_i = n - 2 + 2\Sigma\nu_{i,i+1} + 4p.$$

3. Man kann diese Relation benutzen, um die morphologische Structur der Polygone der Anschauung zugänglich zu machen. Es

1) Wenn eine Seite im Unendlichkeitspunkt endigt, so wird sie nicht als umlaufend angesehen.

ist nämlich möglich, durch Ausschaltung gewisser Flächentheile und Wiederzusammenfügung der restirenden Stücke vom Polygon $\mathfrak{P}$ zu einem Polygon $\mathfrak{P}'$ von einfacherer Structur herabzusteigen; ebenso kann man umgekehrt von $\mathfrak{P}'$ zu $\mathfrak{P}$ durch Wiedereinschaltung der bezüglichen Flächenstücke zurückkehren.

Wir suchen zunächst solche Ausschaltungsprocesse, bei denen sich die Ecken W_i, sowie die Winkelreste λ_i' nicht ändern. Die obige Relation zeigt, daß an und für sich nur zwei solcher Processe möglich sind. Man kann nämlich entweder einen Windungspunkt gegen einen Seitenumlauf oder zwei Windungspunkte gegen einen Flächendurchgang tilgen. Diese Processe sind aber auch wirklich ausführbar. Der erste besteht in der Ausschaltung einer Halbebene, der zweite in der Ausschaltung einer vollen Ebene[1]).

Um hiervon eine Vorstellung zu gewinnen, ist es zweckmäßig, die umgekehrten Processe in's Auge zu fassen, nämlich die Einschaltung einer Halbebene und die Einschaltung einer Vollebene. Im ersten Fall gehen wir von der einzuschaltenden Halbebene aus, denken uns einen ihrer Punkte — er heiße W — mit einer Geraden s durch irgend eine sich nicht kreuzende Linie $WT = q$, die s nicht schneidet, verbunden, und zerschneiden die Halbebene längs q; alsdann muß sich von den beiden Flächenstücken, die mit der Halbebene zusammen das Polygon constituiren, das eine von q aus oberhalb der Halbebene, das andere von q aus unterhalb und zwar in entgegengesetzter Richtung fortsetzen; überdies müssen die von T ausgehenden Seiten des oberen und unteren Stückes die Richtung von s haben. Hieraus folgt:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der Punkt W und die Seite s eines Polygons $\mathfrak{P}'$ zur Einschaltung einer Halbebene verwendbar sind, besteht darin, daß W auf der inneren Seite von s liegt, und daß sich innerhalb des Polygons $\mathfrak{P}'$ von W nach s ein Linienzug legen läßt, der ganz in einer Ebene enthalten ist, sich selbst nicht schneidet, und nicht jenseits der durch s bestimmten Geraden verläuft.

Im zweiten Fall gehen wir von der einzuschaltenden Vollebene aus, denken uns irgend zwei ihrer Punkte W und W' durch eine sich nicht selbst kreuzende Linie q verbunden und schneiden die Ebene wieder längs q auf; alsdann muß sich wiederum von den

1) Es sind dies die beiden Processe, mit denen auch Herr Klein bei seiner Untersuchung der allgemeinen Kreisbogendreiecke operirt (vgl. Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe, Math. Ann. Bd. 37, S. 573). Die obige Betrachtung lehrt, daß andere Processe dieser Art nicht möglich sind.

beiden Flächenstücken, die mit der Vollebene zusammen das Polygon ausmachen, das eine von q aus nach oben, das andere von q aus in entgegengesetzter Richtung nach unten fortsetzen. Hieraus folgt sofort:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zwei Punkte W und W' eines Polygons $\mathfrak{P}$ zur Einschaltung einer Vollebene verwendbar sind, besteht darin, daß sich zwischen W und W' eine im Innern des Polygons verlaufende Linie q legen läßt, die ganz in einer Ebene bleibt und sich nicht selbst schneidet.

Die Fig. 1 zeigt ein Beispiel solcher Schnitte WT resp. WW'. Um den paradoxen Eindruck, den die Figur machen könnte, zu heben, habe ich in Fig. 1a ein Polygon gezeichnet, das dieselben Winkel besitzt, wie das Polygon der Figur 1, im übrigen aber so variirt ist, daß die Schnitte WT und WW' in ihm geradlinig angenommen werden können.

Fig. 1.

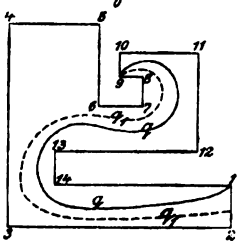
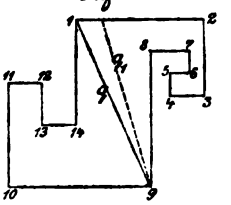


Fig. 1a.



Aus den obigen Sätzen folgt noch, daß zwei Schnitte q, längs deren Halbebenen oder Vollebenen eingeschaltet werden sollen, sich nicht schneiden dürfen.

Zu den beiden eben genannten Processen kommt noch ein dritter Proceß ähnlicher Art, nämlich derjenige, den Herr Klein laterale Anhängung resp. Abtrennung einer Halbebene genannt hat[1]). Die Anhängung einer Halbebene läßt die Ecken des Polygons ebenfalls unverändert, vermehrt aber zwei an derselben Seite liegende Winkel um je π; ist die Seite endlich, so wird sie durch Anhängung der Halbebene einfach umlaufend und umgekehrt. Die Ausschaltungsprocesse greifen daher in den morphologischen Bau des Polygons sozusagen innerhalb ein, während die Abtrennung der Halbebene nur eine äußere Verkleinerung des Polygons bedeutet.

Die genannten Processe sollen auch Reductions- resp. Erweiterungsprocesse genannt werden. Ich bemerke noch, daß dieselbe Polygonseite entweder nur für die Anhängung einer Halbebene oder nur für die Einschaltung von Halbebenen verwendbar ist.

4. Wenn eine Ecke des Polygons ins Unendliche

1) Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe, a. a. O. S. 582.

fällt, so ist der zugehörige Winkel $\lambda\pi$ mit seinem ganzen Betrage negativ in Rechnung zu stellen. Dies ist die einzige Modification, die sich für die Relation I ergiebt. Man erkennt dies am einfachsten, wenn man das Polygon stereographisch auf die Kugel projicirt und den Punkt W durch einen gewöhnlichen Querschnitt ausschneidet. Die Relation I) geht daher, wenn wir die ins Unendliche fallenden Winkel noch durch $\bar{\lambda}\pi$ bezeichnen, in

$$\text{II)} \qquad \Sigma\lambda_i - \Sigma\bar{\lambda}_i = n - 2 + 2\Sigma\nu_{i,i+1} + 4p$$

resp. in

$$\text{IIa)} \qquad \Sigma\lambda'_i + 2\Sigma w_i - \Sigma\bar{\lambda}'_i - 2\Sigma\bar{w}_i = n - 2 + 2\Sigma\nu_{i,i+1} + 4p$$

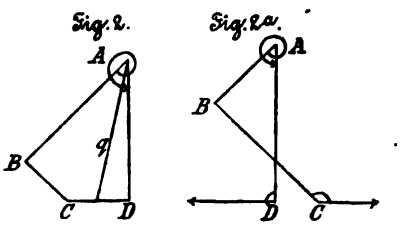
über. Diese Gleichung zeigt, daß es nur einen eigentlichen Reductionsproceß giebt, in den ein im Unendlichen liegender Eckpunkt eingeht; er tilgt einen im Endlichen gelegenen Windungspunkt gegen einen unendlich fernen Windungspunkt und besteht daher in der Ausschaltung einer Vollebene. Durch ihn werden aber weder die Seitenumläufe noch die Flächendurchgänge geändert, denn der Ausdruck

$$n - 2 + 2\Sigma\nu_{i,i+1} + 4p$$

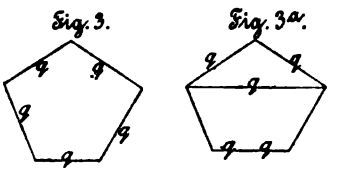
bleibt dabei constant. Die morphologische Erklärung hierfür liegt darin, daß jetzt der unendlich ferne Punkt der Vollebene in eine Ecke, aber nicht in das Innere des Polygons fällt.

5. Werden in einem beliebigen Polygon $\mathfrak{P}$ alle überhaupt zulässigen Reductionsprocesse ausgeführt, so entsteht ein Polygon $\mathfrak{P}'$, das reducirtes Polygon heißen soll. Die bei ihm etwa noch vorhandenen Windungspunkte, Seitenumläufe und Flächendurchgänge nenne ich irreducibel. Jedes Polygon $\mathfrak{P}$ kann aus einem reducirten Polygon durch geeignete Erweiterungsprocesse abgeleitet werden. Um daher zu einem Ueberblick über alle Polygone zu gelangen, muß man für jeden Werth von n die bezüglichen reducirten Polygone aufstellen, und aus ihnen die übrigen entstehen lassen; und zwar ist klar, daß jedes Polygon durch Angabe eines reducirten Polygons und die bezüglichen Erweiterungsprocesse, resp. durch die Lage der zugehörigen Schnitte q bestimmt ist. Ich will auf die einschlägigen Verhältnisse hier nicht weiter eingehen, beschränke mich vielmehr darauf, auf drei einfache Thatsachen hinzuweisen, die in dieses Gebiet gehören und für die späteren Ausführungen nöthig sind.

a. Es sei (Fig. 2) $ABCD$ ein Viereck, das aus dem elementaren Viereck $ABCD$ durch Einschaltung einer Halbebene längs q entstanden ist; es enthält in A einen Windungspunkt, während sich die Seite CD selbst überschlägt. Man bewege nun die Seite CD so parallel mit sich selbst, daß sich C und D mehr und mehr nähern und schließlich zusammenfallen. Wird alsdann (Fig. 2a) die Parallelverschiebung fortgesetzt, so hört CD auf sich selbst zu überschlagen, das Vierck kann daher nicht mehr durch Einschaltung einer Halbebene aus einem elementaren Viereck abgeleitet werden. Es ist aber evident, daß die morphologische Structur des Vierecks doch die nämliche bleibt. Um nun kenntlich zu machen, daß beide Viercke morphologisch zu dem gleichen Typus gehören, wollen wir verabreden, daß wir auch vom zweiten Viereck sagen, es sei durch Einschaltung einer Halbebene aus einem elementaren Viereck ableitbar. Dasselbe soll für beliebige Polygone gelten.



b. Aus einem reducirten Polygon $\mathfrak{P}'$ können Polygone $\mathfrak{P}$ mit vorgeschriebenen Zahlen λ, ν, p in vielen Fällen auf verschiedene Weise abgeleitet werden. Sind $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ zwei derartige Polygone und zeichnet man für jede Ecke und jede Seite die Schnitte q, längs deren die bezüglichen Einschaltungen vorzunehmen sind, so muß, wenn die Polygone morphologisch verschieden sind, auch die Vertheilung der Schnitte q in ihnen verschieden sein. Nun gehen in beiden Polygonen von jeder Ecke und jeder Seite gleich viele Schnitte q aus. Diejenigen Schnitte, welche nur in einem der beiden Polygone vorkommen, lassen sich daher so andordnen, daß sie einen oder mehrere geschlossene Linienzüge bilden, die abwechselnd aus je einem Schnitt des einen Polygons und je einem des andern gebildet sind. Umgekehrt besitzen zwei Polygone dieselben Zahlen λ, ν, p, wenn sie in der genannten Beziehung zu einander stehen. Schon dies zeigt, daß bei denselben Werthen λ, ν, p mehrere morphologisch von einander verschiedene Polygone möglich sind[1]). Figur 3 und 3a zeigen den einfachen Fall eines Fünfecks mit lauter endlichen Seiten, in

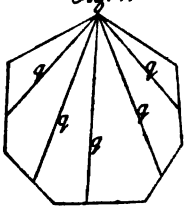


1) Polygone mit denselben λ, ν, p können übrigens auch auf andere Weise morphologisch verschieden sein.

dessen Ecken Windungspunkte zweiter Ordnung liegen; aus dem zweiten Fünfeck gehen alle überhaupt möglichen Anordnungen der Schnitte q durch cyclische Vertauschung hervor.

c. Es ist leicht zu sehen, daß in jedem Polygon $\mathfrak{P}'$ höchstens $n-2$ Seiten zum Einschalten von Halbebenen verwendbar sind. Folgen im besondern diese $n-2$ Seiten aufeinander, so gehen die zugehören Schnitte q sämmtlich von demjenigen Punkte W aus, der zwischen den beiden noch übrigen Seiten liegt, wie es Fig. 4 erkennen läßt. Da in diesem Falle eine andere Anordnung der Schnitte — in dem genannten Sinn — nicht möglich ist, so ist damit der morphologische Character des Polygons $\mathfrak{P}$ vollständig festgelegt. Das Polygon besitzt in W einen Windungspunkt und ist daher von der Art einer gewöhnlichen Riemannschen Windungsfläche.

Fig. 4.



6. Wir wollen uns nunmehr der in der Einleitung aufgeworfene Frage zuwenden, ob und wie die Polygone durch die Winkel $\lambda_1\pi, \lambda_2\pi \ldots \lambda_{n-1}\pi$ und die Umlaufszahlen $\nu_{12}, \nu_{23} \ldots \nu_{n-2,n-1}$ bestimmt sind, und welches die restirenden Werthe der Zahlen $\nu_{n-1,n}$, $\nu_{n,1}$ und p sind.

Es handele sich erstens um den von Herrn Stieltjes erledigten Fall, daß alle $1-\lambda_i > 0$ sind. Alsdann existirt, wie bereits oben erwähnt, stets ein einziges reelles Polynom $\varphi_k(x)$ und es ist $p = 0$, $\nu_{n-1,n} = 0$, $\nu_{n,1} = 0$.

Das geometrische Resultat, bei welchem nicht die Stellen e_i der x-Ebene, sondern die Ecken des Polygons als gegeben angesehen werden, steht hiermit ganz in Uebereinstimmung. Für den Beweis ist es zweckmäßig, den Fall positiver λ_i gesondert zu betrachten. Sind zunächst alle $\nu_{i,i+1} = 0$, so enthält das Polygon keine umlaufende Seite, und es bestimmt sich λ_n aus der Gleichung

$$\lambda_n + \sum_1^{n-1} \lambda_i = n-2.$$

Bei genügender Größe von $\sum_1^{n-1} \lambda_i$ kann der Winkel λ_n negativ werden, also W_n ins Unendliche fallen, doch ist auch dann $|\lambda_n| < 1$. Ist dagegen mindestens ein ν von Null verschieden, so liegt W_n nothwendig im Endlichen und das Polygon hat, wie das oben betrachtete, morphologisch den Character einer gewöhnlichen Windungsfläche, deren Win-

dungspunkt W_n ist. Kein Seitenumlauf kann durch Anhängung einer Halbebene entstehen. Der Werth von λ_n folgt aus der Gleichung

$$\lambda_n + \sum_1^{n-1} \lambda_i = n - 2 + 2\Sigma\nu_{i,i+1}$$

und es ist auch hier $\nu_{n-1,n} = 0$, $\nu_{n1} = 0$, $p = 0$.

Treten negative λ auf, so ist der morphologische Typus des Polygons ebenfalls ein völlig bestimmter. Zunächst beweist man wiederum, daß $p = 0$, $\nu_{n-1,n} = 0$, $\nu_{n1} = 0$, und daß W_n im Endlichen liegen muß. Ferner läßt sich in diesem Fall zeigen, daß kein im Unendlichen gelegener Windungspunkt W irreducibel sein kann. Der morphologische Typus des Polygons läßt sich daher folgendermaßen beschreiben. Man denke sich zunächst ein Polygon mit den gegebenen Seitenumläufen, dessen im Unendlichen gelegene Winkel nicht $\bar{\lambda}_i$, sondern nur die Winkelreste $\bar{\lambda}_i'$ sind. Dieses Polygon ist wieder von der Art einer gewöhnlichen Windungsfläche, deren Windungspunkt W_n ist. Nun schalte man in dieses Polygon zwischen W_n und jeden unendlich fernen Punkt W_i die nöthige Zahl von Vollebenen ein, so entsteht dasjenige Polygon, welches den gegebenen Werthen der λ und ν entspricht.

7. Wir betrachten zweitens den Fall, daß alle gegebenen ν mindestens den Werth 2 haben. Auch dann ist der morphologische Typus des Polygons ein völlig bestimmter. Es sind nämlich die vorgeschriebenen Seitenumläufe, wie leicht zu sehen, sämmtlich von dem Character derjenigen, welche durch Einschaltung von Halbebenen entstehen, und hieraus folgt sofort, daß nur eine Anordnung der zugehörigen Schnitte q möglich ist; sie gehen wiederum sämmtlich vom Punkte W_n aus. Mit Rücksicht auf die Bedingung, der ein Punkt W und eine Seite s unterliegen, wenn sie für die Einschaltung einer Halbebene verwendbar sein sollen, folgt nun weiter, daß kein Punkt W_i ein irreducibler Windungspunkt sein kann. Damit ist der morphologische Typus des Polygons wieder festgelegt; er stimmt mit dem Typus der soeben betrachteten Polygone überein.

Von geometrischer Seite bedarf es nun aber noch des Nachweises, daß die vorstehend skizzirten Polygontypen — was sich beim functionentheoretischen Ausgangspunkt allerdings von selbst versteht — bei beliebig vorgeschriebenen λ und ν auch wirklich existiren. Zu diesem Zweck hat man zu zeigen, daß man das fragliche Polygon immer so zeichnen kann, daß der Punkt W_n für

alle Ecken W_1, $W_2 \ldots W_{n-1}$ und für alle Seiten s_{12}, $s_{23} \ldots s_{n-2,n-1}$ die oben unter 3. abgeleiteten Bedingungen erfüllt. Dies kann ohne Schwierigkeit ausgeführt werden. Es läßt sich nämlich zeigen, daß sich auf der von W_1 nach W_n laufenden Geraden eine endliche Strecke GH immer so annehmen läßt, daß jeder Punkt W_n innerhalb dieser Strecke für alle Polygonseiten die fragliche Bedingung erfüllt. Der Beweis gilt sowohl dann, wenn alle Punkte im Endlichen liegen, als auch dann, wenn einige von ihnen ins Unendliche fallen. — Das letztere wird am einfachsten durch Projection des Polygons auf die Kugel erkannt.

Die Construction des Polygons zeigt gleichzeitig, daß ν_{n1} den Werth 0 oder 1 hat, je nachdem λ_1' kleiner oder größer als 1 ist, und das gleiche folgt für $\nu_{n-1,n}$ mit Rücksicht auf den Winkelrest λ_{n-1}' [1]). Ferner ist

$$p = 2\Sigma w_i$$

und

$$\lambda_n = 2\Sigma w_i + 2\Sigma \overline{w_i} + 2\Sigma \nu_{i,i+1} + n - 2 - \sum_1 \lambda_i' + \Sigma \bar{\lambda}_i'$$

wo sich die Größen $\overline{W_i}$ und $\bar{\lambda}_i'$ auf die unendlich fernen Endpunkte beziehen.

Ich füge schließlich noch eine letzte Bemerkung hinzu. Für die Ableitung der vorstehenden Resultate geht man natürlicher Weise von willkürlich gezeichneten Polygonen aus. Aus ihnen gehen alle andern Polygone, die zu den gleichen Winkeln λ_i gehören, durch Parallelverschiebung der Seiten hervor. Es versteht sich nun keineswegs von selbst, daß je n Graden von bestimmten Richtungen Grenzlinien eines Polygons von vorgeschriebenem Typus abgeben können, vielmehr kann sich der Polygontypus mit der Variation der Grenzlinien mannigfach verändern. Die oben ausgesprochenen Sätze sind nun gerade so zu verstehen, daß jede an und für sich zulässige Parallelverschiebung der Seiten den morphologischen Typus des Polygons nicht ändert; und dies beruht darauf, daß für die hier in Frage stehenden Polygone die bezüglichen Parallelverschiebungen nur solche Veränderungen der Seiten herbeiführen, wie sie oben am Viereck $ABCD$ betrachtet worden sind.

8. Es bleiben schließlich noch diejenigen Fälle zu erörtern, in denen die λ_i beliebig sind, aber nicht alle ν mindestens den Werth 2 haben. In diesen Fällen ist der morphologi-

1) Liegt W_1 resp. W_{n-1} im Unendlichen, so hat ν_{n1} resp. $\nu_{n-1,n}$ stets den Werth Null.

sche Typus des Polygons im Allgemeinen nicht mehr eindeutig bestimmt. Ich muß mich hier auf einige Andeutungen beschränken. Es kommen im wesentlichen drei verschiedenartige Momente in Betracht. Während nämlich in den bisher betrachteten Fällen kein Seitenumlauf durch laterale Anhängung einer Halbebene zu erklären war, so kann man jetzt in einem nicht reducirten Polygon, wenn $\nu = 1$ ist, den zugehörigen Seitenumlauf auf zwei verschiedene Weisen entstanden denken, nämlich durch Anhängung oder durch Einschaltung, und es ist klar, daß die so bestimmten Polygontypen morphologisch verschieden sind. Der zweite Grund für die Unbestimmtheit des Polygons beruht darin, daß jetzt bei denselben Werthen $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ und ν im Allgemeinen mehr als eine Anordnung der Schnitte q möglich ist, so daß, entsprechend den Bemerkungen von S. 263 die bezüglichen Polygone ebenfalls morphologisch verschiedenen Typus besitzen. Endlich ist drittens zu bemerken, daß in diesem Fall aus demselben reducirten Polygon, selbst wenn man sich nur auf Einschaltungsprocesse beschränkt, noch mehrere Polygone mit verschiedenen Werthen λ_n, $\nu_{n-1,n}$, ν_{n1}, p ableitbar sein können. Um dies deutlich zu machen, mag es genügen, auf folgende zwei Beispiele hinzuweisen. Während in den früheren Fällen von jedem Punkt W_i der Schnitt q, längs dessen eine eventuelle Vollebene einzuhängen war, nur nach W_n laufen konnte, so kann es jetzt möglich werden, zwei Punkte W_i und W_k durch einen solchen Schnitt zu verbinden und es ist klar, daß hierdurch W_n um 2 und p um 1 abnimmt. Ist ferner W_n mit einem Punkt W_i durch einen Schnitt q verbunden, so kann es morphologisch zulässig sein, die von W_i ausgehenden Schnitte auf einer der beiden von W_1 auslaufenden Seiten endigen zu lassen, und die beiden bezüglichen Polygone werden wiederum verschieden von einander sein.

Die hierfür maßgebenden Sätze operieren im wesentlichen mit Ungleichheitsbedingungen allgemeiner Art; ich will daher davon absehen, näher auf sie einzugehen. Man wird es kaum vermeiden können, in jedem einzelnen Fall, alle an und für sich denkbaren Möglichkeiten zu erproben. Hat man auf diese Weise alle reducirten Polygone, die bei den gegebenen λ und ν in Frage kommen, ermittelt, so sind die aus ihnen entspringenden Polygone in bestimmter Weise ableitbar. Ich bemerke noch, daß ich den Fall $n = 4$ vollständig erledigt habe.

Ueber discontinuirliche Gruppen, deren Substitutionscoefficienten ganze Zahlen eines biquadratischen Körpers sind.

Von

Robert Fricke in Kiel.

(Vorgelegt von F. Klein).

Die Auffindung „arithmetisch" definirter discontinuirlicher Gruppen, in deren Substitutionscoefficienten sich neben rationalen Zahlen auch noch Quadratwurzeln solcher Zahlen finden[1]), machte die Kenntniß von Gruppen wünschenswert, bei welchen in der entsprechenden Weise Wurzeln höheren Grades zur Geltung kommen. Es ist mir neuerdings gelungen, solche Gruppen mit Wurzeln dritten und vierten Grades zu definiren, welche in der Ebene der substituirten Variabeln ω endliche Fundamentalbereiche besitzen. Ueber die letzteren Gruppen (die mit biquadratischen Irrationalitäten), welche die interessanteren zu sein scheinen, erlaube ich mir hiermit ein paar vorläufige Angaben zu machen.

Man verstehe unter q eine fest gegebene, positive ganze Zahl ohne quadratischen Teiler und nehme die weiterhin auftretenden Wurzeln $\sqrt{q}$, $\sqrt[4]{q}$ reell und positiv. Man bilde alsdann für die Variabele ω die linear-gebrochene Substitution mit den Coefficienten:

$$(1)\quad \begin{pmatrix} (a+b\sqrt{q})+\sqrt[4]{q}\,(\alpha+\beta\sqrt{q}), & (c+d\sqrt{q})+\sqrt[4]{q}\,(\gamma+\delta\sqrt{q}) \\ -(c+d\sqrt{q})+\sqrt[4]{q}\,(\gamma+\delta\sqrt{q}), & (a+b\sqrt{q})-\sqrt[4]{q}\,(\alpha+\beta\sqrt{q}) \end{pmatrix},$$

wobei $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ acht solche ganze Zahlen sind, daß die Determinante der Substitution (1) gleich eins wird:

$$(2)\quad (a+b\sqrt{q})^2+(c+d\sqrt{q})^2-\sqrt{q}\,(\alpha+\beta\sqrt{q})^2-\sqrt{q}\,(\gamma+\delta\sqrt{q})^2 = 1.$$

Die Substitutionen (1) benenne ich generell durch V; die Substitutionen V bilden in ihrer Gesammtheit eine Gruppe, welche Γ heißen möge.

---

1) Siehe die bez. Mitteilungen von Bianchi in den „Rendiconti della reale acc. dei lincei" von 1890 und 91, sowie die gruppentheoretischen Entwicklungen von Stouff im vorjährigen Bande der „Annales de la Faculté des sciences de Toulouse", endlich auch meine eigenen Arbeiten in den Bänden 38 und 39 der Mathem. Annalen.

Die Bedingung (2), welche für die acht ganzen Zahlen $a, b, \ldots \delta$ vorgeschrieben wurde, ist aequivalent mit den beiden Gleichungen:

$$(3) \qquad \begin{cases} 2(ab+cd) = \alpha^2+\gamma^2+q\beta^2+q\delta^2, \\ 1+2q(\alpha\beta+\gamma\delta) = a^2+c^2+qb^2+qd^2. \end{cases}$$

Für jedes willkürliche Zahlquadrupel a, b, c, d giebt die erste Gleichung (3) nur eine endliche Anzahl zugehöriger Systeme ganzer Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Aus den gesamten ∞^4 so entspringenden Systemen ganzer Zahlen $a, b, \ldots \delta$ scheidet alsdann die zweite Gleichung (3) eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit aus. Letzteres (d.i. die dreifache Mannigfaltigkeit) scheint ein Charakteristicum zu sein für diejenigen Gruppen linearer Substitutionen einer Variabelen ω, welche in der ω-Ebene einen endlichen Fundamentalbereich besitzen.

Um aber den Beweis, daß Γ einen endlichen Fundamentalbereich hat, direct zu führen, bemerke man, daß Γ die Substitution $T(\omega) = \frac{-1}{\omega}$ der Periode zwei enthält. Dieselbe besitzt in der positiven ω-Halbebene den Fixpunkt $\omega = i$. Jeder bezüglich Γ mit i aequivalente Punkt ω_0 ist wiederum Fixpunkt einer in Γ enthaltenen Substitution T' der Periode zwei. Diese Substitutionen T' sind diejenigen unter den Substitutionen V, für welche $a = b = 0$ zutrifft; als Fixpunkt ω_0 einer Substitution T' ergiebt sich aber:

$$(4) \qquad \omega_0 = \frac{\sqrt[4]{q}(\alpha+\beta\sqrt{q})-i}{-(c+d\sqrt{q})+\sqrt[4]{q}(\gamma+\delta\sqrt{q})}.$$

Hierbei ist angenommen, daß der Nenner auf der rechten Seite von (4) negativ ist. Sollte dies zunächst nicht zutreffen, so wolle man die Zahlen $a, b \ldots \delta$ einem Zeichenwechsel unterwerfen, was T' nicht ändert; ein Verschwinden des Nenners ist nach (2) ausgeschlossen.

Man grenze nunmehr um den Punkt $\omega = i$ einen Kreis K mit dem Radius $\frac{1}{4}$ ab und untersuche, ob innerhalb dieses Kreises außer $\omega_0 = i$ noch ein zweiter Punkt ω_0 der Gestalt (4) gelegen ist. Wäre Letzteres der Fall, so würden, wenn wir unter $\vartheta, \vartheta', \vartheta'', \ldots$ reelle Zahlen aus dem Intervall $-1 < \vartheta < 1$ verstehen, für den fraglichen Punkt ω_0 die Gleichungen bestehen:

$$(5) \qquad \begin{cases} c+d\sqrt{q}-\sqrt[4]{q}(\gamma+\delta\sqrt{q}) = 1+\frac{\vartheta}{3}, \\ \sqrt[4]{q}(\alpha+\beta\sqrt{q}) = \frac{\vartheta'}{3}, \quad \alpha+\beta\sqrt{q} = \frac{\vartheta''}{3}. \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf $a = b = 0$ würde daraufhin aus (2)

$$c + d\sqrt{q} + \sqrt[4]{q}(\gamma + \delta\sqrt{q}) = 1 + \frac{2\vartheta'''}{3}$$

folgen, und also hätten wir, wenn wir ϑ und ϑ' jetzt in neuer Bedeutung brauchen sollen, neben einander die drei Gleichungen:

$$(6) \quad c + d\sqrt{q} = 1 + \frac{\vartheta}{2}, \quad \gamma + \delta\sqrt{q} = \frac{\vartheta'}{2}, \quad \alpha + \beta\sqrt{q} = \frac{\vartheta''}{3}.$$

Soll aber eine Zahl $(m + n\sqrt{q})$ mit ganzzahligen m, n dem absoluten Werte nach kleiner als 1 sein, so sind notwendig m und n zugleich von Null verschieden und haben verschiedenes Zeichen. Es folgt aus (6) somit, daß $-(\alpha\beta + \gamma\delta)$ eine positive ganze Zahl > 1 ist. Aus (3) würde sich also $(c^2 + qd^2) < 0$ ergeben, womit der Widerspruch nachgewiesen ist. Es giebt hiernach innerhalb des Kreises K keine zwei Punkte ω_0 der Gestalt (4) und also a potiori keinen weiteren mit $\omega = i$ aequivalenten Punkt.

Weiter ist zu untersuchen, wie oft der Punkt $\omega = i$ mit sich selbst bezüglich Γ aequivalent ist. Soll aber eine Substitution mit den vier Coefficienten A, B, C, D den Punkt $\omega = i$ in sich transformieren, so muß $A = D$, $B + C = 0$ sein. Dies ergiebt für die Substitution (1) sofort $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, und man wird neben der Identität nur noch auf die Operation T geführt.

Es erleichtert weiterhin die Ausdrucksweise, wenn wir für die positive ω-Halbebene die von Poincaré eingeführte projective Maaßbestimmung gebrauchen, bei welcher die Punkte der reellen Axe die unendlich fernen Elemente abgeben. Der Punkt $\omega = \frac{5i}{4}$ ist alsdann unter allen Randpunkten des Bereiches K dem Punkte $\omega = i$ am nächsten gelegen, und es sei $2 \cdot e$ die Entfernung beider Punkte. Man beschreibe dann (immer im Sinne der verabredeten Maaßbestimmung gesprochen) um $\omega = i$ einen Kreis k mit dem Radius e und transformire diesen Kreis k vermöge der Substitutionen der Gruppe Γ. Nach dem, was voraufgeht, wird k neben der identischen Operation nur noch durch die Substitution T in sich transformirt werden, während unter allen weiterhin entspringenden Kreisen k', k'' kein einziger mit k collidiren wird. Hälftet man daher k vermöge eines Durchmesser, so werden im Innern des einzelnen Halbkreises keine zwei bezüglich Γ aequivalente Punkte mehr existiren können. Die Gruppe Γ hat demnach einen

endlichen Fundamentalbereich; denn der Halbkreis mit dem endlichen Radius e ist ein Teil desselben.

Bei dieser Sachlage ist es eine dringende Aufgabe, die Gruppe Γ nun auch von der geometrischen Seite, nämlich aus der Gestalt ihres Fundamentalbereichs verständlich zu machen. Dabei ist von größter Wichtigkeit, daß sich die Gruppe Γ durch Spiegelung an der imaginären ω-Axe erweitern läßt. Man wird beim einzelnen q das Fundamentalpolygon angeben und durch Feststellung seiner Winkel und der Quotienten seiner Seitenlängen (nicht-euklidisch gemessen) seinem Wesen nach charakterisiren wollen. Ich hoffe auf diesen Gegenstand bald zurückkommen zu können.

Zum Schluß gedenke ich noch einer Verallgemeinerung. Der Gruppe Γ liegt der durch $j^4-q = 0$ definirte biquadratische Zahlkörper zu Grunde. Man könnte in analoger Weise z. B. auch jene Körper heranziehen, welche definirt sind durch Gleichungen der Gestalt $j^4-p\,j^2-q = 0$, wo man die ganzen Zahlen p, q so wählen mag, daß j reell ist. Ein hierhergehöriges Beispiel ist von anderer Seite her bekannt, nämlich das zum biquadratischen Körper $j^4-2\,j^2-1 = 0$ gehörende. In der That finde ich in der Gruppe der s-Function $s(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8}; x)$ eine ausgezeichnete Untergruppe vom Index 48, welche die erzeugenden Substitutionen besitzt:

$$(7)\quad \begin{cases} V = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2}+\sqrt{2+2\sqrt{2}}, & 0 \\ 0, & 1+\sqrt{2}-\sqrt{2+2\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad V' = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2}, & \sqrt{2+2\sqrt{2}} \\ \sqrt{2+2\sqrt{2}}, & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}, \\ V'' = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2}+\sqrt{1+\sqrt{2}}, & \sqrt{1+\sqrt{2}} \\ \sqrt{1+\sqrt{2}}, & 1+\sqrt{2}-\sqrt{1+\sqrt{2}} \end{pmatrix}, V''' = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2}+\sqrt{1+\sqrt{2}}, & -\sqrt{1+\sqrt{2}} \\ -\sqrt{1+\sqrt{2}}, & 1+\sqrt{2}-\sqrt{1+\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Diese Substitutionen subsumieren sich thatsächlich unter den Ansatz (1), wenn man dortselbst $\sqrt[4]{q}$ durch die der Gleichung $j^4-2j^2-1 = 0$ genügende Irrationalität $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ ersetzt. Es nehmen nämlich die Substitutionen (7) unter Gebrauch der abkürzenden Schreibweise $j = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ die Gestalt an:

$$(8)\quad \begin{cases} V = \begin{pmatrix} j^2+j(-1+j^2), & 0 \\ 0, & j^2-j(-1+j^2) \end{pmatrix}, \quad V' = \begin{pmatrix} j^2, & j(-1+j^2) \\ j(-1+j^2), & j^2 \end{pmatrix}, \\ V'' = \begin{pmatrix} j^2+j, & j \\ j, & j^2-j \end{pmatrix}, \qquad V''' = \begin{pmatrix} j^2+j, & -j \\ -j, & j^2-j \end{pmatrix}, \end{cases}$$

womit der Typus (1) der Substitutionen (7) zur vollen Evidenz gebracht worden ist.

Braunschweig, den 9. Februar 1892.

Zur Theorie der Modularcorrespondenzen.

Von

Robert Fricke in Kiel.

(Vorgelegt von F. Klein.)

Nachfolgende Notiz schließt sich an die in Bd. 25 der Mathematischen Annalen veröffentlichte Abhandlung von Hrn. Hurwitz über Classenzahlrelationen an. Im zweiten Abschnitt dieser Abhandlung (p. 183 ff.) ist die „transcendente" Behandlung der Modularcorrespondenzen siebenter Stufe im wesentlichen zum Abschluß gebracht. Es erübrigt, nun auch eine „algebraische" Behandlung dieser Correspondenzen in dem Sinne anzustreben, wie eine solche für die Modularcorrespondenzen 16. Stufe durch Hrn. E. Fiedler geliefert ist[1]). Man wird dabei der algebraischen Behandlung zweckmäßig dasjenige Modulsystem x_1, x_2, x_3 siebenter Stufe zu Grunde legen, welches der Relation

$$f(x_\alpha) = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1 = 0 \tag{1}$$

genügt. Die alsdann zu Tage tretenden Verhältnisse seien nachfolgend in ihren Grundzügen skizzirt.

Aus der genannten Hurwitz'schen Abhandlung entnehme ich zunächst die durch

$$\psi(n) = \tfrac{1}{4} \Sigma \left(\frac{\xi}{7}\right) \xi \tag{2}$$

definierte arithmetische Function $\psi(n)$ irgend einer positiven Ganzen durch 7 nicht theilbaren Zahl n, wobei sich die Summe in (2) auf alle Darstellungen von $4n$ in der ganzzahligen Form $\xi^2 + 7\eta^2$ bezieht. Aus den Hurwitz'schen Formeln ergiebt sich dann weiter: Die $\Phi(n) - \Phi(n)$-deutigen, im allgemeinen reducibeln Modularcorrespondenzen, welche bei Transformation n^{ter} Ordnung auf der durch $f(x_\alpha) = 0$ dargestellten Curve C_4 entspringen, sind $-\psi(n)$-werthig; dabei ist jedoch, falls $\psi(n) \lesseqgtr 0$ ist, das Schema $\begin{pmatrix} \sqrt{n}, & 0 \\ 0, & \sqrt{n} \end{pmatrix}$ der Transformation n^{ter} Ordnung zu Grunde zu legen, während bei $\psi(n) = 0$ irgend eines der 168 Schemata genommen werden darf; $\Phi(n)$ bedeutet die Summe aller Theiler von n.

---

1) Leipziger Dissertation von 1885, abgedruckt im 30. Bande der Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft zu Zürich.

Benennt man die transformirten Moduln x_α durch u_α, so wird man die einzelne Correspondenz algebraisch durch eine Gleichung:

$$F(u_1, u_2, u_3/x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{3}$$

darzustellen wünschen, deren linke Seite in jeder Variabelenreihe rational, ganz und homogen ist. Der denkbar einfachste Fall ist offenbar der, daß erstlich eine Gleichung (3) zur Darstellung der Correspondenz genügt, und daß überdies $F(u_\alpha/x_\alpha)$ in der einzelnen Variabelenreihe den Grad $\frac{1}{4}\Phi(n)$ aufweist. In diesem Falle wird die Correspondenz durch (3) rein dargestellt; sie heiße dann eine Schnittsystem-Correspondenz. Nur auf diese Correspondenzen bezieht sich die fernere Ueberlegung, und es ist die Hauptfrage, für welche Ordnungen n Schnittsystem-Correspondenzen auftreten.

Die erste in diesem Betracht zu fordernde Bedingung ist die, daß die Werthigkeit der Correspondenz gleich Null sein muß. Aus der Definition der arithmetischen Function $\psi(n)$ findet man dank des Umstandes, daß es für die Determinante $b^2 - 4ac = -7$ nur eine Classe quadratischer Formen $ax^2 + bxy + cy^2$ giebt, ein sehr einfaches Resultat: Man hat stets dann nullwerthige Correspondenzen, wenn n wenigstens eine modulo 7 mit 3 oder 5 oder 6 congruente Primzahl in ungerader (höchster) Potenz enthält. Dieser Bedingung entsprechend möge n fortan gewählt sein.

Eine zweite Bedingung für das Zustandekommen einer Schnittsystem-Correspondenz ist, daß bei beliebig gewähltem Punkt x der C_4 die $\Phi(n)$ correspondirenden Punkte auch wirklich auf einer Curve der Ordnung $\frac{1}{4}\Phi(n)$ gelegen sind. Ist dies für irgend einen speciellen Punkt x der Fall, so ist damit auch die Existenz einer Schnittsystem-Correspondenz sichergestellt. Man hat, um dies zu zeigen, nur auf bekannte Sätze über die Darstellung algebraischer Functionen und Correspondenzen auf irgend welchen Grundcurven zu recurriren, sowie andrerseits auf den Umstand Bezug zu nehmen, daß sich das Modulsystem der x_α gegenüber beliebigen Modulsubstitutionen linear reproducirt.

Als den eben gemeinten speciellen Punkt x der C_4 wähle ich nun die Ecke $x_2 = x_3 = 0$ des Coordinaten-Dreiecks und nenne diesen Punkt kurz c_1; entsprechend mögen die Ecken $x_3 = x_1 = 0$ und $x_1 = x_2 = 0$ bez. c_2 und c_3 heißen. Die Verabredung möge so getroffen sein, daß dem Punkte c_1 in der ω-Halbebene die Spitze $\omega = i\infty$ des ursprünglichen Polygons zugehört; dann entsprechen den Punkten c_2 und c_3 bez. die Polygonspitzen $\omega = \frac{1}{4}$ und $\omega = \frac{3}{4}$.

Das Schema der Transformation sei endlich mod. 7 mit $\begin{pmatrix} n, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ congruent gewählt; ein zweckmäßiges Repräsentantensystem haben wir dann in:

$$(4) \qquad R(\omega) = V_D\left(\frac{A\omega + 7B}{D}\right), \; AD = n, \; 0 \leqq B < D,$$

wo V_D eine mod. 7 mit $\begin{pmatrix} D, & 0 \\ 0, & D^{-1} \end{pmatrix}$ congruente Modulsubstitution ist. Indem man jetzt ω in die bei $\omega = i\infty$ gelegene Polygonspitze hineintreibt, kommt aus (4) leicht das Resultat, daß sich die $\Phi(n)$ dem Punkte c_1 correspondirenden Punkte der C_4 auf die drei Punkte c_1, c_2, c_3 verteilen. Bezeichnet man des näheren mit $\varphi_\nu(n)$ die Summe aller mod. 7 mit $+\nu$ oder $-\nu$ congruenten Theiler von n, so ergiebt sich: Von den $\Phi(n)$ dem Punkte c_1 correspondirenden Punkten der C_4 entfallen $\varphi_1(n)$ nach c_1, $\varphi_2(n)$ nach c_2, während die übrigen $\varphi_4(n)$ bei c_2 liegen.

Man nehme nun an, es sei $s = \frac{1}{4}\Phi(n)$ eine ganze Zahl und es gäbe eine homogene Verbindung $g(x_\alpha)$ der Dimension s, welche gleich Null gesetzt auf der C_4 die drei Punkte c_1, c_2, c_3 gerade in den eben angegebenen Multiplicitäten ausschneidet. Alsdann bilde man, unter k eine noch nicht näher bestimmte ganze Zahl verstanden, den Ausdruck nullter Dimension:

$$(5) \qquad h(x_\alpha) = \frac{x_1^{3k} x_2^{\varphi_4} g(x_\alpha)}{x_1^{\varphi_4} x_2^{2k+s} x_3^{k}};$$

derselbe stellt eine $|\lambda|$-werthige algebraische Function des durch $f(x_\alpha) = 0$ definirten Gebildes vor, wobei $|\lambda|$ der absolute Betrag der ganzen Zahl

$$(6) \qquad \lambda = \varphi_2 - 2\varphi_4 - s + 7k$$

ist. In der That ist h außer in c_1, c_2, c_3 allenthalben endlich und von Null verschieden; aber in c_3 ist $h(x_\alpha)$ gleichfalls endlich, und in c_3 findet sich ein Nullpunkt der Ordnung λ. Man bestimme jetzt k so, daß λ einem der Werte $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ gleich wird, was auf ein eindeutig bestimmtes k führt. Aber beim Charakter unseres Gebildes $f(x_\alpha) = 0$ und der Lage der Punkte c_1, c_3 sind die Werte $\lambda = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ ausgeschlossen, und also ist $h(x_\alpha) =$ const.

Von hieraus ergeben sich als nothwendige Bedingungen für eine Schnittsystem-Correspondenz:

$$(7) \qquad \begin{cases} \varphi_1(n) + \varphi_2(n) + \varphi_4(n) \equiv 0, \; (\text{mod. } 4), \\ \varphi_1(n) + 4\varphi_2(n) + 2\varphi_4(n) \equiv 0, \; (\text{mod. } 7); \end{cases}$$

dieselben sind aber auch hinreichend. Denn indem wir k aus

$$28k = \varphi_1 - 3\varphi_2 + 9\varphi_4 \tag{8}$$

als ganze Zahl berechnen, ergiebt sich für $g(x_\alpha)$:

$$g(x_\alpha) = x_1^{\varphi_4 - 3k} x_2^{2k+s-\varphi_4} x_3^k. \tag{9}$$

Sollte aber hier (was vorkommen kann) noch einer der Exponenten negativ ausfallen, so wird man die rechte Seite von (9) mit Hülfe der Identität $f(x_\alpha) = 0$ leicht in einen freilich mehrgliedrigen ganzen Ausdruck s^{ter} Dimension umsetzen können. Vermöge der hiermit angedeuteten Reductionsrechnung finde ich z. B. im Falle $n = 19$ den nachfolgenden Ausdruck:

$$g(x_\alpha) = x_1^4 x_3 - x_1 x_2^2 x_3^2 - x_2^5. \tag{10}$$

Die niedersten für uns in Betracht kommenden Ordnungen n sind, wenn ich sie nach steigendem Werte von $\Phi(n)$ anordnen soll:

$$n = 3,\ 6,\ 19,\ 12,\ \ldots. \tag{11}$$

Für die wirkliche Aufstellung der Gleichung (3) im Falle einer Schnittsystemcorrespondenz ist bekanntlich die Thatsache von großem Werte, daß die einzelne Modularcorrespondenz siebenter Stufe immer durch 168 simultane Substitutionen der beiden Modulsysteme u_α, x_α in sich selbst transformirt wird, wie dies von Klein bereits bei der Einführung der Modularcorrespondenzen überhaupt in Bd. 15 der Mathem. Annalen p. 68 ff. des näheren auseinander gesetzt ist. Dabei ist leicht festzustellen, wie wir den bekannten 168 x_α-Substitutionen die u_α-Substitutionen isomorph zuzuordnen haben. In der That findet man im ganzen nur zwei wesentlich verschiedene Fälle, den der Cogredienz und den der Contragredienz. Ist nämlich n quadratischer Rest von 7, so erfahren die u_α simultan immer dieselben Substitutionen wie die x_α, beide Reihen sind dann cogredient, sofern wir uns für diesen Fall des Schemas $\begin{pmatrix} \sqrt{n}, & 0 \\ 0, & \sqrt{n} \end{pmatrix}$ bedienen wollen. Entsprechend erfahren bei einem Nichtreste n unter Gebrauch des Schemas $\begin{pmatrix} \sqrt{-n}, & 0 \\ 0, & -\sqrt{-n} \end{pmatrix}$ die beiden Reihen u_α, x_α zugleich immer solche Substitutionen, daß der bilineare Ausdruck $(u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3)$ in sich transformiert wird; beide Reihen sind alsdann contragredient.

Zur Nutzanwendung dieser Verhältnisse hat man folgende Ueberlegung anzustellen. Ist eine gerade vorliegende Schnittsystem-Correspondenz durch die Gleichung $F(u_\alpha/x_\alpha) = 0$ in der ge-

wünschten Weise dargestellt, so ist dies in gleicher Art auch geleistet durch Nullsetzen der Form:

$$(12) \quad F'(u_\alpha/x_\alpha) = cF(u_\alpha/x_\alpha) + \sum_{a,b} \varphi_{a,b}(u_\alpha)\psi_{a,b}(x_\alpha)\cdot f^a(u_\alpha)f^b(x_\alpha),$$

wobei c eine beliebige endliche Constante ist und die $\varphi(u_\alpha)$, $\psi(x_\alpha)$ beliebige ganze homogene Verbindungen solcher Dimensionen ihrer Argumente bedeuten, daß die Dimensionen der einzelnen Glieder der Summe (12) in jeder Veriabelenreihe die s^{te} ist. Die Summe (12) bezieht sich auf alle Combinationen ganzer Zahlen a, b aus dem Intervall $0 \leqq a, b \leqq \frac{s}{4}$ unter Ausschluß der Combination $a = b = 0$. Umgekehrt kann man durch functionentheoretische Betrachtungen, die sich nicht in Kürze reproduciren lassen, den Nachweis führen, daß in $F'(u_\alpha/x_\alpha)$ die allgemeinste Form gewonnen ist, welche die Correspondenz rein darzustellen vermag. Die anfänglich vorgelegte Form $F(u_\alpha/x_\alpha)$ wird demnach insbesondere gegenüber den 168 simultanen Substitutionen stets in solche Formen $F'(u_\alpha/x_\alpha)$ übergehen. Dabei ist fundamental, daß die constanten Faktoren c durchgängig den Wert 1 haben; es folgt dies ganz einfach aus dem Umstande, daß sich die Gruppe G_{168} aus zwei Operationen S und T erzeugen läßt, die den Bedingungen $S^7 = 1$, $T^3 = 1$, $(ST)^8 = 1$ genügen. Indem man jetzt die Summe aller 168 Formen F' gleich selbst wieder $F(u_\alpha/x_\alpha)$ nennt, ist der Satz evident: Die Schnittsystem-Correspondenz läßt sich durch Nullsetzen einer bi-ternären Form s^{ten} Grades $F(u_\alpha/x_\alpha)$ darstellen, welche gegenüber der G_{168} der simultanen Substitutionen den Charakter einer absoluten Simultaninvariante hat. Hiermit sind für die Bildung der Correspondenzgleichung $F = 0$ die Hülfsmittel der Invariantentheorie erschlossen.

Vorstehende Entwicklungen mögen nun an ein paar Beispielen erläutert werden, und ich wähle zu diesem Zwecke etwa die in (11) angegebenen niedersten Ordnungen n, welche in Betracht kommen. Alle vier Ordnungen $n = 3, 6, 19, 12$ gehören zum Falle der Contragredienz, für welchen bereits durch Herrn Gordan das volle System der Simultaninvarianten aufgestellt ist[1]). Natürlich kommen hier nur diejenigen Formen zur Geltung, welche in beiden Variabelenreihen die gleiche Dimension aufweisen; man wird sich diese Formen vorab durch eine Zwischenrechnung aus der cit.

1) Man vergl. die beiden bezüglichen Abhandlungen in Bd. 17 der Mathem. Annalen, sowie namentlich die der ersten Abhandlung beigegebene tabellarische Zusammenstellung des fraglichen vollen Formensystems.

Gordan'schen Tabelle herzustellen haben. Bei den Ordnungen $n = 3, 6, 19, 12$ sind die zugehörenden Dimensionen $s = 1, 3, 5, 6$, und hier wird man sich die erforderlichen Formen in der folgenden Weise verschaffen. Es ist erstlich die Form $f(u_\alpha)f(x_\alpha)$ zu bilden, die wir indessen für die fertigen Gleichungen $F = 0$ überhaupt nicht zu berücksichtigen brauchen; es folgt für $s = 6$ die Form:

$$(13) \qquad (s = 6) \qquad H(u_\alpha/x_\alpha) = \nabla(u_\alpha)\nabla(x_\alpha),$$

wo $\nabla(x_\alpha)$ die von Klein in seiner ursprünglichen Arbeit über die 7te Stufe[1]) so benannte Hesse'sche Determinante

$$(14) \qquad \nabla(x_\alpha) = 5x_1^2x_2^2x_3^2 - x_2x_3^5 - x_3x_1^5 - x_1x_2^5$$

der Grundform f ist. Wir schreiben weiter mit Gordan:

$$\Theta(u_\alpha/x_\alpha) = 16\begin{vmatrix} f_{11}, & f_{12}, & f_{13}, & u_1 \\ f_{21}, & f_{22}, & f_{23}, & u_2 \\ f_{31}, & f_{32}, & f_{33}, & u_3 \\ u_1, & u_2, & u_3, & 0 \end{vmatrix}, \quad f_{\alpha,\beta} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$$

$$\Theta = u_1^2(x_2^4 - 4x_1x_2x_3^2) + u_2^2(x_3^4 - 4x_2x_3x_1^2) + u_3^2(x_1^4 - 4x_3x_1x_2^2)$$
$$+ 2u_2u_3(2x_1x_2^3 - x_1^2x_3^2) + 2u_3u_1(2x_2x_3^3 - x_2^2x_1^2) + 2u_1u_2(2x_3x_1^3 - x_3^2x_2^2)$$

und bilden uns von hieraus an zweiter Stelle die Form:

$$(15) \quad (s = 6) \qquad Z(u_\alpha/x_\alpha) = \Theta(u_\alpha/x_\alpha)\Theta(x_\alpha/u_\alpha).$$

Endlich folgen noch die drei Diagonalglieder u_x, f_φ, Θ_H der Tabelle mit $s = 1, 3, 5$, wobei $u_x = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3$ ist, während f_φ, Θ_H in der Gordan'schen Abhandlung nur erst symbolisch definirt sind. Ohne die ausführliche Gestalt von f_φ und Θ_H direct aus der symbolischen zu berechnen, verfahre ich so: Jedenfalls sind

$$(s = 3) \qquad A(u_\alpha/x_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial f(u)}{\partial u_\alpha} \frac{\partial f(x)}{\partial x_\alpha},$$

$$(s = 5) \qquad B(u_\alpha/x_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial \nabla(u)}{\partial u_\alpha} \frac{\partial \nabla(x)}{\partial x_\alpha}$$

Simultaninvarianten mit $s = 3$ und $s = 5$. Es gelten also nothwendig die Identitäten:

$$A = af_\varphi + bu_x^3,$$
$$B = \alpha\Theta_H + \beta f(u)f(x)u_x + \gamma A u_x^3 + \delta u_x^5$$

1) Mathem. Ann. Bd. 14.

mit numerischen Faktoren $a, b, \alpha, \ldots$. Wäre aber a oder $\alpha = 0$, so müßte A bez. B für $u_1 = x_2 = x_3 = 0$ verschwinden; dies ist indessen nicht der Fall und also können wir an Stelle von f_φ und Θ_H auch die beiden Formen A und B gebrauchen.

Für die linken Seiten der Correspondenzgleichungen für $n = 3$, 6, 19, 12 wird man nun mit Hülfe numerischer Constanten $\alpha, \beta, \ldots$ die Ansätze in u_α, A, B, Z, H sofort bilden; man hat:

$$\begin{aligned} n &= 3, \quad & u_\alpha &= 0, \\ n &= 6, \quad & A + \alpha u_\alpha^3 &= 0, \\ n &= 19, \quad & B + \alpha A u_\alpha^2 + \beta u_\alpha^5 &= 0, \\ n &= 12, \quad & \alpha Z + \beta H + \gamma B u_\alpha + \delta A^2 + \varepsilon A u_\alpha^3 + \zeta u_\alpha^6 &= 0. \end{aligned}$$

Hierbei ist für $n = 12$ sogleich die Beschränkung auf die irreducibele Correspondenz genommen, wie auch in den Ansätzen für $n = 6$ und $n = 19$ der Umstand benutzt wurde, daß es sich beide Male um irreducibele Correspondenzen handelt.

Zur Bestimmung der Constanten $\alpha, \ldots$ setze man $u_2 = u_3 = 0$; dabei muß die linke Seite der einzelnen Gleichung bis auf Bestandtheile, die mit f verschwinden, in den für die betreffende Ordnung oben bestimmten Ausdruck $g(x_\alpha)$ übergehen. Inzwischen kann an Stelle von $g(x_\alpha)$ auch ein Ausdruck erscheinen, der aus $g(x_\alpha)$ durch cyclische Permutation der x entsteht, dem Umstande entsprechend, daß die letzten Gleichungen für das Schema $\begin{pmatrix} \sqrt{-n}, 0 \\ 0, -\sqrt{-n} \end{pmatrix}$ angesetzt sind, während der obigen Berechnung von $g(x_\alpha)$ das Schema $\begin{pmatrix} n, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix}$ zu Grunde lag. Welche Permutation der x_α vorliegt, entscheidet man immer ganz leicht durch Betrachtungen, die sich an die Ausübung der Substitution:

$$(S) \qquad x_1' = e^{\frac{2i\pi}{7}} x_1, \quad x_2' = e^{\frac{8i\pi}{7}} x_2, \quad x_3' = e^{\frac{4i\pi}{7}} x_3$$

anschließen. Infolge der Formeln (13) ff. hat man aber für $u_1 = 1$, $u_2 = u_3 = 0$ folgende Werthe der u_α, A, $\cdots$:

$$u_\alpha = x_1, \; A = x_1^3 + 3x_2^3 x_3, \; B = x_1^5 + 5x_2 x_3^4 - 10 x_1^2 x_2^2 x_3,$$
$$Z = x_2^4 x_3^2 - 4 x_1 x_2 x_3^4, \; H = 0.$$

So findet sich z. B. für $n = 19$ mit Rücksicht auf (10) die Identität:

$$x_1^5 + 5x_2 x_3^4 - 10 x_1^3 x_2^2 x_3 + \alpha(x_1^5 + 3x_1^3 x_2^2 x_3) + \beta x_1^5 = C \cdot (x_1^5 + x_1^3 x_2^2 x_3 - x_2 x_3^4);$$

Glieder $x_\alpha f(x)$ können hier nämlich nicht mehr auftreten, weil sie

gegenüber (S) nicht das Verhalten von x_1^5 zeigen können. Es ergiebt sich demgemäß:

$$\alpha+\beta+1 = C,\ 3\alpha-10 = C,\ 5 = -C,$$

womit für α und β die Werthe $\frac{5}{3}$ bez. $-\frac{23}{3}$ gewonnenen sind. Bei $n = 6$ finden wir $\alpha = -1$, dagegen ergeben sich bei $n = 12$ auf diesem Wege erst zwei lineare Gleichungen für die sechs unbekannten Coefficienten $\alpha, \beta, \ldots \zeta$; hier also wird man in bekannter Weise auf die Entwicklungen der x_α und u_α nach Potenzen von $e^{2\pi i\omega}$ zurückgreifen müssen. Als fertige Correspondenzgleichungen für die in Rede stehenden Ordnungen n finde ich so:

$$\begin{aligned}
n &= 3, \quad && u_\alpha = 0,\\
n &= 6, && A-u_\alpha^3 = 0,\\
n &= 19, && 3B+5Au_\alpha^3-23u_\alpha^5 = 0,\\
n &= 12, && 3^2\cdot 5\cdot H-3^2Bu_\alpha-5\cdot 7Au_\alpha^3-5A^2+7^3u_\alpha^6 = 0.
\end{aligned}$$

Die erste unter diesen Gleichungen ist bereits von Herrn Klein in Bd. 15 der Mathemat. Annalen angegeben worden.

Braunschweig, den 12. Februar 1892.

Ueber die zur Verzweigung (2, 3, 7) gehörende s-Function.

Von

Robert Fricke in Kiel.

(Vorgelegt von F. Klein.)

Im Anschluß an meine vorletzte Notiz erlaube ich mir, der Königl. Societät hiermit eine Fortsetzung der dort unternommenen Untersuchungen vorzulegen. Unter allen Dreiecksfunctionen $s(l, m, n; x)$ darf man in arithmetischer Hinsicht bei jenen das einfachste Verhalten erwarten, für welche $l = 2$, $m = 3$ ist; denn nur die elliptischen Substitutionen der Perioden 2 und 3 haben bei geeigneter Annahme der Fixpunkte ganze Zahlen der Determinante 1 zu Coefficienten. In diesem Sinne bin ich an die Aufgabe gegangen, vorab in den Fällen $s(2, 3, n; x)$ das allgemeine arithmetische Bildungsgesetz der Substitutionscoefficienten klar zu stellen, um von hier aus die gruppenbildende

Eigenschaft der Substitutionen direct einzusehen. Nach Ausschluß der bekannten Fälle $n = 1, .., 6$ ergaben sich $n = 8, 10, 12$ als die nächsteinfachen Fälle; hier wird man zu biquadratischen Zahlkörpern geführt, und es subsumiren sich die betreffenden Gruppen unmittelbar oder doch mittelbar unter den allgemeinen Ansatz meiner vorletzten Notiz. Dagegen gestalten sich die Verhältnisse bei $n = 7$ neu und beziehungsreich; ich habe hier das nachstehend skizzirte Resultat erhalten:

Es sei j die eine reelle positive Wurzel der Gleichung 6ten Grades:

$$j^6 + 4j^4 + 3j^2 - 1 = 0, \tag{1}$$

welche mit der Kreistheilungsgleichung ($n = 7$) die cubische Resolvente gemein hat. Man setze alsdann:

$$\left\{\begin{aligned} A &= a_0 + a_1 j^2 + a_2 j^4, \\ B &= b_0 + b_1 j^2 + b_2 j^4, \\ C &= c_0 + c_1 j^2 + c_2 j^4, \\ D &= d_0 + d_1 j^2 + d_2 j^4, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

so daß A, B, C, D ganze Zahlen des cubischen Körpers von der Basis $[1, j^2, j^4]$ sind. Doch sollen A, B, C, D so gewählt sein, daß die Gleichung:

$$A^2 + C^2 - j^2(B^2 + D^2) = 4 \tag{3}$$

erfüllt ist; alsdann sind:

$$s' = \frac{(A + jB)s + (C + jD)}{(-C + jD)s + (A - jB)} \tag{4}$$

Substitutionen der Determinante 4, welche ich generell durch V bezeichne. Zwei Substitutionen V geben, combinirt, augenscheinlich wieder eine Substitution der Gestalt (4), jedoch von der Determinante 16, und es gilt zu entscheiden, ob man nicht durch zweckmäßige Beschränkung der A, B, C, D erreichen kann, daß die vier Coefficienten der combinirten Substitution zugleich durch 2 theilbar werden. In diesem Betracht gelten nun die nachfolgenden, für die vorliegende Betrachtung fundamentalen Verhätnisse:

Die gesammten Substitutionen V werden in der folgenden Art auf drei Abtheilungen vertheilt. Erstlich fasse man alle Substitutionen V mit $B \equiv D \pmod 2$ zusammen und benenne sie insbesondere durch V_0; sie lassen sich auch durch $A \equiv C \pmod 2$ de-

finiren. Für die einzelne der übrig bleibenden Substitutionen ist entweder das Tripel der Congruenzen:

$$(5)\qquad \left.\begin{array}{l} b_0 \equiv c_1' + d_1, \\ b_1 \equiv c_1 + c_2 + d_1 + d_2, \\ b_2' \equiv c_0 + c_2 + d_0 + d_2 \end{array}\right\} \text{(mod. 2)}$$

erfüllt oder aber das andere Tripel:

$$(6)\qquad \left.\begin{array}{l} b_0 \equiv a_1 + d_1, \\ b_1 \equiv a_1 + a_2 + d_1' + d_2, \\ b_2 \equiv a_0 + a_2 + d_0 + d_2 \end{array}\right\} \text{(mod. 2)},$$

niemals jedoch beide zugleich. Die Substitutionen V mit $A \lesseqgtr C$ (mod. 2), welche (5) erfüllen, sollen V_1, die welche (6) erfüllen, V_2 heißen. Man kann alsdann durch elementare Rechnung zeigen: Irgend zwei Substitutionen aus der Reihe der Substitutionen V_0 und V_1 geben durch Combination nicht nur wieder eine Substitution V, sondern zugleich wieder ein V_0 oder V_1: Die Gesammtheit der Substitutionen V_0 und V_1 stellt demnach eine Gruppe vor, und es gilt ein Gleiches von den gesammten Substitutionen V_0 und V_2.

Beide so erhaltenen Gruppen sind durch die Substitution

$$s' = \frac{s-1}{s+1}$$

in einander transformirbar, so daß sie nicht wesentlich von einander verschieden sind. Wir haben aber hier direct die Gruppe der Function s (2, 3, 7; x) in zweierlei Gestalten vor uns, die wie folgt näher zu bezeichnen sind: Beide Male ist die reelle s-Axe natürliche Grenze, und es sind die imaginäre Axe und der Einheitskreis Symmetrielinien für die erweiterten Gruppen. Aber bei der Gruppe der Substitutionen V_0, V_1 erscheint die Dreiecksfigur so orientirt, daß auf der imaginären s-Axe sich zunächst am Punkte $s = i$ zwei Fixpunkte elliptischer Substitutionen der Periode sieben finden; bei der Gruppe V_0, V_2 ist dagegen der Punkt $s = i$ auf der imaginären Axe von den Fixpunkten zweier Substitutionen der Periode drei umgeben.

Die Erzeugenden der Gruppe mögen wenigstens für die erste der beiden Gestalten hier wirklich angegeben werden; es sind:

$$s' = \frac{(1+3j^2+j^4)s+1+j}{(-1+j)s+1+3j^2+j^4}, \quad s' = \frac{-1}{s}.$$

Besonders wichtig ist die Untergruppe derjenigen Substitutionen V, bei denen die 4 ganzen Zahlen A, B, C, D zu gleicher Zeit durch 2 theilbar sind; da kann man durch 2 heben und bekommt Substitutionen der Gestalt (4), aber der Determinante eins. Die Gruppe dieser übrigens in die Classe V_0 gehörenden Substitutionen gehört zum Geschlechte Null und ist innerhalb jeder der beiden vorbestimmten Gruppen als Untergruppe vom Index 63 enthalten. Es ist interessant, diese Untergruppe durch die Spiegelung an der imaginären s-Axe zu erweitern: Als Fundamentalpolygon der so erweiterten Gruppe entspringt ein reguläres Kreisbogensiebeneck mit lauter rechten Winkeln; dieses Siebeneck läßt sich also auf zwei Weisen in 63 aequivalente Kreisbogendreiecke vom Typus $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{7}\right)$ zerlegen. Zugleich entspringt der Satz: Die beiden Dreiecksfunctionen $s(2, 3, 7; x)$ und $s(2, 4, 7; x)$ sind in dem Sinne mit einander verwandt, daß sich ein Complex von 63 Dreiecken der einen Art gerade genau mit einem Complex von 14 Dreiecken der anderen Art zur Deckung bringen läßt.

Die Gleichung (1) definirt drei unterschiedene conjugirte Körper sechsten Grades, von denen die beiden bislang noch nicht in Betracht gekommenen imaginär sind. Man kann fragen, welche Bedeutung den beiden hier entspringenden conjugirten Gruppe zukommt: es sind das einfach die beiden Gruppen, welche den Kreisbogendreiecken $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{7}\right)$ und $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{7}\right)$ ihre Entstehung verdanken. Beide Male wird durch die Reproduction dieser Dreiecke die volle s-Ebene und zwar unendlich oft überdeckt.

Eine ausführliche Darlegung der vorstehend skizzirten Resultate, wobei die Theorie der Einheiten des Körpers sechsten Grades $[1, j, \ldots, j^5]$ eine wesentliche Rolle spielt, stehe ich im Begriff für die Mathem. Annalen zu redigiren.

Braunschweig, den 28. Februar 1892.

Die eindeutigen automorphen Formen vom Geschlechte Null.

Von

E. Ritter in Cassel.

(Vorgelegt von F. Klein.)

Im Folgenden gebe ich eine kurze Zusammenstellung der bemerkenswertesten Ergebnisse meiner demnächst erscheinenden Dissertation: „Ueber die eindeutigen automorphen Formen vom Geschlechte Null, eine Revision und Erweiterung der Poincaré'schen Sätze". Diese Arbeit läuft parallel mit demjenigen Teile der Untersuchungen des Hrn. Poincaré, der in seinen 3 Abhandlungen in Bd. 1 und Bd. 3 der Acta mathematica dargestellt ist, unterscheidet sich davon aber formell durch die Hervorhebung der allgemein functionentheoretischen Gesichtspunkte und durch die Anwendung der von Hrn. Prof. Klein in diesen Teil der Functionentheorie eingeführten homogenen Variablen, sachlich durch die Ausdehnung der Untersuchung auf eine viel allgemeinere Classe von Formen, von denen die Poincaré'schen Functionen nur einem speciellen Falle entsprechen. Die Beschränkung auf das Geschlecht 0 ist dabei nur eine vorläufige, durch die größere Einfachheit der nötigen Hülfsmittel gebotene.

I. Gruppentheoretisches.

Da die Gruppen ohne Grenzpunkte auf die regulären Körper führen, diejenigen mit einem oder zwei Grenzpunkten auf elliptische Functionen, so richte ich mein Hauptaugenmerk auf die übrigen Gruppen, welche stets unendlich viele Grenzpunkte darbieten. Diese kann man passend danach einteilen, ob die ihnen entsprechende Gebietseinteilung die ganze Ebene umfaßt, oder nur einen Teil derselben, und ob sie ein Gebiet von einfachem oder mehrfachem Zusammenhang überdeckt, wobei man isolirte Grenzpunkte immer als Oeffnungen im Gebiete ansehen muß.

In jedem Falle müssen die Erzeugenden gewisse „primäre Relationen" erfüllen, welche aussagen, daß sich die Fundamentalbereiche um jede Ecke herum schlicht anordnen; bei mehrfachem Zusammenhang des Gebietes muß noch eine endliche Anzahl „secundärer Relationen" hinzukommen als Bedingung für die Schlichtheit der Ueberdeckung um die Oeffnungen herum.

Functionentheoretisch ganz unwesentlich ist dagegen für meine Betrachtungen die Einteilung in Gruppen mit Hauptkreis und ohne

einen solchen. Die Hauptkreisgruppen haben vor den allgemeineren Gruppen nur die leichte Uebersehbarkeit ihrer Eigenschaften voraus, und nur aus diesem Grunde benutze ich dieselben als Beispiele, an denen ich gewisse allgemeine Betrachtungen bis ins Einzelne durchführe.

II. Functionentheoretische Vorbegriffe.

Nach dem combinirenden Verfahren der Hrn. H. A. Schwarz und C. Neumann — dessen Anwendbarkeit auf den vorliegenden Fall Herr Poincaré irrtümlich bestreitet — zeigt man, daß es zu jedem in der ζ-Ebene ausgebreiteten Fundamentalbereiche mit linearer Kantenzusammenordnung zugehörige automorphe Functionen gibt, beim Geschlechte $p = 0$, welches ich fortan ausschließlich betrachte, insbesondere auch eine Function z, die jeden ihrer Werte im Fundamentalbereiche genau einmal annimmt. Als Function dieser automorphen Function z genügt ζ einer Differentialgleichung dritter Ordnung, indem der Schwarz'sche Differentialparameter $[\zeta]_z$ eine rationale Function von z ist. Dabei zeigt sich die Variable ζ mit jedem linearen Ausdruck $\frac{\alpha\zeta+\beta}{\gamma\zeta+\delta}$, ebenso z mit $\frac{az+b}{cz+d}$ gleichberechtigt, so daß auch der unendlich ferne Punkt sowohl der ζ- wie der z-Ebene mit jedem andern Punkte auf gleicher Stufe steht. Dies führt darauf, auch äußerlich die Ausnahmestellung des unendlich Fernen durch Spaltung von ζ und z in homogene, nie unendlich und nie simultan Null werdende Variablen ζ_1, ζ_2 und z_1, z_2 zu beseitigen. Dabei wird man verlangen, daß bei geschlossenen Umläufen der z_1, z_2 die ζ_1, ζ_2 den gebrochenen Substitutionen der ζ entsprechend ganze binäre Substitutionen erleiden. Als einzig mögliche derartige Spaltung findet man

$$\zeta_1 = \zeta \cdot \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \prod_{i=1}^{i=n} (ze_i)^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{l_i}\right)} \cdot z_2$$

$$\zeta_2 = \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \prod_{i=1}^{i=n} (ze_i)^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{l_i}\right)} \cdot z_2,$$

wo unter l_i die Perioden der die Gruppe erzeugenden Substitutionen, unter $e_i = \frac{e_i'}{e_i''}$ die n Punkte der z Ebene, die den n Ecken des Fundamentalbereiches entsprechen, und unter (ze_i) die Determinante $z_1 e_i'' - z_2 e_i'$ verstanden ist. ζ_1, ζ_2 sind so specielle Zweige eines sogenannten „Normal-Π zweiter Art" mit n singulären Punkten geworden[1]).

1) Klein: Ueber Normirung der linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung. Math. Ann. 38.

III. Die Multiplicatorsysteme der eindeutigen automorphen Formen.

Unter „automorphen Formen“ von ξ_1, ξ_2 versteht man solche Formen, welche bei Anwendung einer gewissen Gruppe ganzer binärer Substitutionen der ξ_1, ξ_2 sich nur mit gewissen constanten Multiplicatoren multipliciren. Sollen sie eindeutig sein, so müssen solche Formen von geradzahligem Grade sein; außerdem aber müssen die Multiplicatoren gewisse Relationen erfüllen, und zwar verschiedenen, je nachdem der Grad der Form ein geradzahliger oder ein ungeradzahliger ist.

Als homogene Gruppe legt man am besten die unimodulare Spaltung der gegebenen nichthomogenen Gruppe zu Grunde, welche bekanntlich monodimorph zu letzterer ist (d. h. von welcher immer 2 Substitutionen je einer Substitution der nichthomogenen Gruppe entsprechen).

Diese unimodulare Gruppe kann man durch n elliptische (oder parabolische) Substitutionen S_i erzeugen, welche folgenden Relationen genügen:

$$S_i^{l_i} = (-1),\ \prod_{i=1}^{i=n} S_i = (-1)^n,\ \text{(Primäre Relationen)}$$

$$\prod_{\varkappa} S_{\nu_\varkappa} = (-1)^{m_\nu},\ \text{(Secundäre Relationen)}$$

wo unter (-1) die simultane Multiplication mit -1 verstanden sein soll. Die Multiplicatoren für Formen von geradzahligem Grade haben dann die Gestalt

$$\varrho_i = e^{i\pi\frac{\lambda_i}{l_i}} = e^{i\pi\cdot\frac{2\mu_i}{l_i}},$$

diejenigen für Formen von ungeradzahligem Grade die Gestalt:

$$\varrho_i = e^{i\pi\frac{\lambda_i}{l_i}} = e^{i\pi\cdot\frac{2\mu_i+1}{l_i}}.$$

Die erstern sind den Bedingungen:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\frac{2\mu_i}{l_i} \equiv 0 \pmod 2$$

$$\sum_{\varkappa}\frac{2\mu_{\nu_\varkappa}}{l_{\nu_\varkappa}} \equiv 0 \pmod 2,$$

die für Formen von ungeradzahligem Grade den Bedingungen:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{2\mu_i + 1}{l_i} \equiv n \pmod 2$$

$$\sum_{\varkappa} \frac{2\mu_{\nu_\varkappa} + 1}{l_{\nu_\varkappa}} \equiv m_\nu \pmod 2$$

unterworfen.

Zwischen den verschiedenen möglichen Multiplicatorsystemen bestehen gewisse einfache Beziehungen, auf die ich an dieser Stelle der Kürze wegen nicht eingehe.

Die Relationen kann man in Diophantische Gleichungen umsetzen, welche dann leicht übersehen lassen, unter welchen Umständen Multiplicatorsysteme möglich sind, und in welcher Anzahl.

Die Hauptergebnisse sind:

1) Es existirt immer mindestens ein Multiplicatorsystem für Formen von geradzahligem Grade, nämlich $\varrho_i = 1$.

Formen mit diesem Multiplicatorsysteme nennt man eigentlich automorphe Formen; sie sind notwendig von geradzahligem Grade.

2) Sieht man von den secundären Relationen ab, so existiren dann und nur dann keine Multiplicatorsysteme für ungeradzahligen Grad, wenn alle l_i endlich sind, und eine ungerade Anzahl von ihnen durch die höchste in den l_i als Teiler vorkommende Potenz von 2 teilbar sind.

Dieser zweite Satz gewinnt auch in anderer Richtung grundlegende Bedeutung durch den folgenden Satz:

3) Jedem Multiplicatorsysteme für Formen von ungeradzahligem Grade entspricht eine isomorphe Spaltung der nichthomogenen Gruppe und umgekehrt.

Ich habe hiermit also zugleich die Frage nach der Möglichkeit der isomorphen Spaltung — die z. B. im Falle der Ikosaedergruppe für die Theorie der Gleichungen 5. Grades so entscheidend ist[1]) — für den Fall $p = 0$, wenn keine secundären Relationen existiren, ganz allgemein beantwortet.

Für die Hauptkreisgruppen läßt sich die Untersuchung auch bei Gegenwart secundärer Relationen vollständig durchführen. Ich erweitere den Begriff der Hauptkreisgruppen gegenüber Hrn. Poincaré in der Weise, daß ich auch solche Substitutionen zulasse, die Inneres und Aeußeres des Hauptkreises vertauschen, und die ich negative Substitutionen nenne. Die negativen Erzeugenden

1) Klein: Vorlesungen über das Ikosaeder, S. 45 u. S. 255.

müssen dann notwendig in gerader Anzahl vorhanden sein, und die Periode 2 haben. Es ergibt sich nun:

1) Wenn der Hauptkreis Grenzkreis ist, so ist das Kriterium 2) unmittelbar anwendbar.

2) Wenn der Hauptkreis nicht natürliche Grenze ist, und negative Erzeugende fehlen, so ist stets isomorphe Spaltung möglich.

3) Wenn negative Erzeugende existiren (wo der Hauptkreis natürlich nicht Grenzkreis ist), so besitzt die Mannigfaltigkeit des Fundamentalbereiches eine Symmetrielinie. Dann ist notwendige und hinreichende Bedingung für die isomorphe Spaltbarkeit, daß alle diejenigen positiven Erzeugenden, deren zugehörige singuläre Punkte auf der Symmetrielinie liegen, eine ungeradzahlige Periode l_i besitzen.

IV. Ausdruck der automorphen Formen durch z_1, z_2.

Es gilt der Satz:

Eine automorphe Form, die im Fundamentalbereiche weder 0 noch ∞ wird, ist notwendig vom 0ten Grade und eine Constante.

Daraus folgt für die allgemeinste unverzweigte automorphe Form von ζ_1, ζ_2 die Darstellung:

$$F_s(\zeta_1, \zeta_2) = \prod_{i=1}^{i=n} (\varepsilon e_i)^{\frac{\varepsilon_i}{l_i}} \cdot \mathrm{Rat}_s(z_1, z_2) \cdot \begin{cases} \delta, \ \varepsilon_i \text{ ganze Zahlen,} \\ R\left(1 - \Sigma \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{1}{l_i}\right)\right) = \delta + \Sigma \tfrac{\varepsilon_i}{l_i}. \end{cases}$$

Soll die Form eindeutig vom Grade R (R dann natürlich ganzzahlig) mit dem Multiplicatorsystem $\varrho_i = e^{i\pi \cdot \frac{\lambda_i}{l_i}}$ sein, so sind die Zahlen ε_i, δ folgenden Formeln gemäß zu bestimmen:

$$\frac{\varepsilon_i}{l_i} = \frac{R + \lambda_i}{2 l_i} - E\left[\frac{R + \lambda_i}{2 l_i}\right],$$

$$\delta = \sum_{i=1}^{i=n} E\left[\frac{R + \lambda_i}{2 l_i}\right] - \frac{n-2}{2} R - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\lambda_i}{2 l_i},$$

wo unter $E(\alpha)$ die größte ganze Zahl verstanden ist, welche $\leqq \alpha$ ist. Da δ und ε_i, auch bei ungeradzahligem Grade, sich als ganze Zahlen ergeben, so hat man den Satz:

Zu jedem eindeutigen Multiplicatorsysteme existiren zugehörige Formen von jedem je nach dem

Multiplicatorsysteme geradzahligen oder ungeradzahligen Grade.

Ich führe noch die für später wichtige reciproke Beziehung zwischen Formen von positivem und negativem Grade an:

Stehen Grad und Multiplicatorsystem zweier automorphen Formen in der Beziehung:

$$R+R'+2=0, \qquad \varrho_\varkappa \varrho'_\varkappa = 1,$$

so ist

$$\delta+\delta'+2=0, \quad \frac{\varepsilon_i}{l_i}+\frac{\varepsilon'_i}{l_i}=1-\frac{1}{l_i}.$$

Aus dem allgemeinen Ausdruck durch z_1, z_2 folgen eine Reihe wichtiger Sätze über die 0-Stellen und ∞-Stellen im Bereiche, sowie über die Zahl der linear unabhängigen Formen, worauf ich hier nicht eingehe.

Eine besondere Bedeutung besitzen die eigentlich automorphen Formen vom Grade (-2):

$$F_{-2}(\xi_1, \xi_2) = \prod_{i=1}^{i=n} (z e_i)^{1-\frac{1}{l_i}} \cdot \mathrm{Rat}_{-2}(z_1, z_2).$$

Von den im Fundamentalbereiche liegenden ∞-Stellen einer solchen Form gilt ein Residuensatz:

Die Summe der Coefficienten der einfach ∞ werdenden Entwicklungsglieder aller incongruenten ∞-Stellen ist $= 0$.

Wichtig ist ferner der Zusammenhang mit den Abel'schen Integralen der Mannigfaltigkeit, die ich kurz als „automorphe Integrale" benennen will. Es ist nämlich:

$$\int^{\xi} F_{-2}(\xi_1, \xi_2)(\xi, d\xi) = \int^{z} \mathrm{Rat}_{-2}(z_1, z_2)(z, dz).$$

V. Die Poincaré'schen Reihen.

Herrn Poincaré's „fonctions thétafuchsiennes" und „fonctions thétakleinéennes" entsprechen einem speciellen Falle meiner Formen, nämlich den eigentlich automorphen Formen von geradzahligem Grade. Doch lassen sich seine „séries thétafuchsiennes" etc. auch für die allgemeinern Formen erweitern: man gewinnt so eine Darstellung:

$$F_z(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\varkappa} \varrho_\varkappa^{-1} \varphi_z(\xi_1^{(\varkappa)}, \xi_2^{(\varkappa)}).$$

Eine Reihe dieser Art nenne ich, unter Beiseitelassung der

unzutreffenden Benennung Herrn Poincaré's eine „Poincaré'sche Reihe".

Die Poincaré'schen Convergenzbeweise gelten in unveränderter Weise auch für die allgemeinern Reihen; dieselben convergiren also gewiß absolut, wenn $R \leqq -4$ ist. Aber dies ist sicher nicht immer die äußerste Grenze der Convergenz. Man kann nur den negativen Satz aussprechen:

1) Reihen vom Grade -2 convergiren sicher nicht, wenn die Grenz-Punkte längs einer oder mehrere Curvenstücke gehäuft liegen.

Für die Hauptkreisgruppen kann man die Grenze der Convergenz genauer angeben:

2) Wenn der Hauptkreis Grenzkreis ist, so convergiren die Poincaré'schen Reihen dann und nur dann, wenn $R < -2$ ist, liegen dagegen auf dem Hauptkreise nur isolirte Grenzpunkte, so convergiren die Reihen schon, wenn $R \leqq -2$ ist.

An den Poincaré'schen Reihen lassen sich alle aus dem allgemeinen Ausdruck gezogenen Schlüsse über das Verhalten der automorphen Formen an einzelnen Stellen bestätigen. Aber es besteht ein wesentlicher Unterschied: Die Mannigfaltigkeit der Reihen mit gegebener Art des ∞-Werdens ist eine viel größere, als die der möglichen Formen. Es gibt also immer unendlich viele Reihen für ein und dieselbe Form, insbesondere unendlich viele identisch verschwindende Reihen ohne ∞-Stellen. Andererseits kann man zu einer vorgegebenen Reihe nur in wenigen Fällen die Constanten im zugehörigen allgemeinen Ausdruck bestimmen.

VII. Die Poincaré'schen Integralreihen und die Weber-Schottky'schen Producte.

Die eigentlich automorphen Reihen vom Grade -2, ihre Convergenz vorausgesetzt, liefern durch gliedweise Integration Reihen für die automorphen Integrale, welche in demselben Maße convergiren, wie die Poincaré'schen Reihen vom (-2)ten Grade, nämlich:

$$J(\zeta) = \sum_{\varkappa} \{\varphi(\zeta^{(\varkappa)}) - \varphi(Z^{(\varkappa)})\},$$

wo unter $\varphi(\zeta)$ eine Function von der Gestalt

$$\varphi(\zeta) = \mathrm{Rat}(\zeta) + \sum_{\nu} A_\nu \log(\zeta - \xi^{|\nu|})$$

zu verstehen ist. Ich nenne diese Reihen wegen ihrer nahen Be-

ziehung zu den Poincaré'schen Reihen „Poincaré'sche Integralreihen", obwohl sie Herr Poincaré selbst nicht angibt. Wohl aber kommt Herr Schottky (Crelle's Journal Bd. 101) auf einem andern Wege zu diesen Reihen.

Von speciellen Poincaré'schen Integralreihen aus gelangt man dann leicht zu den von den Herren Weber und Schottky gegebenen Productdarstellungen für die automorphen Functionen:

$$F(\zeta) =$$
$$F(Z)\cdot\prod_{\varkappa}\left\{\frac{(\zeta^{(\varkappa)}-\xi')(\zeta^{(\varkappa)}-\xi'')\cdots(\zeta^{(\varkappa)}-\xi^{(\varepsilon)})}{(\zeta^{(\varkappa)}-\eta')(\zeta^{(\varkappa)}-\eta'')\cdots(\zeta^{(\varkappa)}-\eta^{(\varepsilon_1)})}:\frac{(Z^{(\varkappa)}-\xi')(Z^{(\varkappa)}-\xi'')\cdots(Z^{(\varkappa)}-\xi^{(\varepsilon)})}{(Z^{(\varkappa)}-\eta')(Z^{(\varkappa)}-\eta'')\cdots(Z^{(\varkappa)}-\eta^{(\varepsilon_1)})}\right\}.$$

VII. Die Elementarformen.

Unter einer Elementarform verstehe ich eine Poincaré'sche Reihe nach ζ_1, ζ_2 mit nur einem System congruenter einfacher ∞-Stellen $\xi_1^{(\varkappa)}$, $\xi_2^{(\varkappa)}$, welche an diesen Stellen je mit dem Coefficienten $\varrho_\varkappa$ unendlich wird. Eine solche Form ist notwendig eine Form $R' = (-R-2)$ten Grades der ∞-Stelle ξ_1, ξ_2, und ist in folgender Gestalt darzustellen:

$$\overset{R}{\overbrace{\quad}}\quad\overset{R'}{\overbrace{\quad}}$$
$$A(\xi_1, \xi_2; \xi_1, \xi_2) = \sum_{\varkappa}\varrho_\varkappa^{-1}\frac{\varphi_{s+1}(\zeta_1^{(\varkappa)}, \zeta_2^{(\varkappa)})}{(\zeta^{(\varkappa)}\xi)\cdot\varphi_{s+1}(\xi_1, \xi_2)}.$$

Die rationale Form $\varphi_{s+1}(\xi_1, \xi_2)$ ist so einzurichten, daß ihre etwa in das Gebiet der Fundamentalbereiche fallenden ∞-Stellen bei der Summation sich gegenseitig aufheben; dies ist immer möglich, außer im Falle der eigentlich automorphen Formen (-2)ten Grades, freilich, wenn keine natürlichen Grenzen existiren, nur so, daß die Coefficienten von $\varphi_{s+1}(\xi_1, \xi_2)$ selbst rationale Formen von ξ_1, ξ_2 werden.

$A(\xi_1, \xi_2; \xi_1, \xi_2)$ ist in doppeltem Sinne eine Elementarform: es dient nämlich zur Zusammensetzung sowohl der automorphen Formen Rten Grades von ζ_1, ζ_2 mit dem Multiplicatorsysteme $\varrho_\varkappa$, wie der automorphen Formen R'ten Grades von ξ_1, ξ_2 mit dem Multiplicatorsystem $\varrho'_\varkappa = \varrho_\varkappa^{-1}$ aus ihren ∞-Stellen.

Im ersten Falle aber bleibt in der darzustellenden Form noch eine $(\delta+1)$ lineare Constanten enthaltende nicht ∞ werdende automorphe Form unbestimmt, im zweiten Falle müssen die Zusammensetzungscoefficienten noch $-(\delta'+1)$ linearen Relationen unterworfen werden, damit das Resultat der Zusammensetzung wirklich automorph in ξ_1, ξ_2 sei. Es ist also, wenn man unter $\Phi_s^{(\mu)}(\zeta_1, \zeta_2)$ $(\mu = 1, 2, \ldots, \delta+1)$ $\delta+1$ linear unabhängige automorphe For-

men ohne ∞-Stellen versteht,

$$1) \quad F_x(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\varepsilon} A_\nu \cdot \Delta(\xi_1, \xi_2; \xi_1^{|\nu|}, \xi_2^{|\nu|}) + \sum_{\mu=1}^{\mu=\delta+1} B_\mu \Phi_x^{|\mu|}(\xi_1, \xi_2),$$

$$2) \quad F_x(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\varepsilon} A_\nu \cdot \Delta(\xi_1^{|\nu|}, \xi_2^{|\nu|}); \xi_1, \xi_2).$$

In 1) sind die A_ν und B_ν sämtlich beliebig, in 2) die A_ν noch $-(\delta'+1)$ Bedingungen unterworfen. Im Falle 1) hat man also $(\varepsilon+\delta+1)$, im Falle 2) $(\varepsilon+\delta'+1)$ Constanten zu willkürlicher Verfügung, also genau übereinstimmende Resultate. Der Unterschied liegt darin, daß immer $\delta+1 \geqq 0$, dagegen $\delta'+1 \leqq 0$ ist.

Aus diesem letzten Umstand fließt auch, daß die Elementarform in ξ_1, ξ_2 automorph, in ξ_1, ξ_2 dagegen im allgemeinen nicht automorph ist. Nur wenn δ, also auch $\delta' = -1$ ist, ist $\Delta(\xi_1, \xi_2; \xi_1, \xi_2)$ sowohl in ξ_1, ξ_2, wie in ξ_1, ξ_2 automorph; der Ausdruck durch z_1, z_2, x_1, x_2 lautet dann:

$$\Delta(\xi_1, \xi_2; \xi_1, \xi_2) = \frac{\prod_{i=1}^{i=n} (ze_i)^{\frac{\varepsilon_i}{l_i}} \cdot \prod_{i=1}^{i=n} (xe_i)^{\frac{\varepsilon_i'}{l_i}}}{(zx)} \cdot \left(\text{wo } \frac{\varepsilon_i}{l_i} + \frac{\varepsilon_i'}{l_i} = 1 - \frac{1}{l_i} \text{ ist}\right).$$

Außer zur Darstellung der Formen von positivem und negativem Grade durch ihre ∞-Stellen dient die Elementarform auch zum Nachweise, daß es wirklich für jede automorphe Form Rten Grades von ξ_1, ξ_2 eine automorphe Reihe gibt: man zeigt nämlich, daß man sonst eine automorphe Form R'ten Grades von ξ_1, ξ_2 construiren könnte, die weniger als $\delta+2 = -\delta'$ ∞-Stellen besäße, was unmöglich ist.

Ich habe in diesem letzten Abschnitte wesentlich nur die Ideen von Herrn Poincaré selbst in allgemeinerer Fassung wiedergegeben, halte aber gerade dies deshalb für nicht unnütz, weil bei Herrn Poincaré infolge seiner unhomogenen Schreibweise und seiner Auszeichnung des unendlich fernen Punktes das, worauf es ankommt, unter teilweise recht unnötigem Beiwerk verdeckt ist.

Ueber die Auflösung algebraischer Gleichungen durch transcendente Functionen. II.

Von

F. Lindemann in Königsberg i. Pr.

In einer früheren Note habe ich gezeigt, wie man die Wurzeln einer algebraischen Gleichung beliebiger Ordnung als Functionen des constanten Gliedes dieser Gleichung darstellen kann, ohne dabei andere Operationen zu benutzen, als wie sie auch zur Auflösung der Gleichungen fünften Grades mittelst elliptischer Modulfunctionen nöthig sind, nemlich [1]):

1) Auflösung von Gleichungen niedrigeren Grades,
2) Lösung von linearen homogenen Differentialgleichungen mit rationalen Coëfficienten, deren singuläre Punkte bekannt sind,
3) Berechnung der Periodicitätsmoduln hyperelliptischer Integrale aus den Lösungen der genannten Differentialgleichungen,
4) Berechnung von Theta-Functionen mehrerer Veränderlichen für besondere Werthe der Argumente.

Nur für diejenigen Gleichungen deren linke Seiten durch eine Gruppe von linearen Substitutionen in sich übergeführt werden, führt diese Methode nicht zum Ziele, indem sie zwar die aus je vier Wurzeln zu bildenden Doppelverhältnisse, nicht aber die Wurzeln selbst zu berechnen lehrt. Die Auflösung dieser Gleichungen aber ist bereits anderweitig bekannt.

Es kommt bei der erwähnten Methode hauptsächlich darauf an, die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale

$$(1) \qquad \xi = \int \frac{x^s dx}{\sqrt{\varphi(x,u)}} \text{ für } s = 0, 1, 2, \ldots \gamma - 1$$

---

1) Vrgl. Nachr. d. K. Ges. d. W. 1884, p. 245. Herr Klein bezeichnet (vgl. Burkhardt, Math. Annalen Bd. 35, p. 277) die fragliche Methode zur Auflösung von Gleichungen als eine Fortbildung eines von Herrn C. Jordan ausgesprochenen Gedankens. Der letztere zeigt allerdings, daß die Lösung der Gleichung $\varphi = 0$ zurückgeführt werden kann auf die Lösung der Zweitheilig-Gleichung und umgekehrt; damit ist aber nur ein unlösbares Problem auf ein anderes reducirt, so lange man nicht die Perioden direct berechnen kann. Auch bei der von den Herren Brioschi und Maschke gegebenen Lösung der Gleichungen 6. Grades (Acta mathematica Bd. 12) vermisse ich eine Methode zur Bestimmung der benutzten Periodicitäts-Moduln, wenn die Wurzeln der Gleichung nicht benutzt werden sollen.

zu berechnen, wenn $\varphi = 0$ oder

$$(2) \qquad x^n + n a_1 x^{n-1} + \binom{n}{2} a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + u = 0$$

die zu lösende Gleichung und $n = 2p+2$ oder $2p+1$ ist. Ich habe a. a. O. gezeigt, daß diese Berechnung immer ausführbar ist, ohne daß es nöthig wäre, die Wurzeln der Gleichung $\varphi = 0$ vorher zu kennen; die Periodicitätsmoduln nemlich genügen nach Herrn Fuchs einer homogenen linearen Differentialgleichung, und die singulären Punkte der letztern sind durch die Gleichung $\Delta(u) = 0$ bestimmt, wenn $\Delta(u)$ die Discriminante von $\varphi(x, u)$ bedeutet, welche in u nur vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ist. Die Aufstellung dieser Differentialgleichung ist daher die Hauptaufgabe; mit ihr beschäftigen sich die folgenden Bemerkungen.

Die gesuchte Gleichung kann höchstens von der Ordnung $2p$ sein; sie ist also von der Form

$$(3) \qquad \beta_{2p} \eta^{(2p)} + \beta_{2p-1} \eta^{(2p-1)} + \cdots + \beta_1 \eta' + \beta_0 \eta = 0,$$

wenn $\eta^{(i)} = \frac{d^i \eta}{du^i}$. Nach Herrn Fuchs[1]) gibt es eine ganze Function $r(x)$, welche der Gleichung

$$(4) \qquad \beta_{2p} y^{(2p)} + \beta_{2p-1} y^{(2p-1)} \cdots + \beta_1 y' + \beta_0 y = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{r(x)}{\varphi^{2p-\frac{1}{2}}}\right)$$

genügt, in der $y = \frac{x'}{\sqrt{\varphi(x,u)}}$ gesetzt ist. Das Integral (1), genommen zwischen den Grenzen x_0 und x_1 genügt dann (als Function von u) der Differentialgleichung:

$$(5) \quad \beta_{2p} \xi^{(2p)} + \beta_{2p-1} \xi^{(2p-1)} + \cdots + \beta_1 \xi' + \beta_0 \xi = \frac{r(x)}{\varphi(x)^{2p-\frac{1}{2}}} - \frac{r(x_0)}{\varphi(x_0)^{2p-\frac{1}{2}}}.$$

Integrirt man über einen geschlossenen Weg, so entsteht aus (4) die Gleichung (3). Wie Herr Fuchs a. a. O. bemerkt, sind die Coëfficienten der ganzen Function $r(x)$ und die Größen $\beta_{2p}, \beta_{2p-1}, \ldots \beta_0$ im Allgemeinen[1]) gemäß der Gleichung (4) durch ein System linearer Gleichungen zu berechnen. Die wirkliche Ausführung dieser Berechnung begegnet aber erheblichen Schwierigkeiten. Zur Ueberwindung derselben muß man andere Ueberlegungen anstellen.

1) Crelles Journal Bd 71.

Durch wiederholtes Differentiiren der Gleichung (4) nach den Variabeln x und u zeigt man zunächst leicht, daß im Allgemeinen

$$\beta_{2p-i} = A_{i0}\Delta + A_{i1}\Delta' + \cdots + A_{ii}\Delta^{(i)} \tag{6}$$

gesetzt werden kann, wo Δ die Discriminante von φ und $\Delta^{(i)}$ ihren i^{te} Differentialquotienten nach u bedeutet, während mit A_{ik} noch zu bestimmende Functionen von u bezeichnet sind. Die Gleichung $\Delta(u) = 0$ bestimmt die singulären Punkte der Differentialgleichung; sie ist, wie ich schon früher hervorhob, vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade, kann also als gelöst vorausgesetzt werden. Der zweite Factor von β_{2p}, nämlich A_{00}, bestimmt durch sein Verschwinden die „scheinbar singulären Punkte“; zur Kenntniß aller verschiedenen Zweige der Function η ist die Auflösung der Gleichung $A_{00} = 0$ nicht nöthig; die Kenntniß der Function A_{00} ist natürlich zur Aufstellung der Differentialgleichung (4) unerläßlich; in der Bestimmung dieser Function liegt die Hauptschwierigkeit.

Man zeigt leicht, daß für jeden durch $\Delta(u) = 0$ bestimmten singulären Punkt u_0 die Wurzeln der zugehörigen determinirenden Fundamental-Gleichung durch die ganzen Zahlen $0, 1, 2, \ldots, 2p-1$ gegeben werden, und daß in einem der Fundamental-Integrale die erste Potenz von $\log(u-u_0)$ auftritt. Anders ist es für $u = \infty$. Durch die directe Entwicklung des zwischen zwei Wurzeln der Gleichung $\varphi(x,u) = 0$ auszudehnenden Integrals (1) ergibt sich, daß hier verschiedene Fälle zu unterscheiden sind. Sind erstens alle in φ vorkommenden Coifficienten a_i von Null verschieden, so sind die zur Stelle $u = \infty$ gehörenden Fundamental-Integrale von der Form

$$u^{\varrho}(c_0 + c_1 u^{-1} + c_2 u^{-2} + \cdots); \tag{7}$$

und in dem einfachsten Falle $s = 0$ hat man für ϱ eine der Zahlen

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}, -\frac{3}{2}+\frac{2}{n}, -\frac{3}{2}+\frac{3}{n}, \ldots, -\frac{3}{2}+\frac{n-1}{n} \tag{8}$$

einzusetzen; bei geradem n ist diejenige Zahl auszulassen, welche gleich $-\frac{1}{2}$ wird. Das Verschwinden von a_1 macht keinen wesent-

---

1) In besonderen Fällen kann sich die Ordnung der Differential-Gleichung erniedrigen, z. B. wenn $\varphi(x,u) = x^n - u$ ist; dann sind die Größen β aus (4) nicht vollkommen zu bestimmen; die Gleichung (3) wird reductibel.

lichen Unterschied; ist aber $a_{n-2} = 0$ so ist das dritte Glied der Reihe (8) durch $-\frac{5}{2}+\frac{3}{n}$ zu ersetzen; verschwindet a_{n-2} und a_{n-3}, so ist außerdem das vierte Glied der Reihe (8) durch $-\frac{7}{2}+\frac{5}{n}$ zu ersetzen, u. s. f. Verschwinden endlich alle Coëfficienten $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n-2}$, so lautet die entsprechende Zahlenreihe:

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}, -\frac{3}{2}+\frac{2}{n}, -\frac{5}{2}+\frac{3}{n}, -\frac{7}{2}+\frac{5}{n}, \ldots, -\frac{2n-3}{2}+\frac{n-1}{n}.$$

Entsprechend diesen $n-2$ Fällen, muß A_{00} außer einen constanten Gliede $n-3$ verschiedene Potenzen von u enthalten. Es folgt, dass die höchste Potenz von u nur in eine Potenz von a_2 multiplicirt sein kann. Untersucht man noch den Einfluß, welchen gewisse lineare Transformationen der Variabeln x auf das Integral (1) im Falle $s = 0$ haben, so ergibt sich A_{00} als constantes Glied einer gewissen Covariante von φ und kann demgemäß durch eine Differentialgleichung näher bestimmt werden. Ebenso müssen alle A_{ik} die constanten Glieder gewisser Covarianten sein; und A_{ik} ist bis auf einen Zahlenfactor gleich dem $(i-k)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von A_{00} nach u. Statt der Differentiation nach u kann man noch einen Proceß von covariantem Charakter einführen, und dann gilt folgender Satz:

Die Periodicitätsmoduln des Integrals

$$\int \frac{(xt)^{\frac{n}{2}-2}(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1)}{\sqrt{\varphi(x,u)}}, \tag{9}$$

in welchem

$$(xt) = x_1 t_2 - x_2 t_1,$$
$$\varphi(x,u) = a_0(xz)^n + na_1(xz)^{n-1}(xt) + \cdots + na_{n-1}(xz)(xt)^{n-1} + u(xt)^n$$

gesetzt ist, genügen der partiellen Differentialgleichung

$$U_{2p}\delta^{2p}\eta + U_{2p-1}\delta^{2p-1}\eta + \cdots + U_0\eta = 0, \tag{10}$$

wenn der δ-Proceß durch die Gleichung ($a_n = u$)

$$\delta\eta = \frac{\partial\eta}{\partial a_0}t_2^n - \frac{\partial\eta}{\partial a_1}t_2^{n-1}t_1 + \cdots + (-1)^n\frac{\partial\eta}{\partial a_n}t_1^n \tag{11}$$

definirt wird. Werden mit N_{ik} Zahlenfactoren bezeichnet, so ist hierbei

$$U_{2p-i} = N_{i0}\delta^i U_{00}.\Delta + N_{i1}\delta^{i-1}U_{00}.\delta\Delta + \cdots N_{ii}U_{00}\delta^i\Delta. \tag{12}$$

Um U_{00} zu finden, hat man die typische Darstellung von φ durch associirte Formen auszuführen; man setze

$$(xz) = \xi_1,\ (xt) = \xi_2,\ \varphi(\xi) = a_0\xi_1^n + \cdots + a_n\xi_2^n = a_\xi^n,$$

$X = a_x^{n-1} a_\xi,\ Y = (z\xi)$; dann wird bekanntlich[1])

$$\varphi(t)^{n-1}\varphi(\xi) = X^n + \binom{n}{2}\varphi_2 X^{n-1}Y - \binom{n}{3}\varphi_3 X^{n-2}Y^2 + \cdots \pm \varphi_n Y^n,$$

wo mit $\varphi_2,\ \varphi_3, \ldots$ gewisse, von z abhängige Covarianten der Form a_ξ^n bezeichnet sind; die Covariante φ_{n-2} ist mit dem gesuchten Ausdrucke U_{00} identisch. Zur Bestimmung der Zahlenfactoren N_{u_k} hat man in den oben charakterisirten $n-2$ Fällen für die Stelle $u = \infty$ die determinirenden Fundamentalgleichungen aufzustellen.

Ist s von Null verschieden, so wiederholen sich ähnliche Ueberlegungen und Resultate; an Stelle der Covariante $\varphi_{n-2} = \psi_x^n$ tritt die Polarenbildung $\psi_x^{n-s}\psi_i^s$; in den unter (8) angegebenen Zahlen ist der Zähler der mit dem Nenner n behafteten Brüche um je s Einheiten zu erhöhen. Uebrigens ist die weitere Untersuchung der so entstehenden Differentialgleichungen nicht erforderlich, denn nach Herrn Fuchs[2]) lassen sich ihre Integrale durch die im Falle $s = 0$ gefundenen Lösungen linear und ganz darstellen, wobei die zu benutzenden Coëfficienten rationale Functionen von u sind. —

Hat man die Lösungen der Differentialgleichungen gefunden, so erübrigt noch, die Integrationsconstanten so zu bestimmen, daß dieselben mit den zwischen zwei Verzweigungspunkten hin erstreckten Integralen (1) identisch werden. Indem man die letzteren direct nach negativen Potenzen von u entwickelt und die Coëfficienten der in (8) angegebenen Anfangsglieder berechnet, kann dies auf viel einfacherem Wege geschehen, als in meiner früheren Note angegeben war. —

Zur Erläuterung mögen noch einige einfache Beispiele angefügt werden.

Im Falle $n = 3$ lautet die partielle Differentialgleichung (10):

$$\Delta(u).\delta^2\eta - 4\,Q_i^2.\delta\eta - \tfrac{4}{3}\,[a_i^2]^2\eta = 0, \tag{13}$$

---

1) Vgl. Clebsch, Theorie der algebraischen Formen.

2) Vgl. Sitzungsberichte der Berliner Academie vom 13. December 1888.

wo $Q_t^3 = (ab)^2(ca)\,b_t\,c_t^2$ die cubische Covariante von a_t^3 bedeutet, und $\Delta(u) = (ab)^2(cd)^2(ac)(bd)$ gesetzt ist. Führt man wieder zwei willkürliche Punkte s und t ein, so nimmt die algebraische Identität (4) hier folgende allgemeine Gestalt an:

$$\tfrac{3}{2}\Delta(u).(tx)^6 - 2Q_t^3 a_s^3.(tx)^3 - \tfrac{5}{6}[a_s^3]^2\cdot[b_t^3]^2 = \tfrac{1}{2}a_s^3 a_t.r_s^4 + 4(ar)a_s^2 r_s^3(tx),$$

wenn zur Abkürzung:

$$r_s^4 = 2a_s^2 b_t^3 c_t^3 c_s - \tfrac{1}{6}(tx)^3[12\,a_t^3\Delta_s^2 - 18\,a_t^2 a_s \Delta_s \Delta_t],$$

wobei $\Delta_s^2 = (ab)^2 a_s b_s$ die Hesse'sche Covariante bedeutet. Macht man $t_2 = 0$, $s_1 = 0$, so geht aus (13) die hypergeometrische Differentialgleichung hervor:

$$\Delta\eta'' + \Delta'\eta' + \tfrac{5}{7^2}\Delta''\eta = 0. \tag{14}$$

Ist insbesondere $a_1 = 0$, $a_2 = -1$, so wird von dem Integrale $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3 - 3x + u}}$ die Differentialgleichung befriedigt:

$$\Delta\zeta'' + \Delta'\zeta' + \tfrac{5}{7^2}\Delta''\zeta = \frac{-10x^4 + 42x^2 - 4ux - 24}{18(x^3 - 3x + u)^2}. \tag{15}$$

Dieses Resultat habe ich auch nach directer Berechnung mittelst der ursprünglich von Herrn Fuchs angegebenen Methode bestätigt. Die Wurzeln der zu $u = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung sind $-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$ und $-\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = -\frac{5}{6}$, wie es in (8) verlangt wurde. Die Gleichung (14) wird auch durch das zwischen zwei Verzweigungspunkten genommene hyperelliptische Integral

$$\int \Delta(v)^{-\frac{1}{6}}(v-u)^{-\frac{5}{6}}\,dv$$

befriedigt. Läßt man die obere Grenze des letzteren variabel, so genügt dasselbe der Differentialgleichung (da $\Delta = 2u^3 - 8$ wird):

$$(u^3-4)\zeta'' + 2u\zeta' + \frac{5}{36}\zeta = (v^3-4)^{\frac{5}{6}}(v-u)^{-\frac{11}{6}} \tag{16}$$

Setzt man also die rechten Seiten von (15 und (16) einander gleich, so ist

$$\int_\infty^x \frac{dx}{\sqrt{x^3-3x+u}} = \int_\infty^v (v^3-4)^{-\frac{1}{6}}(v-u)^{-\frac{5}{6}}\,dv, \tag{17}$$

wenn gleichzeitig:

$$36^2(x^3-3x+u)^3(v^3-4)^{\frac{5}{3}}(v-4)^{-\frac{11}{3}} = (-10x^4+42x^2-4ux-24)^2. \tag{18}$$

Hieraus folgt, daß diese Gleichung 9ten Grades und ebenso jede andere, welche aus ihr durch Differentiation nach u entsteht, durch elliptische Functionen lösbar ist. In den Argumenten dieser Functionen treten dabei hyperelliptische Integrale vom Typus (17) auf, wenn die obere Grenze in einen Verzweigungspunkt gelegt wird.

Im Falle $n = 4$ nimmt die Gleichung (10) folgende Gestalt an:

$$\Delta(u)H(s).\delta^2\eta+[6H(s)\varphi(t)i^2-36jH(s)H(t)-4(ts)^2a_t^2a_s^2\Delta(u)]\delta\eta$$

$$+\left\{\frac{7}{8}H(s)[2i\varphi(t)^2-9H(t)^2]-2[i^2\varphi(t)-6jH(t)]a_t^2a_s^2(ts)^2\right\}\eta=0$$

wo

$$\varphi(t)=a_t^4,\quad H(t)=(ab)^2a_t^2b_t^2,\quad i=(ab)^4,\quad j=(ab)^2(bc)^2(ca)^2.$$

Für $t_2=0$, $s_1=0$ erhalten wir:

$$\Delta(u)(a_2u-a_2^2)\eta''+[\Delta'(u)(a_2u-a_2^2)-a_2\Delta(u)]\eta'$$
$$+\left[\frac{7}{6.16}\Delta''(u)(a_2u-a_2^2)-\frac{1}{12}a_2\Delta'(u)\right]\eta=0.$$

Diese Gleichung wird von den Periodicitätsmoduln des Integrals $\xi=\int\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}$ befriedigt, wenn wieder $u=a_4$ genommen wird. Das Integral ξ selbst genügt einer nicht homogenen Gleichung, aus welcher im Falle $a_1=0, a_2=0, a_3=a_0=1$ die folgende hervorgeht:

$$\frac{16}{7}(u^3-27)\xi'''+\frac{96}{7}u^2\xi''+\frac{103}{7}u\xi'+\xi=\frac{r(x)}{(x^4+4x+u)^{\frac{5}{2}}},$$

wenn:

$$r(x)=x^9+\frac{19}{2}x^6+\frac{13}{14}x^5+\frac{181}{7}x^3+\frac{55}{14}ux^2+\frac{5}{14}u^2x+\frac{81}{7}.$$

Auch hier kann man durch Differentiation nach u zu einer Klasse von Gleichungen gelangen, die durch elliptische Functionen lösbar sind.

Für $n=5$, $\varphi(x)=x^5+x+u$ finde ich:

$$\Delta\eta^{(4)}+3\Delta'\eta'''+\frac{359}{120}\Delta''\eta''+\frac{133}{120}\Delta'''\eta'+\frac{5643}{80000}\Delta^{(4)}\eta=0.$$

Die scheinbar singulären Punkte werden allgemein bestimmt durch die Gleichung:

$$\binom{n}{2}\binom{3}{2}a_2u^{n-3}-\binom{n}{3}\binom{3}{2}a_3a_{n-1}u^{n-4}+\binom{n}{4}\binom{4}{3}a_4a_{n-1}^2u^{n-5}-\cdots\pm\binom{n}{2}a_{n-1}^{n-2}=0.$$

Königsberg in Pr., d. 1. März 1892.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Dezember 1891.

(Fortsetzung.)

Akademie der Wissenschaften in Krakau. Anzeiger 1891. November. Krakau 1891.
Naturwissenschaftlicher Verein in Steiermark. Mittheilungen. Jahrgang 1890 der ganzen Reihe 27. Heft. Graz 1891.
Ungarische Revue. X. Heft. 1891. December. 11. Jahrg. Budapest 1891.
Physiologisch Laboratorium der Utrechter Hoogeschool:
a. Onderzoekingen. Vierde Reeks. I. 2. (2 Ex.).
b. Titelblatt zu I. Utrecht 1891.
Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leyden. Tijdschrift. 10. Deel. Nieuwe Reeks, 2. Deel. 4. Afl. Leyden 1891.
La Société Hollandaise des sciences à Harlem. Archives Nérlandaises. Tome XXV. 3me et 4me livr. Harlem 1891.
La société des naturalistes de la Nouvelle-Russie. Tome XVI. P. 1 und Section mathém. Tome XIII. Odessa 1891.
Académie Royale de Belgique. Bullettin. 61e année. 3e série. tome 22. N. 9—10, 11. Bruxelles 1891.
Nature. Vol. 45. N. 1153—1157.
The collected papers of Arthur Cayley, Sc.D. F.R.S. (By the author). Vol. IV. Cambridge 1891.
Ueber die Ursachen der Phänomene des Erdmagnetismus etc. By Henry Wilde F.R.S. (Royal. Soc. Proc. June 19. 1890). By the author.
Royal microscopical Society. Journal. 1891. Part. 6. Dec. London and Edinburgh.
London mathematical society. Proceedings. Nos. 421—425.
The Royal astronomical society. Vol. LII. N. 1. Nov. 1891.
The humming bird. Vol. 1. N. 12. Dec. 1891.
The Canadian Institute. Transactions. N. 3. Oct. 1891. Vol. II. Part 1. Toronto 1891.
Geological and natural-history survey of Canada. Contributions to Canadian micro-palaeontology. Part III. Montreal 1891.
Royal society of South-Australia. Transactions. Vol. XIV. Part I. July 1891. Adelaide 1891.
Società Reale di Napoli. Atti della R. Accademia delle scienze fisiche e matematiche. Vol. III. 1866—68. Vol. IV. 1869. Serie seconda. Vol. IV. 1891. Napoli.
Circolo matematico di Palermo. Rendiconti. Tomo V. Anno 1891. Fasc. VI. Nov. Dic.
Società Toscana di scienze Naturali. Atti. Processi verbali. Vol. VII. p. 235—345.
Atti della R. Accademia dei Lincei. Anno CCLXXXVIII. 1891. Serie quarta:
a. Rendiconti. Vol. VII°. fasc. 9°—10°. 2° semestre.
b. Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Parte 2. Notizie degli scavi. Luglio, Agosto 1891. Roma 1891.
Biblioteca nazionale centrale di Firenze:
a. Bollettino delle pubblicazioni italiane. N. 142—144. 1891.
b. Eleneo delle pubblicazioni periodiche italiane 1891. Firenze 1891.
Biblioteca nazionale centrale Vittorio Emanuele di Roma. Bollettino. Vol. VI. N. 11. Nov. 1891. Roma 1891.
Johns Hopkins University circulars. Vol. XI. N. 92—N. 94. 1891. Baltimore.
Verhandlungen des deutschen wissensch. Vereins zu Santiago (Chile). II. Band. 3. Heft. Santiago 1891.

La Sociedad Cientifica Argentina. Anales. Octubre de 1891. Entr. IV. Tomo XXXII. Nov. di 1891. Entr. V. T. XXXII. Buenos Aires.
College of sience. Imp. University Japan. Journal. Vol. IV. Part. II. Tokyo. Japan 1891.

Januar 1892.

Kön. Preuß. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Sitzungsberichte. LIII u. Register. 1891. I. II. III. 1892. Berlin 1892.
Physiologisches Laboratorium u. Versuchsanstalt des landwirthschaftl. Institutes der Univ. Halle. Berichte. Herausgeg. v. Dr. Jul. Kühn. 8. u. 9. Heft. Dresden 1891.
Astronomische Gesellschaft. Vierteljahrsschrift. 26. Jahrg. 4. Heft. Leipzig 1891.
Lotos (Verein Lotos). Jahrbuch für Naturwissenschaft. Neue Folge. XII. Bd. Der ganzen Reihe 40. Band. Prag, Wien, Leipzig 1892.
Physikalisch-medicinische Gesellschaft zu Würzburg:
a. Sitzungsberichte. Jahrg. 1891. N. 4, 5.
b. Verhandlungen. N. F. XXV. Band. N. 6. Würzburg 1891.
Internationale Erdmessung:
a. Astronomische Arbeiten d. K. K. Gradmessungsbureau. Herausg. v. Prof. Dr. Edmund Weiß u. Dr. Robert Schramm. III. Band. Längenbestimmungen. Prag, Wien, Leipzig 1891.
b. Astronomische Arbeiten der Oesterreichischen Gradmessungscommission. Bestimmung der Polhöhe und des Azimutes auf den Stationen Krakau, Jauerling u. St. Peter bei Klagenfurt. Herausgeg. v. Prof. Dr. Wilhelm Tinter. Wien 1891.
K. K. zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien. Verhandlungen. Jahrg. 1891. XLI. Band. III. IV. Quartal. Ende Sept. Dec. 1891. Wien 1891.
Wiener entomologische Zeitung. XI. Jahrg. 1. Heft, herausgeg. am 1. Jan. 1892. Wien 1892.
Akademie der Wissenschaften in Krakau. Anzeiger 1891. December. Krakau 1891.
Ungarische Revue 1892. 1. Heft. Januar. 12. Jahrgang. Budapest 1892.
Mathematische u. Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. 9. Bd. October 1890—October 1891. Erste Hälfte. Berlin, Budapest 1892.
Ertesitö az Erdélyi muzeum-egylet orvos-termeszettudományi szakosztályából. 1891. XVI. Eófolyam:
a. I. Orvosi Szak. III. Fuzet.
b. III. Népszerü Szak. Kolozsvárt 1891.
Földtani Közlöny (Geologische Mittheilungen). XXI. Kötet. 1891. Aprilus—Decezember. 4—12. Füzet. Budapest 1891.
Königlich Ungarische geologische Anstalt. Mittheilungen aus dem Jahrbuche. IX. Bd. 6. Heft. Der Bergbau in den Siebenbürgischen Landestheilen von T. Weiß. Budapest 1891.
Société Hollandaise des sciences. Oeuvres complètes de Christian Huygens. IV. Correspondance. 1662—1663. La Haye 1891.

(Fortsetzung folgt.)

Inhalt von No. 8.

A. Schönflies, Ueber gewisse geradlinig begränzte Stücke Riemann'scher Flächen. — *Robert Fricke*, Ueber discontinuirliche Gruppen, deren Substitutionscoefficienten ganze Zahlen eines biquadratischen Körpers sind. — *Derselbe*, Zur Theorie der Modularcorrespondenzen. — *Derselbe*, Ueber die zur Verzweigung (2, 3, 7) gehörende s-Function. — *E. Ritter*, Die eindeutigen automorphen Formen vom Geschlechte Null. — *F. Lindemann*, Ueber die Auflösung algebraischer Gleichungen durch transcendente Functionen. II. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Stumpf*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

8. Juni. **№ 9.** 1892.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 7. Mai.

Riecke legt 1. für die Abhandlungen (Bd. 38) vor: „Molekulartheorie der piezoelektrischen und pyroelektrischen Erscheinungen".

2. von Herrn Dr. Hallwachs in Darmstadt: „Lichtgeschwindigkeit in verdünnten Lösungen".

Klein legt einen Aufsatz vor: „Ueber Realitätsverhältnisse im Gebiete der Abelschen Funktionen".

Frensdorff legt für die Abhandlungen (Bd. 38) vor: „Briefe König Friedrich Wilhelms I. von Preußen an Hermann Reinhold Pauli. Mit Einleitung".

Kielhorn legt einen Aufsatz vor: „Ueber die Grammatik des Malayagiri".

v. Wilamowitz-Moellendorff legt eine Abhandlung des Herrn Dr. G. Wentzel in Göttingen vor: „Ueber die Göttinger Scholien zu den Alexipharmaka des Nikandros". Es wird beschlossen, sie in die Abhandlungen (Bd. 38) aufzunehmen.

Sauppe legt einen ihm von Herrn Prof. Leo Meyer in Dorpat, Korresp. der K. Ges. in der historisch-philol. Klasse, zugeschickten Aufsatz vor: „Etymologische Mittheilungen".

Liebisch legt einen Aufsatz von Herrn Dr. G. Bodländer in Clausthal vor: „Das Verhalten von Molekularverbindungen bei der Auflösung. I. Chlorsilberammoniak".

Ueber die Lichtgeschwindigkeit in verdünnten Lösungen.

Von

Wilhelm Hallwachs.

Von der Frage ausgehend, ob die Constitutionsänderungen in verdünnter wässriger Lösung, wie sie z. B. aus dem elektrischen Leitungsvermögen folgen, auch in den Werten der Brechungsexponentdifferenzen zu erkennen seien, welche die Lösungen gegen Wasser aufweisen, stellte ich vor fast zwei Jahren in Gemeinschaft mit Herrn Stradling eine Voruntersuchung über die genaue Messung dieser Brechungsänderung an. Bestimmungen derselben für sehr verdünnte Lösungen lagen noch nicht vor. Wir nahmen den Interferentialrefraktor als Meßinstrument in Aussicht, und es gelang, denselben unserm Zwecke dienlich zu machen. Nachdem die Arbeit dann längere Zeit geruht hatte, wurde sie in den letzten Herbstferien von mir wieder aufgenommen[1]).

Meßmethode. Schaltet man in die zwei monochromatischen Lichtbündel eines Interferentialrefractors zunächst zwei gleiche Körper ein und bringt dann eine Zustandsänderung des einen derselben hervor, so erfolgt eine Verschiebung des Streifensystems. Dieselbe läßt sich einfach durch Abzählen der am Fadenkreuz vorbeiwandernden Streifen ermitteln und daraus die Aenderung des Brechungsexponenten bestimmen, sobald die Zustandsänderung continuierlich und in allen Teilen des Körpers so gleichmäßig hervorgerufen werden kann, daß keine Verwirrung des Streifensystems eintritt.

Auf solche Art lassen sich die in unserm Fall erforderlichen Concentrationsänderungen einer Lösung ohne Ueberschreitung der zulässigen Versuchsdauer nicht vornehmen, so daß Verwirrung der Streifen eintritt.

Wäre jedoch innerhalb des monochromatischen Streifensystems

---

1) In einer inzwischen erschienenen Abhandlung „De Jamin'sche Interferentiaalrefractor en hiermede verrichte Brekingsindicesbepalingen door L. H. Siertsema" (Proefschrift, Groningen 1890) ist eine Methode veröffentlicht, welche sich von der im Folgenden auseinandergesetzten nur unwesentlich unterscheidet. Auch sind die Brechungsexponentdifferenzen gegen Wasser für NaCl, Na^2CO^3 und $NaNO^3$-Lösungen, allerdings nur unter geringer Variation der Verdünnung und nur bis zu Werten der letzteren von 20—40 Litern auf das Grammäquivalent bei den verschiedenen Substanzen bestimmt.

ein bestimmter, als Anfang gewählter Streifen, ohne dass man seine Verschiebung zu verfolgen brauchte, jederzeit wiederkennbar zu machen, so wäre die beabsichtigte Messung ausführbar. Nach Einstellung auf den Anfangsstreifen hätte man das etwa bei Beginn in den Refractor eingeschaltete Wasser durch die Lösung zu ersetzen und dann z. B. durch Drehung der zweiten Refractorplatte das System langsam, unter Abzählung zu verschieben, bis der Anfangsstreifen wieder am Fadenkreuz erschiene. Aus der Verschiebung ε in Streifenbreiten, der Dicke D der durchstrahlten Schicht und der Wellenlänge λ des angewendeten Lichtes (*Na* Licht), ergäbe sich die Aenderung des Brechungsexponenten nach der Formel

$$\Delta n = \varepsilon \frac{\lambda}{D}.$$

Ein Anfangsstreifen läßt sich durch Zwischenbeobachtungen mit weißem Licht festhalten. Die achromatische Stelle des farbigen Streifensystems würde direkt die Anfangslage geben, falls die Drehung der zweiten Refractorplatte den compensierenden Gangunterschied für verschiedene Farben in demselben Verhältnis einführen würde, wie es die Concentrationsänderung der Lösung tut. Da dies nicht der Fall ist und die Achromasie immer auf diejenige Stelle im Streifensystem fallen muß, deren componierende Strahlen für alle Farben die nämliche Phasendifferenz haben, so wandert die Achromasie auf dem Streifensystem langsam fort.

Die Wanderung ist bei verdünnten Lösungen der gesammten Streifenverschiebung einfach proportional. Bei Zinkvitriollösung wandert z. B. die Achromasie immer für 12,5 Streifenbreiten Verschiebung im Natriumlicht um einen Streifen weiter. Die Wanderung läßt sich daher durch einen Hilfsversuch in sehr einfacher Weise bestimmen und damit der einmal gewählte Anfangsstreifen immer wieder finden.

Gleichzeitig liefert dieser Hilfsversuch auch die Dispersionsänderung, welche der betr. Variation der Lösungsconcentration entspricht. Seien von vornherein die Verhältnisse bekannt, in welchen die Phasenunterschiede für verschiedene Farben beim Drehen der zweiten Refractorplatte eingeführt werden. Wird dann die Lösungsconcentration um so viel vermehrt, daß nach der Compensation der dabei eintretenden Verschiebung die Achromasie um einen Streifen weiter gerückt ist, so hat sich der aus dem Gegeneinanderwirken der Plattendrehung und Lösungsänderung resultierende Gangunterschied für die Stelle der Achromasie um eine Wellenlänge geändert. Da die Achromasie in gleicher Rich-

tung wie das Streifensystem bei wachsender Concentration wandert, müssen also dann zur Compensation für alle Farben um eine Wellenlänge größere Gangunterschiede durch Drehen der Platte eingeführt werden, als die zu compensierenden Gangunterschiede infolge der Lösungsänderung betragen.

Da die ersteren, wie angenommen, bekannt sind, lassen sich die letzteren daraus einfach durch Subtraction von 1 finden. Die der Drehung der Refractorplatte entsprechenden Gangunterschiede hängen außer von der Wellenlänge der verschiedenen Farben nur von den Brechungsexponenten der Platten ab, von letztern aber nur so wenig, daß deren angenäherte Kenntnis genügt.

Versuchsanordnung. Die Apparate standen auf sehr fester Unterlage in einem Raum von sehr constanter Temperatur. Die Platten waren auf besonderen Stativen montiert, die zur Compensation der Gangunterschiede benutzte auf einem Spektrometer. Ein Bunsenbrenner, dessen Luftzug, so oft weißes Licht erforderlich war, geschlossen wurde, lieferte die Beleuchtung. Zur Beobachtung der Streifen diente ein Fernrohr mit Schraubenocularmikrometer.

Um mit der Verdünnung der Lösungen möglichst weit kommen zu können, war eine möglichst große Länge des zur Aufnahme der Flüssigkeiten bestimmten, zweizelligen Troges wünschenswert. Mit wachsender Länge steigen sowohl die Anforderungen an Gleichheit der Temperatur in beiden Zellen und die Schwierigkeit diese zu erzielen, als auch die Anforderungen an die Größe der festen Unterlage für die Apparate. Unter Berücksichtigung dieser Umstände wurde ein 21 cm langer zweizelliger Trog (Glasrohr durch Platinwand längs geteilt) mit umgebendem Wasserbad construiert. Planplatten aus Glas verschlossen die Enden. Geeignet eingeführte Rührer dienten einerseits zur Beförderung des Temperaturausgleichs, andrerseits, bei den Versuchen über Wanderung der Achromasie, zur Ausgleichung der Concentration in der Lösung. Die Construction des Troges war nicht ohne Schwierigkeit.

Um die Verdünnung der untersuchten Lösungen genügend variieren zu können und doch die Streifenverschiebung nicht zu groß werden zu lassen, gelangte noch ein zweiter, viel kürzerer zweizelliger Trog zur Anwendung. Seine von den Lichtstrahlen zu durchlaufende Dicke wurde zuerst mit Hülfe eines geeignet abgeänderten Fühlhebelsphärometers direkt gemessen und gleich 8,81 mm gefunden. Zur Controlle wurde in jede Zelle des Troges eine dieselbe fast ganz ausfüllende, gute Spiegelglasplatte eingeschoben und der frei bleibende Raum mit Wasser gefüllt. Nach

Einschaltung in den Interferentialrefraktor gelangte die Streifenverschiebung, welche beim Ersetzen des Wassers in der einen Troghälfte durch concentrierte Na Cl-Lösung eintrat, zur Messung. Die Verschiebung lieferte mit Hülfe der bekannten Brechungsexponenten der Lösung und des Wassers den Dickenunterschied zwischen Trog und Glasplatte. Nach Ermittelung der Dicke der letztern ergab sich die Trogdicke gleich 8,825 mm. Die beiden Werte stimmen bis auf 1,7 ‰ überein. Die Länge des großen Troges betrug 211,6 mm, das Verhältnis der Troglängen also 23,98.

Lösungen. Bei der Herstellung der Lösungen diente als Ausgangspunkt immer eine solche von größerer Concentration, meistens eine Normallösung. Ihr Gehalt wurde durch Bestimmung des specifischen Gewichtes gefunden. Aus derselben stellte man mittelst Pipette und Meßkolben eine verdünntere, gerade zur Untersuchung im kleinen Trog geeignete her. Alle übrigen Lösungen wurden aus der letzteren kurz vor dem Versuch durch einmaliges Verdünnen mit Wasser erhalten. Letzteres besaß ein Leitungsvermögen von 3×10^{-10}.

Die optische Untersuchung erforderte des Temperaturausgleichs wegen längere Zwischenpausen und war daher ziemlich zeitraubend. Ich habe mich deshalb zunächst auf eine kleine Zahl von geeignet ausgewählten Substanzen beschränkt, um zu sehn, ob überhaupt ein Einfluß der Constitutionsänderung in Aussicht zu nehmen sei. Zunächst kamen Lösungen von Zucker (Verdünnung $v = 16$ bis 800), Na Cl ($v = 4$ bis 200), $\frac{1}{2}$ Mg SO^4 ($v = 4$ bis 200), dann, nach kleinen Abänderungen in der Ausführungsweise der Versuche, solche von $\frac{1}{2}$ H^2SO^4 ($v = 2$ bis 200), H Cl ($v = 3$ bis 150) und $\frac{1}{2}$ Zn SO^4 ($v = 5$ bis 250) zur Untersuchung. Diese Lösungen weisen erhebliche Verschiedenheiten hinsichtlich der Constitutionsänderung innerhalb der angewendeten Verdünnungen auf[1]).

Ausführung der Messungen. Zur Ausführung der Messungen wurden zunächst beide Troghälften mit Wasser gefüllt und der als Anfang gewählte Streifen im weißen Licht auf die Spitze der Okularschraube eingestellt. Nach Vertauschung des Wassers der einen Troghälfte gegen die zu beobachtende Lösung und erfolgtem Temperaturausgleich, verschob man das im Natriumlicht zu beobachtende Streifensystem bis wiederum nach Einführung von weißem Licht der Anfangsstreifen oder einer seiner Nachbarn einstand. Die ganzen Streifenbreiten Verschiebung wurden durch

1) Siehe die Kurven über das Leitungsvermögen bei F. Kohlrausch diese Nachrichten 7. II. 1885 oder Wied. Ann. 26 p. 161. 1885.

Abzählen, die Bruchteile mit der Okularschraube ermittelt. Für jede Concentration fanden mehrere Messungen statt, für NaCl und $MgSO^4$ mehrere unabhängige Versuchsreihen, um ein Urteil über die Genauigkeit zu gewinnen.

Genauigkeit. Die sehr schönen Interferenzstreifen von etwas mehr als 1 cm scheinbarem Abstand standen, rasche Temperaturänderungen des Zimmers ausgenommen, sehr ruhig, verschoben sich z. B. in einer Woche nicht mehr als um 0,1 Streifenbreite, so daß die für den Temperaturausgleich notwendigen Pausen keine merkbaren Fehler wegen Aenderung der Nulllage veranlaßten. Ausnahmsweise traten vorübergehende ziemlich rasche Schwankungen hin und her bis zu 0,1 Streifenbreiten ein, wohl durch Luftströmungen veranlaßt.

Die ermittelten Streifenverschiebungen sind nach meiner Schätzung im allgemeinen etwa auf 0,1 Streifenbreiten genau. Bei der verdünntesten Lösung der einzelnen Substanzen habe ich die Genauigkeit nicht ganz soweit treiben können. Vielleicht hat dabei die nicht ganz einfache Manipulation des Entleerens und Wiedertüllens des Troges einen Einfluß ausgeübt.

Die Versuche mit Zucker, NaCl und $MgSO^4$ gelangten zuerst zur Ausführung, die mit den andern Substanzen später nach kleinen Abänderungen in der Ausführungsweise der Versuche. Deshalb sind die letzteren den ersteren an Genauigkeit wohl etwas überlegen.

Temperatur. Um der Bestimmung des Temperaturcoefficienten, welche wegen der für die Ruhe der Streifen geforderten allseitig gleichen Temperatur sehr umständlich ist, überhoben zu sein, habe ich letztere bei den Versuchen constant gehalten: der Beobachtungsraum gestattete dies vollkommen genügend. Einige Bestimmungen von jenen Coefficienten lieferten den Nachweis, daß die noch übrig bleibenden kleinen Temperaturschwankungen ohne schädlichen Einfluß sind.

Resultate. In der folgenden Uebersicht der Resultate bedeutet:

v die Verdünnung: das Volumen der Lösung in Litern, welches ein Grammäquivalent enthält;

s die beobachtete Streifenverschiebung;

Δn die entsprechende Aenderung des Brechungsexponenten für Natriumlicht;

$v\Delta n$ die molekulare Brechungsänderung;

t die Temperatur;

λ das specifische molekulare Leitungsvermögen[1]);

$\alpha = \lambda/\lambda_{(1000)}$; $\lambda_{(1000)}$ molekulares Leitungsvermögen für $v = 1000$.

1) s. F. Kohlrausch l. c.

½ H^2SO^4							HCl						
v	z	t	$10^4\Delta n$	$100\,v\Delta n$	$\lambda\,10^7$	α	v	z	t	$10^4\Delta n$	$100\,v\Delta n$	$\lambda\,10^7$	α
2	45,47	13,2	30,41	**0,608**	189	0,57	3	41,67	13,3	27,87	**0,836**	307	0,89
2,667	34,66	13,2	23,18	**0,618**	191	0,57	6	20,98	13,2	14,03	**0,842**	319	0,93
4	23,55	13,2	15,75	**0,630**	196	0,59	72,1	42,51	13,1	1,184	**0,853**	341	0,99
(8)	(12,65)	(13,1)	(8,46)	(0,677)	206	0,62	144,1	21,33	13,1	0,594	**0,856**	342	0,99
64,05	45,83	13,0	1,276	**0,818**	274	0,82							
96,1	31,41	13,0	0,875	**0,840**	285	0,86							
(192,2)	(15,98)	(13,1)	(0,445)	(0,855)	302	0,91							

½ $MgSO^4$							½ $ZnSO^4$						
v	z	t	$10^4\Delta n$	$100\,v\Delta n$	$\lambda\,10^7$	α	v	z	t	$10^4\Delta n$	$100\,v\Delta n$	$\lambda\,10^7$	α
4	46,10	13,9	30,83	**1,233**	39,2	0,36	5	42,02	13,5	28,10	**1,405**	37,5	0,35
8	23,46	13,8	15,69	**1,255**	45,2	0,42	10	21,29	13,5	14,24	**1,424**	43,2	0,41
96,1	49,10	14,5	1,366	**1,313**	70,5	0,66	120,1	44,71	13,6	1,245	**1,495**	70,4	0,66
192,2	24,81	14,1	0,690	**1,327**	78,5	0,73	240,2	22,54	13,6	0,628	**1,508**	78,5	0,74
(384)	(12,63)	(14,2)	(0,352)	(1,35)	86,0	0,80	(480)	(11,19)	(13,6)	(0,312)	(1,48)	85,0	0,80

NaCl							Zucker					
v	z	t	$10^4\Delta n$	$100\,v\Delta n$	$\lambda\,10^7$	α	v	z	t	$10^4\Delta n$	$20\,v\Delta n$	α
4	38,8	13,8	25,9	**1,04**	80,8	0,77	16	46,2	14,0	30,9	**0,99**	
8	19,5	14,1	13,0	**1,04**	85,1	0,81	32	23,4	13,9	15,65	**1,00**	
96,1	39,7	14,1	1,10	**1,06**	95,7	0,91	384	46,4	14,0	1,29	**0,99**	0
192,2	19,7	14,1	0,552	**1,06**	97,7	0,93	769	23,5	14,2	0,654	**1,01**	
(384)	(10,1)	(14,1)	(0,281)	(1,08)	99,3	0,95	(1573)	(11,8)	(14,1)	(0,328)	(1,01)	

Die Zahlen der vorstehenden Tabellen ergeben eine bedeutende Zunahme von $v\Delta n$, des „molekularen Brechungszuwachses", mit der Verdünnung bei Schwefelsäure; $MgSO^4$ und $ZnSO^4$ zeigen ebenfalls einen beträchtlichen, HCl und NaCl einen kleinen aber bemerkbaren Anstieg.

Für Zucker ist Folgendes zu bemerken. Man gewann die einzelnen Lösungen nicht direkt aus der Ausgangslösung wie bei den andern Substanzen, sondern die Lösung $v = 384$ wurde aus der von $v = 16$, die Lösung $v = 769$ aus der von $v = 32$ gewonnen. Die letztere scheint nicht genau die doppelte Verdünnung besessen zu haben, wie die $v = 16$ Lösung; die Tabelle zeigt dies. Um einen etwaigen Einfluß der Verdünnung auf den Gang von $v\Delta n$ zu constatieren, sind also hier die Lösungen $v = 16$ und $v = 384$ mit einander zu vergleichen, ebenso $v = 32$ und 769. Ein Einfluß der Verdünnung zeigt sich nicht.

Die mitgeteilten Zahlen machen wahrscheinlich, daß die fort-

schreitende Constitutionsänderung auf den Wert des molekularen Brechungszuwachses Einfluß hat, wenn auch das Beobachtungsmaterial zu einem allgemeinen Schluß noch nicht hinreicht. Gerade die Substanzen (H^2SO^4, $MgSO^4$, $ZnSO^4$), welche eine erhebliche Aenderung von α innerhalb des Gebietes der benutzten Verdünnungen zeigen, ergeben auch ein stärkeres Wachsen des molekularen Brechungszuwachses; der geringeren Aenderung entspricht eine geringere Aenderung von $v\Delta n$ und für den Zucker, für dessen Constitution wir keine Aenderung mit der Verdünnung der Lösung anzunehmen haben, bleibt letzteres constant. Daß eine Constitutionsänderung, welche gleiche Aenderungen von α (Dissociationsgrad), hervorruft, bei verschiedenen Substanzen optisch sehr verschiedenen quantitativen Einfluß hat, ist von vornherein zu erwarten.

Es erhebt sich weiter die Frage, ob die Constitutionsänderungen, insoweit sie sich im Gang von $v\Delta n$ bemerkbar machen, dies durch einen direkten Einfluß auf das Brechungsvermögen oder nur durch sekundäre Wirkung tun.

In erster, ziemlich weitgehender Annäherung läßt sich ja die in Wellenlängen gemessene Lichtverzögerung einer Lösung, so lange keine Constitutionsänderung vorliegt, aus derjenigen des Wassers und der gelösten Substanz auf sehr einfache Weise berechnen, wie die Beobachtung gezeigt hat. Denkt man sich die in einer Schicht Lösung enthaltene gelöste Substanz und das Wasser, unter Beibehaltung ihres zur Dicke senkrechten Querschnitts, in getrennten Schichten angeordnet, die Substanz als festen Körper, so ergeben diese, hintereinandergeschaltet, dieselbe Lichtverzögerung, wie die Lösung. Dies ist der Inhalt der $\frac{n-1}{d}$ Formel für das Brechungsvermögen. Unsere Messung führt nun direkt zur Kenntnis des Unterschiedes der Brechungsexponenten von Wasser und Lösung bezw. der Lichtverzögerungen gleich dicker Schichten von beiden. Dieser Unterschied hat zwei Ursachen. Denken wir uns erst den Trog mit Wasser gefüllt und fügen dann die geforderte Menge Substanz zu, so tritt von dieser in die von dem Licht zu durchlaufende Schicht ein, während gleichzeitig aus jedem Raumteil etwas Wasser austritt. Die austretende Wassermenge ist der Molekülzahl der Lösung nicht völlig proportional, sondern sie nimmt schneller ab als diese, wechselt ev. sogar ihr Vorzeichen. Bei verdünnteren Lösungen haben wir dann infolge des geringeren Wasseraustritts eine im Verhätnis zum Salzgehalt größere Lichtverzögerung, oder eine stärkere Vermehrung des molekularen Zuwachses des Brechungsexponenten.

Durch diesen Umstand wird die Zunahme von $v\Delta n$ jedenfalls mitbedingt. Soweit ich aber in der Litteratur Angaben über die Dichte verdünnter Lösungen gefunden habe, wird eine derartige Zunahme der molekularen Dichteänderung mit der Verdünnung, daß sie den Gang von $v\Delta n$ erklären könnte, innerhalb unserer Concentrationen nicht angenommen. Indeß sind die Dichten verdünnter Lösungen zu wenig genau bekannt. Sollte sich herausstellen, daß das sogenannte Molekularvolumen einer Substanz in der Lösung sich in dem Bereich unserer Verdünnungen noch so erheblich mit abnehmender Concentration verminderte, daß diese Verminderung allein zur Erklärung des Ganges von $v\Delta n$ ausreichte, so hätte man einerseits für diese eine Erklärung zu suchen, vermutlich unter Bezugnahme auf die Constitutionsänderungen; andrerseits würde ein solches Ergebnis nicht ohne Folge für unsre Anschauungen über die Fortpflanzung des Lichtes in Lösungen sein.

Dispersion. Wie oben erwähnt, gestattet die Beobachtung der Wanderung der Achromasie auch die Dispersion einer Lösung zu bestimmen. Nennen wir den Ueberschuß der Brechungsexponenten einer Lösung für die Linien F, D und C über die entsprechenden des Wassers Δn_F, Δn_D und Δn_C, so ist, wie oben bemerkt, $\frac{\Delta n_F - \Delta n_C}{\Delta n_D}$ konstant innerhalb der Fehlergrenzen, welche übrigens nur wenige Procente betragen, vielmal kleiner sind, wie etwa bei spektrometrischen Beobachtungen derselben Größe.

Die erhaltenen Zahlen für die erwähnten Größen seien zum Schluß noch mitgeteilt.

	H^2SO^4	HCl	$ZnSO^4$	$MgSO^4$	NaCl	Zucker
$\frac{\Delta n_F - \Delta n_C}{\Delta n_D}$	0,0220	0,0450	0,0184	0,0179	0,0368	0,0124

Aus den von Siertsema l. c. gegebenen Werten für die Wanderung der Achromasie bei NaCl berechne ich den entsprechenden Wert zu 0,0355, also in guter Uebereinstimmung.

Straßburg i/E., physikalisches Institut,
April 1892.

Ueber Realitätsverhältnisse im Gebiete der Abel'schen Functionen.

Von

F. Klein.

Seit der Untersuchung von Zeuthen, welche im 7. Bande der mathematischen Annalen (1874) abgedruckt ist, kennt man die Realitätsverhältnisse genau, welche die ebenen Curven vierter Ordnung hinsichtlich ihrer Doppeltangenten darbieten können. Aber die ebenen Curven vierter Ordnung erscheinen in der Theorie der Abel'schen Functionen nur als das dem Geschlechte $p = 3$ entsprechende Beispiel der allgemeinen, im Raume von $p-1$ Dimensionen gelegenen „Normalcurve der φ" von der $(2p-2)^{\text{ten}}$ Ordnung. An Stelle der 28 Doppeltangenten der ebenen C_4 gibt es bei letzterer $2^{p-1}(2^p-1)$ überall berührende „Ebenen"; ich will dieselben in der Folge mit dem Buchstaben Φ bezeichnen. Bei der Wichtigkeit, welche diese Φ für die Theorie der Abel'schen Functionen besitzen, erscheint es nicht uninteressant auch bei ihnen über die möglichen Realitätsverhältnisse etwas in Erfahrung zu bringen.

Zunächst wird man die verschiedenen reellen Gestalten, welche unsere C_{2p-2} überhaupt darbieten kann, aufzählen wollen. Hier kommen diejenigen Sätze in Betracht, welche ich ursprünglich in meiner Schrift über Riemann's Theorie der algebraischen Functionen (Leipzig 1881—82) betreffs des sogenannten „symmetrischen" Riemann'schen Flächen aufgestellt habe und die dann Hr. Weichold im Jahrgange 1883 von Schlömilch's Zeitschrift näher ausgeführt hat[1]). Ich unterscheide dort die symmetrischen Flächen nach der Art und Zahl ihrer „Symmetrielinien". Es kann sein, daß die Fläche längs der Symmetrielinien zerschnitten in zwei Stücke zerfällt, — dann nenne ich sie orthosymmetrisch; es kann aber auch sein, daß sie nicht zerfällt, — ich bezeichne sie dann als diasymmetrisch. Dieses ist die Haupteintheilung. Des Näheren theilen sich die diasymmetrischen Flächen in $(p+1)$ Arten, je nachdem die Zahl ihrer Symmetrielinien p, oder $p-1$, $p-2, \ldots . 1, 0$ beträgt. Die orthosymmetrischen Flächen liefern dagegen nur $\left[\frac{p+1}{2}\right]$ Arten, insofern die Zahl ihrer Symmetrie-

1) Vergl. auch meine Notiz in Bd. 19 der math. Annalen, p. 159—160.

linien, die $\leqq p+1$ und >0 sein muß, sich von $p+1$ nur um eine gerade Zahl unterscheiden kann. — Die hiermit bezeichneten Sätze übertragen sich vermöge der Grundanschauungen der Riemann'schen Theorie ohne Weiteres auf die Gestalten der reellen C_{2p-2}. Unsere Curve wird einfach genau so viele verschiedene geschlossene Züge (und zwar Züge von paarem Charakter) besitzen, als die Riemann'sche Fläche Symmetrielinien aufweist. Wir haben also erstlich diasymmetrische Curven mit $p, p-1, \ldots 1,0$ reellen Zügen, dann orthosymmetrische Curven mit $p+1$, $p-1, \ldots$ reellen Zügen. Die symmetrische und orthosymmetrische Curven von gleicher Zügezahl unterscheiden sich durch die Anordnung bez. Gestaltung ihrer Bestandtheile. Bei $p=3$ und $p=4$ ist dies leicht im Einzelnen nachzuweisen[1]), ein allgemeines Unterscheidungsmerkmal wird sich sogleich eben aus der Discussion der reellen Φ ergeben.

Sei jetzt allgemein λ die Zügezahl, welche unsere C_{2p-2} darbietet. Ich habe dann gefunden, daß bei den diasymmetrischen Curven mit $\lambda>0$ jedesmal $2^{p+\lambda-2}$ der Φ reell sind, bei den orthosymmetrischen Curven aber $2^{p+\lambda-2}-2^{p-1}$. Die diasymmetrische Curve mit $\lambda=0$ endlich besitzt ebenso viele reelle Φ, wie die niederste orthosymmetrische Curve, d.h. 2^{p-1} oder 0, jenachdem p ungerade oder gerade ist.

Aber man kann noch näher angeben, wie sich die Berührungspunkte der einzelnen Φ, soweit sie reell sind, auf die einzelnen Curvenzüge vertheilen. Allerdings vermag man die genaue Zahl der Berührungspuncte, die auf den einzelnen Curvenzug fallen, nicht allgemein festzustellen, denn es ist nicht ausgeschlossen, daß beispielsweise zwei solcher reeller Berührungspuncte bei continuirlicher Aenderung der Curve zusammenfallen und imaginär werden, um bei weiterer Aenderung vielleicht auf einem anderen Curvenzuge wieder zu erscheinen; wir werden uns vielmehr darauf beschränken müssen, zu unterscheiden, ob unsere Φ mit einem bestimmten Curvenzuge eine ungerade oder eine gerade Zahl von Berührungspuncten gemein hat (welch' letztere dann gerne unter Umständen auf 0 herabsinken kann). Andererseits beachte man, daß die Zahl der imaginären Berührungspuncte einer Φ nothwendig gerade ist. Ich will nun mit Φ_μ eine reelle Φ bezeichnen,

1) Die orthosymmetrische Curve $p=3$ mit 2 reellen Zügen ist die sogenannnte Gürtelcurve (bei der eines der beiden die Curve bildenden Ovale von dem anderen umschlossen wird) etc.

welche μ verschiedene Curvenzüge ungeradzahlig berührt. Wir werden dann

bei ungeradem p die Möglichkeiten $\Phi_0, \Phi_2, \Phi_4, \ldots$
bei geradem p die Möglichkeiten $\Phi_1', \Phi_3, \Phi_5, \ldots$

auseinanderzuhalten haben. Es entspricht dies genau der für $p = 3$ von Zeuthen eingeführten Unterscheidung der Doppeltangenten erster und zweiter Art. Natürlich ist auf alle Fälle $\mu \leqq \lambda$ zu nehmen.

Ist nun erstlich $\lambda = 0$, so sind selbstverständlich alle Φ, die reell sein mögen, Φ_0. Wir haben da also nach dem früheren 2^{p-1} oder 0 Φ_0, jenachdem p ungerade oder gerade ist.

Für die anderen Fälle aber ergibt sich ein besonders einfaches Resultat. Man greife nämlich nach Belieben μ Curvenzüge heraus, wobei μ irgend eine Zahl $\leqq \lambda$ sein kann, für welche die Differenz $p - \mu$ ungerade ist. Dann wird es im diasymmetrischen Falle jedesmal 2^{p-1} diesen μ Curvenzügen zugehörige Φ_μ geben (d. h. Φ_μ, welche gerade auf diesen μ Curvenzügen je eine ungerade Zahl von Berührungspuncten haben). Derselbe Satz wird aber auch im orthosymmetrischen Falle gelten, sofern man nur $\mu < \lambda$ nimmt; die Kategorie $\mu = \lambda$ dagegen kommt im orthosymmetrischen Falle in Wegfall. Eben in letzterem Umstande wird man dann das unterscheidende Merkmal zwischen orthosymmetrischen und diasymmetrischen Curven erblicken: die ersteren lassen keine Φ zu, welche sämmtliche vorhandenen Curvenzüge ungeradzahlig berühren.

Diese Ausführungen sind natürlich in Uebereinstimmung mit der vorhin angegebenen Gesammtzahl der reellen Φ, und erscheinen andererseits, wie ich nicht näher auszuführen brauche, als directe Verallgemeinerung der bei $p = 3$ von Zeuthen gefundenen Resultate.

Göttingen, den 20. April 1892.

Etymologische Mittheilungen.

Von

Leo Meyer.

1. Nhd. *zwingen* = gr. *σάττειν*.

Die Gleichsetzung *σάττειν* (oder *σάσσειν*, Hippokr. 2, 226 bei Kühn) = *zwingen*, die sich auch in der beträchtlich erweiterten vierten Auflage von Ficks vergleichendem Wörterbuch, auf Seite 230 (Seite 64 noch mit Fragezeichen), findet, bedarf noch einiger Erläuterung.

Was die Bedeutung anbetrifft, so steht unser *zwingen* und das daraus abgeleitete *zwängen*, das im Allgemeinen noch viel mehr sinnlich gebraucht wird, dem griechischen *σάττειν* ‚drücken, andrücken, eindrücken, stopfen, zwängen' noch sehr nah, was deutlich zu machen wenige Anführungen genügen mögen. Herodot 6, 125: *παρ-έσαξε* (‚er stopfte, zwängte hinein') *παρὰ τὰς κνήμας τοῦ χρυσοῦ ὅσον ἐχώρεον οἱ κόθορνοι.* Aesch. Ag. 644: *τοιῶνδε μέντοι πημάτων σεσαγμένον* (‚mit solchem Leid vollgestopft, beladen') *πρέπει λέγειν παιᾶνα τόνδ' Ἐρινύων.* Hdt. 1, 194: *τὰς δὲ διφθέρας ἐπι-σάξαντες* (‚aufpressend, aufpackend') *ἐπὶ τοὺς ὄνους ἀπελαύνουσι.* Xen. Oek. 8, 8: *καὶ τριήρης δέ τοι ἡ σεσαγμένη* (‚vollgestopft') *ἀνθρώπων.* Polyb. 12, 2, 3: *τὸ δένδρον ὁ λωτὸς .... ὁ δὲ καρπὸς .... ἐπὰν δὲ πεπανθῇ, συνάγουσι, καὶ ... σάττουσιν* (‚stopfen, packen') *εἰς ἀγγεῖα.* Xen. Oek. 19, 11: *ἐπαμήσαιο δ' ἂν μόνον .. τὴν γῆν, ἢ καὶ σάξαις* (‚festdrücken') *ἂν εὖ μάλα περὶ τὸ φυτόν; σάττοιμ' ἄν .. νὴ Δί' ἐγώ.*

Entstanden ist *σάττειν* oder dialektisch *σάσσειν* zunächst aus **σάκjειν* und als seine Verbalgrundform stellt sich erst **σακ-* heraus. Darin entwickelte sich, was wir aber hier nicht weiter verfolgen, der Vocal *α* möglicher Weise unter dem Einfluß eines alten Nasals, wie er im deutschen *zwingen* erhalten blieb, gewiß nicht erst als jüngeres Element sich entwickelt. Vielleicht liegt das selbe Lautverhältniß vor in unserm *Ding*, als dessen ursprüngliche Bedeutung „gerichtliche Verhandlung" gelten darf, neben *τάσσειν* (und **τάκjειν*) ‚ordnen, feststellen' (Pind. Ol. 2, 30); Aesch. Sieben 284; Eum. 279 und öfter), deren Zusammengehörigkeit wohl angenommen werden darf.

Bezüglich der vorläufig angesetzten Verbalgrundform **σακ-* ist nun aber weiter zu erwägen, daß vor Vocal anlautendes griechi-

sches σ — worüber schon bei Besprechung von σῆμα ‚Zeichen' im Jahrgang 1890 dieser Nachrichten gehandelt wurde — so gut wie niemals auf wirklich alten Zischlaut zurückführt. Wie das inlautende σσ sich aus sehr verschiedenen Lautverbindungen entwickelt hat, so finden wir es ganz ähnlich auch bei dem anlautenden σ und zwar entsprechen sich die Lautentwicklungsverhältnisse im Einzelnen hier mehrfach ganz genau. So entwickelte sich σσ in τέσσαρες ‚vier' (Il. 2, 618; 11, 699; = altind. *catvâras* RV. 1, 122, 15; 5, 47, 4) aus altem *tv*, eine Entwicklung, die auch beim anlautenden σ mehrfach zu beobachten ist. In letzterer Beziehung ist zu nennen σέ ‚dich' neben altind. *tvâ* ‚dich' (RV. 1, 1, 7; 1, 4, 9; 1, 5, 7) im Gegensatz zum Beispiel zu den enklitischen τοί (Il. 1, 28; 39; 40) = altind. *tai* ‚dir' (RV. 1, 5, 7; 1, 9, 4). Ferner gehört hieher σείεσθαι (zunächst aus **σείσ-εσθαι*) ‚in heftiger Bewegung sein' neben dem gleichbedeutenden altindischen *tvish* (RV. 8, 83, 7: *kád atvishanta sûrájas* ‚was waren die Opferherren in heftiger Bewegung'? Il. 8, 199: Ἥρη σείσατο δ' εἰνὶ θρόνῳ ‚Here bewegte sich heftig'). Die zugehörigen Formen ἐσσείοντο (Il. 20, 59) und περι-σσείοντο (Il. 19, 382; 22, 315) sowie die die causative Bedeutung ‚in heftige Bewegung ‚bringen' aufweisenden activen ἐπι-σσείων (Il. 15, 230), ἐπι-σσείησιν (Il. 4, 167) und ὑπο-σσείουσι (Od. 9, 385) mit ihren σσ lassen den Ursprung des anlautenden σ von σείεσθαι und σείειν noch deutlicher erkennen.

Noch ist hier zu nennen σάκος- ‚Schild' (Il. 5, 619; 7, 219; 222), dem altindisches *tvácas-* ‚Haut' genau entsprechend gegenüber steht, eine Nebenform des einsilbigen *tvác-* (9, 70, 7; 9, 86, 44; 10, 16, 1), die nur in einigen Zusammensetzungen, wie *hiranja- tvacas-* ‚mit goldenem Fell' (AV. von den Sonnenrossen gebraucht) vorkömmt.

Weiter aber stellt sich hieher dann auch unser σάττειν, das also auf ein altes **τϝάκ-jειν* zurückführt. Im Gothischen würde ihm ein **thviggan* entsprechen, das aber in unseren Texten nicht begegnet: altnordisches *thvinga* und altsächsisches *bi-thwingan* steht ihm gegenüber. Auch im Althochdeutschen begegnet noch *thwingan*, daneben aber *dwingen*; im Mittelhochdeutschen ist der Dental zur Tenuis weiter verschoben und die gewöhnliche Form ist *twingen*. Das Neuhochdeutsche, das die Anlautsverbindungen *tw* und *dw* aufgegeben hat, hat *zwingen* an die Stelle treten lassen.

Möglicher Weise gehört zu σάττειν noch σηκό-ς ‚Pferch, Stall' (Il. 18, 589; Od. 9, 219), dem sich dann also unser *Zwinger* vergleichen lassen würde. Weiter aber ohne Zweifel noch συχνό-ς ‚gedrängt, zahlreich' (Hdt. 6, 33; 108; Ar. Plut. 754). Bezüglich der Entwicklung seines *-χν-* aus *-κν-* würden sich Formen wie

λύχνο-ς ‚Leuchte' (Od. 19, 34) neben *λευκό-ς* ‚leuchtend' (Il. 14, 185; Od. 6, 45), *ἄχνη* ‚Spreu' (Il. 5, 499; 501) neben dem gleichbedeutenden gothischen *ahana* (Luk. 3, 17) und andre vergleichen lassen. Ob nicht auch unser *dicht* sich hier noch anschließt? Es müßte aus irgend einem Grunde inneres *w* verloren haben.

2. Nhd. *rufen* = gr. *κράξειν*.

Daß unser *Wolf*, gothisches *vulf-s* (*vulfa-*, Matth. 7, 15; Luk. 10, 3; Joh. 10, 12 zweimal) mit dem griechischen *λύκο-ς* (Il. 10, 334; 11, 72; aus **ϝλύκο-ς*. Vor *λ* schwand anlautendes *ϝ* viel früher, als zum Beispiel vor *ρ*) und altindischen *vṛ́ka-s* (RV. 1, 42, 2; 1, 105, 7; 11; 18; 1, 116, 14) das selbe ist, hat man schon früh erkannt. Es handelt sich dabei um ein Lautverhältniß, das in vielen Wortformen zu beobachten ist, für uns aber doch noch manches Dunkle in sich schließt. Hier mag genügen, es kurz als die Entwicklung eines Labials auf gutturalem Grunde zu bezeichnen.

Daß diese Entwicklung auch bei der Aspirate nicht fehlt, zeigt beispielsweise unser *trüben*, goth. *drôbjan* ‚verwirren, beunruhigen' (Gal. 5, 10: *sâ drôbjands izvis* ‚*ὁ δὲ ταράσσων ὑμᾶς*'. Gal. 1, 7: *thai drôbjandans izvis* ‚*οἱ ταράσσοντες ὑμᾶς*'), dem das griechische *ταράσσειν* entspricht. Daß dieses zunächst auf **ταράχjειν* beruht, erweist das unmittelbar zugehörige *ταραχή* ‚Verwirrung, Unruhe' (Pind. Ol. 7, 30; Hdt. 3, 126; 6, 5), daß es übrigens ursprünglich auch aspirirten Anlaut hatte, ergiebt sich aus der Nebenform *θράσσειν* (Pind. Isthm. 7, 39; Aesch. Prom. 628; Soph. Bruchst. 952. Eur. Rhes. 863). Anlautendes gothisches *b* scheint auf die angegebene Weise entwickelt zu sein in *bnauan* ‚zerreiben' (nur Luk. 6, 1: *raupidêdun ahsa sipônjôs is jah matidêdun bnauandans handum* ‚*ἔτιλλον οἱ μαθηταὶ αὐτοῦ τοὺς στάχυας καὶ ἤσθιον ψώχοντες ταῖς χερσίν*'), dem einzigen gothischen Wort mit der Anlautsgruppe *bn-*, das wir kennen. Es scheint genau übereinzustimmen mit dem griechischen *χναύειν* ‚abnagen, abknuppern' (Eur. Kykl. 358: *ὡς ἕτοιμά σοι ἑφθὰ καὶ ὀπτὰ καὶ ἀνθρακιᾶς ἄπο χναύειν, βρύκειν, κρεοκοπεῖν μέλη ξένων*. Epicharm bei Athen. 6, 309, F: *ἀγλαοὶ κόκκυγες, οὓς παρσχίζομες πάντας, ὀπτᾶντες δὲ χἀδύναντες αὐτοὺς χναύομες*. Ephipp. bei Athen. 9, 370, D: *κοινῇ τε χναύειν τευθίσιν σηπίδια*. Der selbe bei Athen. 14, 642, E: *ἴτρια τραγήμαθ' ἥκε, πυραμοῦς, ἄμης, φῶν ἑκατόμβη· πάντα ταῦτ' ἐχναύομεν*).

Daß dann auch bei der alten gutturalen Media die entsprechende Entwicklung vorkommen, also gothisches *p*, hochdeutsches *f*, an der Stelle von altem *g* sich finden werde, war von vorn herein schon deshalb wahrscheinlich, weil das zunächst zu

erwartende Entsprechen der genannten germanischen Laute und eines alten *b* überhaupt nur selten und kaum in ganz sicheren Fällen sich findet. Als ein solcher gelten darf wohl goth. *greipan* ‚*greifen*' (MK. 14, 44; 48; 51) dem litauischen *griêbiù* ‚ich greife' gegenüber. Weiter pflegt man so zu beurtheilen goth. *sliupan* ‚schlüpfen, schleichen' (Gal. 2, 4 zweimal; 12; Tim. 2, 3, 6) neben lat. *lûbrico-* ‚schlüpfrig' (Plaut. mil. 853; Mart. 4, 18, 2): es ist aber keinesweges sicher, daß das letztere ein anlautendes *s* verloren und nicht etwa *û* an der Stelle von altem *oi* enthält. Die sonst noch öfter gegebene Zusammenstellung unseres *Dorf* mit dem lateinischen *turba* ‚Getümmel' (Plaut. aul. 340; 342: *in aedibus turba istîc nulla tibi erit ... hîc autem apud nos magna turba ac familiast*; Plaut. Bacch. 1076: *qvâs meus filius turbâs turbet*), die das in Frage stehende Lautverhältniß noch weiter erweisen würde, ist ohne Zweifel unrichtig. Die unserm *Dorf* entsprechende gothische Form *thaurp* begegnet in unsern Texten nur ein einziges Mal, nämlich Nehemia 5, 16, wo *thaurp ni gastaistaid* dem griechischen *ἀγρὸν οὐκ ἐκτησάμην* gegenübersteht, das bei Luther lautet „ich ... kaufte keinen Acker": es handelt sich darin also um eine Bedeutung, die von „Getümmel" sehr weit abliegt.

Was nun noch insbesondere die Entwicklung eines gothischen *p*, hochdeutschen *f*, aus altem *g* betrifft, so mag hier an erster Stelle das gothische *hrôpjan*, unser *rufen*, neben dem griechischen *κράζειν* (aus **κράγjειν*) ‚schreien' aufgeführt sein. Dem gedehnten *ᾱ* seines Perfectes *κέκρᾱγα* (Aesch. Prom. 743. Bruchst. 281, 5. Soph. Aias 1236) würde das gothische *ô* genau entsprechen. Es darf dabei hervorgehoben werden, daß der Gothe das griechische *κράζειν* regelmäßig, im Ganzen an fast dreißig Stellen, mit *hrôpjan* übersetzt. Luther giebt hier überall ‚*schreien*', mit Ausnahme von drei Stellen (Joh. 7, 28; 37; 12, 44), in denen *κράζειν* von Jesus gesagt wird und Luther es mit ‚*rufen*' übersetzt, wie Joh. 7, 28: *hrôpida than in alh laisjands Iêsûs jah qvithands ‚ἔκραξεν οὖν ἐν τῷ ἱερῷ διδάσκων ὁ Ἰησοῦς καὶ λέγων'*, Luther ‚*da rief Jesus im Tempel, lehret und sprach*'.

Da das griechische *λήγειν* ‚ablassen, aufhören' ursprünglich höchstwahrscheinlich anlautenden Zischlaut hatte, also **σλήγ-ειν* lautete, was bei Homer noch in manchen Formen, wie *μεταλλήξαντι* (Il. 9, 157 = 299; 261; aus **μετα-σλήξαντι*), *ἄλληκτον* ‚unablässig, unaufhörlich' (Il. 2, 452 = 11, 12 = 14, 152; aus **ἄ-σληκτον*) und anderen deutlich zu erkennen ist, von ihm aber zum Beispiel auch *λαγαρό-ς* ‚schlaff' (Hippokr. 1, 487 bei Kühn; Ar. Ekkl. 1166; Xen. Jagd 4, 1) und lat. *langvêre* (also aus **slangvêre*) ‚ermattet sein,

schlaff sein' (Att. trag. 612: *jam jam stupidô Thessala somnô pectora langventqve senentqve*) nicht wohl getrennt werden können, so wird man zu ihnen auch unser *schlaff*, das gothisch **slaps* (**slapa-*) lauten würde und mit ihm auch unser *schlafen*, goth. *slêpan* (Matth. 8, 24; 9, 24; Mark. 4, 27; 38) zu stellen haben.

Da die übliche Zusammenstellung des gothischen *vairpan*, unseres *werfen*, mit dem gleichbedeutenden griechischen *ῥίπτειν*, alt *ϝῥίπτειν* (aus **ϝῥίπjειν*, wie zum Beispiel *ῥῖπή*, *ϝῥῖπή* ‚Wurf, Schwung' Il. 12, 462; 15, 171; 16, 589 erweist) gegen die Lautverschiebung verstößt, darf die neuere mit dem altbulgarischen *vrêšti* (aus **vergti*; *vrŭgoñ* ‚ich werfe') ‚werfen' wohl als die richtige gelten, was wir hier nicht weiter verfolgen.

Unser *Schaf*, das im gothischen Gewande **skêp* (**skêpa-*) lauten würde, hat man nicht ungeschickt mit dem altindischen *châga-s* ‚Ziegenbock' (RV. 1, 162, 3) zusammengestellt. Das Bedenkliche, das dabei in der Bedeutungsverschiedenheit liegt, bedarf aber noch weiterer Erwägung.

Daß unser *streichen* — das Gothische bietet das zugehörige *strik-s* ‚Strich' Matth. 5, 18 — zum lateinischen *stringere* ‚streifen, leicht berühren' (Ov. met. 11, 733: *stringêbat summâs âles miserâbilis undâs*) mit *strigili-s* ‚Streicheisen, Schabeisen' (Plaut. Stich. 228: *rôbîginôsam strigilim ... vendô*) und *striga* ‚Strich, lange Reihe des abgeschnittenen Getraides oder Grases, Schwaden' (Colum. 2, 19, 2: *faenum ... utrinqve siccâtum coartâbimus in strigam atqve ita manipulôs vinciêmus*) gehört, liegt auf der Hand. Ob aber nicht etwa auch unser *Streif* und *Streifen* und das Verbum *streifen* eben dazu zu stellen sind und sichs hier nicht möglicher Weise nur um uralte dialektische Verschiedenheiten handelt?

Wenn nicht das angelsächsische *hrympele* ‚Runzel' mit seinem anlautenden *h* Bedenken erregte, dürfte sich hier wohl auch unser *rümpfen* noch anreihen lassen, da seine Zusammengehörigkeit mit lat. *rûga* ‚Runzel' (Hor. carm. 4, 13, 11; epod. 8, 3) auf den ersten Blick sehr wahrscheinlich ist.

Die etwaige Zugehörigkeit unseres *saufen*, das gothisch als *sûpan* zu erwarten sein würde, zum lateinischen *sûgere* ‚saugen' (Cic. 2, 47: *animâlia ... alia sûgunt, alia carpunt, alia vorant, alia mandunt*), die das in Frage stehende Lautverhältniß auch erweisen würde, ist wegen unseres *saugen*, das dem angeführten lateinischen Worte offenbar genau entspricht und gewiß nicht als ihm nur entlehnt gelten kann, nicht wahrscheinlich.

Dorpat, Ostern 1892.

Malayagiri's Saṁskṛit Grammatik.

Von

F. Kielhorn.

In der *Chandrikâ* zu Kâtantra[1]) IV, 3, 84 werden neben einander angeführt die drei Beispiele *śâstrakṛit*, *bhâshyakṛit*, *mushṭikṛit*, „der Verfasser des Śâstra, der Verfasser des Bhâshya, der Verfasser der Mushṭi". Daß *mushṭi* hier, ebenso wie *śâstra* und *bhâshya*, ein litterarisches Werk bezeichnet, ist mehr als wahrscheinlich, und wird zur Gewißheit durch folgende Notiz eines in meinem Besitze befindlichen ungedruckten Handschriftenverzeichnisses: *mushṭir vyâkaraṇaṁ Malayagirikṛitam*, „die Mushṭi, eine von Malayagiri verfaßte Grammatik". Im Jahre 1881 habe ich ein unvollständiges auf 282 Palmenblättern geschriebenes Exemplar dieser Grammatik für die Regierung von Bombay erworben, das in der Bibliothek des Deccan College deponiert ist. Vorher war dies Werk Malayagiris gänzlich unbekannt, und auch seit jener Zeit scheint es den Bemühungen meiner früheren Collegen nicht gelungen zu sein, eine zweite Handschrift desselben in irgend einer der von ihnen sonst mit so großem Erfolge durchsuchten einheimischen Bibliotheken zu entdecken. Nachdem ich Malayagiris Grammatik sorgfältiger geprüft habe, muß ich gestehen, daß mich die Seltenheit der Handschriften nicht Wunder nimmt. Ich wundre mich vielmehr darüber, daß Malayagiri es überhaupt für nothwendig erachtet hat kurz nach Hêmachandra sein eigenes Handbuch der Saṁskṛit Sprache zu verfassen, und finde es begreiflich genug, daß man die bei weitem bessere und vollständigere Grammatik seines Vorgängers der seinigen vorgezogen und letztre nur selten abgeschrieben hat. Und ich hoffe durch die Mittheilung eines kurzen Abschnittes zu zeigen, daß, was auch immer der Werth andrer Werke Malayagiris sein möge, aus der Veröffentlichung seiner Grammatik der Wissenschaft schwerlich ein Vortheil erwachsen dürfte. Als Einleitung gestatte ich mir folgende Bemerkungen.

Nach der oben erwähnten unvollständigen Handschrift zu urtheilen, hat Malayagiri den Stoff gerade wie Hêmachandra angeordnet; und ich glaube nicht fehl zu gehen, wenn ich annehme,

1) Eggelings Ausgabe, S. 551.

daß seine Grammatik fünf Capitel enthielt. Das erste Capitel handelt vom *saṁdhi*, das zweite vom Nomen (*nâman*), das dritte vom Verbum (*âkhyâta*), das vierte von den primären oder *kṛit* Suffixen, und das fünfte muß die secundären oder *taddhita* Suffixe behandelt haben. Die Handschrift enthält vollständig nur das zweite und dritte Capitel, und das fünfte fehlt in ihr ganz. Das erste Capitel bestand aus fünf Pâdas, von denen die drei letzten (*tṛitîyaḥ, chaturthaḥ*, und *pañchamaḥ saṁdhiḥ*) in der Handschrift vollständig erhalten sind. Vom vierten Capitel sind nur die vier ersten Pâdas (*kṛiti prathamaḥ — chaturthaḥ pâdaḥ*) vorhanden.

Das zweite Capitel enthält neun Pâdas (*nâmni prathamaḥ — navamaḥ pâdaḥ*). Pâda 1—4 handeln von der Declination; Pâda 5 lehrt die Bildung der Femininstämme; Pâdas 6 und 7 handeln vom Gebrauche der Casus; Pâda 8 giebt die Regeln für die Bildung der Composita; und Pâda 9 handelt vom *êkaśêsha*, vom Geschlechte der Composita, von der Stellung der einzelnen Glieder der Composita, von den in Compositis erhaltenen Casusendungen, und vom *puṁvadbhâva*.

Das dritte Capitel besteht aus zehn Pâdas (*âkhyâtê prathamaḥ — daśamaḥ pâdaḥ*). Pâda 1 enthält Definitionen und giebt besonders die Namen und Endungen der Tempora und Modi, und die für die so gelehrten Endungen eintretenden Substitute. Pâda 2 handelt vom Gebrauche des Parasmaipada und Âtmanêpada. Pâda 3 lehrt die Bildung der Denominativa und handelt von der Reduplication. Pâda 4 giebt weitere Reduplicationsregeln und handelt vom *saṁprasâraṇa* und andern Veränderungen der Verbalstämme. Pâda 5 lehrt die Substitution von *guṇa* und *vṛiddhi*, den Eintritt des Augments *nam*, die Verwandlung von *s* in *sh*, *n* in *ṇ*, und *r* in *l*, und den Gebrauch des Augments *aṭ* im Imperfectum u. s. w. Pâda 6 behandelt die von Verben abgeleiteten Verbalstämme, die als *ṅit* und *kit* zu betrachtenden Suffixe, und gewisse vor Suffixen eintretende Veränderungen der Verbalstämme. Pâda 7 handelt vom Augmente *iṭ*, dem sogenannten Bindevocale *i*. Pâda 8 lehrt die Substitution von *na* für *ta* im Ptc. Praet. Pass., die vor *kit* und *ṅit* Suffixen eintretenden Veränderungen, die Substitution von Gutturalen für finale Palatale u. s. w.; Pâda 9 die Substitution von *â* für finale Diphthonge, die Anfügung des Augments *p* im Causativum, andre Veränderungen in Causativstämmen, den Verlust eines wurzelhaften Nasals u. s. w.; und Pâda 10 handelt hauptsächlich von den *vikaraṇa* in Praesensstämmen, im Aorist, u. s. w.

Vergleicht man hiermit die Anordnung des Stoffes in Hê-

machandras Grammatik[1]), so findet man, daß sich genau entsprechen —

M. Capitel I und H. Adhyâya I, 1—3;
„ II und H. I, 4—III, 2;
„ III und H. III, 3—IV, 4;
„ IV und H. V;
„ V und H. VI—VII.

Der Unterschied beider Grammatiken von der des Śâkaṭâyana[2]) besteht hier hauptsächlich darin, daß Śâkaṭâyana die *taddhita* Suffixe, gerade so wie dies z. B. in der *Siddhânta-kaumudî* geschieht, zwischen Nomen und Verbum behandelt hat.

Prüft man die Regeln Malayagiris im Einzelnen, so ergiebt sich, daß der Verfasser Eigenes in der That nicht geliefert hat. Was den Inhalt der Regeln betrifft, so war dies zu erwarten. Aber auch in der Form derselben, in der Wahl der technischen Ausdrücke u. s. w., ist er fast überall und in allen Einzelheiten Śâkaṭâyana und Hêmachandra gefolgt; und es ist besonders auf die offenbare Willkühr aufmerksam zu machen, mit der Malayagiri theils von diesem theils von jenem geborgt hat. Dies im Einzelnen hier auszuführen würde von geringem Interesse sein; das beobachtete Verfahren wird zur Genüge aus dem von mir mitgetheilten Abschnitte, welcher die ersten 36 Declinationsregeln enthält, klar werden, in dem ich unter Malayagiris Commentare zu jeder Regel die entsprechenden Regeln aus den Grammatiken Śâkaṭâyanas und Hêmachandras citiert habe.

In den Regeln citiert Malayagiri, so viel mir bekannt, keine Autoritäten. In seinem Commentare führt er die Ansichten andrer Grammatiker bisweilen mit *anyê*, *aparê*, *êkê* u. s. w. ein, und erwähnt mit Namen Vyâḍi, Gâlava, und Śrutapâla, alle drei im ersten Capitel. Unter den von ihm gegebenen Beispielen verdienen Erwähnung *anu Śâkaṭâyanaṁ vaiyâkaraṇâḥ*, *itiŚâkaṭâyanam* und *âchâryaḥ śrîHêmachandraḥ*.

Da Malayagiri gerade derjenige unter den Jaina Commentatoren zu sein scheint, über dessen Zeit Genaues bis jetzt nicht ermittelt ist, so darf ich vielleicht noch bemerken, daß er selbst durch das Beispiel *adahad arâtîn Kumârapâlaḥ*, welches er zu der bekannten Regel *khyâtê dṛiśyê* giebt, sich als einen Zeitgenossen

1) Vgl. meinen Aufsatz in der *Wiener Z. f. d. Kunde des Morg.* II, 18—24.
2) Vgl. meinen Aufsatz im *Indian Antiquary* XVI, 24—28.

des Chaulukya Kumârapâla (circa A.D. 1143—1173) zu erkennen giebt[1]).

Malayagiri's Śabdânuśâsana II, 1, 10—45[2]).

Pañchatô napô 'nêkatarasyânyâdêḥ syamôr daś ‖ 10 ‖
pañchaparimâṇasya napuṁsakaliṅgasyânyâdêḥ saṁbandhinôḥ syamôr daśâdêśô bhavaty êkataraśabdaṁ varjayitvâ | anyat anyatarat itarat katarat katamat | hê 'nyat hê 'nyatarat | pañchata iti kim | nêmaṁ tishṭhati nêmaṁ paśya | napa iti kim | anyaḥ purushaḥ | anyâdêḥ saṁbandhinôr iti kim | priyânyaṁ tishṭhati priyânyaṁ paśya | śakâraḥ sarvâdêśârthaḥ | akâra uchchâraṇârthaḥ ‖
[Ś. (I, 2, 1. napô 'chô hrasvaḥ;) 2. pañchatô 'nêkatarasyânyâdêr dak svamôḥ. H. I, 4, 58. pañchatô 'nyâdêr anêkatarasya daḥ.]

Atô 'm ‖ 11 ‖
akârântasya napuṁsakaliṅgasya saṁbandhinôḥ syamôr amâdêśô bhavati | kuṇḍaṁ tishṭhati kuṇḍaṁ paśya | m ity anuktvâmvidhânaṁ jarasartham | atijarasaṁ kulam | ata êvâmvidhânât saṁnipâtaparibhâshâ nôpatishṭhatê ‖
[Ś. 4. atô 'm. H. 57. ataḥ syamô 'm.]

Śluk ‖ 12 ‖
napuṁsakaliṅgasya saṁbandhinôḥ syamôḥ ślug bhavati | dadhi tishṭhati dadhi paśya | payas[3]) tishṭhati payaḥ paśya | śakâraḥ sarvâdêśârthaḥ śluchîti kâryârthaś cha | tat kulam yat kulam ‖
[Ś. 5. śluk. H. 59. anatô lup.]

Jarasô vâ ‖ 13 ‖
jarasantasya napuṁsakaliṅgasya saṁbandhinôḥ syamôḥ ślug vâ bhavati | atijarasam atijaraḥ[4]) kulam ‖
[Ś. 6. jarasô vâ. H. 60.]

---

1) Khyâtê dṛiśyê ‖ bhûtânadyatanê prayôktur darśanayôgyê lôkavijñâtê 'rthê vartamânâd dhâtôḥ parâ hyastanî bhavati | adahad arâtîn Kumârapâlaḥ ‖

2) Die vorhergehenden Regeln 1—9 handeln noch vom *saṁdhi*. Die hier gegebenen 36 Regeln entsprechen den Regeln I, 2, 1—35 Śâkaṭâyanas und den Regeln I, 4, 17—34 und 55—67 Hêmachandras. Malayagiri folgt im Allgemeinen Śâkaṭâyana, borgt aber auch, wie der Leser selbst bemerken wird, von Hêmachandra. — Die hier folgenden Anmerkungen geben die von meinem Texte abweichenden Lesarten der Handschrift.

3) pas. 4) atijara.

Ikô lugvat ‖ 14 ‖
igantasya napuṁsakaliṅgasya saṁbandhinôḥ syamôḥ ślug lugvad vâ[1]) bhavati | hê vârê hê vâri | hê kartaḥ hê kartṛi | priyatisṛi priyatri kulam | ika iti kim | tat kulam ‖
[Ś. 7 ikô luk. H. 61. nâminô lug vâ.]

Puṁvach chânyatash ṭâdau svarê ‖ 15 ‖
igantaṁ[2]) śabdarûpam anyatô viśêshyavaśân[3]) napuṁsakârthaṁ ṭâdau svarê parê vâ puṁvad bhavati | grâmaṇyâ grâmaṇinâ kulêna | chitraguṇê chitragavê kulâya | kartṛiṇâ kartrâ kulêna | anyata iti kim | pîlunê phalâya | ṭâdâv iti kim | grâmaṇinî kulê | svara iti kim | grâmaṇibhyâm | ika iti kim | kîlâlapêna kulêna | chakârô vânukarshaṇârthas tênôttaratra nânuvartatê ‖
[Ś. 8. pumâṁś chânyatô 'chy âpi. H. 62. vânyataḥ pumâṁsh ṭâdau svarê.]

Asthisakthyakshidadhnô[4]) 'naṅ ‖ 16 ‖
asthyâdînâṁ napuṁsakaliṅgânâm igantânâṁ ṭâdau svarê parê 'naṅ antâdêśô bhavati | asthnâ sakthnâ akshṇâ dadhnâ | priyâsthnyâ[5]) śunyâ | svara iti kim | asthibhyâm | napuṁsakânâm iti kim | dadhir[6]) nâma kaśchid dhânaśîlô vâ tasmai dadhayê ‖
[Ś. 9. dadhyasthisakthyakshṇô 'naṅ. H. 63. dadhyasthisakthyakshṇô 'ntasyân.]

Nam syâdau ‖ 17 ‖
igantasya napuṁsakaliṅgasya tatsaṁbandhini svarâdau syâdau parê nam bhavati | vâriṇî vârîṇâm | syâdâv[7]) iti kim | taumburavaṁ chûrṇam | tatsaṁbandhinîti kim | nirvârî kûpau | svara iti kim | hê trapô | ika iti kim | kuṇḍê ‖
[Ś. 10. nam supi. H. 64. anâmsvarê nô 'ntaḥ.]

Svarâch chhau ‖ 18 ‖
svarântân napuṁsakaliṅgâd vihitê śau parê nam bhavati | vanâni | kartṛîṇi kulâni | svarâd iti kim | chatvâri ahâni ‖
[Ś. 11. śâv achaḥ. H. 65. svarâch chhau.]

Dhuṭâm ‖ 19 ‖
svarât parâ yâ dhuḍjâtis tadantasya napuṁsakasya śau parê 'ntyât svarât parô nam bhavati | udaśvinti[8]) payâṁsi kâshṭhataṅkshi ku-

---

1) lugva bhavati. 2) igatam. 3) viśêshyêvaśân. 4) °sakty°.
5) °sthyâ. 6) davêr. 7) syâdiv. 8) udasvinti.

lâni | svarâd iti kim | bahûrji kulâni | bahuvachanaṁ dhuḍjâtipratipattyartham ‖
[Ś. 12. jalâm. H. 66. dhuṭâṁ prâk.]

Tataḥ prâg vâ ‖ 20 ‖
dhuḍjâtyantasya napuṁsakasya śau parê tatô[1]) dhuḍjâtêḥ prâg vânam bhavati | bahûrñji[2]) bahûrji[3]) kulâni | suvalṅgi suvalgi kulâni ‖
[Ś. 13. Tataḥ prâg Âryavajrasya. H. 67. rlô vâ.]

Avarṇâd aśnaḥ śatur vâ ṅîgyôḥ ‖ 21 ‖
śnâvarjitâd avarṇât parasya śatṛipratyayasya ṅîgyôḥ parayôr vânam bhavati | tudantî tudatî strî | tudantî tudatî kulê | karishyantî karishyatî strî kulê[4]) vâ | bhântî bhâtî strî kulê vâ | avarṇâd iti kim | sunvatî strî sunvatî kulê | aśna[5]) iti kim | krîṇatî strî krîṇatî kulê | ata êvâvarṇât paraḥ śatâ bhûtapûrvatayâ drashṭavyaḥ ‖
[Ś. (14. ajjhêḥ śatuḥ; 15. na nam;) 16. ṅîgyôr vâd aśnaḥ.
H. II, 1, 115. avarṇâd aśnô 'ntô vâtur îṅyôḥ.]

Śapśyât ‖ 22 ‖
śapaḥ śyâch cha parasya śatṛipratyayasya ṅîgyôḥ parayôr nam bhavati | bhavantî strî bhavantî kulê | dîvyantî strî divyantî kulê | nityârtham vachanam ‖
[Ś. 17. śapśyât. H. 116. śyaśavaḥ.]

Na dvyuktijakshapañchatô nam ‖ 23 ‖
dviruktâj jakshapañchataś cha parasya śatṛipratyayasya sarvô 'pi nam na[6]) bhavati | dadatî strî dadatî kulê | dadat dadatau | dadhat jakshat jâgrat[7]) śâsat chakâsat | namy anuvartamânê punar namgrahaṇaṁ nammâtrapratishêdhârtham ‖
[Ś. 15. na nam. H. (IV, 2, 93. dvyuktajakshapañchataḥ;) 94. antô nô luk.]

Śau vâ ‖ 24 ‖
dvyuktêr jakshapañchataś cha parasya śatṛipratyayasya śau parê nam bhavati vâ | dadanti dadati kulâni | jakshati jakshanti[8]) kulâni ‖
[Ś. 14. ajjêḥ śatuḥ. H. 95. śau vâ.]

Parasmai antô 't ‖ 25 ‖
dvyuktêr jakshapañchataś cha parasya parasmaipadavishayasyânt

---

1) têtô. 2) vahûñji. 3) *om.* 4) kugalê. 5) śna. 6) *om.* 7) jagrat. 8) kshakshanti.

ity êtasya at ity âdêśô bhavati | dadati dadat jakshat jakshati jakshatu ‖

[Ś. I, 4, 89. dvyuktijakshapañchatô 't. H. 94. antô nô luk.]

Idutô 'strêr autô[1]) gigu ‖ 26 ‖

ikârâd ukârâch cha parasyaukârasya yathâsaṁkhyaṁ gigvâdêśau[2]) bhavataḥ strîśabdastham ikâraṁ varjayitvâ | munî tishṭhataḥ munî paśya[3]) | sâdhû tishṭhataḥ sâdhû paśya | iduta iti kim | nadyau vadhvau | astrêr iti kim | atistriyau purushau | atiśastrî purushâv ity arthavadgrahaṇê nânarthakasyêti pratishêdhô na bhavati | idam êva châstrêr[4]) iti jñâpakam iyuvapavâdênêdutkâryam iti | tênâtistrayaḥ sahastraya ityâdi siddham | gakârô gid iti saṁdhipratishêdhârthaḥ ‖

[Ś. I, 2, 22. idutô gigv autô 'strêḥ. H. I, 4, 21. idutô 'strêr îdût.]

Jasy êṅ[5]) ‖ 27 ‖

ikârasyôkârasya cha jasi parê yathâsaṁkhyam êṅâdêśô bhavati | munayaḥ sâdhavaḥ[6]) buddhayaḥ dhênavaḥ ‖

[Ś. 23. jasy êṅ. H. 22. jasy êdôt.]

Sakhipatêr ṅir aut ‖ 28 ‖

âbhyâṁ parô ṅir aud bhavati | sakhyau patyau ‖

[Ś. 24. ṅir[7]) aut. H. 26. kêvalasakhipatêr au.]

Niya âm ‖ 29 ‖

nîśabdât parô ṅir âm bhavati | niyâm grâmaṇyâm ‖

[Ś. 25. nyaṁśâd âm. H. 51. niya âm.]

Ghêr ḍauḥ[8]) ‖ 30 ‖

ghisaṁjñakâd ikârâd ukârâch cha parô ṅir ḍaur bhavati | munau sâdhau buddhau dhênau ‖

[Ś. 26. ghêr ḍaur anâṭ[9]). H. 25. ṅir ḍauḥ.]

Ṭô 'striyâ nâ ‖ 31 ‖

astrîliṅgâd ghisaṁjñakâd ikârâd ukârâch cha parasya [ṭṛitîyaika]-vachanasya nâdêśô bhavati | muninâ sâdhunâ | astriyâ iti[10]) kim | buddhyâ dhênvâ | puṁsa iti na kṛitam amunâ kulênêti napuṁsakê nâbhâvârtham | nami hy uvarṇô 'san bhavati | ghêr iti kim | sakhyâ patyâ ‖

[Ś. 27. nâstrîṭaḥ. H. 24. ṭaḥ puṁsi nâ.]

---

1) autê. 2) gigudêśau. 3) paśa. 4) chastrêr. 5) hrasôṅ. 6) sâdhanaḥ. 7) Andre Lesart: ṅêr. 8) ḍau. 9) Andre Lesart: anâṭi. 10) asighân ti.

Ṅity adity êṅ ‖ 32 ‖
adakârânubandhê ṅiti[1]) syâdau parê ghisaṁjñakasyêkârasyôkârasya cha yathâsaṁkhyam êṅ bhavati | munayê munêḥ[2]) munêḥ | sâdhavê sâdhôḥ sâdhôḥ | buddhayê dhênavê | aditîti[3]) kim | buddhyai buddhyâḥ | syâdâv iti kim | paṭvî ‖
[Ś. 28. ṅy êṅ. H. 23. ṅity aditi.]

Napô jaśśasôḥ śiḥ ‖ 33 ‖
napuṁsakasya saṁbandhinôḥ jaśśasôḥ sthânê śir bhavati | vanâni tishṭhanti vanâni[4]) paśya | śakâraḥ sarvâdêśârthaḥ ‖
[Ś. 18. jaśśasaḥ śiḥ. H. 55. napuṁsakasya śiḥ.]

Autô gî ‖ 34 ‖
napuṁsakasya saṁbandhina aukârasya gî ity âdêśô bhavati | vanê tishṭhataḥ vanê paśya | payasî ‖
[Ś. 19. âḍaś chautô gî. H. 56. aur îḥ.]

Âpaḥ ‖ 35 ‖
âbantasya saṁbandhina aukârasya gî ity âdêśô bhavati | śâlê tishṭhataḥ śâlê paśya | â âp âp ity âkârapraślêshâd iha na bhavati priyaśâlau purushau ‖
[Ś. 19. âḍaś chautô gî. H. 20. autâ.]

Ṭausy êt ‖ 36 ‖
âbantasya tatsaṁbandhinôḥ ṭausôḥ parayôr êkârô 'ntâdêśô bhavati | mâlayâ mâlayôḥ ‖
[Ś. 21. ṭausy êt. H. 19.]

Ṅêṅasiṅasṅînâṁ yaiyâsyâsyâmaḥ ‖ 37 ‖
âbantasya saṁbandhinâṁ ṅêṅasiṅasṅînâṁ sthânê yathâsaṁkhyaṁ yai yâs yâs yâm ity âdêśâ bhavanti | mâlâyai mâlâyâḥ mâlâyâḥ mâlâyâm ‖
[Ś. 20. ṅitô yâṭ. H. 17. âpô ṅitâṁ yaiyâsyâsyâm.]

Sarvâdêr ḍaspûrvâḥ ‖ 38 ‖
sarvâdêr âbantasya saṁbandhinâṁ ṅêṅasiṅasṅînâṁ yaiyâsyâsyâmô ḍaspûrvâ bhavanti | sarvasyai sarvasyâḥ sarvasyâḥ sarvasyâm ‖
[Ś. 175. ṅas yâṭy asya. H. 18. sarvâdêr ḍaspûrvâḥ.]

Idutaḥ striyâ vâ daidâsdâsdâmaḥ ‖ 39 ‖
strîliṅgâd ikârâd ukârâch cha parêshâṁ ṅêṅasiṅasṅînâṁ sthânê yathâsaṁkhyaṁ dai dâs dâs dâm ity âdêśâ bhavanti vâ | buddhyai

1) °râṭuvadhê diṭi. 2) munê. 3) aditi. 4) vanâ.

buddhayê buddhyâḥ buddhêḥ buddhyâḥ buddhêḥ dhênvai dhênavê dhênvâḥ dhênôḥ dhênvâḥ dhênôḥ buddhyâm buddhau dhênvâm dhênau | patyai patyê | priyabuddhyai priyabuddhayê striyai purushâya vâ | striyâ iti kim | munêḥ sâdhôḥ ||

[Ś. 29. striyâ vâṭ. H. 28. striyâ ṅitâṁ vâ daidâsdâsdâm.]

Yvô 'puṁsaḥ || 40 ||

asaṁbhavipumarthât strîliṅgâd îkârântâd ûkârântâch cha parêshâṁ ṅêṅasiṅasṅînâṁ[1]) sthânê yathâsaṁkhyaṁ dai dâs dâs[2]) dâm ity âdêśâ bhavanti | nadyai nadyâḥ nadyâḥ nadyâm vadhvai vadhvâḥ vadhvâḥ vadhvâm | lakshmyai | ativadhvai striyai purushâya vâ | yva iti kim | buddhayê | apuṁsa iti kim | grâmaṇyê khalapvê striyai ||

[Ś. 30. yvô 'puṁsaḥ. H. 29. strîdûtaḥ.]

Vêyuvô 'striyâḥ || 41 ||

iyuvâdêśabhâvinau yâv îkârôkârau tadantâd asaṁbhavipumarthât strîvṛittêḥ parêshâṁ ṅêṅasiṅasṅînâṁ sthânê yathâsaṁkhyaṁ vâ dai dâs dâs dâm ity âdêśâ bhavanti strîśabdaṁ varjayitvâ | śriyai śriyê śriyâḥ śriyaḥ śriyâḥ śriyaḥ śriyâm śriyi bhruvai bhruvê bhruvâḥ bhruvaḥ bhruvâḥ bhruvaḥ bhruvâm bhruvi | atiśriyai atiśriyê striyai purushâya vâ | iyuva iti kim | âdhyai pradhyai | astriyâ iti kim | striyai | apuṁsa[3]) iti kim | yavakriyê kaṭapruvê striyai ||

[Ś. 31. vêyuvô 'striyâḥ. H. 30.]

Nâm âmaḥ || 42 ||

iyuvâdêśabhâvîkârôkârântâd asaṁbhavipumarthât strîvṛittêḥ parasyâmaḥ shashṭhîbahuvachanarûpasya sthânê nâmâdêśô vâ bhavati strîśabdaṁ varjayitvâ | śrîṇâm śriyâm bhrûṇâm bhruvâm | pṛithuśrîṇâm pṛithuśriyâm lambabhrûṇâm lambabhruvâm | astriyâ[4]) iti kim | strîṇâm ||

[Ś. 32. nâm âmaḥ. H. 31. âmô nâm vâ.]

Sadidîdûnnamhrasvâpaḥ || 43 ||

yata îkârâd ûkârâch cha daidâsdâsdâmas tau saditau tadantân namantâd hrasvântâd âbantâch[5]) cha parasyâmaḥ sthânê nâmâdêśô bhavati | nadînâm vadhûnâm strîṇâm lakshmîṇâm | nam | vârîṇâm trapûṇâm | hrasva | vṛikshâṇâm munînâm sâdhûnâm pitṛîṇâm | âp | śâlânâm mâlânâm | namgrahaṇaṁ parân api vidhîn nam bâdhata iti jñâpanârthaṁ têna vârîṇîtyâdi siddham ||

[Ś. 33. namhrasvâṭsâṭaḥ. H. 32. hrasvâpaś cha.]

---

1) °ṅasdînâṁ. 2) *om.* 3) apuṁsaka. 4) astriyâm. 5) avaṅtâch.

Rashṇâṁ saṁkhyânâm ‖ 44 ‖
rêphântashakârântanakârântânâṁ saṁkhyâvâchinâṁ saṁbandhina âmaḥ sthânê nâmâdêśô bhavati | chaturṇâm paramachaturṇâm shaṇṇâm pañchânâm | rashṇâm iti kim | triṁśatâm | bahuvachanaṁ shashṭhyabhivyaktyarthaṁ têna tatsaṁbandhina êva bhavati nânyasaṁbandhinaḥ | atichaturâm ‖
[Ś. 34. rashṇâṁ saṁkhyânâm. H. 33. saṁkhyânâṁ rshṇâm.]

Três trayaḥ ‖ 45 ‖
triśabdasyâmsaṁbandhinaḥ sthânê traya âdêśô bhavati | trayâṇâm paramatrayâṇâm | âmsaṁbandhivijñânâd[1]) iha na bhavati | priyatriṇâm | tisṛiṇâm ity atra spardhêna bâdhâ ‖
[Ś. 35. três trayaḥ. H. 34.]
‖ iti śrîMala[ya]girivirachitê śabdânuśâsanê nâmni
prathamaḥ pâdaḥ samâptaḥ ‖

Das Verhalten von Molekularverbindungen bei der Auflösung.

Von

G. Bodländer.

(Vorgelegt von Th. Liebisch.)

I. Verbindungen von Chlorsilber und Bromsilber mit Ammoniak.

Um das Verhalten der Molekularverbindungen bei der Auflösung kennen zu lernen, habe ich versucht festzustellen, ob diese Verbindungen unverändert in Lösung gehen oder vollständig in ihre näheren Bestandtheile zerfallen oder nur theilweise zersetzt werden, so daß neben den Molekülen der Verbindung noch Moleküle ihrer Componenten in der Lösung bestehen. Zu diesem Zwecke wurde zunächst das Verhalten der Molekularverbindungen $2AgCl \cdot 3NH_3$ und $2AgBr \cdot 3NH_3$ untersucht, welche sich beim Lösen des Chlorsilbers und des Bromsilbers in wässerigem Ammoniak bilden. Diese Wahl empfahl sich durch den Umstand, daß von den näheren Bestandtheilen jener Verbindungen, Chlorsilber und Bromsilber, in Wasser unlöslich sind.

1. Wenn man eine Lösung von Chlorsilber in Ammoniakflüs-

1) âtsaṁ°.

sigkeit durch Verdunstung oder Eindampfen zur Krystallisation bringen will, so scheidet sich reines Chlorsilber aus, weil mit Wasser sich Ammoniak verflüchtigt, welches das Chlorsilber in Lösung erhielt. Erwärmt man aber in einer verschlossenen Flasche eine concentrirte Ammoniakflüssigkeit, die mindestens 8,5 % NH_3 enthält, mit einem Ueberschuß von gefälltem Chlorsilber, so geht von diesem mehr in Lösung als bei gewöhnlicher Temperatur und beim Abkühlen scheiden sich farblose durchsichtige Krystalle aus, die leicht durch ihren prismatischen Habitus vom Chlorsilber zu unterscheiden sind. Beim Herausnehmen aus der Lösung trüben sie sich sofort durch ihre ganze Masse, indem sie Ammoniak verlieren und in Chlorsilber übergehen; Wasser geben sie bei der Zersetzung anscheinend nicht ab. Dieses Verhalten verhindert die Messung der Krystalle, deren Form an die Combination (110), (100), (111) des Augits erinnert. Etwas besser ausgebildete Krystalle erhält man, wenn man eine Lösung von Chlorsilber in überschüssigem concentrirtem Ammoniak vorsichtig mit Alkohol überschichtet und längere Zeit ruhig stehen läßt; es ziehen sich dann bis 3 cm lange Säulen von der Grenzfläche der Flüssigkeiten in die untere Lösung hinein. Vermischt man aber die Lösung schnell mit dem Alkohol, so scheiden sich kleine glänzende Schüppchen von derselben Zusammensetzung aus und daneben oder bei ungeeigneten Mischungsverhältnissen ausschließlich findet auch eine Ausscheidung von käsigem Chlorsilber statt. Um die Form der Kryställchen unter dem Mikroskop beobachten zu können, erwies es sich am besten, eine Lösung von Chlorsilber in concentrirtem Ammoniak in ein kleines Uhrgläschen mit flachem Boden zu bringen, welches mit der concaven Seite nach oben auf einen Objectträger aufgekittet war, dann einen Tropfen absoluten Alkohol zuzufügen und das Ganze schnell mit einem Deckglas vollständig zu bedecken. Es bilden sich sofort rhomboidisch begrenzte doppeltbrechende Blättchen, die zwischen gekreuzten Nicols schief gegen die Kanten auslöschen. Zieht man das Deckglas ab, so beginnt sogleich die Zersetzung der Krystalle; es bilden sich lockere Pseudomorphosen von Chlorsilber nach den Blättchen der neuen Substanz, und außerdem scheiden sich aus der Lösung zahlreiche Kryställchen ab, welche durch die einfache Brechung und die octaëdrische Form sich als Chlorsilber erweisen.

2. Da die prismatischen Krystalle aus ihrer Lösung nicht ohne sofort eintretende Zersetzung entfernt werden können, so mußte zur Bestimmung ihrer Zusammensetzung ein indirecter Weg eingeschlagen werden. Es wurden analysirt, einmal die Flüssig-

keit, aus der sich die Krystalle abgeschieden hatten, andererseits ein Gemenge der Krystalle mit soviel Flüssigkeit als nöthig war, um die Zersetzung zu verhindern. Das Verhalten der Krystalle bei ihrer Entfernung aus der Lösung hat ergeben, daß sie nur aus Chlorsilber und Ammoniak bestehen und kein Wasser enthalten. Demnach kann aus dem Gehalt an Wasser in jenem Gemenge und dem Gehalt an Wasser in der Flüssigkeit ermittelt werden, wie viel Flüssigkeit in dem Gemenge vorhanden ist, also auch wie viel von dem gesammten Ammoniak und dem Chlorsilber in der Flüssigkeit gelöst und wie viel in den Krystallen enthalten ist.

Enthält die reine Flüssigkeit:

w g Wasser, s g Chlorsilber, a g Ammoniak

und das Gemenge:

w' g Wasser, s' g Chlorsilber, a' g Ammoniak,

so entsprechen den w' g Wasser in dem Gemenge:

$\frac{s \cdot w'}{w}$ g Chlorsilber und $\frac{a \cdot w'}{w}$ g Ammoniak,

die gelöst sind, und:

$s' - \frac{s \cdot w'}{w}$ g Chlorsilber und $a' - \frac{a \cdot w'}{w}$ g Ammoniak,

die in den Krystallen enthalten sind. Gefunden wurde:

$w = 7{,}5023$, $s = 0{,}6734$, $a = 1{,}8243$,

$w' = 3{,}0328$, $s' = 2{,}8484$, $a' = 1{,}1900$.

Folglich enthalten die Krystalle:

		Molekularverhältniß
$AgCl$	2,5762 g	0,0180 2
NH_3	0,4526 g	0,0266 2,956.

Daraus ergiebt sich die Formel der Krystalle:

$$2AgCl \cdot 3NH_3.$$

Bei einem zweiten Versuche, der sich an eine von Bunge[1]) angegebene indirecte Bestimmungsmethode anlehnt, wurde in der Flüssigkeit vor der Ausscheidung der Krystalle etwas Chlorammonium gelöst, darauf wieder Flüssigkeit für sich und ein Gemenge von Flüssigkeit mit Krystallen auf $AgCl$, NH_3 und NH_4Cl untersucht und aus der Differenz das Wasser bestimmt. Hier gestattete die Bestimmung des Chlorammoniums, welches in die Zusammensetzung der Krystalle nicht eintritt, zu berechnen, wie viel Flüssigkeit mit den Krystallen gemengt ist, also auch wie viel

1) Bunge: Physiolog. und patholog. Chemie. 2. Auflage. S. 219. Vgl. auch Bijlert: Einige Beobachtungen auf kryoskopischem Gebiet. Zeitschr. f. phys. Chemie. 8, 344. 1891.

Ammoniak, Chlorsilber und Wasser jenes Gemenges der Flüssigkeit oder den Krystallen angehört. Enthält die klare Flüssigkeit: w g Wasser, s g Chlorsilber, a g Ammoniak und c g Chlorammonium und das Gemenge:

w' g Wasser, s' g Chlorsilber, a' g Ammoniak und c' g Chlorammonium, so entsprechen die c' g Chlorammonium in dem Gemenge:

$\frac{s \cdot c'}{c}$ g Chlorsilber, $\frac{a \cdot c'}{c}$ g Ammoniak und $\frac{w \cdot c'}{c}$ g Wasser,

welche gelöst in dem Gemenge enthalten waren, und:

$s' - \frac{s \cdot c'}{c}$ g Chlorsilber, $a' - \frac{ac'}{c}$ g Ammoniak und $w' - \frac{wc'}{c}$ g Wasser,

welche im festen Zustande die Krystalle bildeten.

Es wurde gefunden:

$w = 7{,}6492$, $s = 0{,}3789$, $a = 1{,}6207$, $c = 0{,}3512$,
$w' = 5{,}8371$, $s' = 3{,}9153$, $a' = 1{,}8606$, $c' = 0{,}2642$.

Demnach enthalten die Krystalle:

		Molekularverhältniß	
AgCl	3,6303 g	0,02538	2
H_2O	0,0826 g	0,00459	0,361
NH_3	0,6414 g	0,03770	2,971.

Da alle Versuchsfehler der Analyse in der Wasserbestimmung zum Ausdruck kommen, kann der kleine Wassergehalt von 1,9 % vernachlässigt werden. Es führt also auch diese Methode zu demselben Verhältniß $AgCl : NH_3 = 2 : 3$.

Es haben demnach die prismatischen Krystalle, welche sich aus einer Lösung von Chlorsilber in concentrirtem wässerigem Ammoniak ausscheiden, die Zusammensetzung $2AgCl \cdot 3NH_3$.

Diese von mir aus einer Lösung im krystallisirtem Zustande dargestellte Verbindung bildet sich nach H. Rose, Isambert und Horstmann oberhalb 20° durch directe Vereinigung von festem Chlorsilber mit gasförmigem Ammoniak; sie entsteht ferner durch Zersetzung der höheren Verbindungsstufe $AgCl \cdot 3NH_3$ infolge Entziehung von Ammoniak.

3. Chlorsilber löst sich in Wasser erst nach Zusatz von Ammoniak auf. Die Löslichkeit steigt mit dem Ammoniakgehalt und zwar in einem rascheren Verhältniß als dieser, wie sich schon daraus ergiebt, daß sich aus einer gesättigten Lösung von Chlorsilber in Ammoniak durch Verdünnen mit Wasser ein Theil des Chlorsilbers ausscheidet. Noch schärfer folgt dies aus den quantitativen Bestimmungen der Löslichkeit von Chlorsilber in Ammoniak (Tabelle I), wonach sich der Quotient A/S in Spalte 6,

welcher die zur Lösung eines g-Moleküls Chlorsilber erforderlichen g-Moleküle Ammoniak angiebt, mit zunehmender Menge des Ammoniaks vermindert.

Tabelle I.

Löslichkeit von Chlorsilber in wässerigem Ammoniak bei 15°

	Dichte bei 15°	Ein Liter Lösung enthält in g-Molekülen			$\frac{A}{S}$
		NH_3 (A)	AgCl (S)	$2AgCl \cdot 3NH_3$ (D)	
1	1,0015	0,639	0,0348	0,0174	18,3
2	1,0010	1,040	0,0640	0,0320	16,2
3	1,0035	1,223	0,0746	0,0373	16,4
4	1,0033	1,462	0,0976	0,0488	14,7
5	1,0040	1,514	0,1022	0,0511	14,8
6	1,0046	1,784	0,1224	0,0612	14,6
7	1,0053	2,449	0,1870	0,0935	13,1
8	1,0070	2,810	0,2256	0,1128	12,5
9	1,0135	3,608	0,3052	0,1526	11,8
10	1,0145	3,802	0,3348	0,1674	11,3
11	1,0150	3,975	0,3620	0,1810	11,0
12	1,0167	4,273	0,3928	0,1964	10,8
13	1,0225	4,718	0,4726	0,2363	10,0
14	1,0220	5,498	0,5060	0,2530	10,9
15	0,9875	10,603	0,5270	0,2635	20,1

Dieses Verhalten würde man erwarten können, wenn Chlorsilber in dem im Wasser enthaltenen Ammoniak gelöst wäre, ohne mit ihm eine Verbindung einzugehen. Aus den Versuchen 14 und 15 ergiebt sich aber, daß die Löslichkeit des Chlorsilbers mit dem Ammoniakgehalt nicht unbegrenzt progressiv steigt, sondern daß von einer bestimmten Concentration an diese Zunahme eine sehr langsame ist. Während bei Verdoppelung der Concentration des Ammoniaks zwischen den Lösungen 3 und 7 die Menge des gelösten Chlorsilbers um 250 % steigt, wächst sie zwischen den Lösungen 14 und 15 nur um 4 %. Die in Spalte 6 angegebenen Moleküle Ammoniak, welche zur Lösung eines Moleküls Chlorsilber nöthig sind, fallen bis zur Lösung 13 stetig, um dann plötzlich rasch zu steigen. Die Concentration des Ammoniaks, bei welcher diese Aenderung eintritt, ist aber die niedrigste, bei welcher die prismatischen Krystalle sich aus der Lösung ausscheiden. Daß einer Vermehrung des Ammoniakgehaltes über diese Concentration hinaus keine erhebliche Vermehrung des gelösten Chlorsilbers ent-

spricht, ist mit der Annahme unvereinbar, daß das Chlorsilber in dem in der Flüssigkeit enthaltenen Ammoniak gelöst sei. Es hätte, da neben den Krystallen noch festes Chlorsilber in großem Ueberschusse vorhanden war, die Menge desselben in der Lösung bei weiterer Vermehrung des Ammoniakgehaltes unbegrenzt zunehmen müssen.

Wenn aber das in der Flüssigkeit vorhandene Chlorsilber in Form derselben Verbindung $2AgCl \cdot 3NH_3$ darin enthalten ist, welche sich krystallisirt ausscheidet, so kann die Menge dieser Verbindung in der Lösung nicht mehr steigen, sobald die Flüssigkeit mit derselben gesättigt ist, d.h. sobald neben der Flüssigkeit die prismatischen Krystalle vorhanden sind. Jedes bei Vermehrung des Ammoniakgehaltes darüber hinaus gelöste Doppelmolekül Chlorsilber bildet dann in der Lösung die Verbindung $2AgCl \cdot 3NH_3$ und scheidet sich als solche, sobald die Lösung damit gesättigt ist, krystallisirt aus; die Menge des gelösten Chlorsilbers kann also nicht weiter zunehmen. Die gefundenen Thatsachen werden also durch die eben gemachte Annahme erklärt.

In alkoholischem Ammoniak ist Chlorsilber unlöslich und seine Löslichkeit in wässerigem Ammoniak wird durch einen Zusatz von Alkohol erniedrigt. Auch dieses Verhalten ist mit der Annahme unvereinbar, daß Chlorsilber als solches in dem Ammoniak gelöst und Wasser nur ein indifferentes Verdünnungsmittel sei, weil dann Alkohol dieselbe Rolle spielen und Chlorsilber auch von alkoholischem Ammoniak gelöst werden müßte. Daß dem nicht so ist, liegt daran, daß die Verbindung $2AgCl \cdot 3NH_3$, in welche das gelöste Chlorsilber eingetreten ist, in Alkohol unlöslich ist. Dieses Verhalten ergiebt sich auch aus der Ausscheidung jener Verbindung aus wässeriger Lösung durch Alkoholzusatz.

Ebensowenig wie im unverbundenen Zustande kann Chlorsilber in Form einer anderen Verbindungsstufe mit Ammoniak in den Lösungen in erheblicher Menge vorhanden sein. Wäre dies der Fall, so würde die Vermehrung dieser Verbindung bei zunehmendem Ammoniakgehalt nicht durch die Entstehung der prismatischen Krystalle begrenzt werden. Allerdings findet eine kleine Vermehrung des Chlorsilbergehaltes in der Lösung, wie die Versuche 14 und 15 ergeben, auch statt nach Ueberschreitung der Concentration von 5 g-Molekülen NH_3 im Liter, bei welcher sich die Krystalle $2AgCl \cdot 3NH_3$ ausscheiden. Es ist möglich, daß wie im festen Zustande auch in der Lösung sich die Verbindung $AgCl \cdot 3NH_3$ zu bilden beginnt, wenn die Menge des in der Volumeneinheit enthaltenen Ammoniaks eine gewisse Grenze überschreitet und daß

die geringe Zunahme der gelösten Mengen Chlorsilber bei Steigerung des Ammoniakgehaltes auch nach Ausscheidung der Krystalle $2AgCl \cdot 3NH_3$ auf die Bildung von Molekülen $AgCl \cdot 3NH_3$ zurückzuführen ist. Da aber diese Vermehrung nur gering ist, so kann auch in Lösung 15 nur wenig Chlorsilber in Form dieser Verbindungsstufe enthalten sein, und in den Lösungen von geringerem Ammoniakgehalt ist die Menge des in dieser Form vorhandenen Chlorsilbers vollständig zu vernachlässigen.

Es ergiebt sich also, daß in den Lösungen von Chlorsilber in wässerigem Ammoniak bis zu einer Concentration des letzteren von 5 g-Molekülen im Liter das Chlorsilber in Form der Verbindung $2AgCl \cdot 3NH_3$ enthalten ist.

4. In einer Lösung von Chlorsilber in wässerigem Ammoniak entsteht sofort auf Zusatz von ammoniakalischer Bleiacetatlösung ein Niederschlag von Chlorblei, auf Zusatz von ammoniakalischer Jodkaliumlösung ein Niederschlag von Jodsilber und auf Zusatz von Schwefelammoniumlösung ein Niederschlag von Schwefelsilber. Daraus folgt, daß in der Lösung Chlor und Silber als freie Jonen enthalten sind, daß also die in der Lösung vorhandene Verbindung $2AgCl \cdot 3NH_3$ nicht ein complexes Salz sondern eine wirkliche Molekularverbindung ist. Dasselbe ergiebt sich aus den Versuchen von Isambert und Horstmann, wonach das Chlorsilberammoniak in typischer Weise die Erscheinungen zeigt, welche auch für die Verbindungen mit Krystallwasser characteristisch sind. So wie diese gehört auch Chlorsilberammoniak zu den Molekularverbindungen.

Ein Grund von geringerer Bedeutung gegen die Annahme eines complexen Salzes wäre die Schwierigkeit, der Verbindung eine rationelle Formel zu geben; doch mag auch dieser Grund angeführt werden, weil ja der Begriff und der Name Molekularverbindung seinen Ursprung in dem Bestreben hatte, alle mit den Anschauungen der Valenztheorie nicht in Uebereinstimmung zu bringenden Körper von den eigentlichen chemischen Verbindungen auszuschließen.

Da somit erwiesen ist, *daß die beschriebene Verbindung von Chlorsilber mit Ammoniak eine Molekularverbindung und kein complexes Salz ist*, so gewinnt der vorher geführte Nachweis, daß diese Verbindung auch in der Lösung besteht, ein erhöhtes Interesse. Es ist dadurch die Ansicht widerlegt, daß Molekularverbindungen nur im festen Zustande und nicht in der Lösung existiren können.

5. Daß Chlorsilber sich bei der Auflösung mit Ammoniak verbindet, geht auch aus der Bestimmung des Gefrierpunktes

dieser Lösungen hervor. Wäre Chlorsilber unverbunden neben Ammoniak und Wasser in den Lösungen enthalten, so müßte sich der Gefrierpunkt eines wässerigen Ammoniaks durch die Auflösung von Chlorsilber erniedrigen. Die folgenden Bestimmungen (Tabelle II) ergaben aber eine Erhöhung des Gefrierpunktes.

Es wurde eine größere Menge Ammoniaklösung von bestimmten Gehalte hergestellt, in einem Theil derselben reines gefälltes trockenes Chlorsilber gelöst und diese Lösung mit der ursprünglichen Flüssigkeit in verschiedenen Verhältnissen verdünnt. Der Gefrierpunkt der Lösungen mit und ohne Chlorsilber wurde in einem Beckmann'schen Apparate ermittelt, ihr Gehalt an Ammoniak durch Titration, an Chlorsilber durch Eindampfen gewogener Mengen Flüssigkeit und schwaches Glühen des Rückstandes festgestellt.

Tabelle II.

Gefrierpunktserniedrigung der Verbindung $2AgCl.3NH_3$

	100 g Wasser enthalten		Gefrierpunkt	g-Moleküle	
	g-Moleküle NH_3	g-Moleküle AgCl		NH_3 mit AgCl zu $2AgCl \cdot 3NH_3$ verbunden	NH_3, nicht gebunden
1	0,3324	—	—6,700°	—	0,3324
2	0,3324	0,0036	—6,685°	0,0054	0,3270
3	0,3324	0,0071	—6,660°	0,0107	0,3217
4	0,3324	0,0142	—6,570°	0,0213	0,3111

	Erniedrigung des Gefrierpunktes		Erniedrigung durch ein g-Molekül $2AgCl \cdot 3NH_3$ (M)	$i = \frac{M}{18,5}$
	durch freies NH_3	durch $2AgCl \cdot 3NH_3$		
1	6,700°	—	—	—
2	6,591°	0,094°	52°	2,80
3	6,445°	0,215°	60°	3,21
4	6,272°	0,298°	42°	2,27

Die Erhöhung des Gefrierpunktes durch den Zusatz von Chlorsilber tritt in allen Lösungen ein; sie ist um so geringer, je weniger Chlorsilber die Lösungen enthalten. Die molekulare Ge-

frierpunktserniedrigung ist um das zwei- bis dreifache höher als die normale von 18,5 und daraus folgt, daß die Verbindung in der Lösung wenigstens zum Teil zerlegt sein muß. Diese Zerlegung kann aber nicht nach den Componenten AgCl und NH_3 stattgefunden haben, da die Lösungen kein freies AgCl enthalten; sie kann nur eine elektrolytische sein, indem sich die Verbindung in freie Jonen Cl und Ag oder Cl_2 und Ag_2 spaltet, doch so, daß mit jedem Complexe von zwei Atomen Chlor und zwei Atomen Silber, mögen sie nun vereint oder elektrolytisch dissociirt auftreten, immer drei Moleküle NH_3 verbunden sind. Diese Natur der Zerlegung wird auch durch die nachfolgenden Untersuchungen erwiesen.

6. Bringt man die Krystalle von Chlorsilberammoniak in Wasser, so zerfallen sie in unlösliches Chlorsilber und Ammoniak, welches in Lösung geht. Nur in wässerigem Ammoniak von gewisser Concentration findet vollständige Auflösung ohne Abscheidung von Chlorsilber statt. Jene Molekularverbindung bleibt also nur in Gegenwart eines Ueberschusses eines ihrer Componenten bestehen und dieser Ueberschuß muß um so größer sein, je verdünnter die Lösung ist.

Die mit Chlorsilber gesättigte Lösung enthalte in der Volumeneinheit F Moleküle freies (das heißt nicht mit Chlorsilber zu $2AgCl \cdot 3NH_3$ verbundenes) Ammoniak und D Moleküle der Verbindung $2AgCl \cdot 3NH_3$. Nehmen wir zunächst an, daß die an der umkehrbaren Reaktion:

$$2AgCl + 3NH_3 \rightleftarrows (2AgCl \cdot 3NH_3)$$

theilnehmenden Moleküle elektrolytisch nicht dissociirt seien, so würde die Beziehung:

$$\frac{D}{F^3} = \text{const.} \tag{1}$$

gelten, da die wirksame Menge des beim Zerfall der Molekularverbindung entstehenden Chlorsilbers constant ist.

Allein die Zahlen in Spalte 3 der Tabelle III lehren, daß die Werthe von (1) keineswegs constant sind, sondern mit der Verdünnung stetig bis auf das 24-fache wachsen.

Tabelle III.

Löslichkeit von Chlorsilber in wässerigem Ammoniak bei 15°
(Fortsetzung zu Tabelle I, Seite 331).

	$A-3D$ (F)	$1000\cdot\frac{D}{F^3}$	i für $\frac{D'}{F^3}=\frac{0{,}4293}{1000}$	$1000\cdot\frac{D'}{F^3}$ für $i=2{,}27$
1	0,587	86,026	2,308	0,5013
2	0,944	38,040	2,303	0,4806
3	1,111	27,198	2,262	0,4175
4	1,316	21,411	2,294	0,4623
5	1,361	20,269	2,296	0,4640
6	1,601	14,914	2,270	0,4293
7	2,169	9,163	2,292	0,4518
8	2,472	7,467	2,309	0,4673
9	3,150	4,882	2,293	0,4485
10	3,302	4,650	2,333	0,4804
11	3,432	4,478	2,372	0,5108
12	3,684	4,407	2,360	0,4971
13	4,009	3,667	2,487	0,5870
14	4,739	2,377	2,245	0,4150
15	9,813	0,279	0,676	0,0513

Betheiligt sich aber infolge elektrolytischer Dissociation die Verbindung $2\,AgCl\cdot 3\,NH_3$ nicht mit einem Molekül, sondern mit i Molekülen an der umkehrbaren Reaktion, so gilt nach van 't Hoff die Relation:

$$\frac{D'}{F^3}=\text{const.}, \tag{2}$$

da die Dissociation des Ammoniaks vernachlässigt werden kann.

Um zu prüfen, ob die Beziehung (2) Geltung hat, wurde derjenige Werth von i in die Gleichung eingesetzt, welcher sich aus der größten beobachteten Gefrierpunktserhöhung ergiebt, der also durch die Versuchsfehler am wenigsten beeinflußt ist. Dieser Werth von $i=2{,}27$ gilt streng nur für die molekulare Concentration, aus deren Gefrierpunkt er berechnet wurde, also für einen Gehalt der Lösung von 0,0071 Gramm-Molekülen $2\,AgCl\cdot 3\,NH_3$ im Liter. Tragen wir ihn bei der nächstbenachbarten Concentration, also bei Lösung 6 in Tabelle III, ein, so können wir daraus den Werth der Constanten in (2) und daraus wieder die Werthe

von i bei den einzelnen Verdünnungen berechnen. Die Ergebnisse befinden sich in Spalte 4. In Spalte 5 sind die Werthe der Constanten mitgetheilt, die unter der Annahme berechnet wurden, daß i für alle Concentrationen gleich groß ist; aus denselben folgt, daß der Ausdruck (2) nahezu constant bleibt, zumal wenn man in Betracht zieht, daß in (2) nicht die direkten Beobachtungen eingehen, sondern deren zweite bis dritte Potenzen und daß sich demnach bei der Berechnung der Einfluß aller Beobachtungsfehler vervielfältigt. Die Constanz des Ausdruckes (2) gilt aber nur für die ersten 13 Versuche und kann aus den auf S. 332 angeführten Gründen nicht für die Lösungen 14 und 15 gelten, die mit der Molekularverbindung gesättigt sind. Auch die unter der Annahme einer vollständigen Constanz von (2) berechneten Werthe von i weichen nur wenig untereinander und von dem kryoskopisch erhaltenen Werth 2,27 ab.

Hierdurch wird die zuvor gewonnene Auffassung bestätigt, daß in einer Lösung von Chlorsilber in wässerigem Ammoniak das gesamte Chlorsilber in Form der Verbindung $2AgCl \cdot 3NH_3$ enthalten ist und daß diese Verbindung zum Theil elektrolytisch dissociirt ist.

7. Um den Grad der elekrolytischen Dissociation direct festzustellen, wurde das Leitungsvermögen einer Reihe von Lösungen der Molekularverbindung nach dem Verfahren von F. Kohlrausch untersucht. Es wurde eine größere Menge einer Ammoniakflüssigkeit, die 5,1 Gramm-Moleküle NH_3 im Liter enthielt, bereitet, in einem Theil derselben trocknes gefälltes Chlorsilber gelöst und hieraus durch Vermischung mit derselben Ammoniakflüssigkeit eine Reihe von Lösungen hergestellt, deren Silbergehalt nach ganzen Potenzen von 2 fiel. Von dem Leitungsvermögen der einzelnen Lösungen wurde das Leitungsvermögen der reinen Ammoniakflüssigkeit, $L_0 = 1{,}07$, abgezogen und dadurch das Leitungsvermögen der Verbindung $2AgCl \cdot 3NH_3$ erhalten. Das molekulare Leitungsvermögen in unendlicher Verdünnung, $\mu_\infty = 117{,}0$, wurde berechnet, indem der von F. Kohlrausch für Silbernitrat angegebene Grenzwert bei 18° gleich 109 um drei Einheiten — den durchschnittlichen Betrag, um welchen μ_∞ für KCl, $NaCl$, $1/2\,BaCl_2$ höher ist als μ_∞ für KNO_3, $NaNO_3$, $1/2\,Ba(NO_3)_2$ — erhöht und die für Silbernitrat angegebene Temperaturcorrection angebracht wurde. Die Temperatur während der Versuche wurde constant auf 20, 35° erhalten. Die Widerstandscapacität des Gefäßes wurde durch Messung mit einer stark verdünnten Schwefelsäure von bekanntem Gehalt nach den Tabellen von F. Kohlrausch ermittelt.

Tabelle IV.

Temperatur = 20,35°; $L_0 = 1{,}07$; $\mu_\infty = 117{,}0$

	Anzahl Liter, die eine g-Molekel $\frac{1}{3}(2\,AgCl \cdot 3\,NH_3)$ enthalten (v)	Leitungsvermögen der Lösung (L)	$L - L_0$	Molekulares Leitungsvermögen $(L - L_0)v = \mu_v$
1	4,265	15,28	14,21	60,6
2	8,530	9,22	8,15	69,5
3	17,060	5,37	4,30	73,4
4	34,120	3,56	2,49	84,9
5	68,240	2,41	1,34	91,4
6	136,480	1,75	0,68	92,8
7	545,920	1,25	0,18	98,2

	$\mu_v/\mu_\infty = \alpha$	$i = 3\alpha + 1$	$i = 2\alpha + 1$
1	0,52	2,56	2,04
2	0,59	2,77	2,18
3	0,63	2,99	2,26
4	0,72	3,16	2,44
5	0,78	3,34	2,56
6	0,80	3,40	2,60
7	0,84	3,52	2,68

Aus den in Spalte 6 unter α mitgetheilten Werthen des Grades der elektrolytischen Dissociation ergeben sich für i zwei verschiedene Werthe, jenachdem das Chlorsilberammoniak sich wie ein quaternärer Elektrolyt nach der Formel $(Ag, Ag, Cl, Cl) \cdot 3\,NH_3$ oder wie ein ternärer nach den Formeln $(Ag_2, Cl, Cl) \cdot 3\,NH_3$ oder $(Ag, Ag, Cl_2) \cdot 3\,NH_3$ spaltet. Der gefundene Werth von $i = 2{,}27$ liegt bei den Concentrationen, für welche er nach den Tabellen II und III Geltung hat, $v = 2{,}1$ bis $v = 28{,}8$, zwischen den Werthen der Spalte 7 und 8, aber näher den letzteren, sodaß angenommen werden kann, daß das Chlorsilberammoniak zum größten Theil sich wie ein ternärer Elektrolyt in Jonen spaltet.

Wenn das Chlorsilberammoniak wie ein quaternärer Elektrolyt zerfiele, also gleich viel Clor- und Silberionen bildete, so müßte ein Zusatz aequivalenter Mengen Chlorammonium oder Silbernitrat

die Löslichkeit gleich stark herabdrücken[1]), da beide Salze in aequivalenten Lösungen fast gleich stark dissociirt sind, und also die Menge der als Chlorammonium zugefügten Chlorionen gleich der als Silbernitrat zugefügten Silberionen ist. In den zur Prüfung dieses Verhaltens angestellten Versuchen wurden zu 20 ccm einer bei 15° mit den Krystallen des Doppelsalzes gesättigten Lösung trocknes, reines Chlorammonium, resp. Silbernitrat in wechselnden Mengen zugefügt. Es wurden die Salze durch Schütteln und ganz gelindes Erwärmen gelöst, die Lösungen auf 15° abgekühlt, 10 ccm klare Flüssigkeit von den ausgeschiedenen Krystallen abpipettirt, in einem Wägegläschen gewogen und auf Ammoniak und Chlorsilber wie früher untersucht; im Filtrat von letzterem wurden Chlorammonium resp. Silbernitrat durch Fällung mit Silberlösung oder Salzsäure gewichtsanalytisch bestimmt.

Tabelle V.

Erniedrigung der Löslichkeit von Chlorsilberammoniak.

A. Zugefügtes Salz: NH_4Cl

	NH_4Cl g-Moleküle	Gehalt in 10 ccm Lösung		Erniedrigung der Löslichkeit in %
		NH_3 Gramm	AgCl Gramm	
1	—	1,2843	0,7310	—
2	0,0660	1,2843	0,6886	5,8
3	0,1426	1,2843	0,6620	9,4
4	0,2217	1,2843	0,6308	13,9
5	0,5518	1,2843	0,5230	28,4

B. Zugefügtes Salz: $AgNO_3$

	$AgNO_3$ g-Moleküle	Gehalt in 10 ccm Lösung		Erniedrigung der Löslichkeit in %
		NH_3 Gramm	AgCl Gramm	
1	0	1,2843	0,7310	—
2	0,1226	1,2843	0,7147	2,2
3	0,2937	1,2843	0,6736	7,8
4	0,4486	1,2843	0,6129	16,3

1) Vgl. W. Nernst: Die gegenseitige Beeinflussung der Löslichkeit von Salzen. Zeitschr. f. phys. Chem. 4, 372. 1889.

Es wird also durch den Zusatz der Chlorionen eine weit größere Verminderung der Löslichkeit des Chlorsilberammoniaks herbeigeführt, als durch den Zusatz von gleich viel Silberionen. Daraus folgt, daß in der Lösung des Chlorsilberammoniaks mehr Chlorionen enthalten sind als Silberionen. Die elektrolytische Dissociation kann also nur zum geringeren Theil nach dem Schema $(Cl, Cl, Ag, Ag) \cdot 3NH_3$ erfolgen; sie findet hauptsächlich nach dem Schema $(Cl, Cl, Ag_2) \cdot 3NH_3$ statt. *Daraus ergiebt sich, daß auch die aus dem Leitungsvermögen erhaltenen Werthe der elektrolytischen Dissociation mit den Werthen von i, die auf den zuvor beschriebenen Wegen erhalten wurden, in Uebereinstimmung stehen.*

Der Nachweis, daß eine Molekularverbindung der elektrolytischen Dissociation unterliegt, führt zu der Nothwendigkeit, die Existenz von Molekularverbindungen der Jonen anzunehmen. Die Bildung der Molekularverbindung $2AgCl \cdot 3NH_3$ erfolgt immer dann, wenn entweder ein unzerlegtes Doppelmolekül Ag_2Cl_2 mit 3 Molekülen NH_3 zusammentrifft oder wenn von den Jonen desselben eines mit drei, oder drei mit je einem oder eines mit zwei, zwei mit je einem Molekül sich begegnen. Da die Constanz des Ausdrucks (2) dieselben Werthe für i ergiebt, wie die kryoskopischen und die elektrolytische Untersuchung, so folgt, daß jedes der Jonen des Chlorsilbers sich an der Bindung des Ammoniaks gleich stark betheiligt, daß also das letztere nicht von einem bestimmten Atom, etwa durch eine Residualaffinität oder freie Valenzen, festgehalten wird, sondern durch den Complex aller Jonen. Der Name „Molekularverbindung" erscheint also für das Chlorsilberammoniak gerechtfertigt.

8. Eine krystallisirte Verbindung des Bromsilbers mit Ammoniak darzustellen, gelang wegen der geringen Löslichkeit des Bromsilbers auch bei Anwendung sehr concentrirter Ammoniakflüssigkeit nicht.

Tabelle VI.

Löslichkeit von Bromsilber in wässerigem Ammoniak bei 15,5°

	Dichte der Lösungen	Ein Liter enthält Gramm-Moleküle		NH_3 nicht als $2AgBr \cdot 3NH_3$ gebunden (F)	$\frac{A}{D}$	$107 \cdot \frac{D^{2,56}}{F^3}$
		NH_3 (A)	Ag_2Br_2 (D)			
1	0,9932	1,085	0,0011	1,081	986	1,6295
2	0,9853	2,365	0,0031	2,356	700	1,6369
3	0,9793	3,410	0,0050	3,395	682	1,6112
4	0,9720	4,590	0,0074	4,568	620	1,6045
5	0,9655	5,725	0,0101	5,695	567	1,6722

Die Löslichkeit des Bromsilbers in wässerigem Ammoniak, welche ganz ebenso wie beim Chlorsilber bestimmt wurde, wächst mit zunehmendem Ammoniakgehalt und zwar in einem rascheren Verhältniß als dieser. Es ergiebt sich dies aus den unter A/D in Spalte 6 der Tabelle VI mitgetheilten Werthen der Moleküle Ammoniak, die in den einzelnen Versuchen zur Lösung eines Doppelmoleküls Bromsilber erforderlich sind. Da diese Mengen in ähnlicher Weise wie beim Chlorsilber mit zunehmender Concentration rasch sinken, ist es wahrscheinlich, daß das Bromsilber eine dem Chlorsilberammoniak analoge Verbindung $2AgBr \cdot 3NH_3$ bildet. Für die Zersetzung dieser Verbindung in Ammoniak und Bromsilber ergiebt sich dann eine Relation $D'/F'^3 = \text{const.}$, analog der früher auf S. 336 gegebenen Formel. Da i in den einzelnen Lösungen beim Chlorsilber nur wenig variirt, so können wir es auch hier in zwei auf einander folgenden Lösungen mit den Werthen D, F und D', F' für nahezu gleich annehmen und erhalten dann die Gleichung: $i = \frac{3(\log F - \log F')}{\log D - \log D'}$. Aus Lösung 2 und 3 ergiebt sich $i = 2{,}26$ und daraus folgen für die Constante in der obigen Relation die in der letzten Spalte der Tabelle VI mitgetheilten Werthe. Da diese Werthe sehr nahe constant sind, so muß *das Bromsilber in seinen Lösungen in wässerigem Ammoniak in Form der Molekularverbindung $2AgBr \cdot 3NH_3$ enthalten und diese zum Theil elektrolytisch dissociirt sein.* Der Grad dieser Dissociation, ausgedrückt durch die Zahl i, ist fast genau derselbe wie beim Chlorsilberammoniak (2,26 an Stelle von 2,27).

Clausthal, Februar 1892.

Universität.

Aus den Einkünften der Petsche-Stiftung setzt die medicinische Facultät einen Preis von

Einhundert und sechzig Mark

für die Lösung der folgenden Aufgabe aus:

„Hygienische Beurtheilung der gebräuchlichen Arten von Petroleumlampen auf Grund eigener Untersuchungen.“

Zur Bewerbung werden nur Studirende der Medicin zugelas-

sen, welche in diesem oder im folgenden Semester unserer Universität angehören.

Die Preisarbeiten müssen mit einem Motto versehen und in Begleitung eines versiegelten Couverts, welches außen dasselbe Motto trägt und einen Zettel mit dem Namen des Verfassers einschließt, spätestens bis zum 1. Januar 1893 bei dem Decan der medicinischen Facultät eingereicht werden.

Die medicinische Fakultät.

Preisstiftung der Wittwe Petsche geb. Labarre.

Gemäß den Statuten der genannten unter dem 10. März 1873 genehmigten Stiftung schreibt die philosophische Fakultät folgende Preisaufgabe aus.

> „Es sollen der Inhalt und die Absicht der beiden Dialoge Hippias, die unter den Werken Platons überliefert sind, untersucht werden, um festzustellen, in welchem Verhältniß beide zu einander stehen, und ob beide oder einer von beiden von Platon verfaßt sein können."

Der Preis „160 Mk." kann nur einer Arbeit zuerkannt werden, deren Verfasser in diesem oder dem folgenden Semester unserer Universität als Studirender angehört. Die Preisarbeiten müssen spätestens am 1. Januar 1893 dem Dekan der philosophischen Fakultät übergeben werden, ohne Namensunterschrift, jedoch mit einem versiegelten den Namen des Verfassers enthaltenden Zettel. Arbeit und Zettel müssen ein gleichlautendes Motto tragen.

In der ersten Woche des März 1893 wird der Erfolg der Preisbewerbung durch Anschlag am schwarzen Brett und durch die „Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Universität" bekannt gemacht. Der Verfasser der Arbeit, welcher der Preis zuerkannt ist, hat sich bei dem Dekan zu melden und von ihm den Preis in Empfang zu nehmen.

Die philosophische Fakultät.

d. z. Dekan

Riecke.

Preisaufgaben
der
Wedekindschen Preisstiftung
für Deutsche Geschichte.

Wiederholt aus Nr. 4 der Nachrichten vom Jahr 1887 S. 69 ff.

Der Verwaltungsrath der Wedekindschen Preisstiftung für Deutsche Geschichte macht hierdurch die Aufgaben bekannt, welche von ihm für den fünften Verwaltungszeitraum, vom 14. März 1886 bis zum 14. März 1896, nach den Ordnungen der Stiftung (§ 20) gestellt werden.

Für den ersten Preis

wiederholt der Verwaltungsrath die für den vorigen Verwaltungszeitraum gestellte Aufgabe: er verlangt eine allen Anforderungen der Wissenschaft entsprechende Ausgabe der von dem Mainzer **Eberhard Windeck** verfaßten **Denkwürdigkeiten über Leben und Zeit Kaiser Sigismunds.**

Es gilt den völlig werthlosen und unbrauchbaren Abdruck bei Mencken durch eine nach Seite der Sprache wie des Inhalts gleich tüchtige Ausgabe zu ersetzen.

Nach den älteren Vorarbeiten von Dümgé, Mone, Aschbach, Droysen hat neuerdings v. Hagen in der Einleitung zu seiner Uebersetzung (Geschichtschreiber der deutschen Vorzeit, Lief. 79. Leipzig 1886) über das Verhältniß von dreien der wichtigsten Handschriften (Gotha, Cheltenham, Hannover) zu einander gehandelt und danach zwei von dem Verfasser selbst herrührende Redactionen unterschieden, auch die Annahme abgewiesen, daß die Handschrift zu Cheltenham ein Original sei. Für den Bearbeiter ist die Heranziehung der anderen bekannten und von v. Hagen S. VII, Anm. 2 aufgeführten Hdsch. schon deßhalb erforderlich, um die Richtigkeit der Aufstellungen v. Hagen's zu prüfen und festzustellen, ob etwa noch mehr als zwei Ausgaben des Werkes vorliegen.

Von den drei im Archiv III, 429 verzeichneten Vaticanischen Hdsch. wird der Verwaltungsrath demnächst Beschreibungen anfertigen lassen, welche ihre Classificirung ermöglichen. Diese Beschreibungen sollen dem Bearbeiter durch Vermittelung der Ver-

waltung der Kgl. Universitätsbibliothek zur Verfügung stehen. Von der Heranziehung dieser drei Hdsch. zur Textconstitution glaubt der Verwaltungsrath im übrigen den Bearbeiter befreien zu sollen [1]).

Bei der Bearbeitung des Textes wird es vor allem darauf ankommen, daß die von dem Verfasser herrührenden Unterschiede der verschiedenen Redactionen klar und übersichtlich zur Erscheinung kommen, davon auch äußerlich dasjenige geschieden und gekennzeichnet werde, was etwa fremder Ueberarbeitung seinen Ursprung verdankt. Die originalen Rubriken und Capitelüberschriften sind in die Ausgabe aufzunehmen.

Die Urkunden und Aktenstücke aller Art, welche dem Werke zahlreich eingefügt sind, erfordern genaue Untersuchung in Bezug auf Herkunft, Wiedergabe und anderweitige Benutzung. Sind von denselben abweichende Texte oder die Originale bekannt, so ist darauf in den Anmerkungen hinzuweisen, geeigneten Falls der abweichende Text zum Abdruck in der Anmerkung zu bringen. Desgleichen ist wenigstens annäherungsweise der Versuch zu machen für die rein erzählenden Theile Ursprung oder Quelle beizubringen, namentlich in Bezug auf An- und Abwesenheit des Verfassers. Es darf dem Text an Erläuterung in sprachlicher und sachlicher Hinsicht nicht fehlen.

Die Einleitung soll sowohl die bei der Untersuchung und Herstellung des Textes befolgte Methode klarlegen, als auch eine eingehende Erörterung über die Lebensschicksale des Verfassers, die Beziehungen zu seiner Vaterstadt, seine Reisen, sein Verhältniß zum Kaiser und anderen namhaften Zeitgenossen, seine übrigen Werke in Prosa und Dichtung geben.

Die sprachliche Behandlung des Textes hat sich, falls nicht etwa eine Originalhandschrift auftauchen sollte, nach den von Weizsäcker im I. Bande der Reichstagsakten für die Vereinfachung der Schreibung spätmittelalterlicher deutscher Texte aufgestellten Grundsätzen zu richten.

Der Ausgabe ist ein Wortverzeichniß entsprechend demjenigen des 1. Bandes der Mainzer Chroniken (Städtechroniken Bd. XVII), sowie ein ungetrenntes Verzeichniß der Personen- und Ortsnamen beizufügen.

Von der Cheltenhamer Handschrift befindet sich eine genaue Abschrift auf der Kgl. Universitätsbibliothek, welche bereitwilligst von der Bibliotheksverwaltung zur Benutzung ausgeliehen wird.

---

1) Vgl. den Bericht über diese Hss. in den Nachrichten 1888 S. 11 ff.

Für den zweiten Preis

schreibt der Verwaltungsrath

eine Geschichte des Herzogthums Schwaben vom Beginn des 10. bis in die zweite Hälfte des 13. Jahrhunderts

aus.

Nach einem einleitenden Rückblicke auf die karolingische Zeit ist der Schwerpunkt der Arbeit in die Verfassungsgeschichte des bezeichneten Zeitraums zu legen, da die politische Geschichte Schwabens zur Genüge behandelt worden ist. Das schwäbische Herzogthum ist in seiner Entwicklung bis zur Auflösung zu verfolgen, sein Verhältniß zu der königlichen Gewalt einerseits wie zu den Bisthümern, Grafschaften, Herrschaften und Städten andererseits darzulegen. Nach der gründlichen und erschöpfenden Untersuchung des Einzelnen erwartet der Verwaltungsrath eine zusammenfassende Darstellung der Ergebnisse der Untersuchung. Neben den Nachrichten der Geschichtschreiber hat der Bearbeiter dem reichen Urkundenmaterial eingehendste Aufmerksamkeit zu widmen und es nach allen Richtungen für den bezeichneten Zweck auszubeuten. Als Beilage der Arbeit wünscht der Verwaltungsrath Regesten der Urkunden, an welchen die Herzöge von Schwaben in irgend einer Eigenschaft betheiligt sind oder in welchen sie Erwähnung finden.

In Beziehung auf die Bewerbung um diese Preise, die Ertheilung des dritten Preises und die Rechte der Preisgewinnenden wird aus den Ordnungen der Stiftung Folgendes wiederholt:

1. **Ueber die zwei ersten Preise.** Die Arbeiten können in deutscher oder lateinischer Sprache abgefaßt sein.

Jeder dieser Preise beträgt 1000 Thaler in Gold (3300 Reichsmark) und muß jedesmal ganz, oder kann gar nicht zuerkannt werden.

2. **Ueber den dritten Preis.** Für den dritten Preis wird keine bestimmte Aufgabe ausgeschrieben, sondern die Wahl des Stoffes bleibt den Bewerbern nach Maßgabe der folgenden Bestimmungen überlassen.

Vorzugsweise verlangt der Stifter für denselben ein deutsch geschriebenes Geschichtsbuch, für welches sorgfältige und geprüfte Zusammenstellung der Thatsachen zur ersten, und Kunst der Darstellung zur zweiten Hauptbedingung gemacht wird. Es ist aber damit nicht bloß eine gut geschriebene historische Abhandlung,

sondern ein umfassendes historisches Werk gemeint. Speciallandesgeschichten sind nicht ausgeschlossen, doch werden vorzugsweise nur diejenigen der größern (15) deutschen Staaten berücksichtigt.

Zur Erlangung des Preises sind die zu diesem Zwecke handschriftlich eingeschickten Arbeiten und die von dem Einsendungstage des vorigen Verwaltungszeitraums bis zu demselben Tage des laufenden Zeitraums (dem 14. März des neunten Jahres) gedruckt erschienenen Werke dieser Art gleichmäßig berechtigt. Dabei findet indessen der Unterschied statt, daß die ersteren, sofern sie in das Eigenthum der Stiftung übergehen, den vollen Preis von 1000 Thalern in Gold, die bereits gedruckten aber, welche Eigenthum des Verfassers bleiben, oder über welche als sein Eigenthum er bereits verfügt hat, die Hälfte des Preises mit 500 Thalern Gold empfangen.

Wenn keine preiswürdigen Schriften der bezeichneten Art vorhanden sind, so darf der dritte Preis angewendet werden, um die Verfasser solcher Schriften zu belohnen, welche durch Entdeckung und zweckmäßige Bearbeitung unbekannter oder unbenutzter historischer Quellen, Denkmäler und Urkundensammlungen sich um die deutsche Geschichte verdient gemacht haben. Solchen Schriften darf aber nur die Hälfte des Preises zuerkannt werden.

Es steht Jedem frei, für diesen zweiten Fall Werke der bezeichneten Art auch handschriftlich einzusenden. Mit denselben sind aber ebenfalls alle gleichartigen Werke, welche vor dem Einsendungstage des laufenden Zeitraums gedruckt erschienen sind, für diesen Preis gleich berechtigt. Wird ein handschriftliches Werk gekrönt, so erhält dasselbe einen Preis von 500 Thalern in Gold; gedruckt erschienenen Schriften können nach dem Grade ihrer Bedeutung Preise von 250 Thlr. oder 500 Thlr. Gold zuerkannt werden.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich von selbst, daß der dritte Preis auch Mehreren zugleich zu Theil werden kann.

3. **Rechte der Erben der gekrönten Schriftsteller.** Sämmtliche Preise fallen, wenn die Verfasser der Preisschriften bereits gestorben sein sollten, deren Erben zu. Der dritte Preis kann auch gedruckten Schriften zuerkannt werden, deren Verfasser schon gestorben sind, und fällt alsdann den Erben derselben zu.

4. **Form der Preisschriften und ihrer Einsendung.** Bei den handschriftlichen Werken, welche sich um die beiden ersten Preise bewerben, müssen alle äußeren Zeichen vermieden werden, an welchen die Verfasser erkannt werden können. Wird ein Verfasser durch eigene Schuld erkannt, so ist seine Schrift zur Preis-

bewerbung nicht mehr zulässig. Daher wird ein Jeder, der nicht gewiß sein kann, daß seine Handschrift den Preisrichtern unbekannt ist, wohlthun, sein Werk von fremder Hand abschreiben zu lassen. Jede Schrift ist mit einem Sinnspruche zu versehen, und es ist derselben ein versiegelter Zettel beizulegen, auf dessen Außenseite derselbe Sinnspruch sich findet, während inwendig Name, Stand und Wohnort des Verfassers angegeben sind.

Die handschriftlichen Werke, welche sich um den dritten Preis bewerben, können mit dem Namen des Verfassers versehen oder ohne denselben eingesandt werden.

Alle diese Schriften müssen im Laufe des neunten Jahres, vor dem 14. März 1895, dem Director zugesendet sein, welcher auf Verlangen an die Vermittler der Uebersendung Empfangsbescheinigungen auszustellen hat.

5. **Ueber Zulässigkeit zur Preisbewerbung.** Die Mitglieder der Königlichen Societät, welche nicht zum Preisgerichte gehören, dürfen sich wie jeder Andere um alle Preise bewerben. Dagegen leisten die Mitglieder des Preisgerichts auf jede Preisbewerbung Verzicht.

6. **Verkündigung der Preise.** An dem 14. März, mit welchem der neue Verwaltungszeitraum beginnt, werden in einer Sitzung der Societät die Berichte über die Preisarbeiten vorgetragen, die Zettel, welche zu den gekrönten Schriften gehören, eröffnet, und die Namen der Sieger verkündet, die übrigen Zettel aber verbrannt. Jene Berichte werden in den Nachrichten über die Königliche Societät, dem Beiblatte der Göttingenschen gelehrten Anzeigen, abgedruckt. Die Verfasser der gekrönten Schriften oder deren Erben werden noch besonders durch den Director von den ihnen zugefallenen Preisen benachrichtigt, und können dieselben bei dem letzteren gegen Quittung sogleich in Empfang nehmen.

7. **Zurückforderung der nicht gekrönten Schriften.** Die Verfasser der nicht gekrönten Schriften können dieselben unter Angabe ihres Sinnspruches und Einsendung des etwa erhaltenen Empfangsscheines innerhalb eines halben Jahres zurückfordern oder zurückfordern lassen. Sofern sich innerhalb dieses halben Jahres kein Anstand ergiebt, werden dieselben am 14. October von dem Director den zur Empfangnahme bezeichneten Personen portofrei zugesendet. Nach Ablauf dieser Frist ist das Recht zur Zurückforderung erloschen.

8. **Druck der Preisschriften.** Die handschriftlichen Werke, welche den Preis erhalten haben, gehen in das Eigenthum der Stiftung für diejenige Zeit über, in welcher dasselbe den Ver-

fassern und deren Erben gesetzlich zustehen würde. Der Verwaltungsrath wird dieselben einem Verleger gegen einen Ehrensold überlassen oder, wenn sich ein solcher nicht findet, auf Kosten der Stiftung drucken lassen, und in diesem letzteren Falle den Vertrieb einer zuverlässigen und thätigen Buchhandlung übertragen. Die Aufsicht über Verlag und Verkauf führt der Director.

Der Ertrag der ersten Auflage, welche ausschließlich der Freiexemplare höchstens 1000 Exemplare stark sein darf, fällt dem verfügbaren Capitale zu, da der Verfasser den erhaltenen Preis als sein Honorar zu betrachten hat. Wenn indessen jener Ertrag ungewöhnlich groß ist, d. h. wenn derselbe die Druckkosten um das Doppelte übersteigt, so wird die Königliche Societät auf den Vortrag des Verwaltungsrathes erwägen, ob dem Verfasser nicht eine außerordentliche Vergeltung zuzubilligen sei.

Findet die Königliche Societät fernere Auflagen erforderlich, so wird sie den Verfasser oder, falls derselbe nicht mehr leben sollte, einen andern dazu geeigneten Gelehrten zur Bearbeitung derselben veranlassen. Der reine Ertrag der neuen Auflagen soll alsdann zu außerordentlichen Bewilligungen für den Verfasser, oder, falls derselbe verstorben ist, für dessen Erben, und den neuen Bearbeiter nach einem von der Königlichen Societät festzustellenden Verhältnisse bestimmt werden.

9. **Bemerkung auf dem Titel derselben.** Jede von der Stiftung gekrönte und herausgegebene Schrift wird auf dem Titel die Bemerkung haben:

> Von der Königlichen Societät der Wissenschaften in Göttingen mit einem Wedekindschen Preise gekrönt und herausgegeben.

10. **Freiexemplare.** Von den Preisschriften, welche die Stiftung herausgiebt, erhalten die Verfasser je zehn Freiexemplare.

Göttingen, den 28. Mai 1892.

Der Verwaltungsrath der Wedekindschen Preisstiftung.

Inhalt von No. 9.

Wilhelm Hallwachs, Ueber die Lichtgeschwindigkeit in verdünnten Lösungen. — *F. Klein*, Ueber Realitätsverhältnisse im Gebiete der Abelschen Functionen. — *Leo Meyer*, Etymologische Mittheilungen. — *F. Kielhorn*, Malayagiri's Samskrit Grammatik. — *G. Bodländer*, Das Verhalten von Molekularverbindungen bei der Auflösung. — Petsche Stiftung. — Preisstiftung der Wittwe Petsche geb. Labarre. — Preisaufgaben der Wedekindschen Preisstiftung für Deutsche Geschichte.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Stauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

22. Juni. **№ 10.** 1892.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 28. Mai 1892.

Wagner: Die Kopien der Weltkarte des Museum Borgia (XV. Jahrh.).

Weiland: Die vaticanische Handschrift der Chronik des Mathias von Neuenburg. (Erscheint in den Abhandlungen Bd. 38).

Liebisch legt eine kurze Note des Herrn Privatdocenten Dr. **Hermann Traube** in Berlin vor: „Ueber die Krystallformen optisch-einaxiger Substanzen, deren Lösungen ein optisches Dehnungsvermögen besitzen. I."

Voigt legt einen Aufsatz des Herrn Privatdocenten Dr. **Drude** vor: „In wie weit genügen die bisherigen Lichttheorien den Anforderungen der praktischen Physik."

Die Kopien der Weltkarte des Museum Borgia (XV. Jahrh.).

Von

Hermann Wagner.

Im vergangenen Jahre hat A. E. von Nordenskiöld, den wir jetzt die Geschichte kartographischer Denkmale mit ähnlichem Eifer verfolgen sehen, wie einst den Vicomte von Santarem, zum ersten Male wieder seit einem Menschenalter auf die interessante Weltkarte aufmerksam gemacht, welche aus der ersten Hälfte des XV. Jahrh. stammend als gravierte, mit farbigem Schmelzwerke verzierte Metallplatte von fast $^2/_3$ Meter Durchmesser im J. 1794 von dem kunstsinnigen Kardinal Stephan Borgia sei-

nem in Velletri begründeten Museum einverleibt ward. Der schwedische Forscher hatte jüngst aus Venedig eine Kopie der Karte in Originalgröße erworben, in der er einen indirekten Abdruck der Tafel „aus der Zeit der Entstehung" der letztern erkennen zu müssen glaubte. Da bisher die Karten aus der Bologneser Ausgabe des Ptolemäus von 1472 als die ältesten gedruckten Karten galten, so würde hier nach Nordenskiölds Meinung ein noch beträchtlich älteres Dokument für in Kupfer gestochene und alsdann gedruckte Karten vorliegen, die gegebenen Falles noch mehrere Jahrzehnte hinter die genannten zurückreichen würden.

Nordenskiöld begleitete die Mitteilung[1]) über seinen Fund mit einem Lichtdruck der Weltkarte in etwas verkleinertem Maßstabe (Durchmesser ca. 45 Cent., während die kreisrunde Gravierung der Originaltafel 63 Cent. umfaßt), weil er der Ansicht war, daß außer einer ziemlich unvollkommenen und skizzenhaften Wiedergabe der Karte durch Seroux d'Agincourt von 1823[2]), alle übrigen Kopien verloren gegangen oder derart in Privatsammlungen vergraben seien, daß selbst die Kunde ihrer Existenz nicht mehr an das Ohr der Gelehrten gelangt sei. Ihm selbst sei es wenigstens[3]), trotzdem er sich nun seit einer Reihe von Jahren mit diesen historischen Dokumenten befasse, bisher nicht gelungen irgend eine anderweitige Kopie zu Gesicht zu bekommen, auch von ihrem Verbleib habe er keine sichere Nachricht erhalten können, bis auf die indirekte Mitteilung, nach welcher M. Hamy bei Gelegenheit des internationalen geographischen Kongresses zu Paris 1889 eine Kopie der Karte Borgia ausgestellt habe.

Unter diesen Umständen ist der Nachweis der Existenz einer größern Anzahl trefflicher Kopien hier in Göttingen gewiß nicht ohne Interesse, wenn auch begreiflicher Weise nicht von solchem, wie sie die Wiederauffindung des Originals der Tafel im Museum Borgia durch W. Ruge (Mai 1891) in Anspruch nimmt. Auch über den Verbleib dieses Kunstwerks wußte man nichts Näheres, nachdem es nach dem Tode des Kardinals in das Archiv der Propaganda gekommen war. Die Italiener selbst, die in den „Studj bibliografici e biografici sulla storia

1) „Ymer", Tidskr. utg. af svenska sällskapet f. Antrop. och Geogr. Stockholm XI. 1891 p. 83—92: Om ett aftryck från XV:e seklet af den i metall graverade världskarta, som förvarats i Kardinal Stephan Borgias museum i Velletri.

2) Vielleicht schon von 1811, s. unten S. 354.

3) A. a. O. p. 86.

della Geografia in Italia", welche zu Rom 1875 durch die italienische geogr. Gesellschaft herausgegeben wurden, um eine möglichst vollständige Uebersicht über den in den italienischen Bibliotheken ruhenden Schatz alter Karten zu liefern, die Weltkarte Borgia überhaupt nicht erwähnen, konnten darüber keine Auskunft geben.

Die Untersuchung der Frage, welche Verkettung von Umständen es mit sich brachte, daß die hiesigen Kopien später so gänzlich in Vergessenheit geraten konnten, führte dann weiter zur Erkenntnis, daß die Eigenart der Publikationsweise wichtiger Quellenwerke auf dem Gebiete der Geschichte der Geographie Schuld ist, daß noch andere Reproduktionen der Weltkarte im Kreise der Geographen und selbst derer unbekannt geblieben sind, die sich mit ihr (seit 1853) speziell beschäftigt haben. So ist das Vorhandensein einer Kopie in der Größe des Originals in Santarem's großem Atlas zur Kosmographie, wie einst Lelewel (1857) und den Verfassern der Studj bibliografici (1875), so jetzt Herrn von Nordenskiöld und auch Dr. W. Ruge entgangen. Somit darf ich meiner Mitteilung wohl eine kleine Ergänzung nach der litterarhistorischen Seite der Karte Borgia hinzufügen, nachdem unser berühmtes Ehrenmitglied die Nachforschung nach den verschwundenen Kopien in dankenswertester Weise angeregt hat.

Mit der Veröffentlichung Nordenskiölds tritt die litterarische Geschichte der Weltkarte Borgia bereits in ihr drittes Stadium.

1. Die älteste Periode umfaßt die Jahre von der Auffindung der ehernen Tafel durch den Kunsthistoriker Seroux d'Agincourt (s. u.) bei einem italienischen Antiquar i. J. 1794 oder, wenn man lieber will, von der Erwerbung des Originals durch den Kardinal Borgia für sein Museum zu Velletri im gleichen Jahre bis zur ersten wissenschaftlichen Erläuterung derselben durch A. H. Heeren i. J. 1808 oder zur Publikation der Karte durch Seroux d'Agincourt (1811).

Aus der Korrespondenz des Kardinals Borgia mit dem Nürnberger Historiker Ch. Th. v. Murr (10. Dez. 1794 und 31. Jan. 1795) wissen wir[1]), welchen Wert der erstere auf diese Rarität seines berühmten Museums legte, im übrigen erfahren wir über

1) Hist. diplom. du Chev. Port. M. Behaim. par Ch. Th. de Murr, III ed. trad. p. J. Jansen. Strasb. et Paris 1802. p. 27—28. Die zweite, deutsche Ausgabe des Werkes (Gotha 1801) enthält die Briefe Borgias nicht.

das Kunstwerk an besagter Stelle nur kurze Notizen. Nach Santarem's Angabe[1]) sollen ferner die Italiener Abbé Fualdo und Simone Stratiaco die Tafel besprochen haben. Der letztere, ein Veroneser Altertumsforscher, stand allerdings mit Borgia in näherer Beziehung, jedoch habe ich die Aeußerungen der beiden Genannten über unsere Karte nicht aufzufinden vermocht. Kardinal Borgia war im J. 1793 von unserer Gesellschaft der Wissenschaften zum Ehrenmitglied ernannt worden[2]) und unterhielt mit Heyne und Heeren Beziehungen. Kurz vor seinem Tode 1804 sandte er an Heeren Kopien der fraglichen Karte, welche der Neffe des Kardinals Camillo Borgia, jedenfalls derselbe, der (geb. 1774) nachher unter Joachim Murat diente[3]), im Jahre 1797 kunstvoll hatte herstellen lassen. Auf welche Weise dies geschehen ist, entzieht sich unserer Kunde. Ob durch Ueberziehung der gravierten Tafel mit einer elastischen Masse, um einen alsdann in den erhabenen Teilen zu schwärzenden (negativen) Abdruck zu erhalten, welcher dem „Stecher" der Kopie zur Vorlage diente, oder ob durch Zeichnung einer Pause, oder was wahrscheinlicher ist, durch Herstellung eines Negativdrucks unmittelbar von der mit Farbe eingeriebenen Tafel u. s. f., wird nirgends gesagt. Es steht nur fest, daß im J. 1797 Abdrücke von einer großen in Kupfer gestochenen Platte gemacht wurden, welche über den Rahmen der kreisrunden Fläche besonders unten hinübergriff, um einer wortreichen Inschrift Platz zu bieten. Alle Abdrücke dieser Kopie des Camillo Borgia lassen, falls sie unbeschnitten sind, die bekannten Randeindrücke einer Metallplatte von 70 Cent. Höhe und 65 Cent. Breite erkennen und tragen die Unterschrift:

Apographon descriptionis Orbis terrae, figuris et narratiunculis distinctae || *Manu Germanica opere nigelliari discolorio circa medium Saec.* $\overline{XV}$ *Tabulae aeneae Musei Borgiani Velitris consignatae,* || *Quod Camillus Joh. Paulli F. Borgia, Cruce Hieros. ornatus, ab intimo cubiculo Electoris Bavarici, Patrui Cardinalis exempla imitatus* || *Summa fide, maximoque artificio expressum, recognitumque Eruditis spectandum proponit. A. C.* $\overline{CIↃIↃCCXCVII}$.

Ein Abzug dieser Kopie also war es, welcher Heeren vorgelegen hatte, als er am 28. Juli 1804 über die Karte einen Vortrag vor

1) Rech. sur la prior. de la découv. des pays sit. sur la cote occ. d'Afr. Paris 1842 p. XXIII und Bull. Soc. de Géogr. III. Sér. T. 8. 1847. p. 48.

2) Comment. Soc. R. Scient. Gott. T. XVI. 1808 p. 7.

3) Studj bibliogr. e biogr. Rome 1875. I. p. 176. Auch an dieser Stelle wird die Karte Borgia nicht erwähnt.

der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen hielt. Nach dem Bericht über denselben[1]) darf man schließen, daß hierbei nur die Einleitung, welche über die Grundlinien einer Geschichte der Kartographie handelte, und einige allgemeine Angaben über den Inhalt der Karte zum Vortrag gelangten, da von den Schwierigkeiten einer genauen Analyse gesprochen wird. Die zugehörige Abhandlung mit dem eingehenden Kommentar der Karte erschien daher erst 1808 im XVI. Bd. der Commentationes Soc. R. Scient. Gott.[2]) unter dem (schon 1804 angegebenen) Titel: *Explicatio planiglobii, orbis terrarum faciem exhibentis, ante medium Saec. XV summa arte confecti; Musei Borgiani Velitris; agitantur simul de historia mapparum Geographicarum recte instruenda consilia.* Dies sind die Umstände, welche zur Folge hatten, daß die Heeren'sche Explicatio bald ins Jahr 1804[3]), bald i. J. 1808 verlegt ward. Der Index zum XVI. Bd. der Commentationes führt unter den Tafeln keine solche zu den Abhandlungen der hist.-phil. Klasse auf, sodaß es begreiflich ist, daß Nordenskiöld sagt: Heeren's Arbeit entbehrt einer Tafel[4]). Heeren sagt übrigens in der Abhandlung deutlich: Miserat Cardinalis *nonnulla* apographi', quod suis impensis aeri incidendum curaverat, exemplaria[5]). Diese Notiz ist auch J. Lelewel entgangen, da er vierzig Jahre später immer nur nach der einen Kopie in Göttingen geforscht hat, welche Heeren vorgelegen habe. Und dieser sein Ausspruch „L'exemplaire de la gravure communiqué a dû passer aux héritiers de Heeren, parceque la bibliothèque de l'université ne le posséda point“[6]) ist wohl hauptsächlich daran Schuld, daß man später gar nicht mehr nach dem Verbleib der Kopien hier in Göttingen geforscht hat. Denn auch Nordenskiöld beruft sich auf Lelewel und ich selbst teilte bis vor kurzem die Meinung, dieses „eine“ in Heeren's Besitz befindliche Exemplar sei faktisch verloren gegangen.

2. Wenige Jahre nachher ward von Seroux d'Agincourt

---

1) Gött. Gel. Anzeigen Stück 129 vom 3. Aug. 1804.

2) Vol. XVI p. 250—284. Daß die Abhandlung erst 1808 gedruckt wurde, geht u. A. auch aus der erst 1808 erfolgten Honorarzahlung an Heeren hervor, wie sie die Rechnungen ausweisen.

3) So bei Santarem in Recherches sur etc. la cote occ. de l'Afrique 1842 p. XXII, wo übrigens Santarem irrtümlich diese Explicatio Heerens auf eine Karte Pasquallini's bezieht. — Ebenso citiert Lelewel Géogr. du moyen age 1852 II p. 97 das Jahr 1804 für Heerens Abhandlung.

4) A. a. O. p. 85.

5) Comment. T. XVI, 1808, p. 256 Anm.

6) Géogr. du moyen age II. Brux. 1852, p. 97 Anm.

auf Taf. XL seines Atlas zur Geschichte der Skulptur[1]) ein sehr verkleinertes Bild der Tafel (Lithographie) veröffentlicht, auf dem die Mehrzahl der Inschriften in kleiner Kursivschrift wieder gegeben ist. Neben dem Gesammtbild (Durchmesser ca. 20 Cent.), das nur eine schwache Vorstellung des Inhalts der Karte giebt, wird ein zweihandgroßes Stück (Osteuropa und Nordasien) in natürlicher Größe wieder gegeben. Nach Agincourts Mitteilung[2]) hätte er, als er 1794 die Tafel noch im Besitze des Antiquars gesehen hatte, von welchem Borgia es bald darauf kaufte, die Erlaubnis erhalten die Tafel abzuzeichnen. Ob die Tafel XL seines Atlas aus jener Zeit stammt, oder doch vielleicht auch den Stich von 1797 zur Grundlage hat, bietet nicht viel Interesse zu entscheiden. Jedenfalls finden sich auf dem Stück in Originalgröße die gleichen schraffierten runden Flecken, wie auf dem Apographon. Die Histoire de l'art ist erst nach dem Tode Agincourts 1823 vollendet worden. Wahrscheinlich ist jene Tafel XL schon in einer der ersten Lieferungen veröffentlicht. Lelewel[3]) citiert das Jahr 1811(?)

3. Später haben sich die beiden bekannten Autoritäten auf dem Gebiete der Geschichte der Geographie im Mittelalter, J. Lelewel und Vicomte de Santarem fast gleichzeitig mit der Weltkarte Borgia beschäftigt, doch, wie es scheint, ohne von einander in diesem Punkte zu wissen. J. Lelewels Géographie du moyen age erschien zu Brüssel im gleichen Jahre 1852, wie der dritte Band von Santarem, Essai sur l'histoire de la cosmographie et de la cartographie pendant le moyen-age. Lelewel, welcher die Karte „Table metallique de 1452" nennt (während Heeren ihre Entstehungszeit auf 1410 etwa fixirt), vermochte 1852[4]) jedoch lediglich einen Auszug aus Heerens Abhandlung zu geben. Eine Kopie der Karte war ihm nicht zu Gesicht gekommen, da, wie schon erzählt, seine Nachforschungen in Göttingen nach dem Heeren'schen Exemplar vergeblich waren. Er versichert dies in dem 1857 edirten Epilogue[5]) zu seiner Géogr. du moyen age von neuem: Je cherchais des renseignements sur cette gravure sur le lieu, à Göttingue, et je ne l'ai pas trouvé. Er nennt dann den Titel des „Apographon" und fährt fort: „Mes démarches pour me procurer un exemplaire restèrent infructueuses et je n'ai jamais vu cette

1) Histoire de l'art par les monuments. Planches: Vol. II. Section de sculpture. Tab. XL.

2) Das. Text. Vol. II p. 72.

3) Epilogue de la géogr. du moyen age 1857 p. 164.

4) Géogr. du moyen age II. Brux. 1852. p. 97—103.

5) Épilogue à la géogr. du moyen age. Brux. 1857, p. 164.

publication copiée sur l'échelle de la grandeur de l'original." Aber er erinnerte sich jetzt, die Karte in Agincourts Histoire de l'art par les monuments gesehen zu haben und fügt dem Epilogue daher eine verkleinerte Kopie der Karte (Durchmesser 15,8 Cent.), sowie die „Confinia paganorum" (Osteuropa und Nordasien) in Originalgröße, beides nach Agincourt, bei, sodaß auch diese unvollkommene Reproduktion des Jahres 1856 (die Kärtchen tragen das Datum des April 1856) unter die Kopien der Weltkarte Borgia eingereiht werden muß, was gleichfalls Herrn von Nordenskiöld entgangen zu sein scheint, da er den Epilogue Lelewel's überhaupt nicht in seiner historischen Einleitung nennt. Uebrigens verdient bemerkt zu werden, daß Lelewel 1856 seinerseits nach den citierten Aeußerungen jedenfalls von dem Vorhandensein der Reproduktion in Santarem's Atlas, von der wir nun sofort reden werden, nichts wußte. Den „Essai" Santarems finden wir freilich im Epilogue unmittelbar vor Besprechung der Karte Borgia citiert.

4. Um den chronologischen Faden nicht zu zerreißen, schiebe ich hier die Mitteilungen über die Ausgabe Santarems von unserer Weltkarte ein, die eine Doppeltafel seines großen *Atlas composé de mappemondes et de portulans et d'autres monuments géographiques depuis le VIe siècle de notre êre jusqu'au XVIIe* ausmacht. Wenn sie selbst Herrn von Nordenskiöld, sowie Dr. W. Ruge unbekannt geblieben ist, so rührt dies meines Erachtens von dem eigentümlichen Umstand her, daß Santarem in seinem Essai sur l'histoire de la cosmographie du moyen age (I—III, 1849—52) nicht ausdrücklich auf die Kopie seines Atlas aufmerksam macht, obwohl er der Karte eine sehr eingehende Erörterung[1]) widmete. Es ist dies am auffallendsten im ersten Band (1849) p. 298, wo er die „mappemonde du musée Borgia" zwischen zwei anderen (Mappemonde de la Bibl. Ste. Geneviève und Andrea Bianco) nennt und allein bei beiden letztern in Anmerkung hinzufügt: „Voyez cette mappemonde dans notre Atlas." Daraus muß geschlossen werden, daß 1849 (oder 1848) die Reproduktion der Karte Borgia noch nicht geplant oder noch nicht in Angriff genommen war; aber auch in den spätern Bänden findet sich meines Wissens kein Hinweis im Text auf das Atlasblatt. So ist es begreiflich, daß Ruge[2]) der Ansicht ist, Santarem habe überhaupt nur die Inschriften des Originals abschreiben lassen, wie wohl der letztere

1) Essai Vol. III. 1852 p. 247—300.

2) Zeitschr. f. wiss. Geogr. VIII, 1891, S. 396. Ruge scheint die von Nordenskiöld citirten Quellen übrigens nicht selbst eingesehen zu haben.

in der Einleitung zu seiner Besprechung der Karte ausdrücklich sagt[1]), „das Original der Kupfertafeln befinde sich jetzt in den Archiven der Propaganda, und er nehme die Gelegenheit wahr dem portugiesischen Gesandten Baron da Venda da Cruz für seine Vermittelung zu danken, daß er, 1845, ihm die Erlaubnis erwirkt habe „die Originaltafeln zu kopiren." Hier wird dieses Kopieren also jedenfalls nicht auf die Legenden der Karte beschränkt, auch ist hier von einem nochmaligen genauen Einsehen des Originals durch Santarem, wie sie Ruge berichtet, nicht die Rede.

In der That ist, wie gesagt, dem Atlas später eine Kopie in Originalgröße beigefügt und von Santarem selbst 1855 in dem Verzeichnis seines indexlosen Werkes, welches derselbe kurz vor seinem Tode und offenbar schon etwas geschwächten Geistes an anderer Stelle veröffentlichte[2]), mit Nr. 87 als: Grande et magnifique mappemonde de l'ancien musée du cardinal Borgia bezeichnet[3]). In der Anordnung, welche B. Quaritch dem Atlas Santarems gab (1853)?), indem er (Quaritch) ihm zugleich einen neuen Titel und einen doppelten Index, beide nur in 12 Exemplaren abgezogen, hinzufügte, trägt die zur Abteilung I gehörige Karte die Nr. 23 (double). Das Blatt ist also wahrscheinlich 1853 zur Ausgabe gelangt, da der Haupttitel von Quaritch für das Gesammtwerk die Jahre 1842—53 als Publikationsjahre angiebt, jedenfalls also vor dem Erscheinen von Lelewels Epilogue (s. o.).

Diese Santarem'sche Kopie ist übrigens in Lithographie hergestellt und reicht in der Schönheit der Ausführung (technischen Zeichnung) durchaus nicht an die Kupferdrucke des Jahres 1797 heran, doch giebt sie das meiste Detail in voller Deutlichkeit wieder. Die Frage liegt nahe, ob Santarem ihr eine neue sorgfältige Abzeichnung der Originalplatte zu Grunde legte, sodaß sie wie eine zweite Handschrift zur Entzifferung schwieriger Stellen der Legenden herangezogen werden könnte. Aus den oben citierten Worten könnte man dies schließen. Indessen zeigt ein Vergleich unschwer, daß das Apographon von 1797 dem Lithographen Santarem's unmittelbar als Vorlage gedient hat. Die Unterschrift enthält das Blatt jedoch begreiflicher Weise nicht, denn sie gehört in den historischen Atlas der Karten des XV. Jahrhunderts nicht hinein. Alle die kleinen Unterschiede, welche W.

1) Essai T. III. 1852. p. 249 Anm.
2) Nouv. Annales des voyages. Année 1855. Vol. II. p. 145—162.
3) Daselbst p. 154.

Ruge[1]), wie wir so gleich sehen werden, durch Vergleich des Apographon mit dem wieder aufgefundenen Original fand, der fehlende Strich über dem Worte cōburi, das a über der Abkürzung cor (von corpora), die von rechts nach links verlaufenden Striche bei dem Worte immensitate bei Paris (während das Original sie von links nach rechts gezogen zeigt) . . u. s. f., finden sich bei der Santarem'schen Kopie wieder. Daß derselbe das Apographon auch gekannt und besessen habe, geht zwar nicht aus seiner Geschichte der Kosmographie, aber aus dem Umstande hervor, daß es ein solcher Abdruck von 1797 war, welchen er am 2. Juli 1847[2]) der geographischen Gesellschaft zu Paris vorlegte bezw. ihr schenkte. Denn unter den für diesen Tag verzeichneten Geschenken[3]) wird der Titel des Apographon des Camillo Borgia in voller Ausführlichkeit gegeben, wie er oben S. 352 mitgeteilt ist. Es dürfte daher kaum ein Zweifel sein, daß dieses selbe, 1847 überreichte Exemplar aus dem Archiv der Gesellschaft von M. Hamy im Jahre 1889 zur Ausstellung gebracht wurde, wie es Dr. Dahlgren an Herrn von Nordenskiöld meldete[4]).

5. Wie nun im gleichen Jahre von Nordenskiölds Arbeit das Original der Tafel, von dem man nicht wußte, wo es verwahrt war, wieder aufgefunden ist, so spielte der Zufall mir auch eine vollkommen erhaltene Kopie des Apographon von 1797 in die Hand; dieselbe wurde mir von einem hiesigen kleinen Handwerker mit andern verstaubten Karten zum Kauf angeboten und selbstverständlich für die Kartensammlung meines Instituts erworben. Meine Freude war nicht gering, denn mit den oben dargelegten Verhältnissen noch nicht vertraut, glaubte ich nicht anders, als die aus Heerens Nachlaß verschwundene Kopie durch einen günstigen Zufall wieder erworben zu haben. Im Begriff diese Thatsache Herrn von Nordenskiöld mitzuteilen, las ich die Notiz Sophus Ruge's[5]), daß sein Sohn W. Ruge in Rom das Original, die gravierte Tafel im Museum Borgia wieder gesehen habe. Ich wartete nun die entsprechende Publikation ab, aus der sich u. A. ergab[6]), daß im Museum auch noch eine Reihe von Kopien des Apographon von 1797 aufbewahrt würden, wovon man

1) Zeitschr. für wiss. Geogr. VIII, S. 397.
2) Bull. Soc. Géogr. de Paris. III. Ser. Tome VIII. 1847. p. 58.
3) Ebenda p. 63.
4) Ymer 1891 S. 87.
5) Pet. Geogr. Mitt. 1892. Litt. Ber. Nr. 33.
6) Zeitschr. f. wiss. Geogr. VIII. 1891. 12. Heft. S. 396 ff.

dem Dr. W. Ruge ein Exemplar überlassen habe. Nun erst glaubte ich mich zu erinnern, die Karte schon früher auf hiesiger Bibliothek gesehen zu haben mit der handschriftlichen Bemerkung: „Diese sehr seltene Karte ist von Heeren etc. beschrieben.“ Der geordnete Zustand des kartographischen Materials von heute führte mir dann auch sofort die der Bibliothek zueigen gehörende Kopie in die Hand; gleichzeitig ergab sich, das nicht nur dem Exemplar der Commentationes T. XVI. 1808, welches sich auf der Bibliothek befindet, sondern auch demjenigen im Archiv unserer Gesellschaft eine gleiche Kopie der Karte beigeheftet ist. So waren sofort „nonnulla Apographi exemplaria“ d. h. zunächst vier Exemplare jener vermißten Karte in meinen Händen. Ob vielleicht noch andere Exemplare des Tom. XVI der Commentationes gleichfalls damit versehen sind, entzieht sich meiner Kenntnis, aber ich halte es für wahrscheinlich, daß einzelne bevorzugte öffentliche oder Privatbibliotheken solche empfangen haben. Andererseits enthält der Index p. XXXIV des fraglichen Bandes, wie schon angedeutet, keinen Hinweis auf eine beigegebene Tafel.

Die zahlreichen hier vorhandenen Kopien lassen uns nun auch leicht Stellung nehmen zu der Frage, ob die Karte, welche Nordenskiöld aus Venedig erwarb, wirklich einem alten im 15. Jahrh. hergestellten Druck entstammt. W. Ruge hat sich eingehend damit beschäftigt und nachgewiesen, daß der Lichtdruck, den Nordenskiöld uns von seinem Exemplar mitteilt, in allen Einzelheiten, die das Apographon vom Original unterscheiden, genau mit dem erstern, also der Reproduktion von 1797 übereinstimmt[1]). Ich bin durch die Prüfung ganz zu demselben Resultat gekommen. Der Lichtdruck stimmt auch in solchen ganz gleichgültigen Einzelheiten mit dem Apographon überein, die niemals bei Abzügen von zwei verschiedenen Kupferstichen nach demselben Original und aus gleicher Zeit vollkommen identisch sein würden, geschweige denn, wenn diese Jahrhunderte auseinander liegen: wie die Länge eines jeden Schattirungsstriches, die Richtung und Zahl der Schraffen in den einzelnen 38 Flecken, die Zahl und Anordordnung der Punkte getüpfelter Tiere oder Kleider u. s. f. Die

1) Die Angabe von 646 Mill. Durchmesser, welche Nordenskiöld seiner Kopie gab, beruhte auf einem Versehen, da eine an Dr. W. Ruge gesandte Pause derselben (a. a. O. S. 398) mit des letztern Apographon (628—634 Mill.) übereinstimmt. Nach d'Agincourt beträgt der Durchmesser des Originals „deux pieds et un pouce“. Hier können wohl nur römische Fuß à 0,2976 M. gemeint sein, wonach $2\frac{1}{12}$ F. = 620 mm. Denn französische Fuß würden 677 Mill. ergeben ($2\frac{1}{12}$ engl Fuß sind 635 Mill.).

Schadhaftigkeit einzelner Stellen des Nordenskiöld'schen Exemplars bleibt hier außer Betracht. Wenn ihm nicht, wie man leicht vermuten könnte, künstlich der Stempel des hohen Alters aufgedrückt ist um seinen Kaufwert zu erhöhen, so hat man diese Kopie eben sehr schlecht verwahrt gegenüber unsern vollkommen erhaltenen, nur etwas verstaubten Exemplaren. Die Unterschrift fehlt bei dem Nordenskiöld'schen Exemplar. Ein Vergleich des Papiers würde gewiß die Identität noch weiter bestätigen.

Wie auch wäre ein so hohes Alter in Verbindung zu bringen mit dem Vorhandensein der 38 nußgroßen schraffierten Flecken, die das Nordenskiöld'sche Exemplar, ganz ebenso wie unser Apographon, zeigt und zwar an Stelle von 38 großen nach Agincourt's und Ruge's Zeugnis in der Originalkupfer(metall)platte wirklich vorhandenen Löchern. Von Agincourt erfahren wir[1]), daß dasselbe aus zwei fast gleichgroßen Platten bestehe, welche durch die Köpfe kleiner Nägel in Verbindung gesetzt seien. Diese Nath tritt weder in dem Apographon noch in dem Lichtdruck von 1891 irgendwie hervor, sodaß schon aus diesem Grunde nicht daran zu denken ist, diese Kopien seien unmittelbar von einem durch Abguß hergestellten Hautrelief der gravierten Tafel abgenommen. Nach Agincourt beträgt ferner die Dicke der Platten 1½ Linien (Santarem sagt III p. 249 1 Linie) oder 3⅓ Millimeter und die Gravierung vertiefe sich ½ Linie (= 1,1 mm) in die Platte. Wie wäre es denkbar, daß in einem Relief die vertieften Partieen der Platte mit einer solchen Gleichheit der Höhe erscheinen sollten, daß man davon direkt so saubere Konturen erhielte, wie sie unsere gesammten Kopien zeigen. Vielmehr kann von technischer Seite gar kein Zweifel darüber walten, daß dieselben nur von einer mit verkehrter Schrift vertieft gravierten, also für den Kupferdruck eigens neu hergestellten Platte stammen. Eine solche hätte also der Graveur des 15. Jahrh., dem man das Originalkunstwerk verdankt, gleichzeitig mit letzterm herstellen müssen, wenn man aus jener Zeit Drucke der Karte hätte haben wollen. Alle ältern gedruckten Kupferstichkarten des 15. und 16. Jahrh. sind nicht entfernt in dieser sichern breiten Manier ausgeführt, welche allein in der beabsichtigten Ausfüllung der Vertiefungen mit Farbenschmelz ihren Grund hatte, damit die gravierte Platte in ihren Konturen zu verfolgen wäre.

Endlich würde die Annahme Nordenskiölds bedingen, daß jene 38 Löcher schon von Anfang an in der Platte gewesen wären.

1) Hist. de l'art. Sect. de sculpt. Texte p. 72.

Hiergegen sprechen sich alle Autoren aus, welche sich mit der Karte beschäftigt haben. Agincourt sagt bestimmt: „Les grands taches noires circulaires sur la partie calquée de ma planche indiquent des trous postérieurs à l'ecriture puisqu'ils la coupent quelque fois". Wären sie vom Urheber des Bildes beabsichtigt gewesen, so hätte nichts ihn gehindert einige Namen ein wenig seitwärts zu setzen, wenn das Loch einen bestimmten Platz beanspruchte. Irgendwelche Regelmäßigkeit der Anordnung vermag man nicht zu entdecken, ebenso wenig läßt sich die Anordnung zu den Landflächen, in denen sie sich befinden, in Beziehung setzen. Es sind zum weitaus größten Teil Stellen des Metalls ausgewählt, welche einerseits von Schrift und Bildern frei sind und andererseits das Metall in unverminderter Stärke besitzen. Daher befinden sich jene Löcher ausnahmslos in Landflächen der Karte, niemals in den Wasserflächen. Daher kann auch nicht an eine mutwillige Zerstörung gedacht werden. Die Löcher sind mit Vorbedacht und in gleicher Weise angebracht, offenbar zur Befestigung auf einer anderweitigen Unterlage oder an der Wand, wo man dann den Halt vielleicht durch runde Holzpflöcke vom Querdurchmesser jener Löcher erreicht hat. Indessen werden sich diese Fragen nur durch eine genaue Besichtigung des Originals und seiner Unterlage entscheiden lassen. Jedenfalls dürfte die Vermutung Nordenskiölds, daß die Stellen zum Aufstellen von Figuren bestimmt gewesen seien, wenig für sich haben; kaum hätte das Metall hiezu durchbohrt zu werden brauchen, es hätte eine Markirung der Stellen ähnlich wie in den jetzigen Kopien genügt.

Um kurz zusammen zu fassen, so besitzen wir also folgende Kopien der Weltkarte des Museum Borgia:

A. In natürlicher Größe des Originals.

1. Die 1797 hergestellte Kopie „Apographon descriptionis terrae". Hiervon befinden sich, soweit uns bis jetzt bekannt,

a. Mehrere Kopien im Museum Borgia[1]).
b. Eine solche in der Marciana zu Venedig[2]).
c. Vier Kopien in Göttingen: Bibliothek, Geogr. Institut, Kön. Societät der Wissenschaften (seit 1804).
d. Eine Kopie im Besitz von Dr. W. Ruge Leipzig (seit 1891)[1]).

---

1) Nach W. Ruge s. oben S. 358.
2) Desgl. nach W. Ruge a. a. O. S. 396 Anm. 2.

e. Eine Kopie im Besitz der geogr. Gesellschaft in Paris (seit 1847, s. oben S. 357).

f. Eine Kopie ohne Unterschrift im Besitz von A. E. Freiherrn v. Nordenskiöld in Stockholm (seit 1890?)

2. Die 1853 (?) erschienene Mappemonde du musée Borgia in Santarem's Atlas composé de mappemondes Nro. 87.

B. In verkleinertem Maßstabe.

3. Die Kopie ($\frac{1}{3}$ der Originalgröße) in Seroux d'Agincourts Histoire de l'art 1823. Section de sculpture Tab. XL.

4. Die Kopie ($\frac{1}{4}$ der Originalgröße) im Lelewel's Epilogue à la géogr. du moyen age 1857. Tab. 8.

5. Die Kopie ($\frac{1}{4}$ der Originalgröße) in Lichtdruck durch A. E. v. Nordenskiöld. Ymer. 1891.

Es ist nicht Zweck dieser Zeilen auf den historischen Wert oder den Inhalt der Karte Borgia näher einzugehen, deren lateinische Legenden Nordenskiöld von neuem festzustellen versucht, wozu W. Ruge einige Berichtigungen gab. Nur auf einen Punkt möchten wir aufmerksam machen. Seltsamer Weise sprechen sowohl Heeren als Santarem, denen doch die Karte in Originalgröße und mit vollem Inhalt vorlag, von einer Einteilung der ganzen Tafel „in 12 Teile“. Santarem knüpft daran sogar die Vermutung: „il nous semble que ces douce parties ou plutôt ces douze numéros indiquent les douze vents de la rose ancienne.“ Dies ist natürlich völlig hinfällig, da ja eine Einteilung von zweimal 12 Teilen um die Peripherie herumläuft, worauf bereits W. Ruge aufmerksam macht, unter dem Hinzufügen, es sei nicht klar, was mit dieser Einteilung bezweckt werde. Indessen scheint mir gar kein Zweifel, daß damit die Einteilung des Horizontes in die 24 Stunden des Tages gemeint ist. Die Kardinalpunkte Nord und Süd sind je mit 12, Ost und West je mit 6 bezeichnet und die Nummerierung läuft von links nach rechts um das Blatt d. h. mit der Sonne. Die Karte ist im übrigen nicht nach patristischer Art mit dem Osten nach oben, sondern nach der von den Arabern uns überkommenen, lange durch den Einfluß der Astronomie im Zeitalter der Renaissance erhaltenen Art mit dem Süden nach oben orientiert, wie die Karten des Istachri, Edrisi und die etwa mit der unsern gleichzeitigen des Fra Mauro, um nur an die bekanntesten zu erinnern.

Göttingen 22. Mai 1892.

Ueber die Krystallformen optisch einaxiger Substanzen, deren Lösungen ein optisches Drehungsvermögen besitzen.

Von

Hermann Traube.

(Vorgelegt von Th. Liebisch.)

I. Weinsaures Antimonoxyd-Strontium, -Blei, -Baryum.

L. Pasteur hat in seinen grundlegenden Untersuchungen über die Krystallformen der in Lösung optisch aktiven Substanzen den Satz aufgestellt, daß Stoffe, deren Lösungen ein optisches Drehungsvermögen besitzen, in gewendeten Formen krystallisiren[1]).

Fortgesetzte krystallographische Untersuchungen bestätigten diesen Zusammenhang in den zahlreichen Fällen, in welchen sich unmittelbar aus der äußeren Form der wahre Symmetriecharakter entnehmen ließ. Daneben wurde indessen eine nicht unbeträchtliche Reihe von Stoffen bekannt, die jenem Satze zu widersprechen schien. Indessen handelte es sich hier um Formen, welche nicht für eine bestimmte Gruppe krystallisirter Körper charakteristisch sind, sondern in mehreren Gruppen von abweichenden Symmetrieeigenschaften auftreten können. In solchen Fällen entsteht die Aufgabe unter den Methoden, welche sich zur Bestimmung der Symmetrie krystallisirter Körper darbieten, eine Auswahl in der Weise zu treffen, daß der wahre Symmetriecharakter jener mehrdeutigen Formen hervortritt.

Daß die am tetragonalen Strychninsulfat beobachteten Formen (111), (001) nicht als eine holoëdrische Combination gedeutet werden dürfen, ergab sich schon aus dem von A. Descloizeaux[2]) entdeckten optischen Drehungsvermögen dieser Krystalle. Die übrigen hier in Betracht kommenden Stoffe lassen aber nur in ihren Lösungen nicht auch im krystallisirten Zustande ein optisches Drehungsvermögen wahrnehmen. Zur Beurtheilung der Symmetrieeigenschaften ihrer Krystallformen werden daher vor allem

---

1) Vgl. z. B. L. Pasteur: Nouvelles recherches sur les relations qui peuvent exister entre la forme cristalline, la composition chimique et le phénomène de la polarisation rotatoire. Ann. chim. phys. (3) **31**, 69; 1851.

2) A. Descloizeaux: Compt. rend. **44**, 909; 1857.

der Vorgang der Auflösung und das pyroelektrische Verhalten herangezogen werden müssen.

Unter diesem Gesichtspunkte ist bislang erst eine jener scheinbaren Ausnahmen von dem Pasteur'schen Satze beseitigt worden: F. Becke[1]) hat aus den Aetzfiguren geschlossen, daß Traubenzucker rhombisch hemiëdrisch und Traubenzuckerhydrat monoklin hemimorph krystallisiren.

Um die hexagonalen und tetragonalen Körper, welche mit dem Satze von Pasteur im Widerspruch zu stehen scheinen, eingehender zu prüfen, habe ich mit der Untersuchung der hierher gehörigen weinsauren Salze begonnen. —

1. Rechts-weinsaures Antimonoxyd-Strontium.

$$Sr(SbO)_2(C_4H_4O_6)_2.$$

C. Marignac[2]) beobachtete hexagonale Prismen $(10\bar{1}0)$, welche die Basis (0001) oder die Pyramiden $(10\bar{1}1)$, $20\bar{2}1)$ als Endigung aufwiesen.

Die von mir nach der Vorschrift von F. Kessler[3]) dargestellten Krystalle sind hemimorph: das Prisma $(10\bar{1}0)$ ist an dem einen Ende durch $(10\bar{1}1)$, an dem andern durch $(20\bar{2}1)$ begrenzt. Können die Krystalle längere Zeit fortwachsen, so entwickelt sich neben $(20\bar{2}1)$ meist auch noch $(10\bar{1}\bar{1})$.

$$a:c = 1:0{,}8442.$$

	gemessen	berechnet
$20\bar{2}1 : 02\bar{2}1$	52°50'*	—
$10\bar{1}1 : 01\bar{1}1$	41 3	40°51'20"
$10\bar{1}1 : 10\bar{1}0$	45 48	45 43 16
$20\bar{2}1 : 10\bar{1}0$	26 50	27 9 12.

Es genügt die Krystalle ca. 5 Min. im Trockenschrank zu erwärmen um ihre elektrische Erregung hervorzurufen. Die Bestäubung lehrt, daß $(10\bar{1}1)$ an dem antilogen Pol, $(20\bar{2}1)$ an dem analogen Pol liegt.

Schon durch Behauchen entstehen auf den Prismenflächen Aetzfiguren. Unter dem Mikroskop erblickt man Trapeze mit

---

1) F. Becke: Die Krystallform des Traubenzuckers und optisch activer Substanzen im Allgemeinen. Min. petr. Mitth. 10, 464; 1889. Krystallform optisch activer Substanzen. ibid. 12, 256; 1891.

2) C. Marignac: Recherches sur les formes cristallines et la composition chimique de divers sels. Ann. des mines. (5) 15, 283; 1859.

3) F. Kessler: Pogg. Ann. 75, 410; 1848.

zwei zur Kante $10\bar{1}0 : 10\bar{1}1$ parallelen Seiten. Die längere Seite ist dieser Kante, also dem antilogen Pol zugewendet. Aus der asymmetrischen Gestalt dieser Aetzfiguren folgt, daß auf den Prismenflächen keine Symmetriebenen senkrecht stehen. Die Aetzfiguren auf zwei benachbarten Prismenflächen sind congruent und werden durch eine Drehung um die Vertikalaxe um 60° zur Deckung gebracht; sie liegen aber nicht symmetrisch zu einer den Winkel der beiden Flächen halbirenden Ebene. Daher besitzen diese Krystalle nur eine polare 6-zählige Symmetrieaxe. *Sie gehören also der hemimorphen Tetartoëdrie des hexagonalen Systems*[1]) *an, für welche bisher ein Beispiel noch nicht bekannt war.*

Der Charakter der Doppelbrechung ist negativ, wie schon von A. Descloizeaux[2]) festgestellt wurde. Die von diesem Forscher offen gelassene Frage nach dem optischen Drehungsvermögen der in Rede stehenden Krystalle kann ich auf Grund der Prüfung von ca. 2 cm dicken basischen Platten dahin beantworten, daß weder im senkrecht einfallenden noch im convergenten polarisirten Lichte ein solches Drehungsvermögen wahrnehmbar ist.

2. Rechts-weinsaures Antimonoxyd-Blei.

$$Pb(SbO)_2(C_4H_4O_6)_2.$$

Die bei ca. 60° gebildeten wasserfreien Krystalle zeigten dieselbe Ausbildung wie die Krystalle der Strontiumverbindung. Als sie bei höherer Temperatur dem Fortwachsen überlassen wurden, entwickelten sich die Pyramiden so stark, daß die Prismenflächen fast ganz zurücktraten. Es besteht eine vollständige Isomorphie mit dem Strontiumsalz, denn es ist:

$$a : c = 1 : 0{,}8526.$$

	gemessen	berechnet
$20\bar{2}\bar{1} : 02\bar{2}\bar{1}$	52° 47′*	—
$10\bar{1}1 : 01\bar{1}1$	40 59	41° 4′16″
$10\bar{1}0 : 10\bar{1}1$	45 41	45 6 46
$10\bar{1}0 : 20\bar{2}\bar{1}$	27 10	26 39 20.

Die elektrische Erregung und die durch besondere Schärfe ausgezeichneten Aetzfiguren auf $(10\bar{1}0)$ stimmen mit dem Verhalten der Strontiumverbindung überein. *Demnach gehört auch das wasserfreie rechts-weinsaure Antimonoxyd-Blei der ersten hemimorphen Tetartoëdrie des hexagonalen Systems an.*

1) Th. Liebisch: Physikalische Krystallographie. Leipzig 1891, 40.
2) A. Descloizeaux: Ann. des mines. (5) 14, 18; 1858.

Der Charakter der Doppelbrechung ist negativ. Optisches Drehungsvermögen konnte an 3 mm dicken basischen Platten nicht nachgewiesen werden.

3. Rechts-weinsaures Antimonoxyd-Baryum.

$$Ba(SbO)_2(C_4H_4O_6)_2 + H_2O.$$

Als ich die Baryumverbindung in derselben Weise wie das Bleisalz darstellte, erhielt ich eine Verbindung mit einem Molekül Krystallwasser: der Wasserverlust bei 110° C. betrug bei zwei Versuchen 2,7 und 2,8 %.

Das Baryumsalz krystallisirt tetragonal und ist hemimorph: neben den Prismen (110) und (100) treten an dem einen Pole (111) und (201) auf, während an dem anderen Pole nur $(11\bar{1})$ vorhanden ist. Wie das Bestäubungsverfahren ergiebt, ist der erstere Pol der antiloge.

$$a : c = 1 : 0{,}44058.$$

	gemessen	berechnet
$111 : 1\bar{1}1$	43°55′*	—
$111 : 110$	58 8	58° 4′28″
$111 : \bar{1}\bar{1}1$	63 45	63 51 4
$201 : 100$	48 23	48 36 55
$201 : \bar{2}01$	82 47	82 46 10
$201 : 11\bar{1}$	28 3	27 52 15.

Durch Behauchen entstehen auf den Prismenflächen (110) asymmetrische Trapeze. Die beiden längeren Seiten liegen parallel zu den Prismenkanten; von den beiden anderen Begrenzungslinien ist die dem analogen Pole zugewendete stärker gegen die Richtung der Vertikalaxe geneigt als die gegenüberliegende. Demnach stehen auf (110) keine Symmetrieebenen senkrecht. Da die Aetzfiguren auf benachbarten Flächen des Prismas (110) durch eine Drehung um die Vertikalaxe um 90° zur Deckung gebracht werden, während sie zu der durch die Kante dieser Flächen und die Verticalaxe gelegten Ebene nicht symmetrisch liegen, so besitzen die vorliegenden Krystalle außer einer polaren 4-zähligen Symmetrieaxe kein weiteres Symmetrielement. *Sie bieten daher das erste Beispiel für die hemimorphe Tetartoëdrie des tetragonalen Systems*[1]) *dar.*

Der Charakter der Doppelbrechung ist positiv. Die Prüfung auf optisches Drehungsvermögen ergab ein negatives Resultat.

Göttingen, Mineralog.-petrograph. Institut, März 1892.

1) Th. Liebisch: Physikalische Krystallographie. Leipzig 1891, 46.

In wieweit genügen die bisherigen Lichttheorieen den Anforderungen der practischen Physik?

Von

P. Drude.

Wohl auf keinem Gebiete physikalischer Erscheinungen sind soviel verschiedene Versuche zu ihrer theoretischen Erklärung gemacht, als wie in der Optik. Da sehr viele dieser Theorieen, welche von ganz verschiedenen Grundannahmen ausgehen, in gleich widerspruchsfreier Weise zahlreiche beobachtbare Thatsachen erklären können, so ist dadurch die theoretische Untersuchung optischer Erscheinungen etwas in Miscredit gekommen, in dem man versucht ist, sie als eine mathematische oder fast philosophische Speculation aufzufassen, aus der neue Erkenntnisse für die wahren Eigenschaften der Natur nicht zu schöpfen sind, da sich dieselben als nach den verschiedenen Theorieen verschieden ergeben.

Dieses gilt namentlich für die älteren, mechanischen[1]) Theorieen, von denen die einen dem Aether überall gleiche, die anderen dagegen ihm in verschiedenen Körpern verschiedene Dichte beilegen, während die Einführung der elektromagnetischen Theorie einen bedeutenden Fortschritt in einer wirklichen Naturerkenntniß zu bedeuten schien, da sie die Geschwindigkeit des Lichtes im leeren oder lufterfüllten Raum aus elektromagnetischen Erscheinungen direkt ableitet. Je mehr man aber im Einzelnen die elektromagnetische Theorie bestätigen will durch optische Erscheinungen in den mit ponderabler Materie dichter erfüllten Medien, um so mehr häufen sich die Widersprüche. Um den Thatsachen gerecht zu werden, muß auch diese Theorie auf erweiterten Grundlagen aufgebaut werden, mit Einbuße des Vorzuges ihrer Einfachheit und Evidenz. Es sind schon mehrere Ansätze[2]) dazu vorhanden, welche

1) Ich wähle absichtlich das Wort „mechanisch“ und nicht „elastisch“, wie es sonst vielfach in der Literatur üblich ist. Denn man kann wohl keine Theorie, auch nicht die von Fresnel, Cauchy oder Neumann, als rein elastisch bezeichnen, da sie alle in der einen oder anderen Hinsicht von den Formeln der Elasticitätstheorie abweichen. Ich habe deshalb die Bezeichnung „mechanisch“ als umfassender, wie das Wort „elastisch“ gewählt, und lege dieses Prädikat alle denjenigen Theorieen bei, welche einigen in ihren Differentialgleichungen auftretenden Größen die physikalische Bedeutung der Beschleunigungskomponenten der Aethertheilchen beilegen.

2) Man vgl. z.B. J. W. Gibbs, Sill. Journ. (3) 23, p. 262, 460, 1882. — 25, p. 107, 1883. — F. Kolácek, Wied. Ann. 34, p. 673, 1888.

aus den Eigenschaften der ponderabeln Molecüle die nothwendigen Erweiterungen schöpfen. Aber bei unsrer Unkenntniß über die molecularen Vorgänge droht so die mathematisch-philosophische Speculation dieselbe wichtige Rolle spielen zu wollen, wie bei den mechanischen Theorieen.

Muß man auch vorläufig vielleicht darauf verzichten, eine vollkommene Theorie des Lichtes erreichen zu wollen, indem man von wenigen, dem Experiment entnommenen Hypothesen aus sämmtliche optischen Erscheinungen in mathematisch zwingender Weise zu berechnen sucht, so kann es noch eine zu discutirende Frage bilden, in wie weit man den Anforderungen, welche, wie ich kurz sagen möchte, das „praktisch-physikalische" Bedürfniß an eine Theorie stellt, genügen kann, derart, daß man mathematische Hilfsmittel angiebt, vermöge deren ein großes Gebiet optischer Erscheinungen nicht nur in der bequemsten und ökonomischsten Weise qualitativ beschrieben werden, sondern auch bestimmte numerische Beziehungen zwischen verschiedenen optischen Erscheinungen abgeleitet werden, welche der Erfahrung entsprechen.

Diese numerischen Beziehungen sind völlig gegeben, wenn für eine periodisch mit der Zeit sich ändernde Vectorgröße gewisse Differentialgleichungen aufgestellt sind, welchen sie im Innern eines Mediums, und gewisse Bedingungen, denen sie an der Grenze zweier Medien zu genügen hat. Wir wollen diese Differentialgleichungen und Grenzbedingungen im Folgenden mit dem Wort „Erklärungssystem" bezeichnen. Es mag hervorgehoben werden, daß die Angaben der Differentialgleichungen allein den Kreis der zu berechnenden Erscheinungen wesentlich enger zieht, als wenn auch die Grenzbedingungen angegeben werden. Ein Erklärungsystem, welchem letztere fehlen, soll daher kurz als „unvollständig" bezeichnet werden.

Die Coefficienten der Differentialgleichungen enthalten Größen, welche für das optische Verhalten des Mediums, in welchem sie gelten, maßgebend sind, die „optischen Konstanten" des Mediums. Es ist eine, in jedem Fall zu lösende mathematische Aufgabe, aus den Differentialgleichungen die Regeln zu bilden, nach denen man die optischen Konstanten aus gewissen beobachtbaren Erscheinungen berechnen kann, um so den Schlüssel für die Berechnung einer größeren Mannigfaltigkeit von Erscheinungen zu gewinnen.

Das „praktisch physikalische" Interesse knüpft sich daher hauptsächlich an das „Erklärungssystem" einer Theorie, weniger an die Art der mathematischen Deduktion desselben, und stellt vor Allem folgende Frage:

Läßt sich ein Erklärungssystem angeben, welches nothwendig als richtig angesehen werden muß und lassen sich die Erklärungssysteme der verschiedenen Lichttheorieen auf jenes eine nothwendige reduciren oder nicht?

Gerade weil man über diesen Punkt nicht immer völligen Aufschluß hatte, ist die Anwendung von Formeln irgend einer besonderen Theorie auf die Berechnung optischer Konstanten zum Theil mit Zweifeln aufgenommen, indem man nicht darüber sicher war, in wie weit sich diese Berechnung ändert, wenn man die eine Theorie durch eine andere ersetzt.

Die Methode, die Theorie optischer Erscheinungen lediglich durch das Erklärungssystem zu geben, wie sie von V. v. Lang[1]) bei seiner Theorie der circularpolarisirenden Medien angewandt ist, erscheint daher vom praktisch-physikalischen Standpunkt aus durchaus gerechtfertigt, und welche Vortheile diese Methode durch Systematisirung der Erscheinungen für die Beherrschung einer Disciplin bringen kann, ist wohl in der Elektrodynamik zur Genüge durch die grundlegenden Arbeiten von H. Hertz[2]) erwiesen.

Jene oben angeregte Frage läßt sich nun für eine Klasse optischer Erscheinungen in bejahendem Sinne beantworten, man besitzt Erklärungssysteme, welche bisher alle in ihren Kreis fallenden Thatsachen der Beobachtung entsprechend beschreiben, und vielen mechanischen Theorieen und der elektromagnetischen gemeinsam sind. Diese, ich möchte sagen sicher fundirten Erklärungsysteme sollen im Folgenden für einzelne Gebiete optischer Erscheinungen zusammengestellt werden, und wenn ich dabei Manches schon Bekannte recapitulire, so geschieht es, um einen abgerundeten Ueberblick über das bisher Erreichte zu gewinnen.

Durchsichtige isotrope Medien.

Bezeichnen u, v, w die nach den rechtwinkligen Richtungen x, y, z genommenen Komponenten eines periodisch mit der Zeit sich ändernden Vectors, ferner ξ, η, ζ die rechtwinkligen Komponenten eines aus dem ersten Vector durch folgende Operationen ableitbaren Vectors:

$$(1) \qquad \xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

1) V. v. Lang, Pogg. Ann. Ergbd. 8, p. 608, 1878. — Wien. Ber. (II) 75, p. 719, 1877.

2) H. Hertz, Gött. Nachr. No. 4, p. 106, 1890. — Wied. Ann. 40, p. 577; 41, p. 369, 1890.

und Δ die Operation

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

so sind ein experimentell sicher begründetes Erklärungssystem die Differentialgleichungen:

$$(2)\quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a\Delta u = a\Big(\frac{\partial \eta}{\partial z}-\frac{\partial \zeta}{\partial y}\Big),\\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a\Delta v = a\Big(\frac{\partial \zeta}{\partial x}-\frac{\partial \xi}{\partial z}\Big),\\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= a\Delta w = a\Big(\frac{\partial \xi}{\partial y}-\frac{\partial \eta}{\partial x}\Big),\\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

(von diesen vier Differentialgleichungen sind nur drei von einander unabhängig), und, falls die z-Axe senkrecht zur Grenze zweier Medien 1 und 2 verläuft eine der beiden folgenden Formen Grenzbedingungen. Entweder für $z = 0$:

$$(3)\qquad u_1 = u_2,\ v_1 = v_2,\ a_1\xi_1 = a_2\xi_2,\ a_1\eta_1 = a_2\eta_2,$$

oder für $z = 0$:

$$(3')\qquad u_1 = u_2,\ v_1 = v_2,\ \xi_1 = \xi_2,\ \eta_1 = \eta_2.$$

In diesen Formeln bedeuten die angehängten Indices die Zugehörigkeit zu dem betreffenden Medium. Die optische Konstante a ist von der Schwingungsdauer abhängig.

Es ist bekannt, daß die Differentialgleichungen (2) in Verbindung mit den Grenzbedingungen (3) übereinstimmen mit den Resultaten der Neumann'schen Lichttheorie, derzufolge der Vector einer linear polarisirten Lichtwelle in ihre Polarisationsebene fällt. Aus den Grenzbedingungen (3) ergiebt sich auch in Verbindung mit der dritten der Differentialgleichungen (2) die Neumann'sche Grenzbedingung

$$w_1 = w_2 \text{ für } z = 0.$$

Da ferner in der Neumann'schen Theorie der Coefficient von $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ in den drei ersten der Differentialgleichungen (2) die Bedeutung der Dichte des Aethers, der Coefficient der Differentialquotienten der rechten Seite die Bedeutung seiner Elasti-

cität besitzt, so repräsentiren die Differentialgleichungen (2) die Neumann'sche Annahme gleicher Dichte des Aethers in allen Medien, aber verschiedener Elasticität.

Daß die Grenzbedingungen (3') in Verbindung mit den Differentialgleichungen (2) mit den Resultaten der Fresnel'schen Theorie übereinstimmen, tritt besonders dann deutlich zu Tage, wenn man die Differentialgleichungen (2) in die Form setzt:

$$(2') \qquad \begin{aligned} \frac{1}{a}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \Delta u = \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right), \\ \frac{1}{a}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \Delta v = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}\right), \\ \frac{1}{a}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \Delta w = \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\right). \end{aligned}$$

Diese Form der Differentialgleichungen entspricht der Fresnel'schen Annahme verschiedener Dichte $\left(\frac{1}{a}\right)$ des Aethers in den verschiedenen Medien und gleicher Elasticität. Die beiden letzten der Grenzbedingungen (3') ergaben in Verbindung mit den letzten der Gleichungen (2') die Fresnel'sche Grenzbedingung:

$$\text{Für } z = 0: \qquad \frac{1}{a_1} w_1 = \frac{1}{a_2} w_2, \text{ oder } \sigma_1 w_1 = \sigma_2 w_2,$$

falls mit σ die Aetherdichte bezeichnet wird.

Aus den Grenzbedingungen $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$ ergiebt sich nach der dritten der Gleichungen (1) stets $\zeta_1 = \zeta_2$. Man kann daher an Stelle der Grenzbedingungen (3') auch schreiben:

$$(3'') \qquad v_1 = v_2, \ \xi_1 = \xi_2, \ \eta_1 = \eta_2, \ \zeta_1 = \zeta_2 \quad \text{für } z = 0.$$

Diese Grenzbedingungen ergeben sich auch aus der Cauchy'schen Reflexionstheorie, wenn der sogenannte Ellipticitätscoefficient gleich Null gesetzt wird und wenn aus den Grenzbedingungen, welche in der Cauchy'schen Theorie ursprünglich ganz anders lauten, da sie auch die Komponenten der von Cauchy eingeführten Longitudinalwelle enthalten, letztere eleminirt werden, wie Poincaré gezeigt hat[1]). — Setzt man die Geschwindigkeit der Longitudinal-Wellen in beiden aneinander grenzenden Medien gleich, so wird der Ellipticitätscoefficient Null. Nimmt man ihn von Null ver-

1) H. Poincaré, Théorie math. de la lumière. Paris, 1889, p. 356.

schieden, so erhält man eine Abweichung von den Grenzbedingungen (3″), und eine Erklärung der von Jamin[1]) näher studirten Erscheinungen der elliptischen Reflexion an durchsichtigen Körpern, welche aber nicht für alle Einzelheiten ausreicht[2]). Dagegen kann man[3]) diese durch die Vorstellung von Oberflächenschichten consequent aus den aufgestellten Grenzbedingungen (3), (3′) oder (3″) erklären ohne Zuhilfenahme von Longitudinalwellen, und daher habe ich oben das aufgestellte Erklärungssystem experimentell sicher begründet genannt.

Es läßt sich ferner leicht nachweisen, daß man von den Neumann'schen Grenzbedingungen (3) aus zu den Fresnel'schen Resultaten geführt wird, wenn man nicht u, v, w, sondern $a\xi, a\eta, a\zeta$ als Komponenten des Lichtvectors interpretirt. Die beiden letzten der Gleichungen (3) entsprechen nämlich dann den beiden ersten der Fresnel'schen Grenzbedingungen (3′), die beiden ersten der Gleichungen (3) sind nach den Differentialgleichungen (2) identisch mit

$$\frac{\partial a_1\xi_1}{\partial y} - \frac{\partial a_1\eta_1}{\partial z} = \frac{\partial a_2\xi_2}{\partial y} - \frac{\partial a_2\eta_2}{\partial z}$$

und mit

$$\frac{\partial a_1\xi_1}{\partial z} - \frac{\partial a_1\zeta_1}{\partial x} = \frac{\partial a_2\xi_2}{\partial z} - \frac{\partial a_2\zeta_2}{\partial x},$$

d.h. sie entsprechen den letzten beiden der Fresnel'schen Grenzbedingungen (3′). Aus den Gleichungen (2) folgt schließlich

$$(2'') \qquad \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = a\Delta\xi, \quad \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = a\Delta\eta, \quad \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = a\Delta\zeta,$$

es gelten also auch für den Vector, dessen Komponenten $a\xi, a\eta, a\zeta$ sind, dieselben Differentialgleichungen, die für Beschreibung der Thatsachen nothwendig sind.

Ebenso läßt sich nachweisen, daß man von den Fresnel'schen Grenzbedingungen (3′) aus zu den Neumann'schen Resultaten geführt wird, wenn man nicht u, v, w, sondern ξ, η, ζ als Komponenten des Lichtvectors interpretirt. Die beiden letzten der Gleichungen (3′) entsprechen nämlich dann den ersten beiden der Gleichungen (3), die beiden ersten von (3′) den beiden letzten von (3), wie unmittelbar aus den Gleichungen (2) hervorgeht.

---

1) Jamin, Ann. de chim. et de phys. (3), 29, p. 263, 1850.
2) Q. Quincke, Pogg. Ann. 128, p. 359, 1866.
3) Vgl. P. Drude, Wied. Ann. 36, p. 865, 1889. — 43, p. 126, 1891.

Die Grenzbedingungen kann man[1]) auf Grund des Principes ableiten, daß durch Reflexion und Brechung des Lichtes keine Energie verloren geht, in Verbindung mit dem Princip der Continuität der der Grenze parallelen Komponenten des Lichtvectors zu beiden Seiten der Grenze. Wenn nun auch durch Anwendung dieser Principien die Grenzbedingungen in gewisser Weise wahrscheinlich gemacht werden, so verlieren sie dadurch doch noch immer nicht den Charakter des Hypothetischen. Denn man kann die Grenzbedingungen nur dann in einer bestimmten Form aus jenen beiden Principien ableiten, wenn man eine bestimmte Voraussetzung darüber macht, durch welche Formel die Energie der Lichtbewegung, oder wenigstens ein Theil derselben, z. B. die kinetische, ausgedrückt wird. Diese Formel selbst bleibt aber stets hypothetisch, und daher ist der Beweis der Richtigkeit der Grenzbedingungen stets nur durch den Erfolg bei Darstellung der Beobachtungen zu erbringen. — Dagegen ist es für die Durchführbarkeit einer besonderen Vorstellung über die Natur der Lichtbewegung von Bedeutung, ob die Grenzbedingungen mit dem Energieprincip in der Form, wie sie eben durch jene besondere Vorstellung geliefert wird, verträglich sind oder nicht. — In allen mechanischen Theorieen ist die kinetische Energie des Aethers in einem Raume durch den Ausdruck

$$T = \tfrac{1}{2}\sigma\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right]dk$$

gegeben, wo dk das Volumenelement des betrachteten Raumes bedeutet und σ die Dichte des Lichtäthers. Der Differentialquotient dieses Ausdruckes nach t muß sich als Differentialquotient einer Funktion nach der Zeit darstellen, falls das Energieprincip Gültigkeit besitzen soll.

Nach dem Neumann'schen Standpunkte ist nun $\sigma = 1$ zu setzen. Durch Multiplication der drei ersten Differentialgleichungen (2) mit resp. $\frac{\partial u}{\partial t}dk$, $\frac{\partial v}{\partial t}dk$, $\frac{\partial w}{\partial t}dk$ und Integration über den Raum kann man die rechte Seite derselben durch partielle Inte-

1) Auf diesem Wege sind die Grenzbedingungen von Fresnel und Neumann überhaupt zuerst gewonnen, nur mit dem Unterschiede, daß sie nicht die gesammte Energie, sondern nur ihren kinetischen Theil als constant setzten. Das Princip ist später von Kirchhoff (Berl. Ber. 1876, p. 57) strenger gefaßt und von Voigt (Wied. Ann. 48, p. 410, 1891) consequent zur Aufstellung der Grenzbedingungen benutzt.

gration in ein Raumintegral und ein Oberflächenintegral verwandeln. Nimmt man an, daß die Normale der Oberfläche des Raumes, dessen Energie berechnet wird, mit der z-Axe an den Stellen zusammenfällt, wo Lichtbewegung existirt, so schreibt sich

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{a}{2}\int(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\,dk + a\int\left(\eta\frac{\partial u}{\partial t}-\xi\frac{\partial v}{\partial t}\right)do.$$

Die Grenzbedingungen (3) erscheinen daher mit dem Energieprincip vereinbar. Zugleich sieht man, daß der Vector, dessen Komponenten ξ, η, ζ sind, die potentielle Energie bestimmt, wie der Vector, dessen Komponenten u, v, w sind, die kinetische.

Es läßt sich nachweisen, daß in gleicher Weise die Grenzbedingungen (3′) aus dem Energieprincip folgen würden in Verbindung mit dem Princip der Continuität des Lichtvectors zu beiden Seiten der Grenze, falls man ξ, η, ζ als seine Komponenten interpretirt hätte. In der That folgt aus den Gleichungen (2″), welche sich schreiben lassen in der Form

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = a\left(\frac{\partial\Delta w}{\partial y}-\frac{\partial\Delta v}{\partial z}\right),$$
$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = a\left(\frac{\partial\Delta u}{\partial z}-\frac{\partial\Delta w}{\partial x}\right),$$
$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = a\left(\frac{\partial\Delta v}{\partial x}-\frac{\partial\Delta u}{\partial y}\right),$$

durch Multiplikation mit $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ und Integration

$$\frac{\partial T}{\partial t}dt = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{a}{2}\int[(\Delta u)^2+(\Delta v)^2+(\Delta w)^2]\,dk$$
$$-a\int\left(\Delta v\frac{\partial\xi}{\partial t}-\Delta u\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)do.$$

Da nun nach (2) $a\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $a\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, so erscheinen die Bedingungen (3′) mit dem Energieprincip vereinbar.

Da nach den Bedingungen (3′) der Vector, dessen Komponenten u, v, w sind, den Fresnel'schen Gesetzen gehorcht, und da aus der letzten Formel zugleich folgt, daß jetzt u, v, w die Komponenten desjenigen Vectors sind, mit deren Verschwinden die potentielle Energie verschwindet, während ξ, η, ζ die Komponenten des Vectors der kinetischen Energie bezeichnen, so folgt allge-

mein, daß für den kinetischen Vector, wie der letztere kurz genannt werden möge, die Neumann'schen Gesetze (hinsichtlich Lage zur Polarisationsebene, Reflexionsformeln etc.), für den potentiellen Vector, d. h. den Vector, welcher für die potentielle Energie maßgebend ist, die Fresnel'schen Gesetze gelten.

Das Bisherige gilt vom Neumann'schen Standpunkt aus, nach welchem die Dichte σ des Aethers in allen Medien gleich gesetzt ist. Nach dem Fresnel'schen Standpunkt ist $\sigma = \frac{1}{a}$ zu setzen.

Von den Gleichungen (2') aus kann man die Grenzbedingungen (3') aus dem Energieprincip in Verbindung mit dem Princip der Continuität der beiden Komponenten des Lichtvectors, welche der Grenze parallel sind, ableiten. Das vorhin gewonnene Resultat kehrt sich also grade um, der kinetische Vector ist den Fresnel'schen, der potentielle den Neumann'schen Gesetzen unterworfen. Man erhält also, mechanisch gesprochen, das letztere Resultat oder das erstere, je nachdem man dem Aether in verschiedenen Medien verschiedene Dichte beilegt oder nicht, denn je nachdem hat man von den Gleichungen (2') oder von den Gleichungen (2) auszugehen. Ich möchte keiner Anschauung den Vorrang vor der anderen einräumen, denn was nach der mechanischen Anschauung plausibler ist, kann nach einer anderen weniger plausibel erscheinen. Was die Konstante a für eine wirkliche physikalische Bedeutung besitzt, ist nicht mit Sicherheit zu entscheiden[1]). Die Hauptsache für die praktische Physik ist jedenfalls, daß wir das richtige Erklärungssystem (2) und (3) oder (2) und (3') besitzen.

Wie oben (pag. 369) bemerkt ist, ist die optische Konstante a in den mit ponderabler Materie erfüllten Medien von der Schwingungsdauer des Lichtes als abhängig anzunehmen. Diese Verfügung genügt, um die optischen Erscheinungen ein und derselben Farbe mathematisch zu beschreiben.

Das Erklärungssystem versagt indeß, falls das benutzte Licht nicht von homogener Farbe ist. Die Verstellung der ungestörten Superposition mehrerer Lichtbewegungen verschiedener Farbe verlangt, daß ein gemeinsames Erklärungssystem die Erscheinungen umfassen muß, wozu aber das bisherige nicht ausreicht.

Um diesen Anforderungen zu genügen, hat Cauchy in seiner Dispersionstheorie[2]) höhere Differentialquotienten der u, v, w nach

1) Auch in den mechanischen Theorieen ist sie in verschiedener Weise gedeutet, vgl. dazu Rayleigh, Phil. Mag. (4) 41, p. 519, 1871 und Boussinesq, Liouv. Journ. (2) 13, p. 330, 1868.

2) Cauchy, Mém. sur la dispersion de la lumière. Prag, 1836.

den Coordinaten als Zusatzglieder in den Differentialgleichungen (2) eingeführt, und nach ihm haben Briot[1]) und Sarrau[2]) auf Grund besonderer Vorstellungen über die Konstitution und Eigenschaften der Materie das Auftreten derartiger Zusatzglieder nur in den mit ponderabler Masse erfüllten Medien als statthaft hingestellt, um dadurch den Einwand zu erledigen, daß im leeren Raum Dispersion fehlt.

Indeß ergeben derartige Zusatzglieder die Komplikation, daß in einem isotropen Medium dann mehrere Wellen mit verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sich fortpflanzen könnten, entgegen den Erfahrungs-Thatsachen.

Dagegen kann man zu brauchbaren Dispersionsformeln gelangen, ohne die genannte Komplikation herbeizuführen, wenn man als Zusatzglieder beliebig hohe Differentialquotienten der u, v, w nach der Zeit, aber höchstens zweite Differentialquotienten nach den Coordinaten verwendet.

Diese verschiedene Form der Zusatzglieder, welche die Dispersion erklären, geht Hand in Hand mit einer verschiedenen Auffassung über die Ursache der Dispersion. — Nach Briot und Sarrau liegt dieselbe in der Inhomogenität, d. h. in der molekularen Anordnung der im Aether befindlichen ponderabeln Materie, man kann Reihenentwickelungen anwenden, welche convergiren, falls die Wellenlänge des Lichtes noch groß ist gegen den Abstand der ponderabeln Molecüle.

Nach den neueren Anschauungen dagegen wird den Erscheinungen der anomalen und der normalen Dispersion als gleiche Ursache das Mitschwingen der ponderabeln Molecüle beigelegt. — Nach der v. Helmholtz'schen Dispersionstheorie[3]) hat man daher von einem System simultaner Differentialgleichungen mehrerer Vectoren auszugehen, von denen der eine den im Aether schwingenden Lichtvector darstellt, während die anderen sich auf irgend welche Zustandsänderungen in den ponderabeln Melecülen beziehen. Dieses Erklärungssystem ist daher weit complicirter, als das oben gegebene. In gewissen Fällen kann man aber an Stelle des Systems simultaner Differentialgleichungen die Differentialgleichungen

1) Ch. Briot, Essai sur la théorie mathém. de la lumière. Paris, 1863. Deutsch v. Klinkerfues, Leipzig, 1867.

2) Sarrau, Lionv. Journ. (2), 12, p. 1, 1867. — 13, p. 59, 1868.

3) Man vgl. auch die Arbeiten von E. Ketteler, Wied. Ann. 7, p. 658, 1879. — 11, p. 210, 1880. — 12, p. 363, 481, 1881. — 21, p. 199, 1884, sowie W. Thomson, (Vorlesungen an der John Hopkins University, 1884) und F. Lindemann (Ueber Molekularphysik, Königsberg, 1888).

nur eines einzigen Vectors setzen, nämlich dann, wenn die Schwingungsdauer des Lichtes nicht nahe mit der Dauer einer Eigenschwingung der ponderabeln Molecüle zusammenfällt.

Da der Betrag der Vectoren, die letztere darstellten, in diesen Fällen gering ist im Vergleich zu dem Betrage des Lichtvectors im Aether, so kann man Differentialgleichungen für letzteren allein durch successive Annäherungen erhalten, indem man als erste Näherung die Vectoren der ponderabeln Molecüle überhaupt nicht berücksichtigt, als zweite Näherung dagegen für sie diejenigen Werthe einführt, die sich aus dem ursprünglichen System simultaner Differentialgleichungen ergeben, wenn man in ihnen für den Lichtvector die erste Näherung einführt, u. s. f.

Aus der Form des ursprünglichen Systemes simultaner Differentialgleichungen ergiebt sich dann ohne Weiteres, daß der Effekt derartiger Operationen der ist, daß in unserem Gleichungssystem (2) die successiven Annäherungsglieder Differentialquotienten nach t von wachsender Ordnungszahl ergeben.

Diese Zusatzglieder sind also hiernach als Reihenentwickelungen aufzufassen, welche convergiren, so lange die Schwingungsdauer des Lichtes nicht nahe mit einer Eigenschwingungs-Dauer der Materie zusammenfällt. — Ohne auf das ursprüngliche System simultaner Differentialgleichungen zurückgehen zu müssen, kann man die Form jener Zusatzglieder in gewisser Weise bestimmen. Vollkommene Durchsichtigkeit des Mediums ergiebt nämlich, daß nur gerade Differentialquotienten der u, v, w nach t zugefügt werden können, sodaß die erweiterte Form der Differentialgleichungen (2) lautet:

$$(2''') \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a' \Delta u + a'' \frac{\partial^2 \Delta u}{\partial t^2} + a''' \frac{\partial^4 \Delta u}{\partial t^4} + \cdots,$$

. . . . .

wobei a', a'', $a''' \cdots$ wirklich Konstanten bedeuten, d. h. von der Schwingungsdauer unabhängig sind. Nimmt man an, daß u der reelle Theil der Funktion

$$e^{\frac{i}{\tau}t} f(x, y, z)$$

sei, so folgt, daß, wenn man die Gleichung (2''') identificirt mit der ersten der Gleichungen (2), man zu setzen hat:

$$a = a' - \frac{a''}{\tau^2} + \frac{a'''}{\tau^4} - \cdots.$$

Wie Voigt[1]) gezeigt hat, sind die Grenzbedingungen (3) und die Gleichungen (2″) mit dem Energieprincip vereinbar.

Bei dieser Dispersionserklärung ist der Neumann'sche Standpunkt festgehalten, nach welchem die Dichtigkeit des Aethers in allen Medien als gleich angenommen wird. Um vom Standpunkte Fresnel's aus, welcher die Elasticität des Aethers in allen Medien als gleich annimmt, die Dispersion zu umfassen, kann man den Formeln (2′) eine Erweiterung in der Form geben:

$$(2''') \qquad \frac{1}{a'}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{1}{a''}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}+\frac{1}{a'''}\frac{\partial^6 u}{\partial t^6}+\cdots = \Delta u,$$

. . . . . .

Es ist also nach (2′) zu setzen:

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{a'}-\frac{1}{a''\tau^2}+\frac{1}{a'''\tau^4}-\cdots.$$

Nach den Differentialgleichungen (2‴) erscheinen die Grenzbedingungen (3′) mit dem Energieprincip verträglich, da allgemein $\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial^n u}{\partial t^n}$ ein Differentialquotient nach der Zeit ist, falls n eine grade Zahl ist.

Sind im Vorigen die Resultate der mechanischen Lichttheorieen behandelt, so mögen jetzt die der elektromagnetischen Theorie näher betrachtet werden.

Das Formelsystem derselben ist[2]) das folgende:

Sind L, M, N die Komponenten der magnetischen, X, Y, Z die der elektrischen Kraft, bedeutet A die reciproke Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum, μ die Magnetisirungs-, ε die Dielectricitätsconstante des betrachteten Mediums, letztere gemessen in elektrostatischem Maß, so gelten die Differentialgleichungen:

$$(4) \qquad \begin{aligned} A\mu\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}, & A\varepsilon\frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y},\\ A\mu\frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}, & A\varepsilon\frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial z},\\ A\mu\frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}, & A\varepsilon\frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}, \end{aligned}$$

und die Grenzbedingungen:

$$(5) \qquad L_1 = L_2,\ M_1 = M_2,\ X_1 = X_2,\ Y_1 = Y_2 \text{ für } z = 0.$$

1) W. Voigt, Wied. Ann. 48, p. 410, 1891.

2) Vgl. H. Hertz, l. c.

Aus den Gleichungen (4) kann man leicht ableiten:

$$(6) \qquad A\mu\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} = \frac{1}{A\varepsilon}\Delta L, \quad A\varepsilon\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{1}{A\mu}\Delta X;$$

. . . . . .

setzt man daher $\frac{1}{A^2\mu\varepsilon} = a$, und interpretirt die magnetischen Kraftkomponenten L, M, N als die Komponenten des Lichtvectors u, v, w, so werden die Differentialgleichungen (6) für L, M, N identisch mit den Gleichungen (2), die Grenzbedingungen (5) aber gehen, falls man voraussetzt, daß μ für alle Medien gleich ist, in die Grenzbedingungen (3) über.

Es folgen daher die Resultate der Neumann'schen Theorie. — Interpretirt man die elektrische Kraft als Lichtvector, so gehen die Grenzbedingungen (5) in die Grenzbedingungen (3') über (falls $\mu_1 = \mu_2$), es folgen daher die Resultate der Fresnel'schen Theorie.

Nach Maxwell wird die kinetische Energie des Mediums durch die magnetische Kraft, die potentielle Energie durch die elektrische Kraft bestimmt. Daher befolgt nach der Maxwell'schen Auffassung der kinetische Vector die Neumann'schen Gesetze, der potentielle Vector die Fresnel'schen; die Maxwell'sche Auffassung steht daher in der genannten Hinsicht im Einklang mit der Neumann'schen, im Gegensatz zu der Fresnel'schen Auffassung von der Natur der Lichtbewegung (cf. oben pag. 374).

Die Annahme, daß für alle Medien die Magnetisirungsconstante den gleichen Werth besitze, erscheint für derartig schnelle Bewegungen, wie sie bei Lichtschwingungen stattfinden, durchaus berechtigt, da Hertz[1]) schon für sehr viel langsamere elektromagnetische Störungen nachgewiesen hat, daß die Magnetisirungsconstante des Mediums die Erscheinungen nicht modificirt. — Es soll demnach von nun an μ für alle Medien gleich, und zwar gleich 1, der Magnetisirungsconstante des Aethers, gesetzt werden.

Da das Erklärungssystem der elektromagnetischen Theorie mit

---

1) H. Hertz, Wied. Ann. 31, p. 421, 1887. — 34, p. 558, 1888. Diese Versuche können ja allerdings auch nach Hertz dadurch ihre Erklärung finden, daß sehr schnelle elektrische Schwingungen nur an der Oberfläche der Leitungsdrähte ihren Sitz haben. — Durch andere Erscheinungen ist es aber wahrscheinlich gemacht, daß die im Vergleich zu anderen Körpern sehr starke Magnetisirung des Eisens durch Richtung seiner Molecüle hervor gebracht wird, d. h. durch einen Vorgang von einer gewissen Trägheit, welcher bei sehr schnellen Veränderungen der magnetisirenden Kraft nicht eintreten wird.

dem System (2) und (3), resp. (2) und (3') identisch ist, so beschreibt sie daher die Thatsachen vollständig, falls man ε die Bedeutung einer gewissen, erst aus den optischen Experimenten ableitbaren Konstanten beilegt, welche mit der Schwingungsdauer des angewandten Lichtes variirt. Wie pag. 377 gesagt ist, ist die ursprüngliche Bedeutung von ε eine andere. Die ursprünglichen Gleichungen (4) der elektromagnetischen Theorie sind daher zu erweitern, falls man ε seine eigentliche Bedeutung lassen und zugleich die Dispersion erklären will.

Eine Erweiterung ist nach ähnlichen Grundsätzen vorzunehmen, wie sie oben bei den mechanischen Theorieen besprochen sind. In der That hat Koláček[1]) eine Dispersionstheorie nach der elektromagnetischen Vorstellung des Lichtes gebildet, deren Gleichungssystem dem der oben besprochenen v. Helmholtz'schen Dispersionstheorie ähnlich ist. — Ebenso, wie oben erwähnt wurde, kann man an Stelle des Systemes simultaner Differentialgleichungen mehrerer Vectoren die Differentialgleichungen eines einzigen Vectors setzen, welche als gültige Annäherungen zu betrachten sind, falls die Dauer der Lichtschwingung von der Dauer einer Eigenschwingung der Molecüle des Mediums wesentlich verschieden ist. Auch hier kann man die Form der nach dieser Methode zu den Gleichungen (4) zuzufügenden Zusatzglieder nach gewissen Ueberlegungen ermitteln, ohne von dem ursprünglichen System simultaner Differentialgleichungen ausgehen zu müssen. Das erste Tripel der Gleichungen (4) (für $\frac{\partial L}{\partial t}$ etc.) scheint keine Erweiterung zuzulassen, da ein Zufügen von irgend welchen Differentialquotienten nach der Zeit denselben Effekt hätte, als ob die Konstante μ der Formeln (4) mit der Schwingungsdauer variirte, was unstatthaft ist. Denn im freien Aether, in welchem jede Dispersion fehlt, ist μ von der Schwingungsdauer unabhängig und da die Magnetisirungsconstanten aller Medien als gleich angenommen werden sollen, so muß auch μ in jedem Medium eine absolute Konstante sein. Durch die Anwesenheit ponderabler Materie ist also nur eine Erweiterung in dem zweiten Tripel der Gleichungen (4) vorzunehmen[2]). Mit der vollkommenen Durchsichtigkeit des Mediums ist folgende Erweiterung der Formeln (4) vereinbar:

---

1) F. Koláček, Wied. Ann. 34, p. 673, 1888.

2) Dieses Verfahren befindet sich in Uebereinstimmung mit dem von H. Hertz in den citirten Arbeiten (Gött. Nachr. 4, 1890, p. 106) eingeschlagenen Wege.

$^{n+1)}$ den $(2n+1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von φ nach der Zeit leutet, so folgt, daß nach (8) die Grenzbedingungen

$$X_1 = X_2, \quad Y_1 = Y_2, \quad L_1 = L_2, \quad M_1 = M_2$$

it dem Energieprincip verträglich sind.

Da man aus (4′) sofort ableiten kann:

$$A^2\left(\varepsilon\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \varepsilon'\frac{\partial^4 X}{\partial t^4} + \cdots\right) = \Delta X$$

. . . . . .

$$A^2\left(\varepsilon\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} + \varepsilon'\frac{\partial^4 L}{\partial t^4} + \cdots\right) = \Delta L$$

. . . . . .

so werden für periodische Bewegungen, für welche $\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = -\frac{X}{\tau^2}$ etc. ist, die Gleichungen (9) mit den Formeln (2) identisch, falls man etzt

$$\frac{1}{a} = A^2\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon'}{\tau^2} + \frac{\varepsilon''}{\tau^4} - \cdots\right). \tag{10}$$

Das Erklärungssystem ist also völlig ungeändert geblieben, und die Widersprüche, welche gegen die ursprünglichen Formeln der elektromagnetischen Theorie zu erheben waren, weil a mit der Schwingungsdauer variirt und nicht gleich $\frac{1}{A^2\varepsilon}$ ist, sind fortgefallen[1]). Die erweiterten Formeln (4′) beschreiben außerdem langsam veränderliche, elektromagnetische Störungen ebenso gut, wie die ursprünglichen Formeln (4), denn die Zusatzglieder in (4′) gewinnen nur bei kleinen Schwingungsdauern Einfluß.

Absorbirende isotrope Medien.

Ein experimentell sicher begründetes Erklärungssystem bilden diejenigen Gleichungen, welche man aus (2) (3) und (3′) erhält, wenn man in ihnen a als complex annimmt und u, v, w den reellen Theilen der complexen Integrale der Differentialgleichungen gleich-

1) Dies gilt besonders für diejenigen Medien, für welche der Brechungsexponent gegen Luft nur wenig von dem Werthe $\sqrt{\varepsilon}$ abweicht. Ist die Abweichung bedeutend, wie z. B. bei Wasser, so ist diese vielleicht so zu erklären, daß zwischen den Schwingungsdauern der bisher benutzten elektromagnetischen und der optischen Bewegungen die Dauer einer Eigenschwingung des Wassers liegt. Es könnte dann nicht ein und dieselbe Reihenentwickelung die elektromagnetischen und optischen Dispersionserscheinungen darstellen. — Es fehlt bisher noch der experimentelle Beweis zur Stütze dieser Auffassung.

$$A\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z},$$

. . . . . .

$$A\left(\varepsilon\frac{\partial X}{\partial t} + \varepsilon'\frac{\partial^3 X}{\partial t^3} + \varepsilon''\frac{\partial^5 X}{\partial t^5} + \cdots\right) = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} \tag{4'}$$

. . . . . .

Die Grenzbedingungen (5) ergeben sich[1]) aus gewissen Vorstellungen der elektromagnetischen Theorie, die man auch in der erweiterten Theorie gelten lassen wird, wenn man sie in der ursprünglichen acceptirt.

Wir wollen sehen, ob noch die Grenzbedingungen (5) mit dem Energieprincip verträglich sind.

In der ursprünglichen elektromagnetischen Theorie wird die Energie eines Raumes durch die Formel gegeben:

$$E = \frac{1}{8\pi}\int(L^2 + M^2 + N^2)\,dk + \frac{\varepsilon}{8\pi}\int(X^2 + Y^2 + Z^2)\,dk.$$

In der erweiterten Theorie in welcher das Mitschwingen der Materie berücksichtigt wird, kann sich diese Formel für E geändert haben. Jedenfalls aber ist die Annahme gerechtfertigt, daß der hier angegebene Ausdruck ein Theil der Energie ist. Es muß also auch in der erweiterten Theorie der Ausdruck

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int\left(L\frac{\partial L}{\partial t} + M\frac{\partial M}{\partial t} + N\frac{\partial N}{\partial t}\right)dk + \varepsilon\int\left(X\frac{\partial X}{\partial t} + Y\frac{\partial Y}{\partial t} + Z\frac{\partial Z}{\partial t}\right)dk \tag{7}$$

ein Differentialquotient nach der Zeit sein.

Multiplicirt man nun die Gleichungen (4') resp. mit Ldk, Mdk, Ndk, Xdk, Ydk, Zdk und führt im ersten Tripel der Gleichungen (4') eine partielle Integration aus, so erhält man:

$$A\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \varepsilon'\int\left(X\frac{\partial^3 X}{\partial t^3} + Y\frac{\partial^3 Y}{\partial t^3} + Z\frac{\partial^3 Z}{\partial t^3}\right)dk + \varepsilon''\int\left(X\frac{\partial^5 X}{\partial t^5} + Y\frac{\partial^5 Y}{\partial t^5} + Z\frac{\partial^5 Z}{\partial t^5}\right)dk + \cdots\right] = \int(MX - LY)\,do, \tag{8}$$

falls die Normale der Oberfläche, über welche das Oberflächenintegral erstreckt wird, mit der z-Axe zusammenfällt. Da nun $\varphi \cdot \varphi^{(2n+1)}$ stets ein Differentialquotient nach der Zeit ist, falls

1) Vgl. F. Kolácek, Wied. Ann. 32, p. 430, 1887.

$\varphi^{(2n+1)}$ den $(2n+1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von φ nach der Zeit bedeutet, so folgt, daß nach (8) die Grenzbedingungen

$$X_1 = X_2, \quad Y_1 = Y_2, \quad L_1 = L_2, \quad M_1 = M_2$$

mit dem Energieprincip verträglich sind.

Da man aus (4′) sofort ableiten kann:

$$(9)\qquad \begin{aligned} A^2\left(\varepsilon\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \varepsilon'\frac{\partial^4 X}{\partial t^4} + \cdots\right) &= \Delta X \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & \\ A^2\left(\varepsilon\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} + \varepsilon'\frac{\partial^4 L}{\partial t^4} + \cdots\right) &= \Delta L \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & \end{aligned}$$

so werden für periodische Bewegungen, für welche $\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = -\frac{X}{\tau^2}$ etc. ist, die Gleichungen (9) mit den Formeln (2) identisch, falls man setzt

$$(10)\qquad \frac{1}{a} = A^2\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon'}{\tau^2} + \frac{\varepsilon''}{\tau^4} - \cdots\right).$$

Das Erklärungssystem ist also völlig ungeändert geblieben, und die Widersprüche, welche gegen die ursprünglichen Formeln der elektromagnetischen Theorie zu erheben waren, weil a mit der Schwingungsdauer variirt und nicht gleich $\frac{1}{A^2\varepsilon}$ ist, sind fortgefallen[1]). Die erweiterten Formeln (4′) beschreiben außerdem langsam veränderliche, elektromagnetische Störungen ebenso gut, wie die ursprünglichen Formeln (4), denn die Zusatzglieder in (4′) gewinnen nur bei kleinen Schwingungsdauern Einfluß.

Absorbirende isotrope Medien.

Ein experimentell sicher begründetes Erklärungssystem bilden diejenigen Gleichungen, welche man aus (2) (3) und (3′) erhält, wenn man in ihnen a als complex annimmt und u, v, w den reellen Theilen der complexen Integrale der Differentialgleichungen gleich-

1) Dies gilt besonders für diejenigen Medien, für welche der Brechungsexponent gegen Luft nur wenig von dem Werthe $\sqrt{\varepsilon}$ abweicht. Ist die Abweichung bedeutend, wie z. B. bei Wasser, so ist diese vielleicht so zu erklären, daß zwischen den Schwingungsdauern der bisher benutzten elektromagnetischen und der optischen Bewegungen die Dauer einer Eigenschwingung des Wassers liegt. Es könnte dann nicht ein und dieselbe Reihenentwickelung die elektromagnetischen und optischen Dispersionserscheinungen darstellen. — Es fehlt bisher noch der experimentelle Beweis zur Stütze dieser Auffassung.

$$A\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$(4') \qquad A\left(\varepsilon\frac{\partial X}{\partial t} + \varepsilon'\frac{\partial^3 X}{\partial t^3} + \varepsilon''\frac{\partial^5 X}{\partial t^5} + \cdots\right) = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Die Grenzbedingungen (5) ergeben sich[1]) aus gewissen Vorstellungen der elektromagnetischen Theorie, die man auch in der erweiterten Theorie gelten lassen wird, wenn man sie in der ursprünglichen acceptirt.

Wir wollen sehen, ob noch die Grenzbedingungen (5) mit dem Energieprincip verträglich sind.

In der ursprünglichen elektromagnetischen Theorie wird die Energie eines Raumes durch die Formel gegeben:

$$E = \frac{1}{8\pi}\int(L^2 + M^2 + N^2)\,dk + \frac{\varepsilon}{8\pi}\int(X^2 + Y^2 + Z^2)\,dk.$$

In der erweiterten Theorie in welcher das Mitschwingen der Materie berücksichtigt wird, kann sich diese Formel für E geändert haben. Jedenfalls aber ist die Annahme gerechtfertigt, daß der hier angegebene Ausdruck ein Theil der Energie ist. Es muß also auch in der erweiterten Theorie der Ausdruck

$$(7) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int\left(L\frac{\partial L}{\partial t} + M\frac{\partial M}{\partial t} + N\frac{\partial N}{\partial t}\right)dk + \varepsilon\int\left(X\frac{\partial X}{\partial t} + Y\frac{\partial Y}{\partial t} + Z\frac{\partial Z}{\partial t}\right)dk$$

ein Differentialquotient nach der Zeit sein.

Multiplicirt man nun die Gleichungen (4') resp. mit Ldk, Mdk, Ndk, Xdk, Ydk, Zdk und führt im ersten Tripel der Gleichungen (4') eine partielle Integration aus, so erhält man:

$$(8) \qquad \begin{aligned} A\Big[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \varepsilon'\int\Big(X\frac{\partial^3 X}{\partial t^3} + Y\frac{\partial^3 Y}{\partial t^3} + Z\frac{\partial^3 Z}{\partial t^3}\Big)\,dk \\ + \varepsilon''\int\Big(X\frac{\partial^5 X}{\partial t^5} + Y\frac{\partial^5 Y}{\partial t^5} + Z\frac{\partial^5 Z}{\partial t^5}\Big)\,dk + \cdots\Big] = \\ \int(MX - LY)\,do, \end{aligned}$$

falls die Normale der Oberfläche, über welche das Oberflächenintegral erstreckt wird, mit der z-Axe zusammenfällt. Da nun $\varphi \cdot \varphi^{(2n+1)}$ stets ein Differentialquotient nach der Zeit ist, falls

1) Vgl. F. Kolácek, Wied. Ann. 32, p. 430, 1887.

$\varphi^{(2n+1)}$ den $(2n+1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von φ nach der Zeit bedeutet, so folgt, daß nach (8) die Grenzbedingungen

$$X_1 = X_2, \quad Y_1 = Y_2, \quad L_1 = L_2, \quad M_1 = M_2$$

mit dem Energieprincip verträglich sind.

Da man aus (4′) sofort ableiten kann:

$$(9)\qquad \begin{aligned} A^2\left(\varepsilon\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \varepsilon'\frac{\partial^4 X}{\partial t^4} + \cdots\right) &= \Delta X \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & \\ A^2\left(\varepsilon\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} + \varepsilon'\frac{\partial^4 L}{\partial t^4} + \cdots\right) &= \Delta L \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & \end{aligned}$$

so werden für periodische Bewegungen, für welche $\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = -\frac{X}{\tau^2}$ etc. ist, die Gleichungen (9) mit den Formeln (2) identisch, falls man setzt

$$(10)\qquad \frac{1}{a} = A^2\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon'}{\tau^2} + \frac{\varepsilon''}{\tau^4} - \cdots\right).$$

Das Erklärungssystem ist also völlig ungeändert geblieben, und die Widersprüche, welche gegen die ursprünglichen Formeln der elektromagnetischen Theorie zu erheben waren, weil a mit der Schwingungsdauer variirt und nicht gleich $\frac{1}{A^2\varepsilon}$ ist, sind fortgefallen[1]). Die erweiterten Formeln (4′) beschreiben außerdem langsam veränderliche, elektromagnetische Störungen ebenso gut, wie die ursprünglichen Formeln (4), denn die Zusatzglieder in (4′) gewinnen nur bei kleinen Schwingungsdauern Einfluß.

Absorbirende isotrope Medien.

Ein experimentell sicher begründetes Erklärungssystem bilden diejenigen Gleichungen, welche man aus (2) (3) und (3′) erhält, wenn man in ihnen a als complex annimmt und u, v, w den reellen Theilen der complexen Integrale der Differentialgleichungen gleich-

1) Dies gilt besonders für diejenigen Medien, für welche der Brechungsexponent gegen Luft nur wenig von dem Werthe $\sqrt{\varepsilon}$ abweicht. Ist die Abweichung bedeutend, wie z. B. bei Wasser, so ist diese vielleicht so zu erklären, daß zwischen den Schwingungsdauern der bisher benutzten elektromagnetischen und der optischen Bewegungen die Dauer einer Eigenschwingung des Wassers liegt. Es könnte dann nicht ein und dieselbe Reihenentwickelung die elektromagnetischen und optischen Dispersionserscheinungen darstellen. — Es fehlt bisher noch der experimentelle Beweis zur Stütze dieser Auffassung.

$$A\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z},$$

. . . . . .

$$(4') \qquad A\left(\varepsilon\frac{\partial X}{\partial t} + \varepsilon'\frac{\partial^3 X}{\partial t^3} + \varepsilon''\frac{\partial^5 X}{\partial t^5} + \cdots\right) = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}$$

. . . . . .

Die Grenzbedingungen (5) ergeben sich[1]) aus gewissen Vorstellungen der elektromagnetischen Theorie, die man auch in der erweiterten Theorie gelten lassen wird, wenn man sie in der ursprünglichen acceptirt.

Wir wollen sehen, ob noch die Grenzbedingungen (5) mit dem Energieprincip verträglich sind.

In der ursprünglichen elektromagnetischen Theorie wird die Energie eines Raumes durch die Formel gegeben:

$$E = \frac{1}{8\pi}\int(L^2 + M^2 + N^2)\,dk + \frac{\varepsilon}{8\pi}\int(X^2 + Y^2 + Z^2)\,dk.$$

In der erweiterten Theorie in welcher das Mitschwingen der Materie berücksichtigt wird, kann sich diese Formel für E geändert haben. Jedenfalls aber ist die Annahme gerechtfertigt, daß der hier angegebene Ausdruck ein Theil der Energie ist. Es muß also auch in der erweiterten Theorie der Ausdruck

$$(7) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int\left(L\frac{\partial L}{\partial t} + M\frac{\partial M}{\partial t} + N\frac{\partial N}{\partial t}\right)dk + \varepsilon\int\left(X\frac{\partial X}{\partial t} + Y\frac{\partial Y}{\partial t} + Z\frac{\partial Z}{\partial t}\right)dk$$

ein Differentialquotient nach der Zeit sein.

Multiplicirt man nun die Gleichungen (4') resp. mit Ldk, Mdk, Ndk, Xdk, Ydk, Zdk und führt im ersten Tripel der Gleichungen (4') eine partielle Integration aus, so erhält man:

$$(8) \qquad \begin{aligned} A\Big[\frac{\partial \Phi}{\partial t} &+ \varepsilon'\int\left(X\frac{\partial^3 X}{\partial t^3} + Y\frac{\partial^3 Y}{\partial t^3} + Z\frac{\partial^3 Z}{\partial t^3}\right)dk \\ &+ \varepsilon''\int\left(X\frac{\partial^5 X}{\partial t^5} + Y\frac{\partial^5 Y}{\partial t^5} + Z\frac{\partial^5 Z}{\partial t^5}\right)dk + \cdots\Big] = \\ &\int(MX - LY)\,do, \end{aligned}$$

falls die Normale der Oberfläche, über welche das Oberflächenintegral erstreckt wird, mit der z-Axe zusammenfällt. Da nun $\varphi \cdot \varphi^{(2n+1)}$ stets ein Differentialquotient nach der Zeit ist, falls

1) Vgl. F. Kolácek, Wied. Ann. 32, p. 430, 1887.

$\varphi^{(2n+1)}$ den $(2n+1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von φ nach der Zeit bedeutet, so folgt, daß nach (8) die Grenzbedingungen

$$X_1 = X_2, \quad Y_1 = Y_2, \quad L_1 = L_2, \quad M_1 = M_2$$

mit dem Energieprincip verträglich sind.

Da man aus (4′) sofort ableiten kann:

$$(9)\qquad \begin{aligned} A^2\left(\varepsilon\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \varepsilon'\frac{\partial^4 X}{\partial t^4} + \cdots\right) &= \Delta X \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & \\ A^2\left(\varepsilon\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} + \varepsilon'\frac{\partial^4 L}{\partial t^4} + \cdots\right) &= \Delta L \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & \end{aligned}$$

so werden für periodische Bewegungen, für welche $\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = -\frac{X}{\tau^2}$ etc. ist, die Gleichungen (9) mit den Formeln (2) identisch, falls man setzt

$$(10)\qquad \frac{1}{a} = A^2\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon'}{\tau^2} + \frac{\varepsilon''}{\tau^4} - \cdots\right).$$

Das Erklärungssystem ist also völlig ungeändert geblieben, und die Widersprüche, welche gegen die ursprünglichen Formeln der elektromagnetischen Theorie zu erheben waren, weil a mit der Schwingungsdauer variirt und nicht gleich $\frac{1}{A^2\varepsilon}$ ist, sind fortgefallen[1]). Die erweiterten Formeln (4′) beschreiben außerdem langsam veränderliche, elektromagnetische Störungen ebenso gut, wie die ursprünglichen Formeln (4), denn die Zusatzglieder in (4′) gewinnen nur bei kleinen Schwingungsdauern Einfluß.

Absorbirende isotrope Medien.

Ein experimentell sicher begründetes Erklärungssystem bilden diejenigen Gleichungen, welche man aus (2) (3) und (3′) erhält, wenn man in ihnen a als complex annimmt und u, v, w den reellen Theilen der complexen Integrale der Differentialgleichungen gleich-

1) Dies gilt besonders für diejenigen Medien, für welche der Brechungsexponent gegen Luft nur wenig von dem Werthe $\sqrt{\varepsilon}$ abweicht. Ist die Abweichung bedeutend, wie z. B. bei Wasser, so ist diese vielleicht so zu erklären, daß zwischen den Schwingungsdauern der bisher benutzten elektromagnetischen und der optischen Bewegungen die Dauer einer Eigenschwingung des Wassers liegt. Es könnte dann nicht ein und dieselbe Reihenentwickelung die elektromagnetischen und optischen Dispersionserscheinungen darstellen. — Es fehlt bisher noch der experimentelle Beweis zur Stütze dieser Auffassung.

$$A\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z},$$

. . . . . .

$$(4') \qquad A\left(\varepsilon\frac{\partial X}{\partial t} + \varepsilon'\frac{\partial^3 X}{\partial t^3} + \varepsilon''\frac{\partial^5 X}{\partial t^5} + \cdots\right) = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}$$

. . . . . .

Die Grenzbedingungen (5) ergeben sich[1]) aus gewissen Vorstellungen der elektromagnetischen Theorie, die man auch in der erweiterten Theorie gelten lassen wird, wenn man sie in der ursprünglichen acceptirt.

Wir wollen sehen, ob noch die Grenzbedingungen (5) mit dem Energieprincip verträglich sind.

In der ursprünglichen elektromagnetischen Theorie wird die Energie eines Raumes durch die Formel gegeben:

$$E = \frac{1}{8\pi}\int(L^2 + M^2 + N^2)\,dk + \frac{\varepsilon}{8\pi}\int(X^2 + Y^2 + Z^2)\,dk.$$

In der erweiterten Theorie in welcher das Mitschwingen der Materie berücksichtigt wird, kann sich diese Formel für E geändert haben. Jedenfalls aber ist die Annahme gerechtfertigt, daß der hier angegebene Ausdruck ein Theil der Energie ist. Es muß also auch in der erweiterten Theorie der Ausdruck

$$(7) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int\left(L\frac{\partial L}{\partial t} + M\frac{\partial M}{\partial t} + N\frac{\partial N}{\partial t}\right)dk + \varepsilon\int\left(X\frac{\partial X}{\partial t} + Y\frac{\partial Y}{\partial t} + Z\frac{\partial Z}{\partial t}\right)dk$$

ein Differentialquotient nach der Zeit sein.

Multiplicirt man nun die Gleichungen (4') resp. mit Ldk, Mdk, Ndk, Xdk, Ydk, Zdk und führt im ersten Tripel der Gleichungen (4') eine partielle Integration aus, so erhält man:

$$(8) \quad \begin{aligned} A\Big[\frac{\partial \Phi}{\partial t} &+ \varepsilon'\int\left(X\frac{\partial^3 X}{\partial t^3} + Y\frac{\partial^3 Y}{\partial t^3} + Z\frac{\partial^3 Z}{\partial t^3}\right)dk \\ &+ \varepsilon''\int\left(X\frac{\partial^5 X}{\partial t^5} + Y\frac{\partial^5 Y}{\partial t^5} + Z\frac{\partial^5 Z}{\partial t^5}\right)dk + \cdots\Big] = \\ &\int(MX - LY)\,do, \end{aligned}$$

falls die Normale der Oberfläche, über welche das Oberflächenintegral erstreckt wird, mit der z-Axe zusammenfällt. Da nun $\varphi \cdot \varphi^{(2n+1)}$ stets ein Differentialquotient nach der Zeit ist, falls

1) Vgl. F. Koláček, Wied. Ann. 32, p. 430, 1887.

$\varphi^{(2n+1)}$ den $(2n+1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von φ nach der Zeit bedeutet, so folgt, daß nach (8) die Grenzbedingungen

$$X_1 = X_2, \quad Y_1 = Y_2, \quad L_1 = L_2, \quad M_1 = M_2$$

mit dem Energieprincip verträglich sind.

Da man aus (4′) sofort ableiten kann:

$$(9)\qquad \begin{aligned} A^2\left(\varepsilon\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \varepsilon'\frac{\partial^4 X}{\partial t^4} + \cdots\right) &= \Delta X \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & \\ A^2\left(\varepsilon\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} + \varepsilon'\frac{\partial^4 L}{\partial t^4} + \cdots\right) &= \Delta L \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & \end{aligned}$$

so werden für periodische Bewegungen, für welche $\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = -\frac{X}{\tau^2}$ etc. ist, die Gleichungen (9) mit den Formeln (2) identisch, falls man setzt

$$(10)\qquad \frac{1}{a} = A^2\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon'}{\tau^2} + \frac{\varepsilon''}{\tau^4} - \cdots\right).$$

Das Erklärungssystem ist also völlig ungeändert geblieben, und die Widersprüche, welche gegen die ursprünglichen Formeln der elektromagnetischen Theorie zu erheben waren, weil a mit der Schwingungsdauer variirt und nicht gleich $\frac{1}{A^2\varepsilon}$ ist, sind fortgefallen[1]). Die erweiterten Formeln (4′) beschreiben außerdem langsam veränderliche, elektromagnetische Störungen ebenso gut, wie die ursprünglichen Formeln (4), denn die Zusatzglieder in (4′) gewinnen nur bei kleinen Schwingungsdauern Einfluß.

Absorbirende isotrope Medien.

Ein experimentell sicher begründetes Erklärungssystem bilden diejenigen Gleichungen, welche man aus (2) (3) und (3′) erhält, wenn man in ihnen a als complex annimmt und u, v, w den reellen Theilen der complexen Integrale der Differentialgleichungen gleich-

1) Dies gilt besonders für diejenigen Medien, für welche der Brechungsexponent gegen Luft nur wenig von dem Werthe $\sqrt{\varepsilon}$ abweicht. Ist die Abweichung bedeutend, wie z. B. bei Wasser, so ist diese vielleicht so zu erklären, daß zwischen den Schwingungsdauern der bisher benutzten elektromagnetischen und der optischen Bewegungen die Dauer einer Eigenschwingung des Wassers liegt. Es könnte dann nicht ein und dieselbe Reihenentwickelung die elektromagnetischen und optischen Dispersionserscheinungen darstellen. — Es fehlt bisher noch der experimentelle Beweis zur Stütze dieser Auffassung.

$$A\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z},$$

. . . . . .

$$(4') \qquad A\left(\varepsilon\frac{\partial X}{\partial t} + \varepsilon'\frac{\partial^3 X}{\partial t^3} + \varepsilon''\frac{\partial^5 X}{\partial t^5} + \cdots\right) = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}$$

. . . . . .

Die Grenzbedingungen (5) ergeben sich[1]) aus gewissen Vorstellungen der elektromagnetischen Theorie, die man auch in der erweiterten Theorie gelten lassen wird, wenn man sie in der ursprünglichen acceptirt.

Wir wollen sehen, ob noch die Grenzbedingungen (5) mit dem Energieprincip verträglich sind.

In der ursprünglichen elektromagnetischen Theorie wird die Energie eines Raumes durch die Formel gegeben:

$$E = \frac{1}{8\pi}\int(L^2 + M^2 + N^2)\,dk + \frac{\varepsilon}{8\pi}\int(X^2 + Y^2 + Z^2)\,dk.$$

In der erweiterten Theorie in welcher das Mitschwingen der Materie berücksichtigt wird, kann sich diese Formel für E geändert haben. Jedenfalls aber ist die Annahme gerechtfertigt, daß der hier angegebene Ausdruck ein Theil der Energie ist. Es muß also auch in der erweiterten Theorie der Ausdruck

$$(7) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int\left(L\frac{\partial L}{\partial t} + M\frac{\partial M}{\partial t} + N\frac{\partial N}{\partial t}\right)dk + \varepsilon\int\left(X\frac{\partial X}{\partial t} + Y\frac{\partial Y}{\partial t} + Z\frac{\partial Z}{\partial t}\right)dk$$

ein Differentialquotient nach der Zeit sein.

Multiplicirt man nun die Gleichungen (4') resp. mit Ldk, Mdk, Ndk, Xdk, Ydk, Zdk und führt im ersten Tripel der Gleichungen (4') eine partielle Integration aus, so erhält man:

$$(8) \quad \begin{aligned} A\Big[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \varepsilon'\int\left(X\frac{\partial^3 X}{\partial t^3} + Y\frac{\partial^3 Y}{\partial t^3} + Z\frac{\partial^3 Z}{\partial t^3}\right)dk \\ + \varepsilon''\int\left(X\frac{\partial^5 X}{\partial t^5} + Y\frac{\partial^5 Y}{\partial t^5} + Z\frac{\partial^5 Z}{\partial t^5}\right)dk + \cdots\Big] = \\ \int(MX - LY)\,do, \end{aligned}$$

falls die Normale der Oberfläche, über welche das Oberflächenintegral erstreckt wird, mit der z-Axe zusammenfällt. Da nun $\varphi\cdot\varphi^{(2n+1)}$ stets ein Differentialquotient nach der Zeit ist, falls

1) Vgl. F. Koláček, Wied. Ann. 32, p. 430, 1887.

$\varphi^{(2n+1)}$ den $(2n+1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von φ nach der Zeit bedeutet, so folgt, daß nach (8) die Grenzbedingungen

$$X_1 = X_2, \quad Y_1 = Y_2, \quad L_1 = L_2, \quad M_1 = M_2$$

mit dem Energieprincip verträglich sind.

Da man aus (4′) sofort ableiten kann:

$$(9)\qquad \begin{aligned} A^2\left(\varepsilon\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \varepsilon'\frac{\partial^4 X}{\partial t^4} + \cdots\right) &= \Delta X \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & \\ A^2\left(\varepsilon\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} + \varepsilon'\frac{\partial^4 L}{\partial t^4} + \cdots\right) &= \Delta L \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot & \end{aligned}$$

so werden für periodische Bewegungen, für welche $\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = -\frac{X}{\tau^2}$ etc. ist, die Gleichungen (9) mit den Formeln (2) identisch, falls man setzt

$$(10)\qquad \frac{1}{a} = A^2\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon'}{\tau^2} + \frac{\varepsilon''}{\tau^4} - \cdots\right).$$

Das Erklärungssystem ist also völlig ungeändert geblieben, und die Widersprüche, welche gegen die ursprünglichen Formeln der elektromagnetischen Theorie zu erheben waren, weil a mit der Schwingungsdauer variirt und nicht gleich $\frac{1}{A^2\varepsilon}$ ist, sind fortgefallen[1]). Die erweiterten Formeln (4′) beschreiben außerdem langsam veränderliche, elektromagnetische Störungen ebenso gut, wie die ursprünglichen Formeln (4), denn die Zusatzglieder in (4′) gewinnen nur bei kleinen Schwingungsdauern Einfluß.

Absorbirende isotrope Medien.

Ein experimentell sicher begründetes Erklärungssystem bilden diejenigen Gleichungen, welche man aus (2) (3) und (3′) erhält, wenn man in ihnen a als complex annimmt und u, v, w den reellen Theilen der complexen Integrale der Differentialgleichungen gleich-

1) Dies gilt besonders für diejenigen Medien, für welche der Brechungsexponent gegen Luft nur wenig von dem Werthe $\sqrt{\varepsilon}$ abweicht. Ist die Abweichung bedeutend, wie z. B. bei Wasser, so ist diese vielleicht so zu erklären, daß zwischen den Schwingungsdauern der bisher benutzten elektromagnetischen und der optischen Bewegungen die Dauer einer Eigenschwingung des Wassers liegt. Es könnte dann nicht ein und dieselbe Reihenentwickelung die elektromagnetischen und optischen Dispersionserscheinungen darstellen. — Es fehlt bisher noch der experimentelle Beweis zur Stütze dieser Auffassung.

setzt. Es ist bekannt, daß die Cauchy'schen Formeln für Metallreflexion sich aus den Fresnel'schen ergeben, wenn man den Brechungsindex complex annimmt. Da die Cauchy'schen Formeln sich experimentell durchaus bestätigt haben, so kann man auch das genannte Erklärungssystem als richtig ansehen[1]). Dasselbe lautet also:

$$(11)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \alpha \Delta u = \alpha\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \alpha \Delta v = \alpha\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}\right), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \alpha \Delta w = \alpha\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\right), \end{aligned}$$

Grenzbedingungen für $z = 0$: Entweder

$$(12)\qquad u_1 = u_2,\ v_1 = v_2,\ \alpha_1\xi_1 = \alpha_2\xi_2,\ \alpha_1\eta_1 = \alpha_2\eta_2,$$

oder:

$$(12')\qquad u_1 = u_2,\ v_1 = v_2,\ \xi_1 = \xi_2,\ \eta_1 = \eta_2.$$

Die Formeln (11) und (12) enthalten die Theorie der Metallreflexion mit Annahme der Neumann'schen Auffassung hinsichtlich der Lage des Lichtvectors zur Polarisationsebene, die Formeln (11) und (12') die Theorie der Metallreflexion mit Annahme der Fresnel'schen Auffassung hinsichtlich jener Lage. Das erste Erklärungssystem liefert die mechanische Theorie von Voigt[2]), das letzte die von Ketteler[3]). Beide Theorieen führen zur Uebereinstimmung mit den Cauchy'schen Formeln[4]) und führen zu gleichen beobachtbaren Resultaten, wie schon daraus folgt, daß die Formeln des Fresnel'schen Standpunktes aus denen des Neumann'schen erhalten werden, wenn man die Bedeutung der u, v, w und ξ, η, ζ als Komponenten des kinetischen und potentiellen Vectors gegenseitig vertauscht, wie es oben (pag. 371) für die Grenzbedingungen (3) und (3') nachgewiesen ist.

1) In einigen Fällen allerdings steht das Erkärungssystem mit den Thatsachen nicht in völligem Einklang, z. B. bei Beobachtungen der Metallreflexion in Flüssigkeiten. Es können hier aber störende Nebenumstände wirken (vgl. P. Drude Wied. Ann. 39, p. 539, 1890). Auf die durch Metallreflexion herbeigeführten absoluten Phasenänderungen des Lichtes gedenke ich an anderer Stelle ausführlicher zu kommen.

2) W. Voigt, Wied. Ann. 23, p. 104, 1884.

3) E. Ketteler, Wied. Ann. 22, p. 211, 1884.

4) Dies habe ich für die Voigt'sche Theorie ausführlicher in Wied. Ann. 35, p. 508, 1888 gezeigt. Ketteler hat dasselbe für seine Theorie in Wied. Ann. 3, p. 95, 284; 1878. — 22, p. 11, 1884 nachgewiesen.

Die Formeln (11) und (12), oder (11) und (12') genügen vollständig zur Berechnung der optischen Erscheinungen von einerlei Farbe, falls die Konstante α aus den Erscheinungen selbst berechnet wird.

Um Dispersionserscheinungen zu beschreiben, muß man analytisch eine Abhängigkeit des α von der Schwingungsdauer aufstellen. Wie dies vom mechanischen Standpunkt aus geschehen kann, soll im Folgenden erörtert werden.

Die ursprünglichen Differentialgleichungen (2), welche für durchsichtige isotrope Medien gelten, hat man durch Zusatzglieder so zu erweitern, daß einmal die Dispersion, andererseits auch die Absorption, d. h. die Energieverminderung für jede Art von Bewegung, zum Ausdruck kommt.

Geht man vom Neumann'schen Standpunkt aus, nach welchem der Coefficient von $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ in den Differentialgleichungen (2) in allen Medien denselben Werth besitzt, so ist eine mögliche Erweiterung der Gleichungen (2):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a'\left(\frac{\partial \eta}{\partial z}-\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)+a''\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z}-\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)+a'''\frac{\partial^4}{\partial t^4}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z}-\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)+\cdots \\ &\quad +b'\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z}-\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)-b''\frac{\partial^3}{\partial t^3}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z}-\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)+\cdots \\ &\quad \cdots\end{aligned} \tag{13}$$

Bildet man den Differentialquotient $\frac{\partial T}{\partial t}$ der kinetischen Energie T nach der Zeit, so erhält man nach demselben Verfahren, wie es oben auf pag. 373 angewandt ist,

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} &= -a'\int\left(\xi\frac{\partial \xi}{\partial t}+\eta\frac{\partial \eta}{\partial t}+\zeta\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)dk \\ &\quad -a''\int\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)dk-\cdots \\ &\quad -b'\int\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2\right]dk \\ &\quad +b''\int\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)dk-\cdots \\ &\quad +\int\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\left(a'\eta+b'\frac{\partial \eta}{\partial t}+a''\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}-b''\frac{\partial^3 \eta}{\partial t^3}+\cdots\right)\right. \\ &\quad \left.-\frac{\partial v}{\partial t}\left(a'\xi+b'\frac{\partial \xi}{\partial t}+a''\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}-b''\frac{\partial^3 \xi}{\partial t^3}+\cdots\right)\right\}do,\end{aligned} \tag{14}$$

falls wiederum die Normale der Oberfläche, über welche das Oberflächenintegral erstreckt wird, mit der s-Axe zusammenfällt. Nun ist $\frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \frac{\partial^{(2n)} \xi}{\partial t^{2n}}$ stets ein Differentialquotient nach der Zeit, ferner ist

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \frac{\partial^3 \xi}{\partial t^3} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\right)^2,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \frac{\partial^5 \xi}{\partial t^5} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \frac{\partial^4 \xi}{\partial t^4} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial^3 \xi}{\partial t^3}\right) + \left(\frac{\partial^3 \xi}{\partial t^3}\right)^2,$$

d. h. allgemein ist $\frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \frac{\partial^{2n+1} \xi}{\partial t^{2n+1}}$ gleich einem Differentialquotienten nach der Zeit vermindert oder vermehrt um eine stets positive Größe, je nachdem n eine ungerade, oder gerade Zahl ist.

Es tritt also für jede Art von Bewegung eine Energieverminderung ein, wenn die b in den Formeln (13) sämmtlich positive Werthe besitzen[1]). Zugleich ergiebt sich, daß nach (14) die Grenzbedingungen für $s = 0$:

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2$$

$$(15) \quad \left(a'\xi + b'\frac{\partial \xi}{\partial t} + a''\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \cdots\right)_1 = \left(a'\xi + b'\frac{\partial \xi}{\partial t} + a''\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \cdots\right)_2,$$

$$\left(a'\eta + b'\frac{\partial \eta}{\partial t} + a''\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \cdots\right)_1 = \left(a'\eta + b'\frac{\partial \eta}{\partial t} + a''\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \cdots\right)_2$$

mit dem Energieprincip vereinbar sind, d. h. daß das Passiren der Grenzfläche zweier verschiedener Medien dann nicht von einem Energieverlust begleitet ist.

Für periodische Bewegungen, für welche ist $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{i}{\tau} u$, etc. gehen die Formeln (13) in (11), die Formeln (15) in (12) über, falls man setzt:

$$\alpha = a' - \frac{a''}{\tau^2} + \frac{a'''}{\tau^4} - \cdots + \frac{i}{\tau}\left(b' + \frac{b''}{\tau^2} + \cdots\right).$$

Damit ist gezeigt, daß die Formeln (13) und (15) dieselben Resultate liefern, wie das als richtig befundene Erklärungssystem (11) und (12). Zugleich ist das Auftreten eines complexen Coeffi-

---

1) Es ist also noch diese Erweiterung des von Voigt in Wied. Ann. 43, p. 420, 1891, gegebenen Ansatzes möglich, woselbst von den Coefficienten b nur der erste b' eingeführt ist.

cienten α, sowie dessen Abhängigkeit von der Schwingungsdauer $\left(\frac{\tau}{2\pi}\right)$ insofern gerechtfertigt, als das Erklärungssystem (11) und (12) zurückgeführt ist auf eines, welches nur reelle und von τ unabhängige Coefficienten enthält.

In ganz ähnlicher Weise ist zu zeigen, daß eine Dispersionserklärung vom Fresnel'schen Standpunkt aus die Gleichungen (2′) zu erweitern hat in:

$$\frac{1}{a'}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{1}{a''}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}+\cdots$$

$$-\frac{1}{b'}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{b''}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}-\cdots=\frac{\partial \eta}{\partial z}-\frac{\partial \zeta}{\partial y}=\Delta u, \tag{13′}$$

. . . . . .

und daß die Grenzbedingungen (12′) mit dem Energieprincip infolge (13′) vereinbar sind. Also auch vom Fresnel'schen Standpunkt aus läßt sich eine Rechtfertigung des Erklärungssystems (11), (12′) mit complexem, von τ abhängigem Coefficienten α geben.

Es ist bemerkenswerth, daß die Grenzbedingungen (12) nur dann mit dem Energieprincip vereinbar sind, falls man bei absorbirenden Medien in den Gleichungen (2) Zusatzglieder der Form $\frac{\partial \Delta u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial t^2}$ etc. verwendet, dagegen sind jene Grenzbedingungen nicht mehr mit dem Energieprincip vereinbar, falls Zusatzglieder der Form $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ etc. verwendet werden. Nennen wir Glieder der letzten Form Kräfte erster Art, Glieder der ersten Form Kräfte zweiter Art, so kann man also sagen, daß die vom Neumann'schen Standpunkte aus gebildete mechanische Lichttheorie der Metalle nur Kräfte zweiter Art zuläßt, falls ihr Erklärungssystem mit dem Energieprincip vereinbar und mit den als richtig anzusehenden Erklärungssystem (11) und (12) identisch sein soll; ebenso läßt die vom Fresnel'schen Standpunkte aus gebildete mechanische Theorie der Metalloptik nur Kräfte erster Art zu, falls ihr Erklärungssystem mit dem Energieprincip vereinbar und mit den Formeln (11) (12′) identisch sein soll.

Die Formeln der elektromagnetischen Theorie für leitende Körper lauten[1]): (Es ist die Magnetisirungsconstante nach pag. 378 überall = 1 gesetzt)

---

1) Vgl. H. Hertz, l. c.

$$
\begin{aligned}
&A\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad A\varepsilon\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} - 4\pi\lambda AX,\\
&A\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad A\varepsilon\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} - 4\pi\lambda AY,\\
&A\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}, \quad A\varepsilon\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} - 4\pi\lambda AZ,\\
&\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.
\end{aligned} \tag{16}
$$

Hierin ist $\varkappa$ eine Konstante, und zwar die specifische elektrostatisch gemessene Leitungsfähigkeit des Mediums. — Die Grenzbedingungen lauten, wie immer:

$$L_1 = L_2, \quad M_1 = M_2, \quad X_1 = X_2, \quad Y_1 = Y_2. \tag{17}$$

Aus den Gleichungen (16) kann man leicht ableiten:

$$
\begin{aligned}
A^2\left(\varepsilon\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + 4\pi\lambda\frac{\partial X}{\partial t}\right) &= \Delta X,\\
A^2\left(\varepsilon\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + 4\pi\lambda\frac{\partial Y}{\partial t}\right) &= \Delta Y,\\
A^2\left(\varepsilon\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + 4\pi\lambda\frac{\partial Z}{\partial t}\right) &= \Delta Z,
\end{aligned} \tag{18}
$$

$$
\begin{aligned}
A^2\left(\varepsilon\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} + 4\pi\lambda\frac{\partial L}{\partial t}\right) &= \Delta L,\\
A^2\left(\varepsilon\frac{\partial^2 M}{\partial t^2} + 4\pi\lambda\frac{\partial M}{\partial t}\right) &= \Delta M,\\
A^2\left(\varepsilon\frac{\partial^2 N}{\partial t^2} + 4\pi\lambda\frac{\partial N}{\partial t}\right) &= \Delta N.
\end{aligned} \tag{18'}
$$

Für periodische Bewegungen sind die auftretenden Vectoren in die Form zu setzen

$$X = e^{\frac{i}{\tau}t} \cdot f(x, y, z),$$

analog Y, Z, L etc. Es ist daher

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{i}{\tau}X, \quad \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{i}{\tau}\frac{\partial X}{\partial t}, \tag{19}$$

d. h.

$$\frac{\partial X}{\partial t} = -i\tau\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}.$$

Setzt man daher

$$\frac{1}{A^2(\varepsilon - 4\pi i\tau\lambda)} = \alpha \tag{20}$$

so gehen die Formeln (18') in die Formeln (11) über, falls man L, M, N als Komponenten des Lichtvectors u, v, w interpretirt. Da ferner nach den Formeln (16) und (19)

$$A(\varepsilon - 4\pi i\tau\lambda)\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y},$$

so sind die Grenzbedingungen (17) mit den Grenzbedingungen (12) identisch. Ebenso gehen, falls man X, Y, Z als Komponenten u, v, w des Lichtvectors wählt, die Formeln (18) und (17) in die Formeln (11) und (12') über. Die elektromagnetische Lichttheorie liefert also dieselben beiden möglichen Erklärungssysteme der Metalloptik wie die mechanischen Theorieen[1]). Zugleich sieht man wieder, daß für die magnetische Kraft die Neumann'sche Definition der Polarisationsebene, für die elektrische die Fresnel'sche Gültigkeit hat.

Bemerkenswerth ist, daß die Differentialgleichungen (18') sogenannte Kräfte erster Art enthalten, daß aber trotzdem die Grenzbedingungen der elektromagnetischen Theorie mit denen der Voigt'schen mechanischen übereinstimmen können, ohne mit dem Energieprincip in Widerspruch zu sein[2]). Dies liegt an der besondern Form, welche die Energie nach der elektromagnetischen Vorstellung des Lichtes als Funktion der Vectorgrößen u, v, w besitzt.

Das Erklärungssystem der elektromagnetischen Theorie stellt die optischen Erscheinungen absorbirender isotroper Medien vollständig dar, falls man in der Formel (20) ε und λ als Konstanten interpretirt, welche mit der Schwingungsdauer des angewandten Lichtes variiren und deren Werthe aus den optischen Experimenten selbst abzuleiten sind. Es ist bekannt, daß man die Thatsachen nicht befriedigend darstellt[3]), wenn man λ denjenigen Werth

---

1) Die Uebereinstimmung der Resultate der elektromagnetischen Theorie mit den Cauchy'schen Formeln der Metallreflexion ist von H. A. Lorentz, Schlöm. Zeitschr. 23, p. 207, 1878, nachgewiesen.

2) Dies wird weiter unten ausführlich gezeigt.

3) Einerseits ergiebt sich die Durchtichtigkeit der Metalle viel größer, als sie es nach dem Werth von λ sein sollte (vgl. W. Wien, Wied. Ann. 35, p. 48, 1888), andrerseits folgt ein negatives ε aus dem optischen Verhalten der Metalle. Auf diesen Widerspruch hat schon H. A. Lorentz (Schlömilch's Zeitschr. 23, p. 197, 1878) und neuerdings E. Cohn (Wied. Ann. 45, p. 55, 1892) hingewiesen.

beilegt, welchen man nach der Auffassung der ursprünglichen Theorie aus Experimenten mit elektrischen Strömen oder langsamen elektrischen Schwingungen ableiten kann. Es handelt sich daher darum, das Formelsystem der elektromagnetischen Theorie so zu erweitern, daß sowohl die elektromagnetischen, wie die optischen Thatsachen dargestellt werden können.

Entsprechend der oben pag. 379 vorgenommenen Erweiterung des Ansatzes der für durchsichtige Medien gültigen Formeln ist folgende Erweiterung der Formeln (16) für absorbirende Medien möglich:

$$A\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z},$$

. . . . .

$$A\left(\varepsilon\frac{\partial X}{\partial t} + \varepsilon'\frac{\partial^3 X}{\partial t^3} + \varepsilon''\frac{\partial^5 X}{\partial t^5} + \cdots + 4\pi\lambda X - 4\pi\lambda'\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \cdots\right) \tag{16'}$$
$$= \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y},$$

. . . . . .

Die physikalische Ursache zu irgend welchen Erweiterungen der ursprünglichen Gleichungen (16) kann auch hier darin liegen, daß infolge der Lichtschwingungen irgend welche andere Vectoren in den ponderabeln Molecülen mit in periodische Veränderung versetzt werden, welche auf die Aenderung des Lichtvectors im Aether von Einfluß sein kann. Eine Erweiterung der Gleichungen (16) ist dann, grade wie oben gesagt ist, als ein Ersatz für das System simultaner Differentialgleichungen anzusehen, von welchem man nach einer strengen Theorie, welche auch die anomale Dispersion vollständig beschreiben will[1]), auszugehen hätte.

Nach der elektromagnetischen Auffassung des Lichtes haben die Coefficienten ε', ε'', λ', λ'' etc. anschauliche Bedeutung. Das Problem hat nämlich viel Aehnlichkeit mit der Berechnung der Stromschwankungen in zwei benachbarten Leitern, wie z. B. beim Ruhmkorff'schen Inductionsapparat. Bei der Theorie des letzteren kann man, anstatt zwei Differentialgleichungen aufzustellen, denn jede sowohl die Stromintensität in der inducirenden, wie die in der inducirten Spirale enthält, nur eine Differentialgleichung für die Stromintensität in einer Spirale erhalten, indem man successive

1) Dieselbe fällt also, wie nochmals hervorgehoben werden mag, außerhalb des Kreises der hier angestellten Betrachtungen.

die Inductionswirkungungen beider Spiralen auf einander berücksichtigt.

Es mag indeß hier genügen, darauf hingewiesen zu haben, daß die Coefficienten $\varepsilon', \varepsilon'', \ldots \lambda', \lambda'' \ldots$ von der gegenseitigen Induction des Aethers und der Materie abhängen.

Durch Multiplikation der Gleichungen (16') mit resp. Ldk, Mdk, Ndk, Xdk, Ydk, Zdk und partielle Integration im ersten Tripel derselben erhält man, mit Berücksichtigung von (7):

$$A\Big[\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\int X\Big(\varepsilon'\frac{\partial^3 X}{\partial t^3}+\varepsilon''\frac{\partial^5 X}{\partial t^5}+\cdots+4\pi\lambda X-4\pi\lambda'\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}+\cdots\Big)dk$$

$$+\int Y\Big(\varepsilon'\frac{\partial^3 Y}{\partial t^3}+\cdots\Big)dk+\int Z\Big(\varepsilon'\frac{\partial^3 Z}{\partial t^3}+\cdots\Big)dk\Big]= \tag{21}$$

$$\int(MX-LY)do,$$

falls wiederum die Normale der Oberfläche, über welche das Integral der rechten Seite dieser Gleichung erstreckt wird, mit der z-Axe zusammenfällt. Da nun nach pag. 380 $\varphi\cdot\varphi^{(2n+1)}$ stets ein Differentialquotient nach der Zeit ist, dagegen nach pag. 384 $\varphi\cdot\varphi^{(2n)}$ gleich einem Differentialquotienten nach der Zeit vermindert oder vermehrt um eine stets positive Größe, je nachdem n eine ungrade oder grade Zahl ist, so folgt aus (21), daß die Grenzbedingungen (17) keinen Energieverlust durch Reflexion und Brechung ergaben, daß dagegen für jede Art Bewegung ein Energieverlust im Volumenelement eintritt, falls die Konstanten λ der Formel (16') sämmtlich positiv sind.

Für periodische Bewegungen werden die Formeln (16') mit den Formeln (11) identisch, falls man setzt:

$$\alpha=\frac{1}{A^2\Big[\varepsilon-\frac{\varepsilon'}{\tau^2}+\frac{\varepsilon''}{\tau^4}-\cdots-4\pi i\tau\Big(\lambda+\frac{\lambda'}{\tau^2}+\frac{\lambda''}{\tau^4}+\cdots\Big)\Big]}, \tag{20'}$$

d. h. auch die erweiterten Gleichungen (16') mit den Grenzbedingungen (17) ergeben das ursprüngliche Erklärungssystem. Indessen genügt diese Erweiterung doch noch nicht allen Anforderungen der praktischen Physik.

Bezeichnet man nämlich mit n den Brechungsexponenten des absorbirenden Mediums gegen den leeren Raum, mit $n\varkappa$ den Absorptionscoefficienten, so ist[1])

$$\frac{1}{\alpha}=n^2(1-i\varkappa)^2. \tag{22}$$

1) Vgl. P. Drude, Wied. Ann. 32, p. 616, 1887.

Es ergiebt sich daher nach (20'):

$$(23) \qquad n^2(1-\varkappa^2) = A^2\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon'}{\tau^2} + \frac{\varepsilon''}{\tau^4} - \cdots\right),$$

$$(24) \qquad 2n^2\varkappa = 4\pi A^2\tau\left(\lambda + \frac{\lambda'}{\tau^2} + \cdots\right).$$

Nun ist für alle Metalle $\varkappa > 1$ [1]). Wenn auch dieses Resultat durch passende Verfügung über die Konstanten ε eventuell erreicht werden könnte, so widerspricht doch die Gleichung (24) der Erfahrung. Denn der Absorptionscoefficient $n\varkappa$ wird schon zu groß berechnet, wenn man in der Formel (24) die positiven Größen λ', $\lambda'' \cdots = 0$ setzt. — Dieser Widerspruch würde fortfallen, falls zwischen den elektromagnetischen und optischen Schwingungsdauern eine Eigenschwingungsdauer liegt (cf. die Anmerkung auf pag. 381). — Man könnte diesen Widerspruch aber auch durch eine andere Erweiterung der Formeln (16) heben, nämlich dadurch, daß man in dem zweiten Tripel derselben Glieder der Form

$$p\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) = \frac{p}{A}\Delta X, \quad p'\frac{\partial^3}{\partial t^3}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}\right), \text{ etc.}$$

zufügte [2]). Fügt man zunächst nur das erste Glied zu, so würde man die Formeln erhalten:

$$(16'') \quad A\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \; A\left(\varepsilon\frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi\lambda X\right) = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{p}{A}\Delta X,$$

. . . . . .

woraus man leicht ableitet:

$$A^2\left(\varepsilon\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + 4\pi\lambda\frac{\partial X}{\partial t}\right) = \Delta X + p\frac{\partial \Delta X}{\partial t}\,^3).$$

Man erhält also für periodische Bewegungen wiederum die Formeln (11), falls man setzt

$$\alpha = \frac{1 + \frac{i}{\tau}p}{A^2(\varepsilon - 4\pi i\tau\lambda)}.$$

---

1) Vgl. P. Drude, Wied. Ann. 39, p. 537, 1890.

2) Die Bedeutung dieser Zusatzglieder könnte die sein, daß bei sehr schnellen Stromschwankungen das Ohm'sche Gesetz nicht mehr streng gültig wäre, wie H. A. Lorentz in Schlöm. Zeitschr. 23, p. 209, 1878 zeigte.

3) In den so erweiterten Gleichungen werden also sowohl Kräfte erster, als zweiter Art zugefügt (cf. oben pag. 385).

Nach (22) wäre daher zu setzen:

$$n^2(1-\varkappa^2) = A^2\frac{\varepsilon - 4\pi p\lambda}{1+\frac{p^2}{\tau^2}}, \tag{25}$$

$$2n^2\varkappa = A^2\frac{4\pi\lambda\tau + \frac{\varepsilon p}{\tau}}{1+\frac{p^2}{\tau^2}}. \tag{26}$$

Diesen Ansatz hat H. A. Lorentz[1]) gemacht, und hat gezeigt, daß man so die optischen Konstanten n und $\varkappa$ durch passende Wahl von p und ε darstellen kann, wobei ε einen großen positiven Werth erlangt. Wenn man indeß die Grenzbedingungen (17) auch jetzt noch zuläßt, so ist es nicht möglich, aus den Gleichungen (16″) auf dem oben pag. 389 eingeschlagenem Wege die Beziehung herzuleiten, daß die Energie im Volumenelement bei jeder Art von Bewegung abnimmt, während durch Reflexion und Brechung kein Energieverlust eintritt. Um diesen Uebelstand zu heben, bietet sich entweder die Möglichkeit, die Grenzbedingungen zu ändern[2]), wozu aber bisher noch keine Veranlassung durch die Beobachtungen gegeben ist, und wozu man sich auch aus dem pag. 380 angeführten Grunde schwer entschließen wird, oder die Voraussetzung fallen zu lassen, daß durch die Formel (7) der Differentialquotient eines Theiles der Energie des Mediums dargestellt werde, was aber wenig Wahrscheinlichkeit besitzt; oder schließlich eine Art Peltiereffect beim Hindurchpassiren der Lichtbewegung durch die Grenze zweier verschiedener Medien (Luft — Metall) zuzulassen; dieser[3]) würde nie zu beobachten sein, da sich sein Mittelwerth bei periodischen Bewegungen aufhebt. Es mag indeß hier genügen, auf diese Consequenzen, welche sich bei der theoretischen Durchführung der Gleichungen (16″) ergeben, hingewiesen zu haben. Jedenfalls stellen dieselben in Verbindung mit (17) die Beobachtungen befriedigend dar.

(Fortsetzung folgt in Nr. 11.)

1) H. A. Lorentz, l. c.

2) Die Grenzbedingungen $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$, $L_1\left(1+\frac{pi}{\tau}\right)_1 = L_2\left(1+\frac{pi}{\tau}\right)_2$, $M_1\left(1+\frac{pi}{\tau}\right)_1 = M_2\left(1+\frac{pi}{\tau}\right)_2$ würden dem Energieprincip genügen, aber zu keiner Darstellung der Beobachtungen führen, indem sie das Hauptazimuth im reflectirten Lichte stets kleiner als 45° geben, entgegen der Beobachtung.

3) Derselbe würde durch die Differenz der Terme $p\left(X\frac{\partial M}{\partial t} - Y\frac{\partial L}{\partial t}\right)$ in beiden angrenzenden Medien gegeben sein.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Januar 1892.

(Fortsetzung.)

Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen:
- a. Tijdschrift voor Indische Taal-, Land- en Volkenkunde. Deel XXXIV. Aflevering VI. Batavia. s'Hage 1891.
- b. Notulen van de algemeene en Bestuurs-Vergaderingen. Deel XXIX. 1891. Aflevering II. Batavia 1891.
- c. Verhandelingen. Deel XLVI. Batavia. 's Hage 1891.
- d. Oudheidkundige Kaart von Java door Dr. R. D. M. Verbeek. Behvort bij de Verhandelingen. Deel XLVI.
- e. Dagh-Register gehonden int Casteel Batavia. Anno 1663. Van Mr. J. A. van der Chijs. Batavia. 's Hage 1891.

Köninklijk Institüt voor Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië. Bijdragen tot de Taal-, Land- en Volkenkunde. 5. Vollgreeks. 7. Deel. Deel XLI der geheele Reeks. 1. Aflevering. 's Gravenhage 1891.

Académie Royale de Belgique:
- a. Bulletin. 61e année. 3e série, tome 22. N. 12.
- b. Annuaire. 1892. Bruxelles 1892.

Royal Society of London:
- a. Catalogue of Scientific papers 1874—1883. Vol. IX. London 1891.
- b. Proceedings. Vol. L. N. 303, 304. Jan. 1892. London.

Real Academia de Ciencias, exactas, fisicas y Naturales de Madrid. Memorias. Tomo XV. Madrid 1890—91.

Accademia delle Scienze fisiche e matematiche (sezione della Società Reale di Napoli). Rendiconti. Serie 2a. Vol. V. (Anno XXX). fasc. 1—12. Gennajo a Dicembre 1891. Napoli 1891.

Società Toscana di Scienze Naturali. Atti, Processi Verbali. Vol. VII. Adunanza del di 6. luglio u. 16. Nov. 1890; 18. genn. u. 8. marzo 1891.

In Commemorazione di Guglielmo Weber per Giuseppe Basso. [Sep. a. Atti della R. Accad. delle scienze di Torino. Vol. XXVII]. Torino 1892.

Annuario della Reale Università degli Studi di Torino 1891—92. Torino 1892.

Reale Accademia dei Lincei. Anno CCLXXXVIII. 1891. Serie Quarta. Atti, Rendiconti. Vol. VIIo. fasc. 11o. 2. Semestre. Roma 1891.

Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze. Bollettino delle pubblicazioni Italiane 1892. N. 145. 15. Gennaio. N. 146. 31. Gennaio. Firenze 1892.

Société Mathématique de France. Bulletin. Tome XIX. N. 7. Paris 1891.

Institut Royal Grand-Ducal de Luxembourg. Publications de la Section Historique. XXXIX (XVII). Vol. XLI (1890). Vol. XLII. Premièr fasc. 1891. Luxembourg 1891.

Bergens Museums. Aarsberetning for 1890. Bergen 1891.

Societatis pro Fauna et Flora Feunica:
- a. Acta. Vol. VI, VII. Helsingfors 1889—90.
- b. Meddelanden. Sextonde Häftet. Helsingsfors 1888—91.

(Fortsetzung folgt.)

Inhalt von No. 10.

Hermann Wagner, Die Kopien der Weltkarte des Museum Borgia (XV. Jahrh.). — *Hermann Traube*, Ueber die Krystallformen optisch einaxiger Substanzen, deren Lösungen ein optisches Drehungsvermögen besitzen. — *P. Drude*, In wieweit genügen die bisherigen Lichttheorieen den Anforderungen der practischen Physik? — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Stuppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

13. Juli. **№ 11.** 1892.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 28. Mai.

In wieweit genügen die bisherigen Lichttheorieen den Anforderungen der practischen Physik?

Von

P. Drude.

(Fortsetzung von Nr. 10.)

Durchsichtige Krystalle[1]).

Einen guten Prüfstein für die Brauchbarkeit einer Lichttheorie für krystallinische Medien bildet die Untersuchung der Frage, ob sie die Fresnel'schen Gesetze der Lichtfortpflanzung in Krystallen ergiebt. Das eigenthümliche der Fresnel'schen Gesetze ist unter anderem das, daß jeder Krystall hinsichtlich seines optischen Verhaltens drei zu einander senkrechte Symmetrieebenen besitzen soll. Diese Eigenschaft ist allerdings bisher noch nicht an triklinen Krystallen untersucht, wohl aber sind an monoklinen[2]) Krystallen die Fresnel'schen Gesetze bestätigt. Es bleibt daher noch dem

1) Dabei sollen die natürlich activen Medien zunächst ausgeschlossen bleiben.

2) Vgl. W. Kohlrausch, Wied. Ann. 6, p. 86; — 7, p. 427, 1879. — J. Danker, N. Jahrb. f. Min. Beil. Bd. 4, p. 241, 1885.

Experiment die Frage zu entscheiden übrig, ob die Fresnel'schen Gesetze für nicht active Krystalle unbeschränkte Gültigkeit besitzen. Wir wollen diese Frage vorläufig im bejahenden Sinne beantwortet voraussetzen.

Die einzige Theorie, welche zu diesem Resultat auf Grund ihrer Vorstellungen geführt wird, ist die elektromagnetische, wenigstens falls man consequent den pag. 378 eingenommenen Standpunkt festhält, daß die Magnetisirungsconstanten aller Medien gleich sind. Da außerdem die elektromagnetische Theorie einsehen läßt, daß verschiedene Vorstellungsweisen einzelner Theorieen zu gleichen beobachtbaren Resultaten führen, und da diese gemeinsam von der elektromagnetischen Theorie umfaßt werden, so möge der Ausgangspunkt von dieser genommen werden.

Die Formeln der elektromagnetischen Lichttheorie lauten[1]), falls man μ wiederum $= 1$ setzt:

$$A\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad A\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad A\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}.$$

$$(27)\quad \begin{aligned} A\left(\varepsilon_{11}\frac{\partial X}{\partial t} + \varepsilon_{12}\frac{\partial Y}{\partial t} + \varepsilon_{13}\frac{\partial Z}{\partial t}\right) &= \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}, \\ A\left(\varepsilon_{12}\frac{\partial X}{\partial t} + \varepsilon_{22}\frac{\partial Y}{\partial t} + \varepsilon_{23}\frac{\partial Z}{\partial t}\right) &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}, \\ A\left(\varepsilon_{13}\frac{\partial X}{\partial t} + \varepsilon_{23}\frac{\partial Y}{\partial t} + \varepsilon_{33}\frac{\partial Z}{\partial t}\right) &= \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}. \end{aligned}$$

Die Grenzbedingungen sind wiederum für $z = 0$:

$$(28)\qquad L_1 = L_2, \quad M_1 = M_2, \quad X_1 = X_2, \quad Y_1 = Y_2.$$

Interpretiren wir die magnetische Kraft als den Lichtvector u, v, w, so ist nach den Formeln (1)

$$\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} = -\xi, \quad \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} = -\eta, \quad \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} = -\zeta$$

zu setzen. Nach den Formeln (27) folgt daher

$$\begin{aligned} -A\frac{\partial X}{\partial t} &= b_{11}\xi + b_{12}\eta + b_{13}\zeta, \\ -A\frac{\partial Y}{\partial t} &= b_{21}\xi + b_{22}\eta + b_{23}\zeta, \\ -A\frac{\partial Z}{\partial t} &= b_{31}\xi + b_{32}\eta + b_{33}\zeta, \end{aligned}$$

1) Vgl. H. Hertz, Gött. Nachr. 4, p. 114, 1890.

wobei

$$(29) \qquad b_{11} = + \frac{\begin{vmatrix} \varepsilon_{22}, & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32}, & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varepsilon_{11}, & \varepsilon_{12}, & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21}, & \varepsilon_{22}, & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31}, & \varepsilon_{32}, & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}}$$

etc., und wobei $\varepsilon_{hk} = \varepsilon_{kh}$ und daher $b_{hk} = b_{kh}$ gesetzt ist. Setzt man daher

$$(29') \qquad \frac{b_{hk}}{A^2} = a_{hk}, \text{ und}$$

$$(30) \qquad 2G = a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + a_{33}\zeta^2 + 2a_{23}\eta\zeta + 2a_{31}\zeta\xi + 2a_{12}\xi\eta,$$

so erhält man das Erklärungssystem:

$$(31) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G}{\partial \eta}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G}{\partial \zeta}\right), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial \zeta}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G}{\partial \eta}\right), \end{aligned}$$

und als Grenzbedingungen:

$$(32) \quad u_1 = u_2,\ v_1 = v_2,\ \left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)_1 = \left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)_2,\ \left(\frac{\partial G}{\partial \eta}\right)_1 = \left(\frac{\partial G}{\partial \eta}\right)_2$$

für $z = 0$.

Diese Formeln sind identisch mit der Kirchhoff'schen [1]) Form der Neumann'schen Theorie. Sie sind schon vielfach als richtig bestätigt [2]).

Um die Fresnel'sche Auffassung zu erhalten, muß man entweder die elektrische Kraft oder die elektrische Polarisation [3]) als Lichtvector interpretiren, d. h. entweder setzen:

$$(33) \qquad u = X,\ v = Y,\ w = Z, \text{ oder}$$

---

1) G. Kirchhoff, Abhandl. d. Berl. Akad. 1876. Diese Identität der Resultate der elektromagnetischen Theorie mit der Neumann'schen ist von Voigt in Wied. Ann. 48, p. 436, 1891, gezeigt. Fitzgerald hat in Phil. Mag. (5) 7 p. 216. — Proc. Roy. Soc. 28, p. 286, 1879 die Identität mit der M'Cullagh'schen Theorie (Trans. of Irish Acad. 13, 1837) nachgewiesen, welche ja ebenfalls mit der Neumann'schen übereinstimmt.

2) Vgl. F. Neumann, Abhandl. der Berl. Akad. 1835.

3) Vgl. H. Hertz, l. c.

$$
\begin{aligned}
u &= \varepsilon_{11}X+\varepsilon_{12}Y+\varepsilon_{13}Z,\\
v &= \varepsilon_{21}X+\varepsilon_{22}Y+\varepsilon_{23}Z,\\
w &= \varepsilon_{31}X+\varepsilon_{32}Y+\varepsilon_{33}Z.
\end{aligned}
\tag{33'}
$$

Nach der letzten Verfügung (33') bleibt die Bedingung bestehen

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

(nach der ersteren (33) nicht. Durch letztere Verfügung erhält man die Theorieen, welche auch in Krystallen rein transversale Wellen, durch erstere diejenigen, welche quasi transversale Wellen annehmen. Beide Anschauungen haben gleiche Berechtigung und müssen zu denselben numerischen Beziehungen zwischen den beobachtbaren Erscheinungen führen, welche wir in dem die Krystalle umgebenden isotropen Medium wahrnehmen. Denn in ihnen fällt elektrische Polarisation mit der elektrischen Kraft zusammen (der Richtung nach) und es kann für diese Größen keinen Unterschied machen, ob man sie in Beziehung setzt zu der elektrischen Polarisation oder der elektrischen Kraft in Krystallen, wofern wenigstens das grundlegende Formelsysten ungeändert bleibt und alle Rechnungen in voller Strenge, d. h. mit Berücksichtigung der Grenzbedingungen, durchgeführt werden.

Verfolgt man zunächst die Annahme (33'), so folgt aus den Formeln (27)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{1}{A^2}\left\{\Delta X-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\right\},\\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{1}{A^2}\left\{\Delta Y-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\right\},\\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{1}{A^2}\left\{\Delta Z-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\right\}.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Dabei ist nach (33') und (29):

$$
\begin{aligned}
X &= b_{11}u+b_{12}v+b_{13}w,\\
Y &= b_{21}u+b_{22}v+b_{23}w,\\
Z &= b_{31}u+b_{32}v+b_{33}w.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Setzt man daher

$$2H = a_{11}u^2+a_{22}v^2+a_{33}w^2+2a_{23}vw+2a_{31}wu+2a_{12}uv, \tag{36}$$

wobei die a_{hk} nach (29′) definirt sind, so ergiebt sich, da nach (27) und (35)

$$(37)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{A}\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial^2 H}{\partial y\,\partial w} - \frac{\partial^2 H}{\partial z\,\partial v}, \\ \frac{1}{A}\frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial^2 H}{\partial z\,\partial u} - \frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial w}, \\ \frac{1}{A}\frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial v} - \frac{\partial^2 H}{\partial y\,\partial u} \end{aligned}$$

$$(38)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial z\,\partial u} - \frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial w}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial v} - \frac{\partial^2 H}{\partial y\,\partial u}\right), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial v} - \frac{\partial^2 H}{\partial y\,\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial y\,\partial w} - \frac{\partial^2 H}{\partial z\,\partial v}\right), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial y\,\partial w} - \frac{\partial^2 H}{\partial z\,\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial z\,\partial u} - \frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial w}\right), \end{aligned}$$

mit den Grenzbedingungen:

$$(39)\qquad \left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)_1 = \left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)_2, \quad \left(\frac{\partial H}{\partial v}\right)_1 = \left(\frac{\partial H}{\partial v}\right)_2,$$

$$\left(\frac{\partial^2 H}{\partial y\,\partial w} - \frac{\partial^2 H}{\partial z\,\partial v}\right)_1 = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial y\,\partial w} - \frac{\partial^2 H}{\partial z\,\partial v}\right)_2 = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial z\,\partial u} - \frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial w}\right)_1 = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial z\,\partial u} - \frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial w}\right)_2.$$

Die Differentialgleichungen (38) liegen der Fresnel'schen Theorie streng transversaler Wellen in Krystallen zu Grunde, die Grenzbedingungen (39) fallen wahrscheinlich mit denjenigen zusammen, welche Cornu[1]) für die krystallinische Reflexion aufgestellt hat. Es ist nach dem oben pag. 396 Gesagten verständlich, daß dies (Fresnel'sche) Erklärungssystem (38) und (39) die Beobachtungen ebenso gut darstellt, wie das Neumann'sche System (31) und (32).

Verfolgt man die Annahme (33) so ergeben sich die Formeln der Theorieen, welche nicht streng transversale Wellen in Krystallen annehmen. Nach den Formeln (27) und (1) ist

---

1) A. Cornu, Ann. de chim. et de phys. (4) 11, p. 283, 1867. — Ob die von Cornu angewandten Grenzbedingungen bei beliebiger Orientirung der Grenzebene mit (39) identisch sind, habe ich nicht untersucht.

$$A\frac{\partial L}{\partial t} = \xi,\quad A\frac{\partial M}{\partial t} = \eta,\quad A\frac{\partial N}{\partial t} = \zeta,$$

$$(40)\quad \begin{aligned} A^2\left(\varepsilon_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\varepsilon_{12}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\varepsilon_{13}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) &= \frac{\partial \eta}{\partial z}-\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \Delta u-\frac{\partial \Theta}{\partial x},\\ A^2\left(\varepsilon_{21}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\varepsilon_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\varepsilon_{23}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) &= \frac{\partial \zeta}{\partial x}-\frac{\partial \xi}{\partial z} = \Delta v-\frac{\partial \Theta}{\partial y},\\ A^2\left(\varepsilon_{31}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\varepsilon_{32}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\varepsilon_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) &= \frac{\partial \xi}{\partial y}-\frac{\partial \eta}{\partial x} = \Delta w-\frac{\partial \Theta}{\partial z}; \end{aligned}$$

falls gesetzt ist $\Theta = \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$,

während die Grenzbedingungen (28) ergeben:

$$(41)\quad u_1 = u_2,\ v_1 = v_2,\ \xi_1 = \xi_2,\ \eta_1 = \eta_2.$$

Die Gleichungen (40) gehen in die von Boussinesq[1]) für rhombische Krystalle gegebene über, falls man die Coordinatenebenen in die optischen und krystallographischen Symmetrieebenen legt und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der von Boussinesq mit berücksichtigten longitudinalen Welle gleich Null setzt. Für trikline Krystalle ergiebt die Boussinesq'sche Theorie eine Abweichung von den Formeln (40) und dem Fresnel'schen Gesetz[2]). Ob diese Abweichung wirklich in der Natur stattfindet, ist experimentell noch nicht entschieden (cf. oben pag. 394). — Zu denselben Gleichungen (40) führt die Sarrau'sche Theorie[3]) bei rhombischen Krystallen.

Die Grenzbedingungen dieser beiden mechanischen Theorieen fallen ebenfalls mit den Gleichungen (41) zusammen, da sowohl Sarrau als Boussinesq die Cauchy'schen Continuitätsbedingungen als Grenzbedingungen verwerthen[4]), und diese, wie pag. 370 erwähnt ist, mit den Grenzbedingungen (41) gleichbedeutend sind.

Fassen wir die Resultate nochmals kurz zusammen, so ergiebt sich, daß man die Gesetze der Krystalloptik durch drei gleichberechtigte Erklärungssysteme darstellen kann, von denen das erste streng transversale Wellen annimmt, deren Schwingungen in der

---

1) Boussinesq, Liouv. Journ. (2) 13, p. 330, 1868. Dieselben Formeln giebt auch die Theorie von Rayleigh (Phil. Mag. (4) 41, p. 519, 1871).

2) Vgl. Boussinesq, Liouv. Journ. (2) 17, p. 167, 1872.

3) Sarrau, Liouv. Journ. (2) 12, p. 1, 1867. — 13, p. 59, 1868.

4) Nach demselben Verfahren hat Briot (C. R. 64, p. 956, 1867. — Liouv. Journ. (2) 12, p. 185, 1867) die Gesetze der Reflexion an Krystallen gegeben.

Polarisationsebene stattfinden (Neumann'scher Standpunkt), während die beiden anderen Wellen annehmen, deren Schwingungen genau oder nahezu senkrecht zur Polaristionsebene (Fresnel'scher Standpunkt), und welche genau oder nahezu transversal sind. — Die Grenzbedingungen (32) sind eine Ausdehnung der für isotrope Medien gültigen Neumann'schen Grenzbedingungen. Die Grenzbedingungen (39) und (41) eine Ausdehnung der für isotrope Medien gültigen Fresnel'schen Grenzbedingungen[1]) auf kyrstallinische Medien.

Um der Erfahrung vollständig zu genügen, müssen die a_{hk} der Formel (29′) von der Schwingungsdauer des angewandten Lichtes abhängen. Dies kann man formell durch eine Erweiterung der ursprünglichen Formeln (27) leicht erreichen, indem man auf der linken Seite des zweiten Tripels derselben ungrade Differentialquotienten der X, Y, Z nach t zufügt. Die Grenzbedingungen (28) können bestehen bleiben, ohne mit dem Energieprincip in Widerspruch zu treten.

Absorbirende Krystalle.

Eine so scharfe experimentelle Prüfung der Formeln, wie sie bei durchsichtigen Krystallen möglich ist, kann für absorbirende Krystalle nicht ausgeführt werden. Die bisher angestellten Beobachtungen lassen sich mathematisch durch ein dem für durchsichtige Krystalle gültigen ganz analog gebauten Erklärungssysteme beschreiben[2]), wobei nur die Konstanten a_{hk} als complex anzunehmen sind. Dies Ergebniß liefern sowohl die auf dieses Gebiet ausgedehnten mechanischen Theorieen[3]), als die elektromagnetische. Das Formelsystem der letzteren lautet[4]), falls man wiederum vor-

1) Um diese mit dem Energieprincip nach der mechanischen Auffassung in Einklang zu bringen, muß man berücksichtigen, daß die kinetische Energie vom Fresnel'schen Standpunkt aus eine homogene quadratische Funktion von $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ mit 6 Coefficienten ist.

2) Betreffs der Beobachtungen im durchgehenden Lichte vgl. W. Voigt, Wied. Ann. 23, p. 577, 1884. — P. Drude, Zeitschr. f. Kryst. 13, p. 574, 1887. — Ueber Beobachtungen im reflectirten Licht vgl. P. Drude, Wied. Ann. 34, p. 489, 1888. Die Beobachtungen von E. Schenk (Wied. Ann. 15, p. 177, 1882) ergeben Abweichungen. — Ueber die muthmaßlichen Gründe vgl. P. Drude, Wied. Ann. 32, p. 621, 1887.

3) Vgl. W. Voigt, Wied. Ann. 23, p. 104, 1884. — P. Drude, Wied. Ann. 32, p. 584, 1887.

4) Vgl. H. Hertz, l. c.

aussetzt, daß die Magnetisirungsconstante in allen Medien gleich 1 zu setzen sei:

$$A\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z},$$

$$A\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x},$$

$$A\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y},$$

(42)
$$A\left(\varepsilon_{11}\frac{\partial X}{\partial t} + \varepsilon_{12}\frac{\partial Y}{\partial t} + \varepsilon_{13}\frac{\partial Z}{\partial t}\right) = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} - 4\pi A(\lambda_{21}X + \lambda_{12}Y + \lambda_{13}Z),$$

$$A\left(\varepsilon_{21}\frac{\partial X}{\partial t} + \varepsilon_{22}\frac{\partial Y}{\partial t} + \varepsilon_{23}\frac{\partial Z}{\partial t}\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} - 4\pi A(\lambda_{21}X + \lambda_{22}Y + \lambda_{23}Z),$$

$$A\left(\varepsilon_{31}\frac{\partial X}{\partial t} + \varepsilon_{32}\frac{\partial Y}{\partial t} + \varepsilon_{33}\frac{\partial Z}{\partial t}\right) = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} - 4\pi A(\lambda_{31}X + \lambda_{32}Y + \lambda_{33}Z).$$

(43) $L_1 = L_2,\ M_1 = M_2,\ X_1 = X_2,\ Y_1 = Y_2$ (Grenzbedingungen).

Wegen der für periodische Bewegungen gültigen Relationen (19) erkennt man, daß diese Formeln, falls $\lambda_{hk} = \lambda_{kh}$ ist, vollständig in die für durchsichtige Krystalle gültigen Erklärungssysteme übergehen, falls darin a_{hk} complexe Werthe beigelegt werden. Um Dispersionsgesetze zu erhalten, können an den Formeln (42) analoge Erweiterungen angebracht werden, wie sie nach pag. 388 und 390 entweder durch die Formeln (16′) oder durch die Formeln (16″) gegeben sind[1]).

Natürlich active Medien.

Es ist bekannt, daß man in den Differentialgleichungen der Komponenten des Lichtvectors ungrade Differentialquotienten der-

1) Letztere würden gewisse Schwierigkeiten hinsichtlich der Vereinbarung der Grenzbedingungen (43) mit dem Energieprincip ergeben. — Für erstere gelten bei denjenigen Krystallen, für welche $\varkappa > 1$ ist (z. B. Tellurwismuth), analoge Betrachtungen, wie sie oben pag. 390 bei den Metallen angestellt sind.

selben nach den Coordinaten einführen muß[1]), um die Erscheinungen zu beschreiben, wie sie natürlich active Medien besitzen, welche die Polarisationsebene des Lichtes in einem für entgegengesetzte Fortpflanzungsrichtungen entgegengesetztem Sinne drehen. Für isotrope (d. h. dissymetrisch-isotrope) durchsichtige Medien ergiebt sich so, falls man zunächst Dispersionserscheinungen nicht berücksichtigt, das einfachste Erklärungssystem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a\Delta u + \sigma\xi, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a\Delta v + \sigma\eta, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= a\Delta w + \sigma\zeta, \end{aligned} \tag{44}$$

wie es dem schon von Cauchy[2]) aufgestellten analog ist.

Auch das von MacCullagh[3]) aufgestellte System

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a\Delta u + \sigma\Delta\xi, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a\Delta v + \sigma\Delta\eta, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= a\Delta w + \sigma\Delta\zeta, \end{aligned} \tag{44'}$$

führt zu den Erscheinungen, welche active Medien zeigen.

Bei der Kleinheit, welche die Konstante σ für alle in der Natur vorkommenden Medien besitzt, wird eine experimentelle Entscheidung zwischen den Formeln (44) und (44') nicht möglich sein.

Wenn beide Systeme die Thatsachen gleich gut erklären, so wird man demjenigen den Vorzug vor dem andern geben, welches aus theoretischen Gründen vorzuziehen ist. Dies tritt nun aber für das System (44) ein. Die Formeln (44') würden aussagen, daß in einem activen Medium sich drei Wellen fortpflanzen können,

---

1) Vgl. Soret, Arch. des sc. phys. et nat. (3) 11, p. 330, 412, 1884. — Arch. de Genève, 11, p. 412, 1884. — 24, p. 591, 1890.

2) Cauchy, C. R. 15, p. 916, 1842.

3) MacCullagh, Trans. of Irish Acad. 17, part. III, p. 461. — Proc. of the Ir. Acad. 1, 383, 1837—40. M'Cullagh selbst stellte die Differentialgleichungen unter der speciellen Voraussetzung auf, daß die Wellennormale in eine Coordinatenrichtung falle. In dieser Form sind die M'Cullagh'schen Gleichungen von P. Volkmann (Vorlesungen über die Theorie des Lichtes, Leipzig 1891) gegeben.

von denen die eine eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzt, welche mit σ proportional und daher sehr klein ist. Dies scheint eine unnöthige Komplikation zu ergeben.

Aber noch aus einem anderen Grunde ist in theoretischer Hinsicht das System (44) dem System (44') überlegen. Geht man von der mechanischen Vorstellung aus, daß die kinetische Energie proportional zu $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2$ ist, so kann man beide Systeme (44) und (44') nicht in Einklang mit dem Energieprincip für jede Art von Bewegung bringen[1]). Aber wohl gelingt dies für das Formelsystem (44) nach der elektromagnetischen Vorstellung, für (44') aber auch nach dieser nicht.

Man kann daher mit Hülfe des Energieprincipes gewisse aus (44) abzuleitende Grenzbedingungen rationell begründen, aus (44') dagegen nicht[2]), und wenn auch Grenzbedingungen, welche aus einer derartigen Deduktion gewonnen werden, noch nicht den Charakter der nothwendigen Richtigkeit besitzen, wie ich anfangs (cf. pag. 372) hervorhob, so haben doch die elektromagnetischen Vorstellungen, wenn man sie genügend erweitert, bisher stets erfolgreich die Pfade gewiesen, sodaß man ihre Hülfe nicht unnöthig über Bord werfen wird.

Um eine Erweiterung der elektromagnetischen Formeln (4), welche für isotrop symmetrische Medien gelten, auf isotrop dissymmetrische vorzunehmen, kann man den Ansatz machen, daß man in den Gleichungen für die $\frac{\partial X}{\partial t}$ etc. erste Differentialquotienten der X, Y, Z nach den x, y, z einführt, während man, wie immer die Gleichungen für $\frac{\partial L}{\partial t}$ etc. unverändert läßt. Durch einfache Rechnung überzeugt man sich, daß, falls keine Absorption eintreten soll, die neu eingeführten Differentialquotienten der X, Y, Z nach den Coordinaten zugleich ungrade Differentialquotienten nach der Zeit sein müssen. Führt man daher zunächst nur erste Differentialquotienten nach der Zeit ein und stellt man, wie immer in isotropen Medien, die Bedingung

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0,$$

---

1) Cf. W. Voigt, Wied. Ann. 43, p. 410, 1891.

2) Dies ist natürlich auch ebensowenig nach der mechanischen Vorstellungsweise möglich.

so gelangt man zu dem Formelsystem:

$$A\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad A\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad A\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y},$$

$$A\varepsilon\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} + \varrho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right),$$

(45) $$A\varepsilon\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial z} - \frac{\partial L}{\partial x} + \varrho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right),$$

$$A\varepsilon\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} + \varrho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right).$$

Nach den oben pag. 380 angestellten Ueberlegungen muß sich ein Differentialquotient nach der Zeit ergeben, wenn man diese Gleichungen successive mit L, M, N, X, Y, Z multiplicirt und über einen begrenzten Raum integrirt. Bezeichnet dk das Volumenelement desselben, do sein Oberflächenelement, n die Normale seiner Oberfläche, so erhält man, indem man auf der rechten Seite der Gleichungen (45) partielle Integrationen ausführt, mit Benutzung von (7) den Ausdruck:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}dt = -A\int\left(L\frac{\partial L}{\partial t} + M\frac{\partial M}{\partial t} + N\frac{\partial N}{\partial t}\right)dk$$

$$-\int\left\{X\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) + Y\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}\right) + Z\left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right)\right\}dk$$

(46) $$+A\varrho\int\left(\frac{\partial X}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial t}\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial t}\frac{\partial N}{\partial t}\right)dk$$

$$+2\int\left\{(YN-ZM)\cos(nx) + (ZL-XN)\cos(ny) + (XM-YL)\cos(nz)\right\}do$$

$$+\varrho\int\left\{\left(Z\frac{\partial Y}{\partial t} - Y\frac{\partial Z}{\partial t}\right)\cos(nx) + \left(X\frac{\partial Z}{\partial t} - Z\frac{\partial X}{\partial t}\right)\cos(ny) + \left(Y\frac{\partial X}{\partial t} - X\frac{\partial Y}{\partial t}\right)\cos(nz)\right\}do.$$

Da nun

$$\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} = A\varepsilon\frac{\partial X}{\partial t} - A\varrho\frac{\partial^2 L}{\partial t^2},$$

so wird

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}dt = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}dt + A\varrho\frac{\partial}{\partial t}\int\left(X\frac{\partial L}{\partial t} + Y\frac{\partial M}{\partial t} + Z\frac{\partial N}{\partial t}\right)dk + \int\cdots do.$$

Das Energieprincip besitzt daher Gültigkeit, falls das Ober-

flächenintegral ein Differentialquotient nach der Zeit ist. Fällt n mit z zusammen, so sind daher die früheren Grenzbedingungen (5), nämlich, daß für alle Werthe von t und für $z = 0$ sein soll:

$$(5) \qquad L_1 = L_2, \quad M_1 = M_2, \quad X_1 = X_2, \quad Y_1 = Y_2$$

mit dem Energieprincip im Einklang.

Ebenso sieht man, daß, falls man in (45) noch Glieder der Form $\varrho' \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)$ etc. zugefügt hätte, ebenfalls das Energieprincip Gültigkeit behält, da dann

$$\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} = A\varepsilon \frac{\partial X}{\partial t} - A\varrho \frac{\partial^3 L}{\partial t^3} - A\varrho' \frac{\partial^4 L}{\partial t^4},$$

und

$$X \frac{\partial^4 L}{\partial t^4} + \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial^3 L}{\partial t^3} = \frac{\partial}{\partial t}\left(X \frac{\partial^3 L}{\partial t^3}\right) \text{ ist.}$$

Für periodische Bewegungen hat diese Erweiterung denselben Effekt, als ob in den Gleichungen (45) ϱ eine nach Potenzen des reciproken Quadrats der Schwingungsdauer fortschreitende Reihe wäre.

Man sieht ohne viel Rechnung, daß man außerdem dieselbe Erweiterung der Formeln (45) vornehmen kann, wie sie pag. 380 bei nicht activen isotropen Medien erwähnt ist, indem man nämlich Glieder der Form

$$\frac{\partial^3 X}{\partial t^3}, \quad \frac{\partial^5 X}{\partial t^5}, \quad \cdots$$

zufügt. Die Grenzbedingungen können die frühere Form behalten, ohne mit dem Energieprincip in Widerspruch zu treten.

Dagegen erlauben die Formeln (45) nicht, Glieder der Form ΔL etc. zuzufügen, ohne mit dem Energieprincip in der pag. 403 ausgesprochenen Fassung in Widerspruch zu gerathen. Aus diesen Zusatzgliedern würde sich die M'Cullagh'sche Form (44') ergeben.

Aus den Formeln (45) kann man leicht ableiten:

$$(47) \qquad \begin{aligned} A \frac{\partial^3 L}{\partial t^3} &= \frac{1}{A\varepsilon} \Delta L + \frac{\varrho}{\varepsilon} \frac{\partial^3}{\partial t^3}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A\varepsilon \frac{\partial^3 X}{\partial t^3} &= \frac{1}{A} \Delta X + \varrho \frac{\partial^3}{\partial t^3}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right), \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Wählt man daher L, M, N als Komponenten des Lichtvectors u, v, w, so erhält man für periodische Bewegungen, für welche $\frac{\partial L}{\partial t} = +\frac{i}{\tau} L$ etc. ist, aus (47) das Formelsystem (44), wobei gesetzt ist

$$a = \frac{1}{A^2 \varepsilon}, \quad \sigma = -\frac{\varrho}{A \varepsilon \tau^2}. \tag{48}$$

Die Grenzbedingungen werden nach (5):

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2,$$
$$a_1 \xi_1 + \sigma_1 u_1 = a_2 \xi_2 + \sigma_2 u_2, \quad a_1 \eta_1 + \sigma_1 v_1 = a_2 \eta_2 + \sigma_2 v_2. \tag{49}$$

Die Gleichungen (44) und (49) geben daher das Erklärungssystem für active Medien, wobei der Lichtvector mit der Polarisationsebene zusammenfällt.

Wählt man X, Y, Z als Komponenten des Lichtvectors, so erhält man wiederum das System (44) und die Grenzbedingungen (5) ergeben:

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad \xi_1 = \xi_2, \quad \eta_1 = \eta_2. \tag{49'}$$

Die Gleichungen (44) und (49') geben das Erklärungssystem für active Medien, nach welchem der Lichtvector senkrecht zur Polarisationsebene liegt.

Beide Erklärungssysteme (44), (49) und (44), (49') führen zu denselben Resultaten hinsichtlich der beobachtbaren Erscheinungen.

Führt man die oben erwähnte Erweiterung der Formeln (45) ein, so bleiben die Erklärungssysteme ungeändert, nur sind ϱ und ε nach Potenzen von $\frac{1}{\tau^2}$ fortschreitende Reihen.

Die Drehung der Polarisationsebene beim Durchgang durch eine Schicht des activen Mediums von der Dicke 1 ist proportional zu $\frac{\sigma}{a}$, d. h. nach (48) zu $\frac{\varrho}{\tau^2}$. Diese Drehung nimmt also als Funktion der Schwingungsdauer die Form an

$$\frac{\varrho}{\tau^2}\left(1 + \frac{\varrho_1}{\tau^2} + \frac{\varrho_2}{\tau^4} + \cdots\right),$$

welche bekanntlich die Beobachtungen stets ausreichend genau darstellt. — Dieselbe Dispersionsformel ergiebt sich aus der Boussinesq'schen Theorie[1]). In derselben sind die Grenzbedingungen

1) Boussinesq, Liouv. Journ. (2) 13, p. 380, 1868.

für active Medien nicht besonders gebildet. Da aber Boussinesq als solche stets die Cauchy'schen Continuitätsbedingungen benutzt, und diese nach pag. 370 mit den Grenzbedingungen (49') zusammenfallen, so folgt überhaupt gänzliche Uebereinstimmung der Boussinesq'schen Theorie mit dem hier gegebenen Erklärungssystem.

Die Grenzbedingungen (49) und (49') experimentell zu verificiren, scheint bei der Kleinheit der Konstanten σ für die bisher aufgefundenen activen Substanzen kaum möglich zu sein, da der Einfluß der Activität bei kleinem σ in den Grenzen der Reflexion verschwindet, während er ja die Gesetze des durchgehenden Lichtes dennoch wesentlich modificirt, wenn das Licht Schichten von Tausenden von Wellenlängen Dicke durchsetzt.

Der Körper, welcher den größten bisher beobachteten Werth von σ besitzt, ist Zinnober. Derselbe ist optisch einaxig, die bisher aufgestellten Formeln haben daher auf ihn keine Anwendbarkeit. Man kann leicht die auf pag. 394 für durchsichtige, nicht active Krystalle gültigen Formeln der elektromagnetischen Theorie dahin erweitern, daß sie die Erscheinungen in activen Krystallen erklären.

Man braucht zu dem Zweck nur in dem Formelsysteme (45) die linke Seite analog, wie es in dem für Krystalle gültigen Formelsystem (27) geschehen ist, zu erweitern, d. h. zu setzen:

$$A\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z},$$

(50) . . . . .

$$A\left(\varepsilon_{11}\frac{\partial X}{\partial t}\varepsilon_{12}\frac{\partial Y}{\partial t} + \varepsilon_{13}\frac{\partial Z}{\partial t}\right) = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} + \varrho\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right).$$

. . . . . .

Ein durchsichtiger Krystall würde demnach im allgemeinsten Falle 7 optische Konstanten besitzen. — Man übersieht sofort, daß die Grenzbedingungen (5) mit dem Energieprincip verträglich bleiben.

Interpretirt man die elektrische Kraft als Lichtvector, so erhält man die Formeln der Boussinesq'schen Theorie[1]) (auch den Grenzbedingungen nach). In den Differentialgleichungen für

1) Boussinesq l. c. In diesen Formeln müssen wiederum, falls Identität mit den elektromagnetischen entstehen soll, die Geschwindigkeit der Longitudinal-Wellen Null gesetzt werden, wie dies ja auch der Cauchy'sche Standpunkt ist, den Boussinesq acceptirt.

u, v, w haben diejenigen Glieder, deren Vorhandensein die Activität bedingt, dieselbe Form wie bei isotropen Medien (vgl. dazu in (44) die Glieder $\sigma\xi$, $\sigma\eta$, $\sigma\zeta$), d. h. einen Coefficienten während die Sarrau'sche Theorie [1]) eine größere Anzahl solcher Coefficienten aufweist.

Interpretirt man die elektrische Polarisation als Lichtvector, so erhält man Differentialgleichungen, welche in gewisser Weise ähnlich den von Briot [2]) für einaxige Krystalle aufgestellten sind, wenn sie auch nicht damit coincidiren.

Die die Activität bedingenden Zusatzglieder erscheinen hier in einer Form, welche abweicht von der bei isotropen Medien gültigen. — Dasselbe ergiebt sich, falls man die magnetische Kraft als Lichtvector interpretirt.

Indessen stellt sich heraus, daß die Abweichung der Form dieser Zusatzglieder von der für isotrope Medien gültigen Form von der Ordnung des Produktes der Konstante ϱ (Formel (50)) in die Differenz der Hauptbrechungsindices des Krystalls, und daher für die in der Natur vorkommenden Krystalle nicht experimentell nachweisbar ist. — Daher stellen auch nach numerischen Berechnungen [3]) die verschiedenen besprochenen Theorieen Beobachtungen am Quarz gleich gut dar, und ebenso gut, wie die Theorie von v. Lang [4]), welche sich aus dem Formelsystem (50) ergiebt, wenn man die elektrische Polarisation als Lichtvector (u, v, w) einführt, die Form der Zusatzglieder in den Differentialgleichungen für u, v, w jedoch, welche die Activität erklären, von der für isotrope Medien gültigen Form (44) nicht als verschieden annimmt.

Ich habe am Zinnober Versuche angestellt, um einen Einfluß der Activität auf die Gesetze der Reflexion zu entdecken. Diese müßte in einer ähnlichen Weise modificirt werden, wie es beim magnetisirten Eisen eintritt. Ich habe aber bisher keinen solchen Einfluß beobachten können, und aus der Kleinheit, welche σ selbst beim Zinnober für rothes Licht besitzt, wie man aus Beobachtungen im durchgehenden Lichte berechnen kann, ergiebt sich auch, daß die Reflexionsgesetze nur innerhalb der Grenze der Beobachtungsgenauigkeit modificirt werden können. Trotzdem waren die

---

1) E. Sarrau, Liouv. Journ. (2) 13, p. 99, 1868.

2) Ch. Briot, Essais sur la théorie mathémat. de la lumière. Deutsch von Klinkerfues, Leipzig 1867, p. 123.

3) Vgl. B. Hecht, Wied. Ann. 30, p. 274, 1887.

4) V. v. Lang, Wien. Ber. (II) 75, p. 719, 1877. — Pogg. Ann. Ergbd. 8, p. 608, 1878.

Versuche nicht von vornherein aussichtslos, weil man nicht weiß, ob σ nicht für andere Farben wesentlich größer ist, wie schon allein aus dem Dispersionsgesetz (pag. 405) folgt. Für diese würde die specifische Drehung, wenn überhaupt, so nur aus Reflexionsbeobachtungen zu ermitteln sein, da Zinnober für andere Farben als roth metallisch undurchsichtig ist.

Grade von diesem Standpunkt aus bietet es auch ein praktisches Interesse, eine Theorie der absorbirenden activen Krystalle zu verfolgen, weil man dadurch in den Stand gesetzt wird, durch Reflexionsbeobachtungen zu constatiren, ob auch stark absorbirende Krystalle optisch dissymmetrische Eigenschaften besitzen. Die Theorie ergiebt sich nach der elektromagnetischen Auffassung auf dem angedeuteten Wege ohne Schwierigkeit, indessen stelle ich die Formeln für active absorbirende Krystalle nicht auf, weil vorläufig kein Experiment bekannt ist, das mit ihrer Hülfe zu berechnen wäre. Immerhin wäre es wünschenswerth, an den in der Natur vorkommenden, auch dem Krystallsystem nach dissymetrischen absorbirenden Krystallen die Reflexionsgesetze experimentell sorgfältig zu untersuchen, um dadurch vielleicht an einigen Activität, d. h. auch optische Dissymmetrie, zu entdecken.

Magnetisch active Substanzen.

Auch für diese sind von verschiedenen Standpunkten aus Erklärungssysteme gegeben, von denen einige auch Grenzbedingungen enthalten, die also vollständig sind in dem pag. 367 angedeuteten Sinne. Abgesehen von dem kürzlich von Goldhammer[1]) gegebenen Erklärungssysteme entsprechen die bisherigen den Thatsachen, welche Kerr an magnetisch-activen Substanzen beobachtet hat, nicht. Ich will an einer anderen Stelle näher auf diesen Gegenstand eingehen und dort ein Erklärungssystem angeben, welches mit allen bisher angestellten Beobachtungen in sehr gutem Einklang steht und vor dem Goldhammer'schen System den Vorzug hat, eine willkürliche Konstante weniger, d. h. überhaupt nur noch eine, zu enthalten.

Polarisation des gebeugten Lichtes.

Ich kann nicht entfernt daran denken, eine Uebersicht über alle Gebiete optischer Erscheinungen hinsichtlich der Möglichkeit

1) D. A. Goldhammer, Wied. Ann. 46, p. 71, 1892.

ihrer mathematischen Darstellung geben zu wollen. Ich will nur kurz die in der Ueberschrift genannten Erscheinungen streifen, da das Erklärungssystem für dieselben im Princip schon in dem Vorstehenden enthalten ist, wenn auch noch bedeutende mathematische Schwierigkeiten zu überwinden sein werden, aus jenem Erklärungssystem brauchbare Formeln für die Praxis abzuleiten.

Die bisher[1]) für die Polarisation des gebeugten Lichtes gegebenen Formeln stellen die Thatsachen sämmtlich nicht befriedigend dar, da in allen bisherigen Theorieen nur die geometrische Gestalt des Beugungsgitters als wesentlich, dagegen seine Substanz als unwesentlich erscheint, eine Annahme jedoch, welche nach den Versuchen von Gony[2]) sicher nicht richtig ist.

Die Willkürlichkeit der bisherigen[2]) Anschauungsweise liegt darin, daß man die Lichtbewegung in einer Schirmöffnung als überall gleichgerichtet und nur durch die Elementarwelle bestimmt annahm. Diesem Mangel hat Fröhlich[3]) abzuhelfen gesucht, indem er aus Beobachtungen festzustellen suchte, in welcher Weise die Lichtbewegung in einer Schirmöffnung mit dem Orte wechselte. Es ergab sich eine unendliche Mannigfaltigkeit der gesuchten Lösungen. Wenn nun auch durch die Fröhlich'schen Formeln die angestellten Beobachtungen besser dargestellt werden, als durch die bisherigen, schon allein, weil sie weit mehr aus den Beobachtungen selbst zu bestimmende Konstanten enthalten, so entsprechen sie doch nicht den Anforderungen, welche man an eine Theorie zu stellen berechtigt ist, nämlich die numerischen Beziehungen in der ökonomischsten Weise aus der kleinst möglichen Anzahl von Konstanten abzuleiten. — Den Ausgangspunkt einer strengen Diffraktionstheorie haben die oben aufgestellten Erklärungssysteme zu geben, falls man nur die Grenzbedingungen derselben in der Form hinschreibt, wie sie beliebig gestellten Grenzflächen entsprechen, was keine Schwierigkeiten bietet. Wenn die Gestalt der Grenzflächen und die optischen Konstanten der aneinandergrenzenden Medien gegeben sind, so müssen sich die optischen Erscheinungen aus den Erklärungssystemen vollständig ableiten lassen. Es ist also mehr eine rein mathematische Aufgabe zu lösen, um zu mit der Erfahrung vergleichbaren Resultaten zu gelangen, eine Aufgabe, die allerdings wohl manche Schwierigkeit bereiten mag.

---

1) Betreffs der Literatur vgl. W. König, Wied. Ann. 17, p. 1016, 1882.

2) Gony, C. R. 96, p. 697, 1883. — 98, p. 573, 1884. — Ann. de chim. et de phys. (6), 8, p. 145, 1886. Vgl. auch W. Wien, Wied. Ann. 28, p. 117, 1886.

3) Fröhlich, Wied. Ann. 15, p. 576, 1882.

Jedenfalls geht hieraus ebenfalls zur Genüge hervor, daß auch nicht Bäugungsphänomene im Fresnel'schen oder Neumann'schen Sinne die Frage nach der Lage der Lichtschwingungen zur Polarisationsebene entscheiden können[1]), wie auch von Rowland[2]) sowohl von der elektromagnetischen, wie von der mechanischen Vorstellungsweise aus gezeigt ist.

Schluss.

Ich fasse zunächst kurz die Hauptresultate zusammen: Für ein großes Gebiet optischer Erscheinungen liegen Erklärungssysteme vor, welche vielen mechanischen Theorieen und der elektromagnetischen gemeinsam sind, und mit der Erfahrung übereinstimmen, sodaß man diese Erklärungssysteme als richtig ansehen kann. Dieselben sind im Obigen angegeben.

Um eine volle Uebereinstimmung der elektromagnetischen Theorie mit der Erfahrung herbeizuführen, kann man ihre Formeln in der Weise erweitern, daß die Erklärung statischer oder langsam veränderlicher elektromagnetischer Erscheinungen nicht darunter Einbuße erleidet.

Zu den Gebieten, auf welchen man ein (im obigen Sinne) richtiges Erklärungssystem besitzt, gehört die Metalloptik. In der That stimmen annähernd die aus Reflexionsbeobachtungen[3]) gewonnenen Konstanten mit den aus Beobachtungen im durchgehenden Lichte[4]) erhaltenen überein. Die noch bestehenden Abweichungen[5]) scheinen mir eher darin begründet zu sein, daß einerseits die Verhältnisse, unter welchen die Reflexion beobachtet wird, den in dem Erklärungssystem gemachten Voraussetzungen nicht streng entsprechen[6]), und andrerseits durchsichtige Metallschichten nur schwer

---

1) Dieser Meinung war G. G. Stokes, (Cambr. Trans. 9, p. 1, 1849). — Die Resultate der Versuche widersprachen sich selbst, indem nach Stokes (l. c.) im Fresnel'schen, nach Holtzmann (Pogg. Ann. 99, p. 446, 1856) im Neumann'schen Sinne die Antwort ausfiel. —

2) Rowland, Phil. Mag. (5) 17, p. 413, 1884.

3) Vgl. P. Drude, Wied. Ann. 39, p. 481, 1890. — 42, p. 186, 1891.

4) Vgl. Wernicke, Pogg. Ann. Ergbd. 8, p. 75, 1878. — A. Kundt, Wied. Ann. 34, p. 469, 1888. — Du Bois u. Rubens, Wied. Ann. 41, p. 507, 1890.

5) Dies gilt besonders für die von Rathenau (Die Absorption des Lichtes in Metallen. Diss. Berlin, 1889) bestimmten Absorptionscoefficienten.

6) Dahin gehört das Fehlen von Oberflächenschichten und feinen Rissen. (Vgl. Wied. Ann. 39, p. 481, 1890).

von genügend homogener Struktur und von fremden Beimengungen frei herzustellen sind, als darin, daß das Erklärungssystem nicht richtig wäre.

Jedenfalls sind die nach dem gegebenen Erklärungssystem ermittelten Konstanten von den Voraussetzungen der besonderen, bisher aufgestellten Theorieen frei[1]), da diese sämmtlich zu demselben Erklärungssystem führen.

Was die theoretische Herleitung der Erklärungssysteme im Allgemeinen betrifft, so zeigt sich, daß wohl oft dieselbe nach rationellen Principien möglich ist, daß aber diese Art der Herleitung noch nicht den Stempel der nothwendigen Richtigkeit trägt, und daß Erklärungssysteme, welche mit dem rationellen Princip in Widerspruch sind, darum noch nicht falsch zu sein brauchen. Denn je nach den Vorstellungen der besonderen Theorie können sich diese Resultate ändern. So ergeben sich die Erklärungssysteme für active Körper nach der mechanischen Auffassung nicht mit dem Energieprincip vereinbar, wohl aber nach der elektromagnetischen. Immerhin mögen aber rationelle Principien besonderer Theorieen am bequemsten die Wege zu richtigen Erklärungssystemen weisen, und in dieser Beziehung hat sich die elektromagnetische Theorie bisher als bester Pfadführer bewährt[2]).

Schließlich fasse ich noch kurz die Resultate hinsichtlich der Lage der Lichtschwingungen zur Polarisationsebene zusammen: Es ergiebt sich allgemein, daß bei jeder Lichtbewegung zwei periodisch sich ändernde Vectoren verschiedene Gesetze befolgen. Falls die Lichtbewegung in ebenen Wellen besteht, liegen in isotropen durchsichtigen Medien diese Vectoren in, resp. senkrecht zur Polarisationsebene. Dem Quadrat des einen Vectors ist die potentielle Energie, dem Quadrat des anderen die kinetische proportional[3]). Die verschiedenen Theorieen unterscheiden sich nur darin, daß diese Bedeutung der Vectoren zum Theil gegenseitig

1) Dies gilt sowohl für die aus Reflexionsbeobachtungen ermittelten Konstanten (vgl. P. Drude, Wied. Ann. 36, p. 532, 1889), als auch für die aus Prismenbeobachtungen ermittelten (vgl. W. Voigt, Wied. Ann. 24, p. 144, 1885. — P. Drude, Wied. Ann. 42, p. 666, 1891).

2) Auch von den nach verschiedenen Vorstellungsweisen gegebenen Beziehungen zwischen Brechungsexponent und Dichte hat sich bisher am besten die von H. A. Lorentz (Wied. Ann. 9, p. 641, 1880) auf Grund der elektromagnetischen Theorie gegebene bewährt.

3) D. h. in isotropen Medien. Wie sich die Verhältnisse in Krystallen gestalten, ist oben näher discutirt.

vertauscht erscheint. Wiener[1]) hat zuerst eine Versuchsanordnung getroffen, welche es ermöglicht, jene beiden Vectoren einzeln auf ihre physikalische oder chemische Wirkungsweise untersuchen zu können. Bei stehender Wellenbewegung liegen nämlich die Schwingungsbäuche beider Vectoren an verschiedenen Stellen des Raumes. Photographische-, Fluorescenz-[2]) (und wahrscheinlich Wärme-)Wirkung findet im Schwingungsbauche desjenigen Vectors statt, welcher die Fresnel'schen Gesetze befolgt.

Sollte es sich herausstellen, daß überhaupt nur dieser Vector objektiv wahrnehmbare Wirkungen erzeugt, so wird man, wenn man optische Formeln für nur eine der beiden, bei Lichtbewegung periodisch sich ändernden Vectorgrößen geben will, eher die Fresnel'schen, als die Neumann'schen wählen. Damit ist dann aber noch immer nicht entschieden, daß dieser Vector, welcher senkrecht zur Polarisationsebene liegt, mit den Lichtschwingungen der mechanischen Theorieen, d. h. dem kinetischen Vector, zu identificiren sei. Denn ob jener Vector kinetischer oder potentieller Natur sei, ändert sich je nach der zu Grunde gelegten Theorie — er ist z. B. nach Maxwell's Auffassung potentieller Natur, d. h. dasjenige, was man in der mechanischen Auffassung als Lichtschwingung bezeichnet, würde nach Maxwell in der Polarisationsebene liegen. — Für die praktische Physik ist aber diese Streitfrage gegenstandslos.

Göttingen, im März 1892.

---

1) O. Wiener, Wied. Ann. 40, p. 203, 1890.

2) Vgl. P. Drude u. W. Nernst, Gött. Nachr. Nr. 10, p. 2, 1891.

Inhalt von Nr. 11.

P. Drude, In wieweit genügen die bisherigen Lichttheorieen den Anforderungen der practischen Physik?

Für die Redaction verantwortlich: *H. Stauppe*, Secretair d. K. Ges. d. Wiss.

Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*

Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

27. Juli. **№ 12.** 1892.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 9. Juli 1892.

Ehlers legt a) einen Aufsatz des Herrn Dr. Rhumbler vor: „Ueber das Auftreten von Eisenerz in verwesenden Foraminiferen".

b) trägt er eine Mittheilung vor: „Beiträge zur Kenntniß der Arenicola marina L.".

Riecke legt einen Aufsatz des Herrn Prof. Walter Nernst vor: „Ueber die mit der Vermischung concentrirter Lösungen verbundene Veränderung der freien Energie".

Klein legt von Herrn Dr. David Hilbert in Königsberg in Pr. vor: „Ueber die Theorie der algebraischen Invarianten". 3.

Zur Kenntnis von Arenicola marina L.

Von

E. Ehlers.

In einer kürzlich veröffentlichten Untersuchung über die Gehörorgane der Arenicolen (Zeitschrift für wiss. Zool. Bd. LIII. Suppl. 1892. pag. 217) habe ich die Vermuthung ausgesprochen, daß die Jugendzustände der an unserer Nordsee-Küste so weit verbreiteten und häufigen Arenicola marina L. uns bis jetzt unbekannt seien und daß die von Max Schultze als die Eier und Jungen dieses Wurmes in Anspruch genommenen Laichballen und die daraus erzogenen Larven, welche im Frühjahr auf dem sandigen

Ebbestrande der Nordsee-Küste häufig gefunden werden, mit Unrecht auf die Arenicola bezogen seien. Meine Zweifel gründeten sich auf die schon im August und September zu beobachtende hohe Entwicklung der Geschlechtsproducte in den männlichen und weiblichen Thieren des Sandwurmes, darauf daß ich die so leicht wieder zu erkennenden Laichballen, welche Max Schultze beschrieben hatte, auf Norderney an Orten fand, an welchen zu jener Zeit Arenicolen nicht gefunden wurden, und auf die Größen, welche die jüngsten von mir gesehenen Arenicolen bereits im Mai zeigten.

Eine Anzahl von Erfahrungen, welche ich seitdem sammeln konnte, bestätigte mir, daß meine Vermuthung zutreffend war.

Zunächst habe ich zu erwähnen, daß schon vor mir gleiche Zweifel über die Richtigkeit der von Max Schultze seiner Beobachtung gegebenen Deutungen ausgesprochen sind. Bald nach dem Erscheinen meines Aufsatzes hatte Herr J. T. Cunningham in Plymouth die Güte, mir eine von ihm und Herrn G. A. Ramage verfaßte Arbeit über die sedentären Anneliden des Firth of Forth zuzusenden, die meiner Kenntnis bis dahin entgangen war[1]). In ihr werden die Schultze'schen Meinungen in Zweifel gezogen auf Grund von Beobachtungen, welche die Verfasser an den aus den M. Schultze'schen Laichballen erhaltenen Larven machten. Ihnen gelang es, die jungen Thiere zu weiterer Entwicklung zu bringen, als es Max Schultze und mir gelungen war: die weiter auswachsenden jungen Würmer erhielten an den Flanken der letzten Segmente Fortsätze, welche als Kiemen gedeutet wurden. Daraufhin wiesen die Herren Cunningham und Ramage die Beziehungen dieser jungen Thiere zu Arenicola ab und nahmen sie für die Jungen des Scoloplos armiger in Anspruch.

Ich hatte, ohne von dieser Arbeit Kenntnis zu haben, Herrn Dr. Cl. Hartlaub bei seinem Eintreten in die biologische Station auf Helgoland gebeten, auf die Entwicklung von Arenicola zu achten. Ihm war es in diesem Frühjahre bald gelungen, die von Max Schultze behandelten Laichballen zu finden; die darin enthaltenen Eier entwickelten sich, und H. Dr. Hartlaub erhielt aus ihnen junge Würmer, welche sich weiter entwickelten als die von den Herrn Cunningham und Ramage beschriebenen. Die Kiemenbildung, welche von den englischen Zoologen am hin-

1) J. T. Cunningham and G. A. Ramage, The Polychaeta Sedentaria of the Firth of Forth. Transactions of the royal Society of Edinburgh. Vol. XXXIII. Pt. III. pg. 651.

teren Körperende der jungen Würmer beobachtet wurde, erstreckte sich bei den von H. Dr. Hartlaub erzogenen und mir übersendeten Larven um ein Segment weiter nach vorn, vor dem verlängerten zwei Cirren tragenden Aftersegment; die Kiemen waren länger als bei den von den englischen Zoologen gezüchteten Thieren, die einfachen Borsten waren deutlich in zwei Gruppen gesondert, und neben ihnen trat überall ein läppchenartiger Fortsatz auf, mit Ausnahme des schwach zweitheiligen borstenlosen Buccalsegmentes. Die Bildung, welche die jungen Thiere damit annahmen, machte es zum mindesten höchst unwahrscheinlich, daß sie Abkömmlinge einer Arenicola seien, denn an eine Metamorphose dieser Larve in eine Arenicola ist nicht zu denken; sie wies auf eine Ariciide, vielleicht mit Recht auf Scoloplos armiger.

Dazu gesellen sich nun Beobachtungen in anderer Richtung. Während meine Arbeit im Druck war, erschien eine kurze Notiz des Herrn E. A. Andrews[1]) über eine junge Arenicola an der amerikanischen Küste. Das Thier war, in einem gallertartigen Rohr eingeschlossen, welches dem der jungen, an der Nordseeküste so häufigen Terebella conchylega verglichen wird, frei im Meere schwimmend im pelagischen Auftrieb gefunden. Eine Bezeichnung der Art ist nicht gegeben; ich möchte aber vermuthen, daß der Wurm der Arenicola antillensis (Ltk.) nahe steht, wenn er nicht mit ihr zusammenfällt, und zwar aus dem Grunde weil von dem hier beobachteten pelagisch treibenden jungen Wurme der Besitz von einzelnen großen Otolithen angegeben wird, welche für Arenicola antillensis (Ltk.) characteristisch sind.

Von diesem interessanten Funde einer pelagisch treibenden jungen Arenicola machte ich Herrn Dr. Hartlaub Mittheilung, und erhielt bald darauf von ihm als Antwort die Anzeige, daß auch bei Helgoland jetzt Arenicola als junges Thier im pelagischen Auftrieb gefunden sei. Er hatte die Güte, den so erhaltenen Wurm mir zu übersenden und es besteht kein Zweifel darüber, daß dieser eine junge Arenicola ist. Der drehrunde, nicht ganz 0,5 mm dicke, und 3,5 mm lange Wurm kennzeichnete sich nämlich durch den Besitz zweier ungleicher Körperstrecken, einer vorderen die aus dem Kopflappen, dem Buccalsegment und 20 doppelringeligen borstentragenden Segmenten bestand, und einer hinteren enggeringelten, borstenlosen. Diese Bildung weist sicher auf

1) E. A. Andrews, Report upon the Annelida polychaeta of Beaufort, North Carolina (From Proceed. U. St. National Mus. Vol. XIV. No. 852) Washington 1891. 8°.

Arenicola marina (L.). Der kegelförmig vorspringende Kopflappen characterisirt die Jugendform vor dem ausgebildeten Thiere, die Borsten haben schon die Formen der beim Erwachsenen vorhandenen; Kiemen aber fehlen völlig, denn wenn ich sie am conservirten Thiere nicht fand und das nicht als maaßgebend angesehen werden sollte, so theilte Herr Dr. Hartlaub mir auf meine Frage mit, daß auch am lebenden Thiere Kiemen nicht zu sehen gewesen wären. Als diese Zeilen bereits geschrieben waren, hatte Herr Dr. Henking, welcher in der Emsmündung zoologische Untersuchungen anstellte, die Güte, mir eine dort bei der pelagischen Fischerei gefangene junge Arenicola zu übersenden. Der Wurm glich in seiner äußeren Gestaltung fast völlig dem von Helgoland erhaltenen, auch er war völlig kiemenlos. Bei dem zuerst erhaltenen Thiere konnte ich, auch nach Aufhellung des Körpers, von Gehörorganen nichts wahrnehmen. Da dieser Befund aber Nichts bewies, zerlegte ich das vordere Körperende des zweiten Thieres in eine Reihe von Querschnitten. Diese ergaben, daß die Gehörorgane als zwei verhältnismäßig große Blasen bereits vorhanden waren; sie hatten eine einschichtige mit dem äußeren Epithel durch einen Zellenstrang zusammenhängende epitheliale Wand, und enthielten mehrere Otolithen. Ob diese Fremdkörper oder Sekretmassen sind, lasse ich jetzt unentschieden; für das erstere spricht ihre unregelmäßige Form. Es steht zu hoffen, daß mit geeigneter Fischerei die Jugendstadien dieses so häufigen Wurmes uns so zahlreich zugängig werden, daß mit reichlichem Material eine Untersuchung auf Erfolg über diese und andere Fragen angestellt werden kann. — Mit dem an der amerikanischen Küste beobachteten pelagisch treibenden Wurme stimmten beide jungen Würmer darin überein, daß auch sie in einer dicken gallertartigen Hülle eingeschlossen waren, deren Reste den conservirten Thieren in ungleich großer Ausdehnung als ein membranöser Ueberzug anhingen.

Diese Befunde sichern die Auffassung, daß die jungen Arenicolen aus einem anderen Ursprunge hervorgehen, als aus den Schultze'schen Eierballen. Denn die diesen entstammenden Larven kriechen auf dem Boden der Zuchtgefäße umher und entwickeln frühzeitig Kiemen, die jungen Arenicolen treiben dagegen pelagisch und haben noch keine Kiemen, wenn sie schon zu ansehnlicher Größe herangewachsen sind. Danach ist darauf zu achten, ob nicht die geschlechtlich vollreifen Arenicolen Eier und Samen frei in das Wasser entleeren.

Von einem Fischer auf Helgoland, welcher das Sammeln der Sandwürmer als Köder für den Fischfang gewerbsmäßig betrieb

und daher die Thiere gut kannte, ist mir berichtet, daß er zu verschiedenen Malen erwachsene Arenicolen frei schwimmend im Küstenwasser gesehen habe. Das war im August. Die Würmer schwammen dann mit der Fluth dicht über dem Sande dem Strande zu. Ich habe seiner Zeit diese Erzählung mit etwas Mistrauen aufgenommen, allein sicher mit Unrecht, da diese Beobachtung von anderer Seite völlige Bestätigung findet. Eine solche verdanke ich Herrn Dr. Ehrenbaum. Am 26. Februar 1890 hatte Herr Dr. Ehrenbaum von Carolinensiel ab vor Sonnenaufgang eine Fahrt für Fischerei ins Watt unternommen und vor Anker liegend in der sogenannten Osterbalge das treibende Brutnetz bei starkem Ebbestrom ausgesetzt, dessen oberer Rand die Oberfläche des Wassers berührte. Das Fangerträgnis des ersten Zuges, der noch bei Dunkelheit gemacht wurde, war reich an pelagischen Thieren und treibenden Fischeiern. Darunter fand sich eine Anzahl ca. 8—12 cm großer Arenicola von gelblicher Farbe. Damit wird die pelagische Lebensweise des Wurmes, wenigstens für bestimmte Zeiten, zur Gewißheit erhoben. Ob die betonte gelbliche Färbung der gefangenen Würmer, die besonders hervorgehoben wird, von Bedeutung ist, lasse ich dahingestellt; die Hautpigmentirung der Arenicola marina ist augenscheinlich sehr variabel, im Allgemeinen sind jüngere Thiere hellfarbig; doch finden sich auf Helgoland die „schwarzen Würmer", wie die dunkelgefärbten Arenicolen kurzweg von den Fischern bezeichnet werden, mit Vorliebe an besonderen Standorten.

Dagegen wäre nun weiterhin darauf zu achten, ob etwa die Würmer ihre Wohnsitze im sandigen Boden verlassen und frei umherschwimmen, wenn die Brutperiode eintritt. Hat doch auch Rathke von den zur Laichzeit im Wasser frei herumschwimmenden Männchen und Weichen einer Nereis Aehnliches berichtet. — Sollte das der Fall sein, so werden höchwahrscheinlich die Eier nicht am Boden abgesetzt sondern ins Wasser entleert und entwickeln sich darin frei schwimmend.

Der Fund der pelagisch treibenden jungen Arenicolen läßt mich Zweifel in die Richtigkeit einer Annahme setzen, welche ich in meinem im Eingange erwähnten Aufsatze gemacht habe. Ich bin der Meinung gewesen, daß im Mai auf Helgoland gefundene junge Arenicolen von 3 cm Länge die Abkömmlinge der letzten Laichperiode gewesen seien. Das ist dem Umstande gegenüber nicht ohne Weiteres aufrecht zu halten, daß im Mai junge Arenicolen von 3,5 mm pelagisch treibend vorkommen; vielmehr wird es danach wahrscheinlich erscheinen, daß diese 3 cm langen Würmer

der Laichperiode des Vorjahres entstammen, im Allgemeinen also einjährig sind. Nun hatte aber Herr Dr. Hartlaub die Güte, mir vor Kurzem mitzutheilen, daß er im Juni auf der West-Seite von Helgoland junge Arenicolen von 2—10 cm Länge in allen Abstufungen gefunden habe. Hält man das mit dem Umstande zusammen, daß nicht lange Zeit vorher an den gleichen Orten auch junge Arenicolen von 3,5 mm Länge vorkommen, so erscheint es fraglich, ob nicht die Geschlechtsthätigkeit der Arenicolen und die Entleerung der Eier über einen längeren Zeitraum des Jahres hindurch stattfindet, und daraus sich erklärt, daß junge Arenicolen von so sehr ungleicher Größe neben einander gefunden werden. Dann würde die Beobachtung schwimmender Arenicolen im August und im Februar vielleicht Anfang und Endzeit einer Laichperiode andeuten; im Frühjahr daher junge Arenicolen von sehr ungleicher Größe neben einander vorkommen.

Die Beantwortung dieser Frage wird Zoologen, welche dauernd an der Nordsee-Küste beobachten können, leicht fallen. Ihnen wird es auch gelingen die Aufenthaltsorte der jungen Arenicolen nachzuweisen, die sicher in ähnlich großen Mengen vorhanden sind, wie gelegentlich an der Nordsee-Küste junge Terebellaceen in größter Anhäufung treibend gefunden werden. Vermuthlich ist der regelmäßige Aufenthaltsort der jungen, sich entwickelnden Arenicolen nicht das Oberflächenwasser, aus dem die mir zugegangenen jungen Würmer gefangen waren, sondern eine tiefere Meeresschicht, aus welcher sie in ein feines Treibnetz wohl heben dürfte. Darauf die Aufmerksamkeit zu lenken, ist gleichfalls ein Zweck dieser Zeilen. Die Kenntnis der Jugendformen der Arenicola ist für die Beurtheilung der systematischen Stellung des Wurmes ebenso wichtig, wie es für die Interessen der Fischerei von Bedeutung werden könnte, die Lebensverhältnisse eines Wurmes genau zu kennen, der für die Angelfischerei den hauptsächlichen Köder liefert oder geliefert hat.

Eisenkiesablagerungen im verwesenden Weichkörper von Foraminiferen, die sogenannten Keimkugeln Max Schultze's u. A.

Vorläufige Mittheilung.

Von

Dr. L. Rhumbler.

Assistent am zoologisch-zootomischen Institut zu Göttingen.

(Vorgelegt von Ehlers.)

Das Bestreben, die ersten Keimbildungsvorgänge bei den sonst vielbearbeiteten Foraminiferen klar zu stellen, hat mehrfach Veranlassung dazu gegeben, verschiedene Arten von fremdartigen Gebilden im Foraminiferenweichkörper als Vorläufer der jungen Brut anzusprechen, die schon seit 1847 durch Gervais[1]) in den Kammern älterer Gehäuse unzweifelhaft aufgefunden ist.

Vor Allem sind es drei Arten solcher fremden Einlagerungen, welche in dem angedeuteten Sinne eine irrthümliche Deutung erfahren haben.

Die eine wird durch eine Diatomee representirt, welche wohl in die Nähe der Gattung Cocconëis zu stellen sein dürfte. Carter[2]) hat sie zuerst für Orbitolites in solcher Weise verkannt; später aber ihre Bedeutung richtig gestellt[3]). Ich habe diese Diatomee — ich vermuthe wenigstens, daß es dieselbe ist — in den Endkammern fast jeden einzelnen Exemplars der, in der Nordsee so häufigen, Truncatulina lobatula Walker und Jakob gefunden. Sie scheinen hier zu schmarotzen[4]), wenn man

---

1) Comptes rendus de l'académie des sciences. 1847. B. XXV. p. 467.

2) H. J. Carter: „On the structure called Eozoon canadense in the Laurentian Limestone of Canada" in: The Annals and Magazine of natural history. 4. ser. Vol. 13. S. 191—192.

3) teste Bütschli: „Protozoa" S. 140. Ich konnte aber in dem dort citierten Aufsatze (Ann. mag. nat. hist. 4. ser. T. XVI. p. 420) eine derartige Richtigstellung nicht finden; es sollte wohl eine andre mir nicht bekannte Arbeit Carter's citiert werden.

4) Daß auch bei manchen Foraminiferen eine Art von Parasitismus oder Symbiose ähnlich wie bei Radiolarien vorkommt, darf nicht bezweifelt werden — so ist z. B. der Weichkörper der verschiedenen Globigerina-Arten (incl. Orbulina)

Theilungsstadien, welche ich öfter fand, und außerdem das lebenskräftige Aussehen der Diatomee, welche nie Zerfallserscheinungen erkennen ließ, als Beweisgrund hierfür ansehen darf. Sie sind sehr klein[1]), die Struktur ihrer Schale kann nur bei Anwendung von den stärksten Trockensystemen oder von Immersionen erkannt werden. Ein breiter Protoplasmahof, welcher sich vom Protoplasma der Truncatulina deutlich und scharf abhebt, umgiebt diese Fremdlinge im Truncatulinaweichkörper[1]). Da ich noch nicht hinreichend sicher bin, ob die genannte Diatomee nicht doch blos als Nahrung aufgenommen wird, muß ich weitere Mittheilungen über die betreffenden Vorkommnisse noch verschieben.

Zu einer zweiten Art solcher als Keimkörper misdeuteten Fremdsubstanzen möchte ich einen Theil der von Carter als „propagative bodies" beschriebenen Gebilde rechnen[2]). Ich fand diese Gebilde bei Saccammina sphaerica M. Sars; bei Truncatulina lobatula (beide aus der Nordsee) und bei Hyperammina friabilis Brady (aus der Südsee). Es sind kuglige, manchmal auch ellipsoïde Körper von sehr verschiedener Größe und etwas durchscheinendem Aussehen. Ihre Färbung variirt in allen Nüancen des Grau und Braun. Man trifft sie in der Regel vereinzelt hier und da im Weichkörper zerstreut; oft aber sind sie auch zu großen Ballen vereinigt, welche von einer gemeinsamen glashellen Membran umgeben werden. Zwischen ihnen findet man dann meist noch blaugrüne, grüngelbe bis gelbrothe, um vieles kleinere Körperchen von ganz anderem, oft traubig gestaltetem Aussehen. Die grauen Kugeln widerstehen Säuren und Alkalien in gleicher Weise. Ich fand in ihnen einigemale Reste von Diatomeenschalen, Spongiennadeln und sonstige kleine Fremdpartikeln eingelagert, so daß ich in Anbetracht der großen Aehnlichkeit, welche diese Gebilde mit Schlickmassen haben, die man etwa durch Rollen eines Deckglases zu künstlichen Kugeln geformt hat, sie für Fäcalkugeln halte. Die glashelle Membran kann fürderhin als eine

---

fast ausnahmslos mit zelligen, kernhaltigen Gebilden angefüllt, welche zweifellos auf Zooxanthellen zurückzuführen sind. Ich habe diese Zellen oft in großen Massen in dem Globigerina-Material der Deutschen Plankton-Expedition aufgefunden. Stuart, welcher die Orbulina für eine kalkschalige Radiolarie (Coscinosphaera ciliosa) ansah, beobachtete am lebenden Thier direkt das Vorkommen von Zooxanthellen (Ztschr. f. wiss. Zool. 1866. Bd. XVI).

1) Der Durchmesser des Protoplasmahofes beträgt im Mittel 0,04470 mm, derjenige der Diatomeenschale 0,01192 mm.

2) loc. cit. div.; ferner Ann. of nat. hist. 3 ser. Vol. 8. p. 309.

Hüllhaut aufgefaßt werden, mit welcher sich der Weichkörper gegen diese unbrauchbar gewordenen Nahrungsreste abgeschlossen hat. Die kleinen Körperchen mögen wohl Exkretkörnchen sein, welche als werthlos mit den ausgenutzten Scklickmassen zusammengeballt worden sind, um mit ihnen gelegentlich gemeinsam nach außen geworfen zu werden. Ein Vorgang der bei dem Mangel einer pulsierenden Vakuole wohl zu begreifen wäre. Doch möchte ich mich auch über diese zweite Gruppe von fremdartigen Gebilden noch jeden entgiltigen Urtheils enthalten. Ich habe nämlich die betreffenden Bildungen, niemals bei solchen Truncatulinen gefunden, welche von Bryozoen und Hydrozoenstöcken abgesucht worden waren, wenigstens finde ich in meinen Aufzeichnungen nirgends Notizen von derartigen Vorkommnissen, die mir wohl kaum hätten entgehen können. Sie waren dagegen sehr häufig in Exemplaren aufzufinden, welche aus Bodenproben herstammen; da Truncatulina aber nur an Fremdkörpern haftend lebt und nicht frei am Meeresgrunde umherkriecht, so müssen alle aus Grundproben stammende Exemplare für abgestorben gehalten werden. Es kann sich also hier möglicherweise um eine Zersetzungserscheinung oder Aehnliches handeln [1]).

Weit sichere Aussagen kann ich über die dritte Art der hier zu erwähnenden Gebilde machen. Sie scheinen zuerst von Dujardin für Fortpflanzungskörper gehalten worden zu sein [2]); später aber gerieth Max Schultze [3]) in ungelöste Zweifel, ob sie nicht Keimkugeln darstellten. Carter hat sie dann auch in fossilem Zustande gefunden und sie wiederum für „reproductiv bodies“ ausgegeben. Bütschli ist diesen Anschauungen in seinem Protozoenwerke bereits energisch entgegengetreten; doch giebt auch er uns keinen Aufschluß über die merkwürdigen Gebilde. Er sagt l. c. S. 139: „Schon die ällmähliche Bildung dieser Kugeln aus kleinen molekulären Körnchen, die ohne von einer Hülle umschlossen zu werden, sich zu den erwähnten Kugeln zusammengruppieren, läßt die Bedeutung derselben als Fortpflanzungskörper sehr zweifelhaft erscheinen. Zu völliger Gewißheit scheint jedoch dieser Zweifel

1) Zur Lösung der hier berührten Frage dürfte die Existenz der glashellen Membram wesentlich beitragen. Daß man die Fäcalballen sehr oft in leeren Gehäusen, die außer ihnen nichts enthalten, antrifft, spräche nicht dagegen, daß sie auch im lebenden Protoplasma vorhanden wären. Sie werden ja nach der oben auseinandergesetzten Auffassung von mineralogischen Bestandtheilen, Schlickmassen, gebildet, welche ihrer chemischen Natur nach der Verwesung widerstehen.

2) Annales des sciences nat. 2. ser. Tom III. pag. 314.

3) „Ueber den Organismus der Polythalamien“. Leipzig 1854.

erhoben, wenn wir ferner beachten, daß diese Kugeln sich durch ihre Resistenz, selbst gegen die stärksten Mineralsäuren und kochende Alkalien, als Körper ausweisen, die unmöglich von lebendiger, thierischer Substanz gebildet sein können.“ Obgleich der zuletzt von Bütschli angeführte Grund nicht für stichhaltig erachtet werden kann, da ja auch das Kieselskelett der Radiolarien von lebender thierischer Substanz gebildet ist; so hat Bütschli doch darin recht, daß die besprochenen Bildungen in der That nicht vom lebenden Organismus gebildet werden.

Sie sind ein Produkt, das die Verwesung mit Hülfe äußerer mineralischer Einflüsse in dem abgestorbenen Weichkörper des betreffenden Foraminifers hervorgebracht hat; doch bevor ich auf diese Verhältnisse näher eingehe, soll eine kurze Beschreibung der behandelten Gebilde erfolgen.

Ich schildere sie zuerst so, wie sie bei der gewöhnlichen mikroskopischen Beobachtung mit durchfallendem Lichte erscheinen, weil es dann leichter sein wird, die Gebilde mit früher von anderen Beobachtern Gesehenem zu identificieren.

Sie erscheinen bei dieser Beobachtungsweise als äußerst dunkle, man darf sagen schwarze Kugeln, welche häufig zu mehreren in einer Kammer zusammengelagert sind, sich öfters aber auch vereinzelt in verschiedene Kammern vertheilt finden. Ihr Durchmesser schwankt zwischen 0,005696 und 0,02986 mm. Größere Kugeln lassen oft an ihrem Umfange eine Zusammensetzung aus kleineren erkennen. Die ganzen Massen bestehen aus sehr kleinen, molekularen Krümeln von ca. 0,0011175 mm, in die sie sich meist durch nachhaltigen Druck auf das Deckglas zersprengen lassen. Die Gestalt dieser Krümel läßt hier und da scharfe Kanten erkennen, welche möglicherweise nach unseren späteren Ausführungen auf Krystallkanten zurückzuführen sein dürften, ohne daß sich jedoch bei der Kleinheit der Elementarkörnchen mehr mit Sicherheit feststellen ließe, als die Thatsache, daß ihnen keine Kugelgestalt zukommt. Oft finden sich diese Elementarkörnchen noch nicht fest mit den größeren Kugeln vereinigt, sondern sind nur in lockerer Aneinanderreihung und ästig verzweigter Anordnung den Kugeln angelagert. Auch das kommt nicht selten vor, daß die Elementarkörnchen zu ganz unregelmäßig geformten Massen zusammengebacken sind, die nur durch ihre schwarze Farbe die Möglichkeit der Zugehörigkeit zu den vorbeschriebenen Aggregaten darthun. In solcher Weise können sie einen getreuen Abdruck der von ihnen erfüllten Hohlräume liefern, wenn man das Gehäuse durch Säuren entfernt.

Das Verhältnis der Masse dieser Einlagerungen zu der des Weichkörpers ist ein überaus wechselndes; oft finden sich in einem großen Gehäuse mit einem entsprechend ausgedehnten Weichkörper nur eine einzige oder doch nur ganz wenige und ganz kleine Kugeln; ein andermal ist dagegen ein kleines Gehäuse ganz und gar mit großen schwarzen Kugeln erfüllt. In dieser Beziehung ist überhaupt jedes Verhältnis denkbar.

Was die Zahl der Individuen anlangt, welche mit den behandelten Gebilden behaftet sind, so wechselt sie in den weitesten Grenzen, je nach dem Orte, von welchem das Material herstammt. Ich habe in einer Bodenprobe, welche von einem durch seine schlickigen Massen ausgezeichneten Orte herstammt (Nordsee 53°45′ n. Br. 4°47′ ö. L.) nahezu 75% der vorhandenen Gehäuse mit schwarzen Kugeln belastet gefunden. Je mehr Schlamm und faulende Detritusmassen in einer gehobenen Grundprobe des Meeres sich finden, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit auf eine erhöhte Zahl von Foraminiferen zu stoßen, welche schwarze Kugeln enthalten. In pelagisch lebenden Formen, wie Globigerina (incl. Orbulina) Pulvinulina und Hastigerina, wird man sicher niemals das kleinste Elementarkrümelchen solcher Einlagerungen finden, vorausgesetzt, daß die darauf hin untersuchten Exemplare in der That auch pelagisch gefischt und nicht etwa als gesunkene auf dem Meeresboden verwesende Stücke eingesammelt wurden; ebenso wird man sie selten oder überhaupt nicht in Foraminiferen von solchen Fundorten antreffen, wo Sand, felsartiges Gerölle oder Schill den Untergrund gebildet hatten.

Diese Erfahrungen, welche ich den, von der „Sektion für Küsten- und Hochseefischerei“ gesammelten, Nordsee-Foraminiferen einerseits, und andrerseits dem Material der Deutschen Plankton Expedition (bezüglich der negativen Befunde bei pelagischen Formen) verdanke, legten mir zuerst die Vermuthung nahe, daß die eigenthümlichen Gebilde von Außen aus den Schlammmassen in den Rhizopodenkörper aufgenommen worden seien. Ich wäre auch über diese nur halbrichtige Vermuthung nicht hinausgekommen, hätte ich nicht zufällig in einer Rotalia Becarii L. einen schwarzen Ballen gefunden, dessen Peripherie mit auffallend scharf konturierten Zacken besetzt war. Diese Zacken konnten in solcher Schärfe nur von Krystallen herrühren. Ich untersuchte daher, um mich dessen zu vergewissern, mit Oberlicht, indem ich eine Kreuzblende in den Abbé'schen Beleuchtungsapparat einsetzte, und letzteren möglichst weit nach unten schraubte. Die Wirkung einer solchen Untersuchungsweise war denn auch eine

außerordentlich günstige. Eine wohlentwickelte Krystalldruse, — mit tesseral entwickelten Krystallen, wie sich bei genauerer Prüfung ergab, — war in der Embryonalkammer der Rotalia eingelagert. Außer der Deutlichkeit der einzelnen Krystallgestalten war aber auch ein speisgelber Metallglanz unverkennbar, der im Verein mit der Gestalt der Krystalle in nahezu zwingender Weise auf Eisenkies hinwies.

Nun hatte ich früher schon die kugligen Gebilde geglüht, ohne eine Veränderung an ihnen nach dem Glühen wahrgenommen zu haben; das stand mit der Annahme von Eisenkies für die geglühte Substanz in Widerspruch. Zum Glücke hatte ich die geglühten Ballen in Canadabalsam eingeschlossen; sie waren seiner Zeit nur mit durchfallendem Lichte untersucht worden — oder hatte ich die Oberlichtbeleuchtung nicht weit genug nach unten geschraubt — genug, eine neue Prüfung auf die beschriebene Weise ließ die geglühten Ballen vollständig roth erscheinen. Diese Färbung stimmte dann auch mit ihrer ursprünglichen Natur als Eisenkies sehr wohl überein.

Dasselbe Verhalten, speisgelben Metallglanz vor dem Glühen und völliges Roth bis Braunrothwerden nach dem Glühen zeigte sich auch an den Einschlüssen andrer Foraminiferen, wenn sie in derselben Weise beobachtet wurden, so bei Saccammina, Reophax, Lagena, Uvigerina, Textularia, Cassidulina, Truncatulina, Rotalina, Polystomella und Nonionina; dabei war es einerlei in welcher Form die Einlagerungen vertreten waren, selbst die kleinsten Elementarkrümel trugen dies karakteristische Aussehen. Es ließen sich nunmehr noch einige weitere Einzelheiten erkennen. So große Krystalle, wie in dem für Rotalia erwähnten Falle, fand ich zwar nicht wieder — sie dürften somit in so vollendeter Ausbildung eine Seltenheit sein; — doch stieß ich auch bei ganz unregelmäßigen Anhäufungen auf kleine, metallisch glänzende, scharf umschriebene Flächen, welche nothwendig von vereinzelten Krystallbildungen herrühren mußten. Meist erwiesen sich die Einlagerungen jedoch in der kugligen Weise zusammengebaut, in welcher der Eisenkies auch sonst oft auftritt.

Außer in Foraminiferen traf ich die geschilderten Eisenkiesablagerungen, wenn auch seltner, in abgefallenen Seeigelstacheln[1]), deren organische Substanz bereits gänzlich ausgefault oder doch nur zu ganz geringem Theil noch erhalten war.

1) Vor Allem in Stacheln von Echinocardium.

Zur weiteren Sicherstellung der Eisenkiesnatur wurde erstens die Farbe der Einlagerungen mit größeren Eisenkiesstücken aus dem hiesigen, mineralogischen Institute verglichen. Ich leitete das mikroskopische, metallglänzende Bild größerer Einlagerungsmassen mittelst der Oberhäuser'schen Kammer auf eine Unterlage über, auf welcher das makroskopische Vergleichsstück lag. Man muß dabei nur Sorge tragen, daß beiden Objekten, dem verglichenen Stück und dem Vergleichsobjekt, die selbe Beleuchtungsintensität zu theil wird, um sich von der völligen Coincidenz beider Farben zu überzeugen.

Zweitens wurden folgende chemische Reaktionen vorgenommen.

Die Gehäuse mit den betreffenden Einlagerungen wurden mit Salzsäure[1]) entkalkt, und aus ihren häutigen Resten die immer noch metallglänzenden Ballen mit Hilfe von Glasnadeln unter dem Mikroskop ohne Mühe frei praepariert. Es erfolgte nun solange ein Abspülen der freipraeparierten Ballen mit destilliertem Wasser, bis ihnen keine anderweitige Fremdsubstanz mehr anhaftete; dies war in einem Uhrschälchen mit einer Spritzflasche, die in eine feine Spitze ausgezogen war, nicht schwer zu erreichen. Nachdem ich mich hiernach unterm Mikroskop überzeugt hatte, daß die aufzuklärenden Substanzen absolut rein waren, wurden sie erst in gelinder Wärme (Paraffinofen) getrocknet und dann in einer Mischung von drei Theilen Salpetersäure und einem Theil Salzsäure (beide conc.) zwölf Stunden (über Nacht) stehen lassen. Nach Verlauf dieser Zeit wurden die Säuren verdampft, und der kaum merkliche, bleibende Rückstand in Salzsäure gelöst. In dieser Lösung bewirkte nun Zusatz von gelbem Blutlaugensalz blaue Färbung, während Zusatz von Rhodankalium die Lösung roth färbte. Beide Reaktionen erwiesen unzweideutig die Anwesenheit von Eisen in den geprüften Einlagerungen der Foraminiferen.

Der Schwefel wurde durch die Heparreaktion nachgewiesen. Ein feines Holzstäbchen wurde an einer Gasflamme angebrannt und die verkohlte Stelle mit (in der Hitze) geschmolzener Soda bestrichen. Nach abermaligem Glühen des derart bestrichenen Holzstäbchens, wurden die gut isolierten Einlagerungen durch Auftupfen in die Sodarinde des verkohlten Holzstäbchens aufgenommen. Es erfolgte hierauf wiederum ein längeres Glühen des Stäbchens, dann wurde seine mit den Einlagerungen betupfte Spitze

1) Es braucht wohl nicht besonders hervorgehoben zu werden, daß alle Reagentien chemisch rein zur Verwendung kamen, und vor ihrem Gebrauch auf ihre völlige Freiheit von Eisen untersucht wurden.

abgebrochen und auf einer blanken Silbermünze mit einem Glasstabe zu Pulver verrieben. Nach Befeuchtung dieses Pulvers mit Aq. dest. und wegschwemmen desselben von der Münze ließen sich auf dem Silber die karakteristischen braunschwarzen Flecken mit der Lupe oder sogar mit bloßem Auge nachweisen, welche nach den beschriebenen Manipulationen nur bei Anwesenheit von Schwefel auftreten können[1]). Mithin ist auch der Schwefel für die besprochenen Einlagerungen erwiesen.

Es bliebe nunmehr noch die Frage zu erörtern, wie die Eisenkieseinlagerungen in die Foraminiferen hineingelangen und was dafür spricht, daß sie, wie ich mehrfach behauptet habe, nur in abgestorbenen, resp. nur in Verwesung begriffenen, Foraminiferen vorkommen.

Was die letzte Frage anbetrifft, so muß hervorgehoben werden, daß man neben den Eisenkieseinlagerungen oft noch weiche Massen vorfindet, welche als Protoplasma gedeutet werden könnten und größtentheils auch sicher auf solches zurückzuführen sind; künstliche Färbungen der betreffenden Weichkörper ergeben aber Bilder, die mit denen normaler Thiere verglichen, durch ihr sonderbares diffuses Aussehen und durch das Fehlen des Kerns — die Membran desselben traf ich zwar noch ganz vereinzelt an — beweisen, daß der Weichkörper von seiner normalen Gestaltung in eine andere, augenscheinlich in die der Verwesung, übergetreten ist. Derartige verwesende Weichkörper lassen sich an Stellen, wo Eisenkieseinlagerungen häufig vorkommen, schon äußerlich durch ihre grüne oder grünliche Farbe erkennen, welche durch die Kalkschale hindurchdringt und jedenfalls von einer Infiltration des Weichkörpers mit irgend einer anorganischen Substanz, höchst wahrscheinlich in der Regel mit schwefelsaurem Eisenoxydul herrührt. Mit dem Abgestorbensein der Weichkörper stimmt auch die Thatsache, daß Max Schultze (loc. cit. p. 27) niemals Foraminiferen, welche seine Keimkugeln enthielten, Pseudopodien ausstrecken sah.

Nach dem seither Mitgetheilten muß die Erklärung der Entstehung von solchen Ablagerungen im mineralogischen resp. geologischen Gebiete gesucht werden. Ich citiere daher einen Abschnitt

---

1) Diese Reaktion ist schwieriger als die vorige; sie gelang mir erst nach drei vergeblichen Versuchen. Auch hier hat man sich vorher mit der Lupe von der Reinheit des Silberstückes zu überzeugen, damit nicht vorher auf demselben vorhandenen Flecken eine Täuschung verursachen.

aus Justus Roth: „Allgemeine und chemische Geologie[1])“, welcher die vollgültige Erklärung treffen dürfte.

„Ein großer Theil der Schwefelmetalle, zunächst der in neptunischen Bildungen (Sedimenten) vorkommende, entstand aus Sulfaten, welche durch organische Substanz reduziert wurden. Dahin gehören namentlich Schwefelkies (= Eisenkies). Er entsteht aus den durch organische Substanz reduzierten Eisensulfaten, ferner aus den oft geringen Mengen von Eisenoxydulkarbonat und Sulfat der Alkalien und alkalischen Erden bei Gegenwart organischer Substanz. Die Bildung ist noch jetzt häufig zu beobachten, so in Torfmooren, in Absätzen der Quellen und Thermen, vitriolhaltiger Grubenwasser, des Meerwassers, wo die Küste lösliche Eisenverbindungen liefert.“

Nicht alle in der See verwesenden thierische Reste scheinen übrigens nach meiner Erfahrung der Bildung von Eisenkies gleichen Vorschub zu leisten. Ich fand, wie erwähnt, diese Ablagerungen nur in Foraminiferen und in Seeigelstacheln; niemals z. B. in den leeren Ostracodenschalen, welche in großer Zahl in den Grundproben des Meeres vorzukommen pflegen, niemals in den Gehäusen und Schalen verwester Muscheln und Schnecken. Es mag dies für die Ostracoden damit zusammenhängen, daß die erforderlichen mineralischen Lösungen, durch den Chitinpanzer der Crustaceen nicht schnell genug durchzudringen vermögen, um von den verwesenden Weichtheilen in der angeführten Weise umgesetzt zu werden. Diese Erklärung erscheint mir deshalb um so zulässiger, als die besprochenen Ablagerungen auch in den imperforaten Formen der Foraminiferen weit seltener sind als in den perforaten, so kann ich mich z. B. nicht erinnern, sie jemals bei den sonst so häufigen Quinqueloculinen und Biloculinen angetroffen zu haben. Der Weichkörper der Mollusken verwest auf der andern Seite vielleicht zu schnell oder die Eisenkiesablagerungen fallen aus der glatten Schale resp. dem in der Regel weitmündigen Gehäuse (Schnecken) zu leicht heraus, um für gewöhnlich der Beobachtung erhalten zu bleiben. Die Kalkwände der Foraminiferengehäuse und die der Seeigelstachel halten sie dagegen an ihrem Entstehungsorte fest. So lassen sich die Eisenkiesballen in diesen thierischen Bildungen unter jedem Material leicht auffinden, welches von geeigneten Plätzen stammt.

---

1) Berlin 1879. Bd. I. p. 599.

Die rothe Färbung, welche die Keimkörper Carters[1]) bei fossilen Formen angenommen haben, ist natürlich durch nachträgliche mineralische Einflüsse bei der Gegenwart von Eisen nicht schwer zu erklären, und kann deshalb nicht als Beweis dafür erbracht werden, daß die Carter'schen Keimkugeln etwas anders seien als ehemalige Eisenkiesablagerungen, wie ich sie für den verwesenden Weichkörper der Foraminiferen geschildert habe.

Göttingen, den 9. Juli 1892.

Ueber die mit der Vermischung konzentrirter Lösungen verbundene Aenderung der freien Energie.

Von

W. Nernst.

Die Beantwortung der Frage, wie groß die maximale äußere Arbeit ist, die beim Hinzufügen von reinem Lösungsmittel zu einer verdünnten Lösung gewonnen werden kann, bildet zweifellos den Kardinalpunkt der modernen Lösungstheorie; van't Hoff, der dies Problem nach mehrfacher Seite hin behandelte, gelangte bekanntlich zu dem Ergebnis, daß jene Arbeitsgröße sehr einfach aus dem osmotischen Druck der Lösung zu berechnen ist.

Für diesen osmotischen Druck fand man (rein empirisch) einige allgemeine Gesetze; ihre Einfachheit wurde von van't Hoff so ungemein glücklich durch die (natürlich hypothetische) Uebertragung der Regel von Avogadro auf die verdünnten Lösungen erklärt; scheinbare Abweichungen fanden durch Annahme von Dissociation oder Polymerisation eine befriedigende Erklärung; ja die Deutung jener anfänglich befremdenden Abweichungen rückte die Fruchtbarkeit jener Hypothese erst in ein helles Licht.

Im Folgenden wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, welches ist die maximale Arbeit, die bei Vermischung zweier konzentrirter Lösungen des gleichen Lösungsmittels aber von verschiedenem Gehalt ge-

---

1) Annals of nat. hist. 6. ser. Vol. 1. 1888. p. 264: „On the nature of the opaque scarlet spherules found in the chambers and canals of many fossilized foraminifera"; wo sie wieder als „elements of reproduction" angesehen werden.

wonnen werden kann; das wesentliche Resultat dieser Untersuchung besteht darin, daß in solchen Fällen häufig die damit verbundene Wärmeentwicklung jener Arbeitsgröße gleich ist, oder daß häufig die Aenderungen der freien Energie, wie wir mit v. Helmholtz jene maximale Arbeit kurz bezeichnen wollen, mit denen der Gesammtenergie zusammenfallen.

Die Aufgabe, die maximale Arbeit zu berechnen, welche bei Vermischung zweier verschiedener beliebig konzentrirter Lösungen gewonnen werden kann, ist gelöst, wenn man den Vorgang reversibel leitet und messend verfolgt; man kann die Vermischung auf verschiedene Weise, z. B. durch isotherme Destillation, durch elektrolytische Ueberführung, durch auswählende Löslichkeit u. s. w. isotherm und reversibel vollziehen und es reduzirt sich dann die experimentelle Bestimmung auf Messungen des Dampfdrucks, der elektromotorischen Kraft, der Löslichkeit der Komponenten des Gemisches in einem beliebigen Lösungsmittel, und dergl.

Die Messung der thermischen Begleiterscheinungen kann entweder direkt vollzogen oder aber es können jene nach dem zweiten Hauptsatze aus der Aenderung der maximalen Arbeit mit der Temperatur thermodynamisch berechnet werden; der Satz, daß beide Methoden identische Resultate liefern, wird vielleicht von gewissen Gegnern der modernen Lösungstheorie bezweifelt werden, die den zweiten Hauptsatz (jedenfalls absichtlich) zu ignoriren pflegen, mag aber trotzdem hier als unzweifelhaftes, empirisch gewonnenes Faktum Verwendung finden.

Bei v. Helmholtz[1]) findet sich die Angabe, daß die elektromotorische Kraft zweier gegeneinander geschalteter und mit verschieden konzentrirten Zinkchloridlösungen beschickter Kalomelelemente von der Temperatur so gut wie unabhängig ist; bei Anwendung zweier Lösungen, die auf 1 g $ZnCl_2$ bezw. 0·8 und 9·1992 g H_2O, oder demgemäß auf 1 Mol. $ZnCl_2$ 5·844 bew. 69·52 Mol. H_2O enthielten, betrug die elektromotorische Kraft der beiden gegeneinander geschalteten Elemente 0·11541 Volt bei 17·7 bis 21° und 0·11569 Volt bei 35·1 bis 36·1°.

Würde die elektromotorische Kraft absolut unveränderlich mit der Temperatur sein, so müßte nach der Formel von

1) Ges. Abh. II, S. 991; Sitzungsber. d. Berl. Akad. vom 27. Juli 1882.

v. Helmholtz:

$$E - Q = T\frac{\partial E}{\partial T} = 0$$

d. h. die elektromotorische Kraft E würde gleich der Wärmetönung Q des galvanischen Systems sein; da nun der stromerzeugende Prozeß hier in nichts Anderem als in Komzentrationsänderungen der beiden elektrolytischen Lösungen besteht, so folgt schon aus obiger Beobachtung, daß die Aenderungen der Gesamtenergie, welche mit dem Vermischen zweier konzentrirter $ZnCl_2$-Lösungen verbunden sind, mit denen der freien Energie nahe zusammenfallen.

Helmholtz selber hat diesen Schluß aus seiner Beobachtung nicht gezogen, sondern bemerkt nur, daß Wasserzusatz zu $ZnCl_2$-Lösungen Wärme entwickeln muß, was übrigens Thomsen's[1]) Messungen bestätigen und natürlich aus dem obigen Satze gleichfalls folgt; wir wollen nunmehr zusehen, wie genau er in diesem Falle gelten muß.

Zur Berechnung der Wärmetönung Q unseres galvanischen Systems denken wir uns zwei elektrochemische Aequivalente durch die beiden gegeneinander geschalteten Elemente hindurchgeschickt; dann werden in dem einen 1 Mol. Zink sich lösen und 2 Mol. Kalomel reduzirt werden, während im andern 1 Mol. Zink ausfallen und 2 Mol. Kalomel sich bilden werden; der stromliefernde Prozeß besteht also darin, daß ein Mol. $ZnCl_2$ aus der konzentrirteren Lösung in die verdünntere transportiert wird.

Letzteren Vorgang können wir uns aber auch in der Weise vollzogen denken, daß der Lösung I diejenige Menge entzogen wird, die ein Mol. $ZnCl_2$ enthält, worauf die Trennung in Salz und Wasser erfolgt; der thermische Effekt dieser Trennung beträgt $W(x_1)$, wenn die Lösung auf 1 Mol. $ZnCl_2$ x_1 Moleküle H_2O enthält und wir unter $W(x_1)$ die Auflösungswärme eines Mol. $ZnCl_2$ in x_1 Molekülen H_2O verstehen. Die freigewordenen x_1 Mol. Wasser werden der Lösung, deren Menge wir uns so groß denken müssen, daß ihre Konzentration durch Entziehung von 1 $ZnCl_2$ nicht merklich geändert wird, wieder beigemischt, was einem thermischen Effekte von $x_1\left(\frac{\partial W(x)}{\partial x}\right)_{x=x_1}$ entspricht. Somit beträgt der thermische Gesammteffekt

$$x_1\left(\frac{\partial W(x)}{\partial x}\right)_{x=x_1} - W(x_1).$$

1) Thermochem. Untersuchungen Bd. III, S. 39 (1883).

Für die Lösung II beträgt die Wärmetönung des entsprechenden Vorganges

$$x_2\left(\frac{\partial W(x)}{\partial x}\right)_{x=x_2} - W(x_2)$$

und die Differenz

$$W(x_2) - W(x_1) + x_1\left(\frac{\partial W(x)}{\partial x}\right)_{x=x_1} - x_2\left(\frac{\partial W(x)}{\partial x}\right)_{x=x_2} = Q$$

entspricht der gesuchten Wärmetönung.

Leider liegen nicht genügend zahlreiche Beobachtungen über die Verdünnungswärme von Zinkchlorid vor, um die einzelnen Summanden obigen Ausdrucks mit hinreichender Genauigkeit berechnen zu können; immerhin zeigte sich bei annähernder Berechnung der Zahlen Thomsen's auch auf diesem Wege, daß Q und E jedenfalls nicht erheblich verschieden sein können.

Bis zu welcher Genauigkeit durch die obigen Messungen von Helmholtz die Gleichheit von Q und E bewiesen ist, kann leicht entschieden werden; aus den Werthen von E ist zu schließen, daß $\frac{\partial E}{\partial T}$ jedenfalls kleiner als 0·00002, und somit

$$E - Q < 0{\cdot}006 \text{ Volt}$$

ist; da E 0·115 Volt beträgt, so können E und Q höchstens etwa 5 % verschieden sein.

Bis zum gleichen Grade der Genauigkeit ist dadurch bewiesen, daß die beim Vermischen stark konzentrirter Zinkchloridlösungen auftretenden Wärmeerscheinungen gleichzeitig die maximale Arbeit angeben, welche bei diesem Vorgang gewonnen werden kann, daß mit anderen Worten die Aenderungen der Gesamtenergie mit denen der freien Energie (nahe) identisch sind; leitet man den Vorgang reversibel, so daß also das System die maximale Arbeit nach außen leistet, so findet im Innern keine (beträchtliche) Wärmeerscheinung statt.

Eine noch schärfere Bestätigung des obigen Satzes können wir den Messungen Jahn's [1]) entnehmen, welcher für die elektrische (d. h. freie) Energie E und für die chemische Wärme Q, beide Werthe gemessen in g-cal., nachstehender beider galvanischer Kombinationen folgende Werthe durch direkte Messung ermittelte:

	E	Q
$Ag \mid AgCl \mid ZnCl_2 + 50H_2O \mid Zn$	46896	49082
$Ag \mid AgCl \mid ZnCl_2 + 25H_2O \mid Zn$	44908	47147
Diff.	1988	1935

1) Wied. Ann. 28, 21 (1886).

Die Gleichheit der beiden Differenzen von E und Q beweist, daß die beim Vermischen der beiden obigen Zinkchloridlösungen auftretende Wärmeentwickelung ganz oder wenigstens fast ganz in äußere Arbeit umgesetzt werden kann; dementsprechend ist die elektromotorische Kraft der beiden gegeneinander geschalteten Elemente von der Temperatur fast unabhängig oder es besitzen mit anderen Worten die beiden Elemente den gleichen Temperaturkoeffizienten (— 0·00021 und — 0·000202 nach Jahn), was mit der oben mitgetheilten Beobachtung von v. Helmholtz im Einklange sich befindet.

Zur weiteren Prüfung der Frage, inwieweit die Verdünnungswärme mit der bei der Verdünnung zu gewinnenden maximalen Arbeit zusammenfällt, können die von Regnault[1]) auf die Dampfspannungen und von Thomsen[2]) auf die Verdünnungswärme untersuchten Gemische von Schwefelsäure und Wasser dienen. Wenn die Dampfspannung zweier Gemische bei der absoluten Temperatur T p_1 und p_2 beträgt, so bedarf es, um 1 g-Molekül H_2O aus dem einen in das andere zu transportieren bekanntlich der Arbeit

$$R\,T\,ln\frac{p_2}{p_1};$$

R, die Gaskonstante, beträgt 2·00, wenn wir die Arbeit in g-cal. ausdrücken; die Mengen der beiden Gemische werden natürlich wieder so groß angenommen, daß durch Entziehung von 1 Molekül Wasser keine merkliche Aenderung der Zusammensetzung erfolgt. Die Wärmetönung des Vorganges beträgt

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{x=x_1}$$

wenn W die Auflösungswärme von 1 Mol. H_2SO_4 in x Mol. H_2O bedeutet und die Zusammensetzung der beiden Gemische durch die Formeln

$$H_2SO_4 + x_1 H_2O \text{ und } H_2SO_4 + x_2 H_2O$$

gegeben ist.

Die folgende Tabelle enthält die Ergebnisse der Berechnung; in der ersten Kolumne befinden sich die Anzahl x Mol. H_2O, die auf ein Mol. H_2SO_4 kommen, in der zweiten die bei $T = 273 + 18$ gemessenen Dampfspannungen p der von Regnault untersuchten

1) Regnault, Ann. chem. phys. (3), 15, 179 (1845); Tabellen von Landolt und Börnstein p. 22.

2) Thermochem. Untersuchungen III, 34.

Lösungen, ausgedrückt in mm Hg; in der dritten die Werthe der maximalen Arbeit

$$RT\ln\frac{p_2}{p_1} = 1340\overset{10}{\log}\frac{p_2}{p_1}$$

und in der vierten die Werthe von $\frac{\partial W}{\partial x}$, berechnet aus der von Thomsen gegebenen Formel

$$W = \frac{17860x}{x+1{\cdot}8}$$

und somit

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{32150}{(x+1{\cdot}8)^2}$$

Tabelle I.

x	p	1340 log $\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{\partial W}{\partial x}$	Diff.
1	0·144		4101	
		971		1874
2	0·765		2227	
		554		832
3	1·983		1395	
		291		439
4	3·270		956	
		259		261
5	5·107		695	
		222		280
7	7·495		415	
		144		140
9	9·586		275	
		71		79
11	10·885		196	
		94		105
17	12·820		91	
		104		91
∞	15·330		0	

Wenn die beim Vermischen konzentrirter Schwefelsäurelösungen auftretenden Wärmeentwickelung der gleichzeitigen Aenderung der freien Energie entspräche, so müßten die in der gleichen Horizontalen befindlichen Zahlen der dritten und fünften Kolumne einander gleich sein; diese Forderung ist in dem Intervall von $x = 4$ bis $x = 17$ wenigstens annähernd erfüllt. Hingegen

stoßen wir im Intervall von $x = 1$ bis $x = 4$ auf sehr bedeutende Abweichungen, die entschieden gegen obigen Satz sprechen.

Allein hier muß daran erinnert werden, daß gerade bei den Gemischen $x = 1$ bis $x = 4$ Kirchhoff's[1]) Berechnung der Dampfspannung äußerst mangelhafte Uebereinstimmung mit der Beobachtung ergab. Mit Hülfe der bekannten Beziehung, welche die Aenderung der relativen Dampfspannung einer Lösung mit der Temperatur aus der Verdünnungswärme zu berechnen erlaubt, und als eine unmittelbare Konsequenz des zweiten Hauptsatzes von Kirchhoff erhalten wurde, versuchte man aus der bei 50° gemessenen Dampfspannung obiger Gemische diejenige bei niederen Temperaturen abzuleiten, was ziemlich gut bei den verdünnteren gelang, aber gerade bei den drei konzentrirtesten Gemischen zu sehr schlecht stimmenden Zahlen führte, wie folgende kleine Tabelle z. B. beweist:

t	p	
	Regnault	Kirchhoff
8·48°	0·11	0·02
16·83°	0·14	0·04
25·09°	0·17	0·08

Zwei Umstände scheinen es, wie R. von Helmholtz[2]) bemerkt, veranlaßt zu haben, daß die Werthe Regnault's nicht unbeträchtlich höher sind, als der Druck des Wasserdampfes jener Gemische in Wirklichkeit beträgt; erstens wurde von Regnault die Spannung des Schwefelsäuredampfes, deren Betrag sich nur mittelst gleichzeitiger Analyse des von den Gemischen entsandten Dampfes feststellen ließe, und zweitens, weil die Lösungen nicht ausgekocht werden durften, eine schwache Luftspannung mitgemessen. Beide Ursachen wirken vergrössernd auf die Werthe von p und zwar um so stärker, je konzentrirter das Gemisch ist. Aus diesen Gründen muß die Frage, inwieweit die Wärmeentwicklung beim Vermischen sehr konzentrirter Schwefelsäuregemische sich in äußere Arbeit umsetzen läßt, vor der Hand noch als eine offene betrachtet werden.

Die Dampfspannungen einiger Schwefelsäurelösungen sind bei 100° von Tammann[3]) gemessen worden; wenn wirklich bei der Vermischung zweier konzentrirter Gemische die Aenderungen der Gesammtenergie mit denen der freien Energie zusammenfallen,

1) Pogg. Ann., 104 (1856); Ges. Abh., S. 492.
2) Wied. Ann., 27, 542 (1886).
3) Mem. d. Petersburger Akad. 35, No. 9, p. 74 (1887).

so muß die Aenderung der freien Energie von der Temperatur unabhängig sein und demgemäß auch aus bei 100° angestellten Messungen berechnet mit der bei 18° bestimmten entsprechenden Aenderung der Gesamtenergie übereinstimmen.

Die Prüfung dieser Frage enthält die Tabelle II, welche genau so angeordnet ist wie Tabelle I; nur ist in dem Ausdruck

$$R\,T\,ln\,\frac{p_2}{p_1}$$

T nunmehr natürlich gleich 373° zu setzen.

Tabelle II.

x	p	1718 log $\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{\partial W}{\partial x}$	Diff.
6·94	416·8		421	
		80·0		82
7·94	464·0		339	
		74·9		76
9·26	513·0		263	
		67·6		70
11·11	561·6		193	
		64·1		62·5
13·89	612·0		130·5	
		51·7		52·5
18·52	656·0		78·0	
		55·7		41·2
27·78	697·2		36·8	
		38·0		25·0
55·56	733·5		9·8	
		13·7		7·3
111·1	747·1		2·5	
		11·0		2·5
∞	760·0		0·0	

Die gute Uebereinstimmung der Zahlen der dritten und fünften Kolumne, die sich auf das Intervall von $x = 6{\cdot}94$ bis $x = 18{\cdot}52$ erstreckt, spricht entschieden dafür, daß hier die Aenderungen der Gesamtenergie mit denen der freien Energie zusammenfallen.

Wenn dies strenge gilt, so sind, wie schon hervorgehoben, letztere von der Temperatur unabhängig; also müßten es auch die ersteren sein. Thatsächlich finden wir denn auch, daß die Verdünnungswärme konzentrirter Schwefelsäurelösungen mit der Temperatur so gut wie gar nicht sich ändert. Betrachten wir z. B. die Reaktion

$$(H_2SO_4 + 4H_2O) + 5H_2O = (H_2SO_4 + 9H_2O) + 2550\,\text{cal.}$$

so beträgt nach Thomsen[1]) die Wärmekapacität von

$H_2SO_4 + 4H_2O$	92·7
$5H_2O$	90
Summe	182·7

und von

$H_2SO_4 + 9H_2O$	182·0

somit ändert sich die Wärmetönung obiger Reaktion nur um 0·7, also etwa 0·3 Promille pro Grad.

Davon übrigens, daß ganz allgemein die Wärmetönung beim Mischen konzentrirter Lösungen der gleichzeitigen Aenderung der freien Energie gleich sei, kann nicht die Rede sein; schon die Existenz von Lösungen, die beim Verdünnen Wärme absorbiren, also an Gesamtenergie zunehmen, spricht entschieden dagegen, weil bei der Verdünnung als einem von selbst eintretenden Vorgange die freie Energie stets abnimmt. Freilich wäre möglich, daß hier die Erkenntnis eines allgemeinen Satzes durch anderweitige Nebenerscheinungen ähnlich verdunkelt wird, wie z. B. die Dissociationserscheinungen der Salze lange die Erkenntnis des Gesetzes der molekularen Gefrierpunktserniedrigung verhinderten.

Ein allgemeiner Satz, dessen Zusammenhang mit den Früheren sofort ersichtlich ist, läßt sich jedoch jetzt schon erkennen. Die Abweichungen, welche die Dampfdruck- oder Gefrierpunktserniedrigungen starker Lösungen (1 bis 5 Mol. auf 1000 g Wasser) von einfacher Proportionalität mit der hinzugefügten Molekülzahl aufweisen, stehen im engen Zusammenhange mit der Verdünnungswärme; bei Stoffen mit erheblicher positiver Verdünnungswärme (wie H_2SO_4, H_3PO_4, CH_3COOK, $CaCl_2$, $NiCl_2$, $ZnCl_2$, ZnN_2O_6) wächst die Dampfspannungserniedrigung schneller, bei Stoffen mit erheblicher negativer Verdünnungswärme (wie $NaNO_3$, NH_4NO_3, Na_2SO_4) aber langsamer, als der hinzugefügten Molekülzahl proportional. Zur Prüfung dieses Satzes eignet sich besonders das reichhaltige Beobachtungsmaterial Tammann's. Es ist mir nicht bekannt, daß auf diesen Zusammenhang bereits hingewiesen worden ist, welcher sich als nothwendige Konsequenz der Anschauung ergiebt, daß positive Verdünnungswärme frei verwandelbar sei.

Nachdem durch vorstehende Betrachtungen die Existenz von Lösungen außer Zweifel gesetzt ist, bei denen die Aenderungen

1) Ostwald, Allg. Chemie, 2. Aufl., I, S. 596.

der freien Energie, welche mit ihrer Vermischung verbunden sind, mit denen der Gesamtenergie zusammenfallen, mag es gestattet sein, das Verhalten solcher Gemische mit einigen Worten zu charakterisieren.

Mit Hülfe der bereits benutzten und einiger weiterer, leicht abzuleitender Formeln wird es ermöglicht, osmotischen Druck, Dampfspannung, Gefrierpunkt, Siedepunkt, Löslichkeit und elektromotorisches Verhalten derartiger Lösungen aus der Verdünnungswärme zu berechnen; die Formeln sind von ähnlicher Durchsichtigkeit, wie die der idealen verdünnten Lösungen, indem die Rolle des osmotischen Druckes in der Theorie der verdünnten Lösungen gleichsam von der Verdünnungswärme übernommen wird; ich schlage daher vor, ein homogenes Gemisch zweier Stoffe, bei dem die maximale Arbeit, die bei Aenderung seiner Zusammensetzung zu gewinnen ist, durch die begleitenden Wärmeerscheinungen gemessen wird, als „eine ideale konzentrirte Lösung“ zu bezeichnen.

Das Verhalten der idealen konzentrirten Lösungen steht in einer eigentümlichen Reciprocität zu dem der idealen verdünnten Lösungen; der Logarithmus des Verhältnisses der Dampfspannungen zweier idealer konzentrirter Lösungen (z. B. zweier Schwefelsäuregemische) ist der absoluten Temperatur umgekehrt proportional, derjenige zweier idealer verdünnter Lösungen (z. B. zweier verdünnter Rohrzuckerlösungen) aber von der Temperatur unabhängig; gewinnt man die maximale äußere Arbeit bei der Vermischung zweier idealer konzentrirter Lösungen, so ändert sich die Temperatur der letzteren nicht, thut man das gleiche bei der Vermischung zweier idealer verdünnter Lösungen, so geben sie so viel Wärme ab, als der geleisteten Arbeit äquivalent ist; die Aenderungen der Gesamtenergie, welche die Aenderung der Zusammensetzung einer idealen konzentrirten Lösung begleiten, sind beträchtlich, während sie Null sind bei idealen verdünnten Lösungen; die gleichzeitigen Aenderungen der freien Energie sind bei den idealen konzentrirten Lösungen gleich denen der Gesamtenergie und von der Temperatur unabhängig, während sie der absoluten Temperatur proportional sind bei den idealen verdünnten Lösungen.

Durch Aenderung der Zusammensetzung ist es stets möglich, aus einer idealen konzentrirten eine ideale verdünnte Lösung herzustellen (ob auch umgekehrt, ist sehr zweifelhaft); eine für die Theorie der Lösungen wichtige Aufgabe dürfte es sein, das Uebergangsstadium einer genauen Prüfung zu unterwerfen.

Ich möchte zum Schluß darauf hinweisen, daß die Konzentrationsänderungen der idealen verdünnten und der idealen konzentrirten Lösungen vom energetischen Standpunkte aus als Repräsentanten zweier Gattungen von Ereignissen anzusehen sind, die hervorstechende Eigentümlichkeiten aufweisen, und zwar besteht das charakteristische der einen Gattung von Vorgängen eben darin, daß die Aenderung der Gesamtenergie verschwindend ist gegen die Aenderung der freien Energie; zu dieser Gattung von Vorgängen gehören außer der Vermischung verdünnter Lösungen des gleichen Lösungsmittels noch die Ausdehnung eines idealen Gases sowie die Vermischung zweier Gase. Das Charakteristische der zweiten Gattung von Vorgängen offenbart sich darin, daß bei ihnen Aenderung der Gesamtenergie mit derjenigen der freien Energie zusammenfällt; außer der Vermischung gewisser konzentrirter Lösungen gehören zu diesen Vorgängen alle diejenigen Veränderungen in der Natur, welche sich auf sogenannte Fernewirkungen (Gravitation, elektrische oder magnetische Anziehung) zurückführen lassen, ferner die Stromerzeugung einzelner galvanischer Elemente und höchstwahrscheinlich die Mehrzahl der vollständig verlaufenden chemischen Reaktionen[1]).

Die Gleichung, welcher nach dem zweiten Hauptsatze alle Naturereignisse unterworfen sind, läßt sich nach v. Helmholtz[2]) auf die einfache Form

$$F - Q = T\frac{\partial F}{\partial T}$$

bringen; darin bedeutet F die mit dem Vorgang verknüpfte Abnahme der freien Energie, Q diejenige der Gesamtenergie und T die als gleich angenommene Anfangs- und Endtemperatur des Systems.

Setzen wir

$$Q = 0$$

so resultiert Fall 1, setzen wir

$$F = Q$$

so erhalten wir Fall 2; das Resultat unserer Betrachtungen läßt sich dahin zusammenfassen, daß gewisse konzentrirte Lösungen als Repräsentanten des Fall 2 anzusehen sind.

---

1) Vgl. hierzu Rathke, Prinzipien der Thermochemie, Halle 1881.
2) l. c. 969.

Ueber die Theorie der algebraischen Invarianten.

(Dritte Note[1]).

Von

David Hilbert.

(Vorgelegt von F. Klein.)

Am Schlusse der zweiten Note „Ueber die Theorie der algebraischen Invarianten" habe ich gezeigt, wie man für ein beliebiges System von Grundformen das volle System der Invarianten dieser Grundformen wirklich aufstellen kann und zwar sind bei dieser Aufstellung lediglich rationale und von vornherein übersehbare Prozesse zur Anwendung gebracht.

Um das volle Invariantensystem zu erhalten, hat man der Reihe nach die folgenden drei Aufgaben zu lösen:

1. Aufstellung eines Systems S_1 von Invarianten[2]), durch welche sich alle übrigen Invarianten der Grundformen als ganze algebraische Funktionen ausdrücken lassen.

2. Aufstellung eines Systems S_2 von Invarianten, durch welche sich alle übrigen rational ausdrücken lassen.

3. Berechnung eines Fundamentalsystems S_3 in dem durch die Invarianten des Systems S_2 definirten Funktionenkörper. Diese Funktionen S_3 sind Invarianten und bilden zusammen genommen mit den Invarianten S_1 das gesuchte volle Invariantensystem.

Von diesen drei Aufgaben ist die erste die schwierigste. Nach dem Satze auf Seite 237 der ersten Note erhält man ein System S_1, indem man ein System von Invarianten ermittelt, deren Verschwinden nothwendig das Verschwinden aller Invarianten zur Folge hat und hierzu wiederum genügt es nach dem Satze auf Seite 12 meiner zweiten Note — falls nur eine ternäre Form von der $n$ten Ordnung zu Grunde liegt — wenn man alle diejenigen Invarianten in Betracht zieht, deren Gewicht die Zahl $9n(3n+1)^8$ nicht übersteigt.

Was nun die praktische Berechnung eines solchen Systems S_1 in bestimmten Fällen angeht, so wird dieselbe offenbar wesentlich

---

1) Vgl. diese Nachrichten: Juli 1891 (erste Note) und Januar 1892 (zweite Note).

2) Wie in den beiden früheren Noten wird unter „Invariante" ohne weitern Zusatz stets eine ganze rationale Invariante der Grundformen verstanden.

erleichtert werden, wenn man von vornherein anzugeben weiß, welche Bedeutung das Verschwinden sämmtlicher Invarianten für die vorgelegten Grundformen besitzt. Diese Bedeutung ist für binäre Grundformen auf Seite 241 meiner ersten Note angegeben worden und ich habe diese Kenntniß dann auf Seite 4—5 meiner zweiten Note zur Aufstellung der Invarianten S_i in diesem Falle verwerthet. Für eine ternäre Grundform habe ich bisher nur einzelne durch mühsame Rechnung gefundene Resultate mitgeteilt, während in der vorliegenden Note die bezeichnete Aufgabe allgemein gelöst werden soll. Bei der Entwicklung der Methode werde der Kürze halber eine einzige ternäre Grundform von der $n$ten Ordnung zu Grunde gelegt. Bezeichnen wir außerdem eine Grundform kurz als Nullform, wenn ihre Coefficienten solche besonderen numerischen Werthe besitzen, daß alle Invarianten für dieselbe verschwinden, so besteht unsere Aufgabe in der Auffindung aller ternären Nullformen $n$ter Ordnung.

Es bezeichne $f(x_1, x_2, x_3)$ eine Nullform $n$ter Ordnung; man transformire dieselbe mittelst der linearen Substitution:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3, \\ x_2 &= \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{23}y_3, \\ x_3 &= \alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{33}y_3, \end{aligned} \qquad \delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}.$$

Die Coefficienten der transformirten Form $g(y_1, y_2, y_3)$ bezeichnen wir mit $b_1, \ldots, b_N$; dieselben sind ganze rationale Funktionen von $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ mit bestimmten numerischen Coefficienten. Nun construire man in der auf Seite 10—11 der zweiten Note angegebenen Weise 9 algebraisch von einander unabhängige Funktionen $B_1, \ldots, B_9$, durch welche sich alle Funktionen $b_1, \ldots, b_N$ ganz und algebraisch ausdrücken; dann bilde man die irreducible Gleichung, welcher die Substitutionsdeterminante δ genügt. Diese Gleichung ist von der Gestalt

$$\Gamma_0\delta^\pi + \Gamma_1\delta^{\pi-1} + \cdots + \Gamma_\pi = 0,$$

wo $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_\pi$ ganze rationale Funktionen von $B_1, \ldots, B_9$ ohne einen allen gemeinsamen Faktor sind. Nach Seite 10 meiner zweiten Note darf Γ_0 nicht gleich einer von 0 verschiedenen Constanten sein, weil sonst δ eine ganze algebraische Funktion von $b_1, \ldots, b_N$ wäre und dann f keine Nullform sein könnte.

Betrachten wir jetzt die 9 Größen $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{33}$ und ebenso die Determinante δ dieser 9 Größen als Funktionen von $B_1, \ldots, B_9$, so ist aus der letzteren Gleichung offenbar, daß für gewisse durch

$\Gamma_0 = 0$ bestimmte, endliche Werthe $B_1, \ldots, B_9$ die Determinante δ unendlich große Werthe annehmen muß. Da für endliche $B_1, \ldots, B_9$ auch die Größen $b_1, \ldots, b_N$ sämmtlich endliche Werthe haben müssen, so kann — in richtig zu verstehendem Sinne — die Nullform f kurz als eine Form bezeichnet werden, welche die Eigenschaft besitzt, endlich zu bleiben bei Anwendung gewisser linearer Substitutionen von unendlich großer Determinante. Die genauere algebraische Untersuchung führt zu folgendem Resultat:

Wenn f eine ternäre Nullform ist, so giebt es nothwendig eine Substitution

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \alpha_{13} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \alpha_{23} \\ \alpha_{31}, & \alpha_{32}, & \alpha_{33} \end{pmatrix},$$

deren Elemente $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{33}$ Potenzreihen sind, welche nach ganzen steigenden Potenzen einer Veränderlichen τ fortschreiten, nur eine endliche Anzahl von Gliedern mit negativen Potenzexponenten enthalten und überdies so beschaffen sind, daß ihre Determinante δ für $\tau = 0$ unendlich wird, während die Coefficienten $b_1, \ldots, b_N$ der transformirten Form sämmtlich endlich bleiben, wenn man $\tau = 0$ setzt.

Die Umkehrung dieses Satzes ist unmittelbar einzusehen. In der That, wenn man für die Größen $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{33}$ Potenzreihen von der genannten Eigenschaft angeben kann, so ist jedenfalls δ nicht eine ganze algebraische Funktion von $b_1, \ldots, b_N$ und folglich ist die Grundform f eine Nullform.

Vermittelst eines Hilfssatzes über die Normirung von linearen Substitutionen, deren Coefficienten Potenzreihen einer Veränderlichen τ sind, zeigt es sich, daß man, falls zuvor eine geeignete lineare Transformation der Nullform ausgeführt wird, die betreffenden Potenzreihen einfach in der Gestalt

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \tau^{\nu_1}, \quad \alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{13} = 0, \\ \alpha_{21} &= 0, \quad \alpha_{22} = \tau^{\nu_2}, \quad \alpha_{23} = 0, \\ \alpha_{31} &= 0, \quad \alpha_{32} = 0, \quad \alpha_{33} = \tau^{\nu_3}, \end{aligned}$$

annehmen darf, wo ν_1, ν_2, ν_3 ganze Zahlen sind, deren Summe wegen der Bedingung $\underset{\tau=0}{L}[\delta] = \infty$ negativ sein muß. Um das hierin liegende Resultat klar aufzufassen, führen wir den Begriff der „kanonischen Nullform“ ein:

Eine ternäre Form $f = \Sigma a_{n_1 n_2 n_3} x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3}$ von der Ordnung n möge eine „kanonische Nullform“ heißen, wenn sich 3 ganze Zahlen ν_1, ν_2, ν_3, deren Summe negativ ist, finden lassen von der Art, daß jeder Coefficient $a_{n_1 n_2 n_3}$ den Werth 0 hat, für welchen die Zahl $\nu_1 n_1 + \nu_2 n_2 + \nu_3 n_3$ negativ ausfällt, während die übrigen Coefficienten beliebige numerische Werthe besitzen.

Die obige Entwicklung lehrt dann, daß eine jede Nullform durch Transformation mittelst einer geeigneten linearen Substitution von nicht verschwindender Determinante in eine kanonische Nullform übergeführt werden kann und die Aufgabe, alle Nullformen aufzustellen, ist also auf die Frage nach den kanonischen Nullformen zurückgeführt, welch' letztere dadurch gelöst wird, daß man alle Systeme von ganzen Zahlen ν_1, ν_2, ν_3 der eben bezeichneten Beschaffenheit construirt. Bei näherer Behandlung dieser zahlentheoretischen Aufgabe finden wir dann folgende zur Construction aller ternären kanonischen Nullformen dienende Regel:

Betrachten wir x, x' als rechtwinklige Coordinaten in einer Ebene, so entspricht vermöge $x = n_1$, $x' = n_2$ jedem Gliede der ternären Form f ein Punkt der Ebene; und umgekehrt jeder Punkt der Ebene mit ganzzahligen, den Bedingungen $x \geqq 0$, $x' \geqq 0$, $x + x' \leqq n$ genügenden Coordinaten bestimmt ein Glied der ternären Form. Nun ziehe man durch den Punkt $x = \frac{n}{3}$, $x' = \frac{n}{3}$ irgend eine Gerade, welche die positive x- und x'-Axe schneidet und suche alle diejenigen Punkte mit ganzzahligen, nicht negativen und der Bedingung $x + x' \leqq n$ genügenden Coordinaten x, x' auf, welche auf dieser Geraden oder auf der linken d. h. den Nullpunkt enthaltenden Seite derselben gelegen sind: die Coefficienten $a_{n_1 n_2 n_3}$ aller derjenigen Glieder, welche jenen Punkten vermöge der Gleichungen $n_1 = x$, $n_2 = x'$, $n_3 = n - x - x'$ entsprechen setze man gleich 0, während man die übrig bleibenden Coefficienten in der Form beliebig lasse. Die erhaltene Form ist eine kanonische Nullform und man erhält also so viel Typen von Nullformen als es gerade Linien durch den Punkt $x = \frac{n}{3}$, $x' = \frac{n}{3}$ giebt, welche die genannten ganzzahligen Punkte der Ebene auf wesentlich verschiedene Weisen zu trennen vermögen.

Noch übersichtlichere Figuren erhält man, wenn man statt der rechtwinkligen Coordinaten x, x' homogene einführt und ein gleichseitiges Dreieck als Coordinatendreieck zu Grunde legt.

Das gefundene Resultat können wir noch in folgender Weise

aussprechen: Wenn wir die ternäre Form f durch einen Punkt in einem Raume von $N-1$ Dimensionen darstellen, so ist in diesem Raume durch das Nullsetzen aller Invarianten ein algebraisches Gebilde bestimmt, dessen irreducible Bestandtheile zufolge der obigen Entwicklung von vornherein angegeben werden können; zugleich sieht man, daß diese Gebilde sämmtlich rational d. h. von solcher Art sind, daß man ihre Punkte erhalten kann, indem man die Coordinaten derselben gleich rationalen Funktionen von Parametern einsetzt.

Um die dargelegte Methode an einigen Beispielen zu erläutern, habe ich die ternären kanonischen Nullformen bis zur sechsten Ordnung berechnet. In der folgenden Tabelle ist a eine willkürliche Größe und $(xy)_s$ bezeichnet den allgemeinen homogenen Ausdruck $s$ten Grades in x, y.

$n = 2.$ 1) $ax + x(xy)_1$
2) $(xy)_2$

$n = 3.$ 1) $ay^3 + (xy)_3$

$n = 4.$ 1) $(xy)_2 + (xy)_4$
2) $x\{ax + x(xy)_1 + (xy)_3\}$

$n = 5.$ 1) $ax^5 + (xy)_4 + (xy)_5$
2) $x\{x(xy)_1 + x(xy)_2 + (xy)_4\}$
3) $x^3\{a + (xy)_1 + (xy)_2 + (xy)_3\}$

$n = 6.$ 1) $x^3(xy)_1 + (xy)_5 + (xy)_6$
2) $x\{ax^3 + x^3(xy)_1 + x(xy)_3 + (xy)_5\}$.

Zu bemerken ist, daß im Falle $n = 2$ die beiden kanonischen Nullformen durch lineare Transformationen in einander übergeführt werden können, so daß in diesem Falle thatsächlich nur eine Nullform existirt.

Nach Berechnung der Nullformen kann man leicht angeben, welche Ausartung diejenigen ebenen Curven aufweisen, die durch Nullsetzen dieser Nullformen definirt sind. So hat man beispielsweise den Satz, daß für eine biquadratische Form f sämmtliche Invarianten dann und nur dann verschwinden, wenn die Curve $f = 0$ entweder einen 3fachen Punkt besitzt oder wenn sie in eine cubische Curve und eine Wendetangente derselben zerfällt.

Die gefundenen Resultate über die Nullformen gestatten alle diejenigen Sätze auf Formen mit 3 Veränderlichen auszudehnen, welche in der 2ten Note S. 6—7 für binäre Formen abgeleitet

worden sind, insbesondere zeigt sich, daß der dort gefundene Satz über den Aronhold'schen Prozeß allgemein gilt.

Die Thatsache, daß für eine kanonische Nullform sämmtliche Invarianten gleich 0 sind, kann auch noch auf einem anderen Wege abgeleitet werden, welcher zugleich über die Vielfachheit des Verschwindens der Invarianten einer Nullform einen wichtigen Aufschluß giebt.

Um dies zu zeigen, beachten wir, daß eine Invariante der Grundform $f = \Sigma a_{n_1 n_2 n_3} x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3}$ eine ganze rationale Funktion der $a_{n_1 n_2 n_3}$ ist, deren Glieder sämmtlich den nämlichen Grad g und die nämlichen Gewichte $\frac{1}{3}ng$ besitzen. Schreiben wir also die Invariante in der Gestalt

$$J = \Sigma C \Pi a_{n_1 n_2 n_3}^{e_{n_1 n_2 n_3}}$$

wo mit C der Zahlencoefficient des betreffenden Gliedes bezeichnet ist, so gelten für die Exponenten $e_{n_1 n_2 n_3}$ die folgenden 3 Gleichungen

$$\Sigma n_1 e_{n_1 n_2 n_3} = \Sigma n_2 e_{n_1 n_2 n_3} = \Sigma n_3 e_{n_1 n_2 n_3} = \tfrac{1}{3} ng,$$

wo die Summe über alle Systeme von Zahlen n_1, n_2, n_3 erstreckt werden soll, deren Summe gleich n ist. Es mögen nun ν_1, ν_2, ν_3 3 Zahlen bedeuten, durch welche eine kanonische Nullform der oben gegebenen Definition gemäß bestimmt wird. Die Summe dieser 3 Zahlen sei gleich $-\varrho$, wo ϱ eine positive von 0 verschiedene Zahl bedeutet. Aus den letzteren Gleichungen folgt dann

$$\Sigma(\nu_1 n_1 + \nu_2 n_2 + \nu_3 n_3) e_{n_1 n_2 n_3} = \tfrac{1}{3} ng(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3) = -\tfrac{1}{3} \varrho ng.$$

Lassen wir in der Summe linker Hand alle diejenigen Glieder weg, deren Werthe $\geqq 0$ sind, so erhalten wir

$$\Sigma'(\nu_1 n_1 + \nu_2 n_2 + \nu_3 n_3) e_{n_1 n_2 n_3} \leqq -\tfrac{1}{3} \varrho ng$$

oder

$$\Sigma'(|\nu_1 n_1 + \nu_2 n_2 + \nu_3 n_3|) e_{n_1 n_2 n_3} \geqq \tfrac{1}{3} \varrho ng,$$

wo die Summe Σ' über alle Systeme von Zahlen n_1, n_2, n_3 zu erstrecken ist für welche $\nu_1 n_1 + \nu_2 n_2 + \nu_3 n_3$ negativ ausfällt. Bezeichnet ferner N den größten der absoluten Werthe von ν_1, ν_2, ν_3 so ist

$$|\nu_1 n_1 + \nu_2 n_2 + \nu_3 n_3| \leqq nN$$

und hieraus ergiebt sich

$$\Sigma' e_{n_1 n_2 n_3} \geqq \frac{\varrho g}{3N}$$

d. h. in jedem Gliede $C\Pi a_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}^{\epsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}}$ einer Invariante erreicht oder übersteigt die Summe der Exponenten derjenigen Coefficienten $a_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$, welche für eine kanonische Nullform gleich 0 sind, eine gewisse Zahl $\frac{\varrho g}{3N}$ und daher sind für eine kanonische Nullform und folglich auch für jede beliebige Nullform nicht nur alle Invarianten gleich 0, sondern auch alle nach den $a_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$ genommenen Differentialquotienten derselben, bis zu einer gewissen Ordnung G hin, wo G die kleinste ganze Zahl bedeutet, welche $\frac{\varrho g}{3N}$ nicht übersteigt und wo G mithin eine Zahl ist, welche mit g selbst über alle Grenzen hinaus wächst.

Wir können aus diesem Umstande einen Beweis für die Endlichkeit der Invarianten ableiten, welcher gar nicht das in meiner Arbeit „Ueber die Theorie der algebraischen Formen" bewiesene Theorem I[1]) benutzt, dagegen bei weitem nicht diejenige Einfachheit besitzt, wie der in Abschnitt V derselben Arbeit gegebene Beweis. Zu diesem neuen Beweise brauchen wir den folgenden Hilfssatz:

Sind m ganze rationale homogene Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ der n Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ vorgelegt, so läßt sich stets eine ganze Zahl r bestimmen von der Beschaffenheit, daß eine jede ganze rationale homogene Funktion F der nämlichen Veränderlichen, welche nebst allen ihren Differentialquotienten der $r$ten Ordnung für sämmtliche den Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ gemeinsamen Nullstellen verschwindet, in der Gestalt

$$F = A_1 f_1 + A_2 f_2 + \cdots + A_m f_m$$

dargestellt werden kann, wo $A_1, A_2, \ldots, A_m$ geeignet gewählte ganze rationale homogene Funktionen der Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ sind.

Dieser Satz kann in ähnlicher Weise wie der auf S. 235 der ersten Note angegebene Satz[2]) bewiesen werden, nämlich dadurch, daß man den Satz für $n-1$ Veränderliche bewiesen annimmt und dann zeigt, daß derselbe auch für n Veränderliche gilt.

Wir construiren nun für eine ternäre Grundform f ein System

1) Vgl. Math. Ann. Bd. 36. S. 474.

2) Vergl. den demnächst in den Math. Ann. in der Arbeit „Ueber die vollen Invariantensysteme" gegebenen Beweis dieses Satzes.

von Invarianten $i_1, \ldots, i_m$, deren Gewichte die Zahl $9n(3n+1)^n$ nicht übersteigen und durch welche sich eine jede andere Invariante, deren Gewicht die Zahl ebenfalls nicht übersteigt, linear mit constanten Coëfficienten zusammen setzen läßt. Nach den Entwicklungen auf S. 11—12 der zweiten Note bilden diese Invarianten $i_1, \ldots, i_m$ ein System von solchen Invarianten, deren Verschwinden das Verschwinden sämmtlicher Invarianten der Grundform zur Folge hat. Auf dieses System von Invarianten $i_1, \ldots, i_m$ wenden wir den eben ausgesprochenen Hilfssatz an und schließen aus demselben, daß es eine Zahl r giebt von der Beschaffenheit, daß eine jede Funktion F, der Coefficienten von f, welche nebst ihren $r$ten Differentialquotienten für die gemeinsamen Nullstellen aller Invarianten der Grundform 0 ist, in die Gestalt

$$F = A_1 i_1 + A_2 i_2 + \cdots + A_m i_m$$

gebracht werden kann, wo die $A_1, A_2, \ldots, A_m$ geeignet gewählte Funktionen der Coefficienten der Grundform sind, oder in kürzerer Ausdrucksweise: Es giebt eine ganze Zahl r derart, daß jede ganze rationale Funktion der Coefficienten der Grundform, welche nebst ihren $r$ten Differentialquotienten für die gemeinsamen Nullstellen sämmtlicher Invarianten verschwindet, der 0 congruent ist nach dem Modul $(i_1, \ldots, i_m)$.

Andererseits können wir nun, wie groß auch r sein möge, zufolge der Betrachtungen dieser Note eine Zahl g finden derart, daß eine jede Invariante, deren Grad diese Zahl g übersteigt, nebst ihren $r$ten Differentialquotienten für die gemeinsamen Nullstellen sämmtlicher Invarianten der Grundform verschwindet, und demnach muß jede Invariante von höherem als dem $g$ten Grade congruent 0 sein nach dem Modul $(i_1, \ldots, i_m)$. Aus der letzteren Thatsache schließen wir genau in derselben Weise, wie dieses auf S. 236—237 meiner ersten Note geschehen ist, daß alle Invarianten der Grundform ganze algebraische Funktionen von $i_1, \ldots, i_m$ sind. Dieser Satz ist derselbe, wie der letzte Satz auf S. 12 der zweiten Note, welcher dort direkt aus dem Satze auf S. 237 meiner ersten Note geschlossen wurde; aus demselben folgt, wie auf S. 239—240 dargelegt worden ist, insbesondere die Endlichkeit des vollen Invariantensystems.

Vermöge der in der ersten Hälfte dieser Note angestellten Betrachtungen kann man von vornherein angeben, was das Verschwinden sämmtlicher Invarianten für die Grundform bedeutet. Diese Kenntniß dient dazu, um in jedem besonderen Falle zu ent-

scheiden, ob irgend welche vorgelegte Invarianten von der Beschaffenheit sind, daß das Verschwinden derselben das Verschwinden sämmtlicher Invarianten der Grundform nach sich zieht. Somit erleichtert die Kenntniß der Nullformen wesentlich die Lösung der ersten unter den drei zu Anfang dieser Note bezeichneten Aufgaben.

Was die beiden anderen Aufgaben betrifft, so verlangt die zweite die Aufstellung eines Systems S_2 von Invarianten, durch welche sich alle Uebrigen rational ausdrücken lassen, und die Lösung der dritten Aufgabe ergab dann das gesuchte volle Invariantensystem. Es soll nun gezeigt werden, wie man auch ohne die Kenntniß eines solchen Systems S_2 von Invarianten das volle Invariantensystem ableiten kann, lediglich mit Hilfe der Kenntniß eines Systems von Invarianten $i_1, \ldots, i_m$, durch welche sich alle übrigen Invarianten ganz und algebraisch ausdrücken lassen.

Wegen der Grundeigenschaft der Invariante

$$\delta^r J(a_1, \ldots, a_N) = J(b_1, \ldots, b_N)$$

ist jede Invariante der Grundform f eine rationale Funktion der Größen $\delta, b_1, \ldots, b_N$. Man bestimme nun — etwa in der auf Seite 234—235 der ersten Note auseinandergesetzten Weise — eine gewisse Zahl σ von Invarianten $J_1, \ldots, J_\sigma$, zwischen denen keine Relation stattfindet und durch welche sich sämmtliche Invarianten $i_1, \ldots, i_m$ als ganze algebraische Funktionen ausdrücken lassen. (Die Zahl σ hat den Werth $N-8$). Dann wähle man aus den Funktionen $b_1, \ldots, b_N$ eine gewisse Zahl τ von Funktionen aus etwa $b_1, \ldots, b_\tau$, so daß zwischen $J_1, \ldots, J_\sigma, b_1, \ldots, b_\tau$ keine algebraische Relation stattfindet und daß sämmtliche übrigen Funktionen $b_{\tau+1} b_{\tau+2}, \ldots, b_N$ algebraische Funktionen von $J_1, \ldots, J_\sigma, b_1, \ldots, b_\tau$ sind. (Die Zahl τ ist gleich 9). Endlich bestimme man in dem Ausdrucke

$$B = c\delta + c_{\tau+1} b_{\tau+1} + c_{\tau+2} b_{\tau+2} + \cdots + c_N b_N$$

die Constanten $c, c_{\tau+1}, c_{\tau+2}, \ldots, c_N$ derart, daß sämmtliche Größen $\delta, b_{\tau+1}, b_{\tau+2}, \ldots, b_N$ rationale Funktionen von $B, J_1, \ldots, J_\sigma, b_1, \ldots, b_\tau$ sind. Dies ist jedenfalls möglich, da wegen der Invarianteneigenschaft von J_1 eine gewisse Potenz von δ rational von den Größen $J_1, b_1, \ldots, b_N$ abhängt und daher δ selber eine algebraische Funktion von $J_1, b_1, \ldots, b_\tau$ ist. Die Funktion B genügt einer Gleichung von der Gestalt

$$B^\mu + R_1 B^{\mu-1} + \cdots + R_\mu = 0,$$

wo $R_1, \ldots, R_\mu$ rationale Funktionen von $J_1, \ldots, J_\sigma, b_1, \ldots, b_\tau$ sind.

Wir betrachten jetzt $J_1, \ldots, J_\sigma, b_1, \ldots, b_\tau$ als die unabhängigen Veränderlichen und bestimmen dann in dem durch B definirten Funktionenkörper ein Fundamentalsystem d. h. ein System von ganzen algebraischen Funktionen $B_1, \ldots, B_M$ des Körpers, aus denen durch lineare Combination mit Benutzung ganzer rationaler Coefficienten jede ganze algebraische Funktion des Körpers zusammengesetzt werden kann. Da die Funktionen $B_1, \ldots, B_M$ rational von $B, J_1, \ldots, J_\sigma, b_1, \ldots, b_\tau$ und ganz und algebraisch von $J_1, \ldots, J_\sigma, b_1, \ldots, b_\tau$ abhängen, so gehn dieselben, wenn man an Stelle der Größen $b_1, \ldots, b_N$ ihre Ausdrücke in $a_1, \ldots, a_N$, $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{ss}$ einsetzt, über in ganze rationale Funktionen von $a_1, \ldots, a_N, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{ss}$. Bezeichnen wir nun, wenn irgend ein von $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{ss}$ ganz und rational abhängender Ausdruck A vorgelegt ist, allgemein das von diesen Größen $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{ss}$ freie Glied mit $[A]$, so sind offenbar die Ausdrücke $[B_1], \ldots, [B_M]$ sämmtlich Invarianten der Grundform. In der That B_s genügt einer Gleichung von der Gestalt

$$B_s^\mu + \Gamma_1 B_s^{\mu-1} + \cdots + \Gamma_\mu = 0,$$

wo $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\mu$ ganze rationale Funktionen von $J_1, \ldots, J_\sigma, b_1, \ldots, b_\tau$ sind; hieraus folgt die Gleichung

$$[B_s]^\mu + [\Gamma_1][B_s]^{\mu-1} + \cdots + [\Gamma_\mu] = 0.$$

Da nun lediglich die Größen $b_1, \ldots, b_\tau$ noch die Substitutionscoefficienten $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{ss}$ enthalten, so ist klar, daß die Ausdrücke $[\Gamma_1], \ldots, \Gamma_\mu]$ ganze rationale Funktionen von $J_1, \ldots, J_\sigma$ sind und hiermit ist die Invarianteneigenschaft der Funktionen $[B_s]$ erwiesen.

Andererseits ist eine jede Invariante J der Grundform f, da sie ganz und algebraisch von $J_1, \ldots, J_\sigma$ und rational von $\delta, b_1, \ldots, b_\tau$ abhängt, eine ganze algebraische Funktion des betrachteten Körpers und als solche nothwendig in der Gestalt

$$J = G_1 B_1 + \cdots + G_M B_M$$

parstellbar, wo $G_1, \ldots, G_M$ ganze rationale Funktionen von $J_1, \ldots, J_\sigma$ $b_1, \ldots, b_\tau$ sind. Aus dieser Formel erhält man

$$J = [G_1][B_1] + \cdots + [G_M][B_M],$$

wo $[G_1], \ldots, [G_M]$ ganze rationale Funktionen von $J_1, \ldots, J_\sigma$ sind. Diese Gleichung sagt aus, daß $J_1, \ldots, J_\sigma$, $[B_1], \ldots, [B_M]$ ein System von Invarianten bilden, durch welche sich eine jede andere Invariante der Grundform f ganz und rational ausdrücken läßt.

Königsberg i/Pr., den 23. Juni 1892.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse gleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Januar 1892.

(Fortsetzung.)

Sällskapet för Finlands Geografi. Fennia. 4. Bulletin. Helsingfors 1891.
Tifliser Physikalisches Observatorium:
a. Beobachtungen der Temperatur des Erdbodens im Jahre 1884, 1885. Tiflis. 1886, 1891.
b. Magnetische Beobachtungen im J. 1890. Tiflis 1891.
c. Meteorologische Beobachtungen im J. 1890. Tiflis 1891.
Smithsonian Institution. United States National Museum. Proceedings. Vol. XIII. 1890. Washington 1891.
Pennsylvanian Geological Survey 1889. AA.:
a. Atlas Western Middle Anthracite field. Part III.
b. Atlas Southern Anthracite field. Part IV.
c. Atlas Northern Anthracite field. Part VI.
d. Second Geologogical Survey: Union. Snyder. Mifflin Juniata: F. 3. Harrisburg 1891.
U. S. A. Naval Observatory. Observations made during 1886. Washington 1891.
American Geographical Society. Bulletin. Vol. XXIII. N. 4. Pt. 1. Dec. 31. 1891. New York.
Academy of Natural Sciences of Philadelphia. Proceedings 1891. Part II. April —August. Philadelphia 1891.
Museum of Comparative Zoölogy at Harvard College:
a. Bulletin. Vol. XXII. N. 1. 2. Cambridge U. S. A. 1891.
b. Annual-Report 1890—91.
American Pharmaceutical Association. Proceedings 1891. Vol. 39. With Index of Vols. 31 to 38. Philadelphia 1891.
Lick Observatory. Reports on the Observations of the total Eclipse of the Sun. Dec. 21—22 1889 etc. Sacramento 1891.
Boston Society of Natural History. Proceedings. Vol. XXV. Part II. Jan. 1891. May 1891. Boston 1891.
The Journal of Comparative Neurology. Vol. I. Dec. 1891. Pages 287—358. Cincinnati Ohio.
Essex Institute Salem. Bulletin. Vol. XXI 7—12. Vol. XXII 1—12.
Astronomy and Astro-Physics. January 1892. N. 101. New Series. N. 1. (2 Ex.).

Nachträge.

Nature. Vol. 45. N. 1159—1161.
Royal Astronomical Society. Monthly Notices. Vol. LII. N. 2. Dec. 1891. London 1892.

Leopoldina. Heft XXVII. N. 23—24. Dec. 1891 nebst Titel zum 27. Heft. Jahrg. 1891. Halle a. S. 1891.
Königl. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig:
a. Berichte. Mathematisch-physische Classe. 1891. III.
b. Abhandlungen des XVIII. Bandes der mathematisch-physischen Classe. N. II. Ueber einen eigenthümlichen Fall elektrodynamischer Induction v. L. Neumann. Leipzig 1892.
Universidad de Buenos Aires. Anales. Tomo VI. Buenos Aires 1891.
Revista Argentina de Historia Natural. Tomo 1. Dic. 1° de 1891. Entrega 6°. Buenos Aires 1891.
Académie Impériale des Sciences de St.-Petersbourg. Mémoires. VII. Serie. Tome XXXVIII. No. 4—6. St.-Petersbourg 1891.
Great Trigonometrical Survey of India. Accounts and operations. Vol. XIV. Dehra Dun. 1890.
Royal Society of Victoria. Transactions. Vol. III. Part I. 1891. Melbourne 1891.
Naturforschende Gesellschaft in Basel. Verhandlungen. Band IX. Heft 2. Basel 1891.
Société mathematique de France. Bulletin. Tome XIX. No. 8 et dernier u. Titel. Paris 1891.
Geological Survey of India:
a. Records. Vol. XXIV. Part 4.
b. Titel zu Memoirs. Vol XXIV. Calcutta 1891.
The Humming Bird. Vol. II. N. 2. Febr. 1892. London.
Prospekt zu einer Geologie von Böhmen von Friedr. Katzer. Prag.

Antiquarische Kataloge.

Dulau & Co.
Zoological & anthropological books.
Zoological & palaeontological books. Part IV. V. VI, VIII. IX, XIV. XV. XVI.
Works on geology.
Mathematical works.
Bernard Quaritch.
Natural history. Part I. Zoology.

Februar 1892.

Sitzungsberichte der Kön. Preuß. Akademie der Wissenschaften. IV—VII, VIII—IX. X. 1892. Berlin 1892.
K. b. Akademie der Wissenschaften zu München:
a. Sitzungsberichte der philosophisch-philologischen und historischen Classe. 1891. Heft III. München.
b. Abhandlungen. 1. Philosophisch-philologische Classe. 19ten Bandes 2te Abtheilung. München. 2. Historische Classe. 19ten Bdes 3te Abth. München.
c. Gedächtnißrede auf Wilhelm v. Giesebrecht von Sigmund Riezler. München 1891.
Zeitschrift für Naturwissenschaften. 64. Band. Viertes u. fünftes Heft. Leipzig 1891.
Herondae Mimiambi edidit. Fr. Buecheler. Bonnae 1892.
Königl. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften zu Erfurt: Jahrbücher. Neue Folge. Heft XVII. Erfurt 1892.
Beschreibung der Kriegsthaten des General-Feldmarschalls Ernst Albrecht von Eberstein (geb. 1605—1676). Bearbeitet von L. F. Freiherrn von Eberstein. 2. Ausgabe. Berlin 1892.
Neues Lausitzisches Magazin. 67. Bd. II. Görlitz 1891.
Naturhistorischer Verein in Nürnberg: Jahresbericht 1883. 1886 nebst Abhandlungen. VIII. Bd. Bogen 4 u. 5. Nürnberg 1887.
K. k. geologische Reichsanstalt. Verhandlungen. No. 15—18. 1891. No. 1. 1892. Wien 1891—92.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst u. Literatur in Böhmen. Rechenschaftsbericht erstattet am 3. Febr. 1892. Prag 1892.

Akademie der Wissenschaften in Krakau. Anzeiger. 1892. Januar. Krakau 1892.

Institut Royal Grand-ducal de Luxembourg:
a. Publications. (Section des sciences naturelles et mathématiques). Tome XXI. Luxembourg 1891.
b. Observations météorologiques faites a Luxembourg de 1884—1888. Moyennes de 1884—1888 et de 1854—1888; par F. Reuter-Chomé. 5me Vol. Luxembourg 1890.

Société geologique de Belgique. Annales. Tome XVIII, 2e livr. Tome XIX, 1e livr. Liege 1891—92.

Académie Royale de Belgique. Bulletin. 62e année. 3e série, tome 23. N. 1. Bruxelles 1891.

Société de Physique et d'histoire naturelle de Genève. Vol. supplementaire Centenaire de la fondation de la société. Genève 1891.

Nature. Vol. 45. N. 1162—1165. London 1892.

Royal microscopical society. Journal 1892. Part 1. Febr. (2 Ex.). London and Edinburgh.

Cambridge philosophical society:
a. Proceedings. Vol. VII. Part V. (Michelmas term. 1891). Cambridge 1892.
b. Transactions. Vol. XV. Part II. Cambridge 1891.

Geological Survey of India:
a. Memoirs in 4°. Ser. XIII. Salt-Range fossils. Vol. IV. Part II. Geological Results by William Waagen.
b. Memoirs in 8°. Vol. XXIII. Griesbach: Geology of the central Himalayas. Calcutta 1891.

Iconography of Australian salsolaceous plants by Bar. Ferd. von Mueller. Eighth Decade. Melbourne 1891.

Royal astronomical Society. Monthly notices. Vol. LII. N. 3. Jan. 1892. London.

Report of the scientific results of the exploring voyage of H. M. S. Challenger. 1873—76. Deep Sea Deposits. London 1891.

Reale Accademia dei Lincei:
a. Atti. Anno CCLXXXVIII. Serie quarta. Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. IX. Parte 2a. Notizie degli scavi. Settembre, Octobre 1891. Roma 1891.
b. Atti. Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Anno CCLXXXVIII. 1891. Serie quarta. Rendiconti. Vol. VII. fasc. 12 e Indice del Volume. 2° Semestre. Anno CCLXXXIX. 1892. Serie quinta. Rendiconti. Vol. I°. fasc. 1. 2. 1. semestre. Roma 1892.

Biblioteca nazionale centrale di Firenze. Bollettino delle pubblicazioni Italiane 1892. N. 147. 148. 15. 29. Febbraio. Firenze 1892.

Biblioteca nazionale centrale Vittorio Emanuele di Roma. Bollettino delle opere moderne straniere. Vol. VII. N. 13. Gennaio 1892. Roma 1892.

Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas. Vol. X. No. 4. Coimbra 1892.

Société Imp. des naturalistes de Moscou. Bulletin. Année 1891. No. 2 et 3. Moscou 1892.

Société des naturalistes de Kiew:
a. Записки Кіевскаго Общества естесмвоиспытателей Томъ X, 3. 4. XI, 1, 2. Кіевъ 1890. 91.
b. Петръ Петровичъ Алексѣевъ, заслужсенный проф. Инверс. св. Владиміра Почетный Членъ. Ibid. 1892.

United States geological Survey:
a. Bulletin. No. 62, 65, 67—81. Washington 1890—91.
b. Tenth annual report 1888—89; by J. W. Powell. Part 1. Geology. Part II. Irrigation. Washington 1890.

The journal of comparative Neurology. Vol. II. February 1892. Pages 1—23. Cincinnati. Ohio.

Museum of comparative Zoölogy at Harvard college. Bulletin. Vol. XXII. No. 3, 4. Cambridge U. S. A. 1892.
John Hopkins University circulars. Vol. XI. N. 95. Baltimore. Febr. 1892.

Nachtrag.

Leopoldina. Heft XXVIII. Nr. 1—2. Januar 1892.
und:
Ferdinand Römer. Von Amtsrath Dr. C. Struckmann in Hannover.

Almanach. 1891. Budapest 1891.
Nyelvtudomanyi Közlemények. (Philolog. Mittheilungen). Kötet XXII, Füzet 1—2. Ebd. 1890.
Munkácsi Bernat: Votják Szótár. (Votjakisches Wörterbuch). Füzet 1. Ebd. 1890.
Balassa József: A Magyar Nyelvjárások osztályozása és jellemzese. (Ungarische Dialekte). Ebd. 1891.
Szilágyi Sándor: Erdély és az eszakkeleti háború. (Siebenbürgen und der Krieg im nordöstlichen Europa). Kötet 1. Ebd. 1890.
Magyarországi török kincstári defterek. (Türkische Staats-Defters aus Ungarn; eingeleitet und herausgeg. v. Ernst Kammerer und Anton Velics). Kötet 2: 1540—1639. Ebd. 1890.
Irodalomtörténeti emlékek. (Literaturgeschichtliche Denkmäler). Kötet II. Ebd. 1890.
Monumenta Hungariae juridico-historica. Tom. II, 2: Statuta et articuli municipiorum Hungariae Cic-Tibiscanorum. Ebd. 1890.
Acta et documenta historiam Gabrielis Bethlen Transsilvaniae principis illustrantia ed. Antonius Gindely. Ebd. 1890.
Nyelvsléktár. (Ungarische Sprachdenkmäler). XIV. Kötet. Ebd. 1890.
Értekezések a nyelv- és széptudományok köréböl. (Abhandlungen aus d. Gebiete der Sprach- u. schönen Wissenschaften). Kötet XV, 6—10. Ebd. 1890.
Mathematikai és természettudományi Közlemények. (Mathematische und naturwissenschaftliche Mittheilungen). Kötet XXIV, 1—7. Ebd. 1890/91.
Történettudományi Értekezések. (Historische Abhandlungen). Kötet XIV, 10 u. XV, 1. Ebd. 1891.
Társadalmi Értekezések. (Socialwissenschaftliche Abhandlungen). Kötet XI, 1—4 Ebd. 1891.
Értekezések a mathematikai tudományok köréböl. (Mathematische Abhandlungen). Kötet XIV, 4. Ebd. 1891.
Értekezések a természettudományok köréböl. (Naturwissenschaftliche Abhandlungen). Kötet XX, 1—4 und XXI, 1. 2. Ebd. 1890/91.
Archaeologiai Értersitö. Uj folyam. (Archaeologischer Anzeiger. Neue Folge). Kötet X, 3—5 und XI, 1—3. Ebd. 1890/91.
Mathematikai és természettudományi Ertesitö. (Mathematischer und naturwissenschaftlicher Anzeiger. Kötet VIII, 6—9 u. IX, 1—9. Ebd. 1890/91.
Archaeologiai Közlemények. (Archaeologische Mittheilungen). Kötet XVI. Ebd. 1890.
Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Bd. VIII. Berlin und Budapest 1891.
Ungarische Revue. 12. Jahrg. 2. Hft. Februar 1892.

(Fortsetzung folgt.)

Inhalt von Nr. 12.

E. Ehlers, Zur Kenntnis von Arenicola marina L. — *L. Rhumbler*, Eisenkiesablagerungen im verwesenden Weichkörper von Foraminiferen, die sogenannten Keimkugeln Max Schultze's u. A. — *W. Nernst*, Ueber die mit der Vermischung konzentrirter Lösungen verbundene Aenderung der freien Energie. — *David Hilbert*, Ueber die Theorie der algebraischen Invarianten. III. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

28. September **№ 13.** 1892.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 6. August 1892.

Klein legt einen Aufsatz des Herrn Privatdocenten Dr. Fricke vor: „Ueber ein allgemeines arithmetisch-gruppentheoretisches Princip in der Theorie der automorphen Functionen."

Sauppe legt einen Aufsatz des auswärtigen Mitglieds, Herrn Prof. Dr. Kohlrausch in Straßburg vor: „Ueber Lösungen von Natrium-Silikaten, insbesondere auch über einen Einfluß der Zeit auf deren Constitution."

Ueber ein allgemeines arithmetisch-gruppentheoretisches Princip in der Theorie der automorphen Functionen.

Von

Robert Fricke.

(Vorgelegt von F. Klein.)

Vorliegende Notiz bezweckt die Verallgemeinerung eines gruppentheoretischen Ansatzes, welcher für einen particulären Fall in einer der Kgl. Gesellschaft d. Wiss. am 5. März d. J. vorgelegten Note „Ueber discontinuirlichen Gruppen etc." behandelt ist.

Es sei K_n ein Zahlkörper $n$ten Grades, der im bekannten Dedekind'schen Sinne durch eine ganzzahlige irreducibele Gleichung $n$ten Grades definirt ist. Sind P und Q zwei fest gewählte

ganze Zahlen der Körper K_n, so lege man die ganzzahlige quaternäre quadratische Gleichung:

$$A^2 - PB^2 + QC^2 - PQD^2 = 1 \tag{1}$$

vor und löse dieselbe auf alle Weisen durch je vier ganze Zahlen A, B, C, D des Körpers K_n. Jedem brauchbaren Quadrupel ganzer Zahlen A, B, C, D entsprechend bilde man die beiden linearen Substitutionen der Variabelen η:

$$\eta' = \frac{(A + B\sqrt{P})\eta + (C\sqrt{Q} + D\sqrt{PQ})}{(-C\sqrt{Q} + D\sqrt{PQ})\eta + (A - B\sqrt{P})}, \tag{2}$$

$$\eta' = \frac{(C\sqrt{Q} + D\sqrt{PQ})\eta + (A + B\sqrt{P})}{(-A + B\sqrt{P})\eta + (C\sqrt{Q} - D\sqrt{PQ})}. \tag{3}$$

Die Substitutionen (2) sollen generell U, die Substitutionen (3) V genannt werden.

Die Substitutionen U, V sind zufolge (1) jedenfalls durchgehends von der Determinante 1. Für ihre Combination aber gelten folgende Regeln: Zwei Substitutionen U geben durch Combination wieder eine Substitution U; desgleichen geben irgend zwei V durch Combination ein U. Eine Substitution U mit einem V in der einen oder anderen Folge combiniert giebt stets ein V:

$$UU' = U'', \qquad VV' = U, \qquad UV = V', \quad VU = V'.$$

Man zieht hieraus leicht die Schlüsse: Die Substitutionen U und V bilden in ihrer Gesamtheit eine Gruppe, welche Γ heißen möge; innerhalb Γ ist die Gruppe der Substitutionen U eine ausgezeichnete Untergruppe vom Index zwei; dieselbe heiße demzufolge Γ_2. Diese Regel erleidet indessen eine Ausnahme in dem Falle, daß $Q = 1$ genommen wurde. Dann sind offenbar die Substitutionen V mit den U identisch; wir haben also nur mit der Gruppe Γ der Substitutionen U zu thun. Man wird die Ausdrucksform der weiterhin folgenden Sätze für diesen Specialfall immer leicht modificieren.

Die Gruppe Γ und ebenso auch die Untergruppe Γ_2 sind durch die Spiegelung an der imaginären η-Axe im bekannten Sinne der Erweiterung fähig. Man gelangt so zu den erweiterten Gruppen $\overline{\Gamma}$ und $\overline{\Gamma}_2$, welche neben U, V noch die Operationen der zweiten Art enthalten:

$$\overline{U}(\eta) = \frac{(A + B\sqrt{P})\bar{\eta} - (C\sqrt{Q} + D\sqrt{PQ})}{(-C\sqrt{Q} + D\sqrt{PQ})\bar{\eta} - (A - B\sqrt{P})}, \tag{4}$$

$$(5) \qquad \overline{V}(\eta) = \frac{(C\sqrt{Q} + D\sqrt{PQ})\overline{\eta} - (A + B\sqrt{P})}{(-A + B\sqrt{P})\overline{\eta} - (C\sqrt{Q} - D\sqrt{PQ})};$$

unter $\overline{\eta}$ ist hier der zu η conjugiert complexe Zahlwert verstanden. Innerhalb $\overline{\Gamma}$ sind die drei anderen Gruppen $\overline{\Gamma}_1$, Γ, Γ_1 ausgezeichnete Untergruppen. Aber es mag sehr wohl sein, daß die Gruppe $\overline{\Gamma}$ selbst wieder ausgezeichnete Untergruppe in einer noch umfassenderen Gruppe ist.

Damit die definierten Gruppen für die Zwecke der Theorie der automorphen Functionen brauchbar sind, müssen sie eigentlich discontinuirlich sein, d. h. sie müssen in der η-Ebene einen endlichen Fundamentalbereich besitzen. Es ist also darüber zu entscheiden, welche Bedingungen für den Zahlkörper K_n sowie die beiden ihm angehörenden ganzen Zahlen P, Q erfüllt sein müssen, damit wir eigentlich discontinuirliche Gruppen $\overline{\Gamma}$ ect. haben. Natürlich brauchen wir hierbei nur eine unserer vier Gruppen z. B. $\overline{\Gamma}$ zu untersuchen.

Hier möge nun von vornherein eine Beschränkung der Untersuchung gestattet sein, dahingehend, daß wir nur Gruppen mit reellen Substitutionscoefficienten zulassen wollen: Es soll also K_n ein reeller Körper sein, während P und Q zwei demselben angehörende positive ganze Zahlen sind. Unser Ansatz ist übrigens keineswegs seinem Wesen nach auf den hiermit bezeichneten Bereich reeller Gruppen beschränkt; nur wird die Betrachtungsweise bei den imaginären insofern anders, als man an Stelle der ebenen Polygone nach Poincaré's bekannter Art räumliche Fundamentalpolyeder untersuchen muss. Durch die vorgenommene Beschränkung sind wir in das Gebiet der Hauptkreisgruppen hineingelangt und können uns, wenn wir wollen, bei der Construction des Fundamentalbereichs auf die positive η-Halbebene beschränken.

Man betrachte jetzt zuvörderst alle hyperbolische Substitutionen U, welche die imaginäre η-Axe in sich verschieben. Es sind dies die Substitutionen der Gestalt:

$$(6) \qquad U(\eta) = \frac{A + B\sqrt{P}}{A - B\sqrt{P}}\,\eta = (A + B\sqrt{P})^2\eta,$$

wo das Zahlenpaar A, B alle Lösungen der Gleichung:

$$(7) \qquad A^2 - PB^2 = 1$$

durchlaufen soll; es möge diese Gleichung nach bekannter Analogie als eine Pell'sche Gleichung benannt werden. Unter den Substitutionen (6) dürfen jedenfalls keine infinitesimale enthalten sein. Sprechen wir alsdann im bekannten Sinne von einer kleinsten positiven Lösung (A_0, B_0) der Pell'schen Gleichung (7), so müssen alle für (6) in Betracht kommenden Zahlen $A + B\sqrt{P}$ ganzzahlige Potenzen von $A_0 + B_0\sqrt{P}$ sein:

$$(8) \qquad A + B\sqrt{P} = (A_0 + B_0\sqrt{P})^\nu, \quad \nu = -\infty \cdots + \infty.$$

Auf der anderen Seite betrachte man diejenigen hyperbolischen Substitutionen U, welche den Einheitskreis der η-Ebene in sich transformieren. Diese Substitutionen sind:

$$(9) \qquad U(\eta) = \frac{A\eta + D\sqrt{PQ}}{D\sqrt{PQ}\,\eta + A},$$

gebildet für alle innerhalb K_n ganzzahligen Lösungen der Pell'schen Gleichung:

$$(10) \qquad A^2 - PQD^2 = 1.$$

Alle Lösungen müssen wieder aus der kleinsten positiven (A_0, D_0) auf Grund der Formel ableitbar sein:

$$(11) \qquad A + D\sqrt{PQ} = (A_0 + D_0\sqrt{PQ})^\nu, \quad \nu = 0, \pm 1, \ldots$$

Die Forderungen (8) und (11) sind im niedersten Falle $n = 1$ bekanntlich stets erfüllt. Für $n > 1$ müssen wir zur näheren Untersuchung auf den bekannten Dirichlet'schen Satz über die Anzahl unabhängiger Einheiten in einem endlichen Zahlkörper zurückgehen. Sind unter allen n mit K_n conjugierten Körpern im ganzen r reelle, so giebt es in K_n nur

$$\nu = \tfrac{1}{2}(n + r) - 1$$

unabhängige Einheiten. Sind $E_1, E_2, \ldots, E_\nu$ beliebige ν unabhängige Einheiten, so ist jede neue Einheit E des reellen Körpers K_n nur auf eine Weise in der Gestalt:

$$E = \pm E_1^{\frac{a_1}{d}} E_2^{\frac{a_2}{d}} \ldots E_\nu^{\frac{a_\nu}{d}}$$

darstellbar, wobei $a_1, a_2 \ldots a_\nu, d$ lauter rationale ganze Zahlen sind, deren letzte durch die Auswahl der „Basis" $[E_1, E_2, \ldots, E_\nu$ festbestimmt ist.

Durch Zusatz von $\sqrt{P}$ wird K_n zu einem reellen Zahlkörper K_{2n} erweitert, und unter den gesamten $2n$ mit K_{2n} conjugierten

Körpern werden $2s$ reelle sich finden, falls unter den in den reellen Körpern K_ν, K_ν', ... befindlichen conjugierten Zahlen $P, P', \ldots$ im ganzen s positive sich finden. Die beiden Zahlen r und s werden die Bedingungen befriedigen:

$$0 < s \leqq r, \quad 0 < r \leqq n. \tag{12}$$

Schreiben wir:

$$\sigma = \frac{n + 2s - r}{2},$$

so zählt man nach dem Dirichlet'schen Satze leicht ab, daß es im reellen Körper K_{2n} im ganzen $(\nu + \sigma)$ unabhängige Einheiten giebt. Man wähle daraufhin zu einer Basis aus:

$$[E_1, E_2, \ldots, E_\nu, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\sigma], \tag{13}$$

wo $E_1, \ldots E_\nu$ die bisher gebrauchten Einheiten sind, während $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_\sigma$ gewisse σ Einheiten der Gestalt $A + B\sqrt{P}$ sind, wo jedesmal A sowohl wie B von Null verschieden sind.

Ist ε_ν' die aus ε_ν durch Zeichenwechsel der Wurzel $\sqrt{P}$ entspringenden Einheit, so ist $\varepsilon_\nu \cdot \varepsilon_\nu'$ eine Einheit des Körpers K_ν, die e_ν heiße. Man setze alsdann:

$$\varepsilon_\nu^2 e_\nu^{-1} = H_\nu$$

und wird an Stelle von (13) offenbar auch:

$$[E_1, E_2, \ldots, E_\nu, H_1, \ldots, H_\sigma] \tag{14}$$

als Basis für die gesamten Einheiten von K_{2n} gebrauchen können. Der Vorteil aber ist, daß jetzt direct:

$$H_1 \cdot H_1' = 1, \ldots, H_\sigma \cdot H_\sigma' = 1 \tag{15}$$

ist, wenn wir wieder durch H_ν' die durch Zeichenwechsel von $\sqrt{P}$ aus H_ν entstehende Einheit bezeichnen sollen.

Es sei jetzt $H = A + B\sqrt{P}$ irgend eine ganze Zahl von K_{2n}, die mit $H' = A - B\sqrt{P}$ multipliciert die rationale Einheit 1 ergiebt. Dann hat man jedenfalls die Darstellung:

$$H = \pm E_1^{\frac{a_1}{c}} \cdots E_\nu^{\frac{a_\nu}{c}} \cdot H_1^{\frac{b_1}{c}} \cdots H_\sigma^{\frac{b_\sigma}{c}}, \tag{16}$$

wo $a_1, \ldots, a_\nu, b_1, \ldots, b_\sigma, c$ lauter rationale ganze Zahlen sind, deren letzte mit der Auswahl der Basis (14) fest bestimmt ist. Indem man die Gleichung (16) mit derjenigen Gleichung multipliciert, die aus ihr durch Zeichenwechsel von $\sqrt{P}$ entsteht, wird evident, daß $a_1 = a_2 = \ldots = a_\nu = 0$ sein muß; die Zahl H

ist demnach bereits in der Gestalt:

$$H = \pm H_1^{c^{b_1}} \cdot H_2^{c^{b_2}} \cdots H_\sigma^{c^{b_\sigma}}$$

darstellbar, und zwar nur auf eine einzige Weise.

Die Zahlen H liefern nun gerade die gesamten Lösungen $A + B\sqrt{P}$ der Pell'schen Gleichung (7); indem man also das eben gewonnene Ergebnis mit der Forderung (8) vergleicht, ergiebt sich als notwendige Bedingung für eine eigentlich discontinuirliche Gruppe $\overline{\Gamma}$ an erster Stelle:

$$\sigma = 1, \quad n + 2s = r + 2.$$

Mit Rücksicht auf die Bedingungen (12) ergiebt sich hieraus $r = n$, $s = 1$, d. h. alle mit K_n conjugierten Körper müssen reell sein, und unter den mit P conjugierten Zahlen darf nur P positiv sein.

An die Erweiterung des Körpers K_n durch $\sqrt{PQ}$ knüpfen sich ähnliche Betrachtungen. Ohne dieselben noch besonders auszuführen, haben wir als notwendige Bedingungen für die eigentliche Discontinuität der eingangs definierten Gruppen:

I. Die mit K_n conjugierten Zahlkörper müssen durchgehends reell sein,

II. Die mit P conjugierten Zahlen müssen mit Ausnahme von P sämtlich negativ sein,

III. Alle mit Q conjugierten Zahlen müssen positiv sein.

In jedem der Bedingung I genügenden Körper kann man Zahlen P, Q in Uebereinstimmung mit den Forderungen II und III stets in der mannigfaltigsten Weise auswählen. Für $n = 1$ sind die aufgestellten Forderungen stets befriedigt.

Endlich läßt sich der Beweis führen, daß die drei soeben formulierten Bedingungen für die eigentliche Discontinuität der Gruppe Γ auch hinreichend sind. Man wolle zu diesem Ende erstlich untersuchen, welche elliptischen Substitutionen in der Gruppe Γ_1 vorkommen können. Hierbei verstehe man unter A, A', ..., $A^{(n-1)}$ die n mit der ganzen Zahl A conjugierten Zahlen und bilde von der Gleichung (1) aus die $(n-1)$ conjugierten Gleichungen:

$$A'^2 - P'B'^2 + Q'C'^2 - P'Q'D'^2 = 1,$$

. . . . . .

Aus den Bedingungen II und III folgt, daß alle $(n-1)$ Zahlen $A', \ldots, A^{(n-1)}$ dem absoluten Werte nach kleiner als 1 sind (sofern nicht die gerade betrachtete Substitution U die Identität ist). Soll aber U eine elliptische Substitution sein, so muß die Zahl A selbst zwischen -1 und $+1$ liegen, und somit wird ein Gleiches von der Norm der ganzen Zahl A:

$$N(A) = A \cdot A' \ldots A^{(n-1)}$$

gelten. Da letztere aber eine rationale ganze Zahl ist, so bleibt nur übrig $N(A) = 0$, und also ist $A = 0$, so daß U die Periode zwei hat.

Da jede Substitution V, mit sich selbst combiniert, eine Substitution U liefert, so kann es unter den V elliptische Substitutionen nur für die Perioden zwei und vier geben. Letztere Periode würde aber $2C\sqrt{Q} = \sqrt{2}$ erfordern, und also wäre in diesem Falle $C\sqrt{Q}$ keine ganze algebraische Zahl: An elliptischen Substitutionen weist die Gruppe Γ nur solche von der Periode zwei auf.

Man wolle auf der anderen Seite die gesamten zu den Spiegelungen $\overline{U}$, $\overline{V}$ gehörenden Symmetriekreise ziehen:

$$\begin{aligned}(-C\sqrt{Q}+D\sqrt{PQ})(x^2+y^2)-2Ax+(C\sqrt{Q}+D\sqrt{PQ}) &= 0,\\ (-A+B\sqrt{P})(x^2+y^2)-2C\sqrt{Q}x+(A+B\sqrt{P}) &= 0.\end{aligned} \tag{17}$$

Wenn sich irgendwo in der positiven η-Halbebene zwei unter diesen Kreisen überkreuzen, so wird dies unter rechtem Winkel geschehen, da nur elliptische Substitutionen der Periode zwei in Γ vorkommen.

Unter den in Rede stehenden Kreisen finden sich vor allen Dingen die imaginäre η-Axe und der Einheitskreis der η-Halbebene. Von hieraus kann man aber gleich beliebig viele weitere Symmetriekreise von $\overline{\Gamma}$ nachweisen. Zufolge der an die Theorie der Einheiten geknüpften Betrachtungen treten nämlich hyperbolische Substitutionen (6) und (9) in Γ, auch thatsächlich auf. Die Substitutionen (6) werden alsdann aus dem Einheitskreise ein ganzes System concentrischer Symmetriekreise herstellen, welche die beiden Punkte $\eta = 0, \infty$ zu Grenzpunkten haben. Die Substitutionen (9) führen die imaginäre Axe in ∞ viele neue Kreise über, welche sich gegen $\eta = +1$ und $\eta = -1$ hin häufen.

Die successiven Kreise dieser beiden Systeme lassen jeweils endliche Intervalle zwischen einander. Denn z. B. darf schon der nächste mit dem Einheitskreise concentrische Symmetriekreis kei-

nen einzigen Kreis des anderen eben genannten Systems mehr treffen; er würde ihn ja nur unter spitzem Winkel schneiden können.

Der Abschluß unseres Beweises kommt nun auf eine Kette geometrischer Evidenzen zurück. Durch jeden mit $\eta = i$ bezüglich $\overline{\Gamma}$ aequivalenten Punkt ziehen zwei gegen einander und gegen die reelle η-Axe orthogonale Symmetriekreise von $\overline{\Gamma}$. Der nächste mit $\eta = i$ aequivalente Punkt des Einheitskreises oder der imaginären Axe ist, wie wir gerade sahen, von $\eta = i$ durch einen endlichen Zwischenraum getrennt. Demnächst ziehe man einen Hülfskreis mit dem Radius $\frac{1}{2}$ um $\eta = -\frac{1}{2}$, der also mit Einheitskreis und imaginärer Axe ein Kreisbogendreieck δ der Winkel $\frac{\pi}{2}, 0, 0$ einschließt. Im „Innern" von δ kann überhaupt kein mit $\eta = i$ aequivalenter Punkt liegen. Denn ein Kreis durch einen Punkt η_0 im Innern von δ, der orthogonal zur reellen η-Axe verläuft, muß entweder den Einheitskreis oder die imaginäre Axe kreuzen. Aber unter allen solchen Kreisen durch den gedachten Punkt des Dreiecks δ verläuft nur einer, k, orthogonal zur imaginären Axe, und auch nur einer, k', orthogonal zum Einheitskreise. Die Kreise k und k' aber müssen einander notwendig unter spitzem Winkel schneiden. Auch in den drei übrigen Dreiecken, welche aus δ durch Spiegelung an den beiden oft genannten Symmetrielinien durch $\eta = i$ entspringen, können offenbar mit $\eta = i$ aequivalente Punkte nicht vorkommen.

Von hieraus bringt man nun sofort zur Evidenz, daß die drei Bedingungen I bis III auch hinreichend für die eigentliche Discontinuität unserer Gruppen $\overline{\Gamma}, \Gamma, \ldots$ sind. Einen Augenblick verweile man noch bei den Symmetriekreisen (17) unserer Gruppe $\overline{\Gamma}$. Dieselben werden eine reguläre Einteilung der η-Halbebene in rechtwinklige Kreisbogenpolygone bewirken. Das einzelne Polygon der Halbebenenteilung, welches, für sich genommen, einen einfach zusammenhängenden Bereich vorstellt, wird durch die Substitutionen einer Untergruppe G_μ von Γ in sich selbst transformiert; durch Abgrenzung eines Fundamentalsbereichs der G_μ innerhalb jenes Polygons entspringt alsdann ein Fundamentalbereich für $\overline{\Gamma}$. Die Ordnung μ der G_μ ist entweder endlich oder unendlich groß, und für beide Fälle ließen sich leicht Beispiele beibringen.

Kiel, den 16. Juli 1892.

Ueber Lösungen von Natrium-Silikaten; insbesondere auch über einen Einfluß der Zeit auf deren Constitution.

Von

F. Kohlrausch, auswärtigem Mitgliede.

Alkali, Kieselsäure und Wasser zusammen bilden ein Gebiet von ungewöhnlich großer Mannichfaltigkeit, auf welchem noch vieles aufzuklären ist. Ich gebe einige aus dem elektrischen Leitungsvermögen gewonnene Beiträge.

Eingehend untersucht habe ich das einfach gesättigte Salz Na_2SiO_3 oder Na_2O, SiO_2 und eine stark mit Kieselsäure übersättigte Verbindung $Na_2O, 3{,}4\,SiO_2$; außerdem einige Mischungen beider mit einander und mit Aetznatron.

Die Lösungen des Polysilikates haben merkwürdige Eigenschaften chemischer Nachwirkung: erstens, wenn man eine concentrirte Lösung verdünnt, so vergeht eine lange Zeit, bis die verdünnte Lösung ein chemisches Gleichgewicht gewonnen hat; man kennt meines Wissens solche Fälle noch nicht. Zweitens, setzt man zu der verdünnten Lösung des Polysilikats Natronlauge, so verstreicht auch hier eine, je nach der seit dem Verdünnen verflossenen Zeit verschieden große Frist, bis die Stoffe in's Gleichgewicht kommen. Man hat mehrere ähnliche Erscheinungen in der organischen Chemie verfolgt, einige wenige in der unorganischen, aber diese beziehen sich auf zusammengesetztere Vorgänge.

An dem einfach gesättigten Salz ist von Interesse, daß dasselbe in verdünnter Lösung besser leitet, als alle anderen untersuchten Salze in äquivalenter Concentration, während es in concentrirter Lösung zu den schlechtest leitenden Salzen gehört.

Das übersättigte Salz leitet ebenfalls, aber nur in alleräußerst verdünnter Lösung, relativ gut; es sinkt mit wachsender Concentration sehr rasch zu kleinen Werten. Auffällig ist der große Einfluß der Temperatur auf das Leitvermögen verdünnter Lösungen, der alle anderen mir bekannten übertrifft.

Für Mischungen von verschiedenem Gehalt an Natron und Kieselsäure fand ich einen Gang, der zu der Annahme führen kann, daß die stärkst übersättigte Verbindung, welche als solche in Lösung existirt, ungefähr mit der Formel $Na_2O, 2\,SiO_2$ zusammenfällt.

Die bekannte, noch nicht ganz aufgeklärte Depresssion des Leitvermögens nicht neutral reagirender Lösungen in sehr starker Verdünnung zeigt das einfach gesättigte kieselsaure Natron ebenfalls. Das übersättigte dagegen, obwohl es wie das erstere alkalisch reagirt und das Alkali mit Lakmus und dergleichen zu titriren gestattet, zeigte bis zu den weitesten Verdünnungen (0,0001 gr-Aequ./Liter) die Depression nicht.

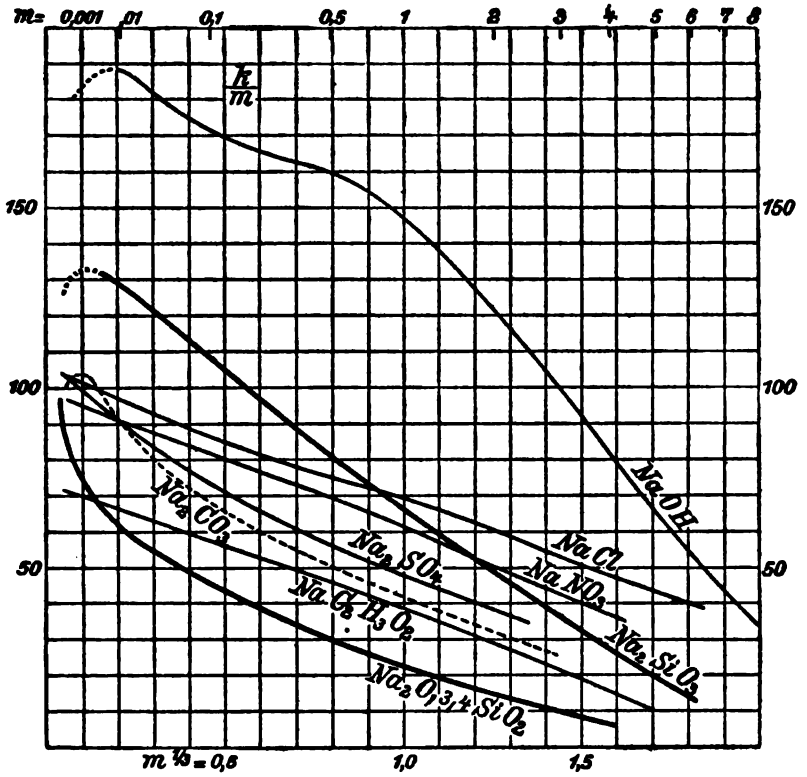
---

1. Ich gebe in gewöhnlicher Weise die zu den verschiedenen Concentrationen m beobachteten (teilweise graphisch interpolirten) Leitvermögen k für 18°; Hg 0° als Einheit. m bedeutet den Gehalt eines Liters der Lösung an Grammäquivalenten Na. Weiter folgen die molekularen Leitvermögen k/m. Dann Temperaturcoefficienten Δk für 1° in Teilen von k_{18}, gemessen zwischen 18 u. 26°.

m	Na_2O, SiO_2			$Na_2O, 3,4\,SiO_2$		
	$10^8 k$	$10^7 \frac{k}{m}$	Δk	$10^8 k$	$10^7 \frac{k}{m}$	Δk
0,0001	0,125	125	0,0272	0,097	97	0,0298
0,001	1,34	134	0,0232	0,74	74	0,0298
0,01	12,8	128	0,0214	6,01	60	0,0258
0,1	108	108	0,0220	46,5	46	0,0260
0,5	407	81	0,0236	153	31	0,0278
1	660	66	0,0244	230	23	0,0293
2	960	48	0,0263	298	15	0,0324
3	1050	35	0,0288	295	10	0,0358
4	1010	25	0,0335	250	6	0,042
6	730	12				

Das Leitvermögen k jedes der beiden Körper hat ein Maximum, nämlich bei dem neutralen Salz $1055 . 10^{-8}$ für $m = 3{,}2$, bei dem Polysilikat $300 . 10^{-8}$ für $m = 2{,}5$.

Uebersichtlicher werden die Verhältnisse in dem molekularen Leitvermögen k/m gegeben. Die Figur stellt das letztere dar, wie früher mit der mittleren Nähe der Moleküle $m^{1/3}$ als Abscisse (Nachr. 1885, p. 76). Zum Vergleich sind einige andere Natriumsalze mitgezeichnet (vgl. ebenda).



In dieser Darstellung erscheint das molekulare Leitvermögen von Na_2O, SiO_2 (bis auf die anfängliche Depression) als eine fast geradlinige Curve, ähnlich, wie für Na Cl und $NaC_2H_3O_2$ und viele andere Elektrolyte früher von mir gezeigt wurde. Im Gegensatz dazu gibt das übersättigte Salz $Na_2O, 3{,}4\,SiO_2$ die stärkst gekrümmte Curve, welche für Salze bekannt ist. Die anfängliche Steilheit und die daran sich anschließende Krümmung übertrifft diejenige für $MgSO_4$ und ähnliche Körper erheblich.

Man wird diese Verhältnisse folgendermaßen zu deuten versucht sein. Von dem neutralen Salz würde man nach Analogie als Jonen wohl Na_2 und SiO_3 anzusehen haben. Für letzteres eine besonders große Beweglichkeit anzunehmen liegt kein Wahrscheinlichkeitsgrund vor. Wenn nun trotzdem bis gegen $m = 1$ verdünnte Lösungen besser leiten als alle übrigen Natriumsalze, so kann man vermuten, dass hier Na_2SiO_3 wie ein Gemisch von NaOH und Polysilikaten wirkt. Aehnliche Vorstellungen für andere Salze mehrbasischer Säuren im Auge zu behalten habe ich schon früher empfohlen.

In concentrirterer Lösung leitet das Silikat schlecht. In noch höherem Grade gilt letzteres für das Polysilikat: der Ueberschuß von Kieselsäure hindert, teilweise wohl im Zusammenhang mit der ungeheuren mechanischen Zähigkeit der Lösung, die Leitung.

Daß sehr verdünnte Lösungen des Polysilikates wiederum verhältnismäßig gut leiten, kann darauf zurückkommen, daß die gelöste Kieselsäure, die als eine schwache, nach Arrhenius' Theorie wenig dissociirte Säure in stärkerer Lösung wenig leitet, in großer Verdünnung ein relativ gutes Leitvermögen bekommt, ähnlich wie dies von mir an der Essigsäure und von Ostwald an einer großen Anzahl schwacher Säuren gezeigt worden ist.

Es mag einstweilen schwierig sein, diese Verhältnisse zu zergliedern, später wird man die Silikate aber vielleicht als besonders lehrreiche Beispiele auf diesem verwickelten Gebiete gebrauchen können.

Temperatur-Einfluß. Derselbe ließ sich in den geschlossenen Gefäßen mit Thermometer auch für die verdünntesten Lösungen leicht bestimmen, für welche offene Gefäße, wenn die Lösungen alkalisch reagiren, versagen. Der Temperaturcoefficient Δk sinkt von den stärksten Verdünnungen zunächst zu einem Minimum ab, um dann wieder zu steigen, so wie ich dies an vielen anderen Körpern gefunden hatte. Das Polysilikat hat anfangs ungewöhnlich große Werte.

Ich bemerke noch, daß für alle Lösungen das Leitvermögen mit der Temperatur beschleunigt wächst, bei dem übersättigten Salz sowohl in verdünnter wie in concentrirter Lösung erheblich beschleunigt.

2. Mischungen von Natron und Kieselsäure in verschiedenem Verhältnis. Lösungen wurden so mit einander gemischt, daß der Natriumgehalt 0,01 gr-Aequ./Liter betrug. Man fand für den gleichzeitigen Gehalt m' an Aequivalenten $\frac{1}{2}(SiO_2)$ das Leitvermögen k und den Temperaturcoefficienten Δk

für $m' =$	0	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,034
$10^9 k =$	190	155	122	92	69	64	63	61
$\Delta k =$	0,0197	203	218	240	272	266	266	260.

Hier sinkt also das Leitvermögen, wenn man zu Natronlösung allmählich Kieselsäure setzt, zuerst stark bis zu etwa $^5/_8$ des Anfangswertes bei $2SiO_2$ auf $1Na_2O$, von da ändert es sich nur wenig. Der Temperatur-Einfluß steigt bis zu etwa $2SiO_2$ und nimmt von da an ein wenig ab. In beiden Beziehungen erfolgt

der Durchgang durch den einfach gesättigten Zustand gleichmäßig ohne jede Andeutung einer Discontinuität.

Bezüglich der Streitfrage, welche größte Menge von Kieselsäure in Lösung „mit Natron verbunden existirt", würde man nach Obigem die Verbindung Na_2O, $2SiO_2$ als obere Grenze vermuten. Denn die über 0,02 hinaus gelöste Kieselsäure verhält sich ziemlich wirkungslos.

3. Nachwirkungen bei der Mischung von Alkali und Kieselsäure in Lösung. Bei der Vereinigung einer Lösung von Aetznatron oder Natriumsilikat mit einer solchen von einem Polysilikat, welches mehr als 2 Aequivalente Kieselsäure enthält, stellt sich im Allgemeinen nicht sofort ein Gleichgewichtszustand in der neuen Lösung her. Das anfängliche Leitvermögen ist größer als der Endwert, welchen die Lösung nach mehr oder weniger langer Zeit erreicht [1]).

Die folgenden Beispiele solcher Nachwirkungen beziehen sich auf eine Lösung $0{,}068\,(Na_2O,\ 1{,}9\,SiO_2)$ $\frac{1}{2}$ gr-Aequ./Liter, welche durch Zusammengießen von NaOH mit Na_2O, $3{,}4\,SiO_2$ hergestellt wurde. Die Temperatur war 17 bis 18°. Möglichst bald nach gründlichem Durchschütteln der Mischung wurde das Leitvermögen k gemessen.

Dann fand man, daß k von einem großen Anfangswert allmählich abnahm, um sich in allen Fällen nahe demselben Endwert $k.10^9 = 415$ anzunähern. Auf den Anfangswert und die Geschwindigkeit des Verlaufs war nun der der Mischung vorausgehende Zustand des zum Aetznatron gebrachten Polysilikats von großem Einfluß.

Wenn man nämlich in die vorher gebildete verdünnte Lösung von 0,03 NaOH das Polysilikat in Gestalt einer concentrirten Lösung von $3{,}7\,(Na_2O,\ 3{,}4\,SiO_2)$ $\frac{1}{2}$ brachte, oder auch wenn der letztere Körper kurz zuvor auf 0,04 verdünnt und nun plötzlich mit der (Normal-)Natronlösung versehen wurde, so sank der anfängliche Ueberschuß des Leitvermögens über den Endwert rasch ab und war nach 5 min schon fast unmerklich geworden.

Hatte die obige verdünnte Lösung des Polysilikates vor der Zufügung des Aetznatrons längere Zeit gestanden, so dauerte die Nachwirkung länger und es währte unter Umständen über drei Stunden, bis der Endwert erreicht wurde.

1) Ich habe nach ähnlichen Erscheinungen bei anderen Körpern öfter vergeblich gesucht, z. B. bei Alkalien einschl. Ammoniak mit starken Säuren, aber auch mit Essigsäure oder Borsäure. Kaliwasserglas mit Kalilauge zeigt Nachwirkung.

Man könnte argwöhnen, daß bei den Nachwirkungen Kohlensäure mitwirke. Ich will daher bemerken, erstens daß zur Verdünnung kohlensäurefreies Wasser genommen wurde, zweitens daß die Lösungen immer mit Ausnahme der zum Mischen nötigen kurzen Zeit unter dichtem Verschluß gegen die Luft standen.

Die Tabelle gibt den zur Zeit t seit der Mischung beobachteten mit 10^9 multiplicirten Ueberschuß $\varkappa$ des Leitvermögens über den Endwert. Die Ueberschriften geben das Alter der verdünnten Lösung von Na_2, $3{,}4\,SiO_2$. Die erste Reihe ohne Ueberschrift bezieht sich auf den Fall, daß letzterer Körper concentrirt zu der vorher verdünnten Natronlösung gebracht wurde.

t		1 min	27 min	60 min	280 min	500 min	1100 min
min	$\varkappa$	$\varkappa$	$\varkappa$	$\varkappa$	$\varkappa$	$\varkappa$	$\varkappa$
0,5	89	46	50	52	82	102	131
1	48	24	32	37	67	91	121
1,5	22	13	21	27	59	84	114
2	11	7,2	16	22	55	80	110
3	2,7	2,4	9,6	16	48	76	106
4	1,2	1,1	6,2	13	46	73	103
7			3,0	8,3	40	67	97
10			1,3	5,5	34	61	92
20				1,8	21	44	75
30				0,8	12	30	59
50					4,0	12	32
100						1,4	6,2
150							2,0

Versucht man die allmähliche Zersetzung des Polysilikates durch das Alkali, welche sich in den Aenderungen des Leitvermögens ausdrückt, in einer Formel darzustellen, so fügen sich die beiden ersten Reihen der einfachen Exponentialform mit einer den Verhältnissen genügenden Genauigkeit. Die erste Reihe nach dem Einbringen der concentrirten Polysilikat-Lösung wird dargestellt durch

$$\varkappa = 175 . e^{-1{,}33 \cdot t} \text{ oder } -\frac{d\varkappa}{dt} = 1{,}33 . \varkappa;$$

die zweite, welche nach dem Hinzufügen von Aetznatron zu der vor 1 min verdünnten Polysilikat-Lösung entstand, durch

$$\varkappa = 81 . e^{-1{,}20 \cdot t} \text{ oder } -\frac{d\varkappa}{dt} = 1{,}20 . \varkappa.$$

Dies stimmt also mit der Annahme, daß der jeweilige Abstand des Zustandes der Lösung von dem Endzustand mit einer

Geschwindigkeit verschwindet, welche in jedem Augenblick diesem Abstande selbst proportional ist, und daß die Aenderung des Zustandes durch die Aenderung des Leitvermögens gemessen wird.

Je älter nun aber die verdünnte Lösung des Polysilikats wird, desto weniger genügt die Exponentialfunktion. Das Leitvermögen ändert sich in späteren Zeiten relativ zu langsam. Ja, die Curven für das Alter von 280 bis 1100 min zeigen in steigendem Maße eine ganz geänderte Form. Zuerst fallen sie steil und stark gekrümmt ab, daran schließt sich ein schwächer gekrümmter, bei 1100 min fast geradliniger Teil an und erst gegen den Schluß wieder eine Curve mit asymptotischen Abfall gegen den Endzustand.

Schlüsse werden hieraus vorläufig schwer gezogen werden können. Vielleicht hat man hier mehrere gleichzeitig verlaufende Vorgänge, die einerseits mit dem Alkali, andrerseits mit dem Wasser zusammenhängen mögen. Man muß aber auch beachten, daß das Leitvermögen nach § 2 nicht immer einen eindeutigen Aufschluß über Alkali und Kieselsäure in Lösung zu geben braucht: die Zufuhr von SiO_2 über einen gewissen Gehalt hinaus änderte das Leitvermögen dort kaum noch.

Die allmähliche Zersetzung des Polysilikates durch Alkali reiht sich an die schon früher studierten[1]), teilweise verwandten, langsam verlaufenden Vorgänge, wie die Reduction übermangansaurer Salze oder die Oxydation von Eisenoxydulsalzen, die Katalyse von Estern, die Zersetzung von Acetamid durch Säuren, die Verseifung, die Inversion des Rohrzuckers in Lösungen.

Zweitens aber ergiebt sich aus den Beobachtungen noch eine andere Nachwirkung, welche in der Literatur meines Wissens einen nahe verwandten Vorgang nicht findet. Es zeigt sich aus der Tabelle zweifellos, daß die Verdünnung der Lösung des Polysilikates auf dessen Constitution eine Wirkung hat, welche Zeit beansprucht, daß der Gleichgewichtszustand der Teile in der verdünnten Lösung sich erst nach langer Frist herstellt. Je länger die Lösung bestanden hat, desto hartnäckiger widersetzt sie sich nach einem Zusatz von Aetznatron dem zwischen Natrium und Kieselsäure herzustellenden Gleichgewichtszustand. Also hatte die Lösung selbst je nach ihrem Alter einen verschiedenen Zustand, und zwar zeigen 500 und 1100 min noch einen erheblichen Unterschied.

1) Von Berthelot, Harcourt und Esson, van'tHoff, Hood, Ostwald, Warder, Wilhelmy; vgl. Ostwald, Allg. Chemie.

Leider ist die so constatirte Veränderlichkeit der verdünnten Polysilikat-Lösung mit der Zeit nicht oder doch nur sehr unvollkommen durch deren Leitvermögen selbst nachzuweisen. In den ersten 5 Minuten nach der Verdünnung nahm das Leitvermögen allerdings deutlich zu, aber doch nur um etwa 1%; von da an zeigte sich keine Aenderung weiter.

Ein Widerspruch liegt hierin jedoch nicht, denn stark mit Kieselsäure übersättigte Lösungen ändern auch bei weiterem Zusatz von SiO_2 ihr Leitvermögen kaum noch. In derjenigen Gegend der Mischungsverhältnisse, in welcher diese Beschränkung wegfällt, kann man andrerseits die Probe nicht machen, weil die Grenze (2 Aequ. SiO_2), unterhalb deren die Kieselsäure das Leitvermögen ändert, nahe mit derjenigen zusammenfällt, unter welcher die Nachwirkungen ausbleiben. Fügte man z. B. der Lösung von 1,9 Aequ. SiO_2, auf welche sich die Tabelle bezieht, nach Herstellung des Gleichgewichtszustandes weiteres Natron hinzu, so stellte sich sofort ein neues, constantes Leitvermögen her.

Straßburg, Juli 1892.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Februar 1892.

(Fortsetzung.)

Biblijoteca Pisarzów Polskich:

9) Z. Celichowski: Jana Seklucyana Oeconomia albo Gospodarstwo 1546. Kraków 1890.
10) Z. Celichowski: Krzysztofa Pussmana Historya barzo cudna o stworzeniu nieba i ziemi 1551. Ebd. 1890.
11) J. Korzeniowski: Rozmowa Polaka z Litwinem 1564. Ebd. 1890.
12) Z. Celichowski: Jana Mrowińskiego Płoczywłosa Stadło małżeńskie 1561. Ebd. 1890.
13) Z. Celichowski: Historia prawdziwa, która się stała w Landzie mieście niemieckiem 1568. Ebend. 1891.

(Fortsetzung folgt.)

Inhalt von Nr. 13.

Robert Fricke, Ueber ein allgemeines arithmetisch-gruppentheoretisches Princip in der Theorie der automorphen Functionen. — *F. Kohlrausch*, Ueber Lösungen von Natrium-Silikaten; insbesondere auch über einen Einfluss der Zeit auf deren Constitution. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung.*
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

23. November **№ 14.** 1892.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 5. November 1892.

Meyer, „Die Göttinger Handschrift von Thomas Basin's Geschichte Karls VII und Ludwigs XI."

Wieseler, „Ueber die aus dem Bereiche der Vögel hergenommenen Attribute des Dionysos und seiner Thiasoten."

Peter berichtet kurz über eine Studienreise.

Merkel legt einen Aufsatz von Herrn Dr. Kallius vor: „Ueber Neurogliazellen in peripherischen Nerven."

Voigt legt vor: a. einen Aufsatz »über Bewegung eines Flüssigkeitsstromes über einem gewellten Grunde."

b. Einige Anwendungen des thermo-dynamischen Potentiales.

c. A. Sella und Voigt „Beobachtungen über die Zerreißungsfestigkeit des Steinsalzes."

Die Göttinger Handschrift von Thomas Basin's Geschichte Karl's VII. und Ludwig's XI.

Von

Wilhelm Meyer (aus Speyer).

I.

Zu den wichtigeren Geschichtswerken des 15. Jahrhunderts gehört die Geschichte der beiden französischen Könige Karl des VII. (1422—1461) und Ludwig des XI. (1461—1483) und ihrer

Zeit, die Libri hystoriarum rerum gestarum temporibus Karoli septimi et Ludovici eius filii regum Francorum, welche Thomas Basin verfaßt hat. Thomas Basin, der 1412 in der Normandie geboren in Loewen studirte und 1447 Bischof von Lisieux wurde, war außer in der Theologie besonders im Rechte gebildet, wie das mehrere kleine Schriften von ihm bezeugen. Geschichte schrieb er nicht wie jene Chronisten, welche alle möglichen Fabeln über die Urgeschichte zusammen stellen oder alte Geschichtswerke ausschreiben; Basin schildert nur, was er selbst miterlebt hat: ja vielleicht hat diese ganze schriftstellerische Thätigkeit eine persönliche Ursache. König Karl VII. hatte ihn geehrt, Ludwig XI. aber 1468 aus Frankreich gejagt und schwer verfolgt, ja noch in der Verbannung ihn dazu gezwungen, daß er 1474 dem Bisthum Lisieux entsagte und sich den Titel eines Bischofs von Caesarea in Palästina geben ließ. In der Verbannung um das Jahr 1473 begann Basin sein Geschichtswerk, in welchem er die Regierung Karl des VII. der Regierung Ludwig's XI. gegenüber stellte und welches er nach dem 1483 erfolgten Tode Ludwigs mit einer langen und ausführlichen Vergleichung beider Könige abschloß. Dieses Werk ist voll der heftigsten Anklagen gegen Ludwig und nahe liegt der Gedanke, daß die Schilderung Ludwigs die Hauptsache ist und daß Basin, den Verfolgungen Ludwigs gegenüber, zeigen wollte, wie er von ihm denke. Dieser persönliche Zug ist offen ausgesprochen in der ausführlichen 1475 verfaßten Rechtfertigung (Apologia) und in dem kurzen 1488 verfaßten Breviloquium, einer Schilderung der Stationen seines Lebens- und Leidensweges.

Nach den ihm bekannten Mustern der Geschichtschreibung, z. B. Sallust, wollte auch er seinen Namen nicht nennen; deßhalb führt er sich im 17. Kapitel des 4. Buchs der Geschichte Karls mit den Worten ein 'Erat tum eiusdem civitatis et dioecesis pontifex, Thomas, ex dioecesi Rothomagensi oriundus, vir in divinis et humanis litteris non mediocriter institutus, sed, quod est praestantius, consilio prudentia et in deum ac proximum sincera caritate satis conspicuus atque unus inter ceteros Galliarum episcopos illius temporis multum famosus. Diese Anonymität schadete dem Werke selbst. Denn bis zu seinem 1491 in Utrecht erfolgten Tode kam Basin selbst nicht dazu, dasselbe durch den Druck oder durch viele Abschriften verbreiten zu lassen; nachher aber war die Veröffentlichung aus verschiedenen Gründen unerfreulich. In die wenigen erhaltenen Handschriften hatte sich der Name eines völlig unbekannten Amelgardus als der des Verfassers eingeschlichen, während doch viele Anzeichen auf Basin als Verfasser hinwiesen.

Zu dieser peinlichen Unsicherheit kam die gänzliche Zerrüttung des Textes in den vorliegenden Abschriften. Endlich war es in früheren Zeiten kaum eine lohnende Aufgabe, so heftige Angriffe gegen einen französischen König zu veröffentlichen. So wurden früher nur Auszüge aus den Pariser Handschriften gedruckt und andere aus einer in den Niederlanden vorhandenen Abschrift gemachte Auszüge über die Geschichte Utrechts (diese letzteren in Ant. Matthaeus, Veteris aevi Analecta II 1698 S. 145—208). Da entschloß sich endlich Jules Quicherat, den seine Studien über die Jungfrau von Orleans öfter zu Basin geführt hatten, die Herausgabe zu unternehmen. Sie erfolgte unter den Veröffentlichungen der Société de l'Histoire de France 1855—1859 (Histoire des règnes de Charles VII et de Louis XI par Thomas Basin évêque de Lisieux, jusqu'ici attribuée à Amelgard, rendue à son véritable auteur et publiée pour la première fois avec les autres ouvrages historiques du même écrivain . . par J. Quicherat, 4 Bände). Quicherat, der in der Erforschung der Quellen der französischen Geschichte Meister und so Vielen Führer war, gab treffliche Darlegungen über Basin's Leben und Schriften, theilte dessen Schriften nach den besten Textesquellen mit und fügte gründliche sachliche Erläuterungen bei. Quicherat's vortreffliche Leistung hat nur einen Mangel, das ist der lateinische Wortlaut des großen Geschichtswerkes selbst. In Paris fand Quicherat 3 Handschriften desselben; doch 2 derselben sind nur Abschriften der 3. (Latin. 5962). Daneben haben nur jene Auszüge aus der Niederländischen Handschrift einen selbständigen Werth. Allein sowohl diese Auszüge wie die erst 1540 gefertigte Pariser Handschrift sind durch zahlreiche Fehler jeder Art entstellt. Quicherat war sich dessen bewußt und hat im Ringen mit seinen schlechten Hilfsmitteln Vieles geleistet; doch die Handschriften waren zu sehr verderbt und der vorliegende Text ist an sehr vielen Stellen unverständlich oder häßlich.

Der hingebende Eifer Quicherat's hätte es verdient, daß ihm eine Handschrift zugekommen wäre, mit deren Hilfe er gewiß auch diesen Theil seines Werkes ebenso gut ausgeführt hätte wie die übrigen. Diese Handschrift wird unter den zu wenig bekannten Handschriftenschätzen der Göttinger Bibliothek aufbewahrt als Histor. 614. Sie wurde 1765 erkauft von der Wittwe des bekannten Historikers und Numismatikers J. D. Koehler. · Köhler hatte gewiß dieselbe herausgeben wollen; denn zugleich mit diesem Original wurde eine von Köhler gefertigte Abschrift des größeren Theiles gekauft. In dieser und in einigen an-

dern Handschriften, welche Köhler besessen hat, ist vorn das Bibliothekszeichen eingeklebt, welches Warnecke (Bücherzeichen Nr. 2226) beschreibt.. Darnach war diese Handschrift einst im Besitz von H(einrich) O(swald) F(reiherr) V(on) TS(chammer) V(nd) O(sten). Nach einer freundlichen Mittheilung des Kaiserlichen Kammerherrn Freiherrn von Tschammer hat Heinrich Oswald auf seinen Reisen 1719/20 in Paris die Bibliothek frequentirt und seine Rückreise durch die österreichischen Niederlande und über Holland genommen; die von ihm hinterlassene Bibliothek befindet sich jetzt auf Schloß Quaritz. Die Handschrift besteht aus 2 Theilen. Zuerst hat eine Hand die Geschichte Karl des VII. geschrieben (Bl. 1—70), dann eine andere Hand auf anderes Papier die Geschichte Ludwig des XI (Bl. 71—285). Die beiden Hände sind durchaus verschieden, allein eine jede hat in einem Zuge geschrieben und das sicher im Ende des 15. Jahrhunderts.

Aus der Göttinger Handschrift können äußerst viele Stellen des gedruckten Textes verbessert werden. Da eine viel ältere Handschrift einer jüngeren gegenüber steht, so war mir das begreiflich. Auffallender war, daß in der Göttinger Handschrift gegen Schluß des 7. Buches umfangreiche Stücke (im Ganzen 22 Seiten der Handschrift = 7 neuen Kapiteln) sich fanden, welche im Drucke fehlen; doch auch das ließ sich begreifen: der Schreiber der Pariser Handschrift mochte gegen Ende müde geworden sein und weggelassen haben, was ging. Dann hatten die beiden Schreiber an vielen Stellen Wörter ausgelassen oder Unsinn geschrieben, an andern Stellen hatten sie die Vorlage nicht lesen können und Lücken gelassen. Eine andere Hand hat dann den ganzen Band durchcorrigirt, die thörichten Verschreibungen gebessert, die übersehenen Wörter nachgetragen und die Lücken gefüllt. Auch das ist eine in Handschriften häufige Erscheinung.

Dazwischen aber treten seltsame Fälle hervor. Unter den Eintragungen dieser bessernden Hand stehen viele Stücke, wie Uti fama erat, Ut vulgo ferebatur, Uti fama publica atque vulgatissima fuit, Ut iam supra dixisse meminimus, Ut iam saepe diximus; oder es sind zu vorhandenen Ausdrücken synonyme hinzugefügt: so Lud. II c. 26 (Bd. II S. 214^{c}) donariis a se atque muneribus corruptos ist nach muneribus zugesetzt 'et pollicitationibus variorum honorum', oder Lud. III c. 2 (Bd. II S. 225^{B}) ist nach cum . . sibi . . persuasissent zugesetzt: atque sperarent. Anderwärts sind ergänzende oder berichtigende Stücke von dieser zweiten Hand an den Rand geschrieben, wie Lud. V cap. 30 (Bd. III S. 118^{B}) Minorem tamen longe fuisse caesorum et captivorum nu-

merum alii affirmabant; dann Karl V cap. 14 (Bd. I S. 291B) die ganze Erzählung vom Kreuzzuge Pius des II 'Nec tamen . . remeavit'. Manche solche Zusätze verderben die Klarheit des Ausdrucks; wie wenn Karl IV cap. 22 (I S. 233B) in dem Satz 'Solum enim illud castrum infra terras ducis Anglici tunc tenebant' eingeschoben wird castrum 'cum castro Dompni-Frontis', oder wenn Lud. II cap. 21 (Bd. II S. 187B) eingeschoben ist: Cum . . ceteraque patriae oppida < denuo percussum foedus abrumpentes et rebellantes > dux . . perdomuisset.

All diese Stücke hatte natürlich nicht der Schreiber übersehen; sie sind vielmehr von dem ausgedacht, welcher sie in dieser Göttinger Handschrift zugesetzt hat. Das kann nur der Verfasser des ganzen Werks selbst gewesen sein.

Zum Beweise will ich eine Stelle ausführlicher besprechen. Der Schluß des ganzen Werks lautet nach der Göttinger Handschrift (G) Bl. 285 (Bd. III S. 198 der Ausgabe): Nec miretur lector, si tam prava iniqua et turpia de tanto rege retulerimus, cum non adulandi atque assentandi studio panagericosque texendi (texendi panegiricosque *hat* P, *die Pariser Handschrift*) levium (eum *hat die 1. Hand in* G, *was die 2. Hand besserte*) more Grecorum scribendi munus officiumque assumpserimus, sed veridici relatoris et historici veracis. Nam libentius deo (*in* G *corrigirt aus* dedeo) teste in describendo ipsius res virtuose gestas et laude dignas, si tales de (*in* G *corrigirt aus* deo) eo invenisse et conscribere veraciter potuissemus, ocium nostrum dedissemus. et quoniam (quando P) de hiis satis, hunc librum septimum et ultimum de rebus gestis per eum (ludovicum *hat die 2. Hand corrigirt, und so hat* P) claudamus et cum eo quo dignus est honore (eum *setzt die 2. Hand hinzu*) sepulcro inferamus (et [ipsum hominem], cum eo q. d. c. h. etiam sep. inf. *druckt Quicherat*). Das war ein ganz vernünftiger Abschluß dieses Geschichtswerkes.

Nun war aber im Februar und März 1484 ein großes Parlament in Tours versammelt, und heftige Anklagen gegen den verstorbenen Ludwig XI. wurden von dieser Reichsversammlung mündlich und schriftlich vor den Nachfolger Karl VIII. gebracht; diese Beschwerden wurden bald auch durch den Druck verbreitet. Dem Thomas Basin war eine solche Unterstützung seiner eigenen ungemessenen Angriffe gegen Ludwig XI. höchst willkommen und er verwerthet diese Thatsache in einem längeren Zusatze, den er vor dem letzten Satze seines Werkes 'et quoniam de his satis' einschob. Sachlich steht dieser Zusatz an einer nicht unpassenden Stelle; allein der früher einfache und glatte Abschluß des Werkes wird durch diesen unverhältnißmäßig großen Auswuchs unschön.

In der Pariser Handschrift steht dieser Zusatz (III S. 198—200 der Ausgabe) im Texte, in der Göttinger von Basin's Hand geschrieben am

Rande. Da Einzelheiten dieses Zusatzes für unsere Frage lehrreich sind, so sei er hier angefügt. Die vielerlei Aenderungen in der Göttinger Handschrift (G) sind ebenfalls alle von derselben Hand Basin's gemacht.
Quod si quis forsan tardior atque difficilior fuerit ad dandam (dandum P) fidem hiis que scripsimus (imus *ist in* G *weggeschnitten*), que utique credi vel non credi (ab *getilgt in* G) vera fuisse et esse sine salutis periculo possunt: Sciat post tyranni obitum ex ordinatione procerum regni, qui deffuncti filium unicum in regem et regni heredem acceptarunt — non quidem ob (ob *über der Zeile*) patris deffuncti contemplationem aut amorem (*in* G favorem *durchgestrichen, darüber* amorem) sed ad vitandum perniciosum atque periculosum (atque per. *fehlt in* P) scisma in regno, quod verisimiliter, si eo qui (unicus *getilgt in* G) deffuncto unicus filius erat reiecto (relicto P) alium sibi regem sublimare attemptassent, contigisset (*dieses Wort hat Basin bei dieser Niederschrift vergessen; in* P *steht es*) — fuisse celebratum et habitum magnum et solempnem conventum (fuit celebratus et habitus magnus et solemnis conventus P) trium statuum tocius regni et Delfinatus Parisius (dieses Wort steht über der Zeile; so entschuldigt sich leichter dieser Anfall von Zerstreutheit; denn allerdings mußte Basin durchaus wissen, daß die Versammlung in Tours stattgefunden hat). In quo concorditer per omnes huiuscemodi trium statuum solempnes legatos (*über das durchstrichene* deputatos *hat Basin* legatos *geschrieben*) qui de omnibus provinciis Galliarum illo convenerant sufficienter de hiis que illic agenda incumberent instructi concordi (concordia P) voto ac (et P) desiderio de variis gravaminibus et oppressionibus que sub deffuncto pertulerant (petierunt a dictis *folgt durchstrichen in* G) querelas gravissimas exponentes (exponēn G, exponendas P) petierunt (*d. h.* proceres regni?) cum maxima precum et supplicationum instantia, sibi ac miseris regni accolis provideri adversus iniquissimas adinventiones et tyrannicas oppressiones, quas ipse (deffunctus *ist in* G *am Rande zugesetzt, dann aber wieder getilgt*) in suum regnum invexerat, seseque et regnum restitui et reduci ad antiquas libertates et consuetudines, sub quibus tempore suorum progenitorum et potissime fe. recordationis Karoli VII^{mi} genitoris sui vivere consuerant (consueverant P). et erant huiuscemodi querelarum articuli ultra (ultra *steht in* G *über dem durchstrichenen* ferme) quinquaginta. Huiuscemodi enim conquestionum et precum proinde emissarum tot capitula atque articuli, esto gravaminibus que regnum pertulerat universis enarrandis (enarrand' *ist in* G *am Rande nachgetragen*; P *hat* enarrandum) longe minores atque insufficientes essent, satis tamen habunde astipulari possunt hiis que de ipsius fide iustitia et variis viciosis moribus (eiusdem *ist hier in* G *getilgt*) in superioribus descripsimus. Nam et huiuscemodi querelarum (*in* G *steht nur* huiusce. *statt des sonstigen* huiusce.^{di}; *in* P *fehlt* et *und steht* huiusce) articuli, editis de eis (de eis *steht in* G *über der Zeile, wobei* is *nicht ganz deutlich ist*; P

hat de eo *im Texte*) libellis et per totum regnum a librorum impressoribus exemplatis, ubique publicati disseminatique fuerunt cum (hiis *ist hier in* G *getilgt*) ceteris etiam que in dicto solempni conventu actitata (debi *ist hier in* G *getilgt*) deliberataque erant (*von* fuerant *ist in* G fu *getilgt*). Die hier vorkommenden Fehler und Aenderungen in der Göttinger Handschrift sind solche, wie sie auch uns beim ersten Niederschreiben derartiger Nachträge begegnen. In der Pariser Handschrift steht der ganze Zusatz im Texte, ebenso all das, was in der Göttinger zuletzt gebessert ist.

Das Ergebniß der bisherigen Untersuchungen ist also folgendes: nach Abschluß seines Werkes, also nach 1483, ließ Thomas Basin seinen Entwurf rein schreiben, von dem einen Schreiber den Entwurf der 5 Bücher über Karl VII, von dem andern den Entwurf der 7 Bücher über Ludwig XI. Diese Schreiber konnten viele Stellen in Basin's Concept nicht lesen; da schrieben sie entweder sinnlose Wörter hin oder sie ließen Lücken. Deßhalb nahm Basin die Reinschriften selbst vor, verbesserte die falschen Wörter und ergänzte die Lücken. Dabei machte er hie und da noch Zusätze, welche ihm gerade einfielen. Diese Reinschriften mit Basin's eigenhändigen Besserungen und Zusätzen wurden dann in 1 Band gebunden und dieser Band befindet sich jetzt in der Göttinger Bibliothek.

Basin hat es auch sonst so gemacht. Denn 4 seiner übrigen Schriften — und das die wichtigsten derselben — sind uns in der Pariser Handschrift 5970A erhalten, 'que Thomas Basin avait fait exécuter (lorsqu'il était à Utrecht) pour sa propre bibliothèque, et qu'il a corrigé de sa main' (Quicherat).

II.

Die Frage, wie verhält sich dieses Handexemplar von Basin's Chronik zu den andern Abschriften derselben, ist verknüpft mit der andern Frage, wann hat Basin die einzelnen Theile seiner Chronik verfaßt und wann hat er diese Reinschrift anfertigen lassen und selbst durchgesehen?

Quicherat hat (S. 99—103 seiner Einleitung) klar nachgewiesen, daß die einzelnen Theile der Chronik in verschiedenen Zeiten entstanden sind. Basin hat keine Redaction vorgenommen, wodurch er alle Spuren der früheren Ausarbeitung verwischt hätte. Die Geschichte Karl des VII. ist nicht vor dem Mai 1471 begonnen; denn im 16. Kapitel des 1. Buches wird nebenbei die Ermordung Heinrich des VI. von England (21. Mai 1471) erwähnt. Ziemlich rasch folgten sich die Bücher bis zum 2. Buche über Ludwig;

denn im 25. Kapitel dieses Buches wird von dem im April 1469 eingekerkerten Balue gesagt 'ipse in carcere reclusus cum dicto Balue, in quo iam quadrennium cum medio ferme anno peregit (also Ende 1473), incertus si umquam vel quando inde fuerit exiturus (es geschah im October 1482; vgl. Ludwig Buch VII 11).

Das 3. und 4. Buch der Geschichte Ludwig des XI. erzählen Ereignisse bis zum Herbst 1475. Diese Bücher scheinen rasch nach den Ereignissen selbst geschrieben zu sein. Denn von der Königin Margareta, welche nach Quicherat (S. CI) im März 1476, nach Pauli (Geschichte Englands V 431) im November 1475 an Frankreich ausgeliefert wurde, heißt es im 13. Kapitel des 3. Buches (II 270): quam plures enim tragoediarum actus lugubres et luctuosi de ea facile fingi possent. apud ipsum tamen Edoardum victorem hodie dicitur . . retineri. Der Schluß des 6. Kapitels des 4. Buches, wo von dem gefangenen Herzog von Geldern gesagt wird 'ubi sub carcerali custodia usque ad obitum eiusdem ducis Burgundiae (Karl des Kühnen, † 5. Jan. 1477) detentus custoditusque fuit', könnte irre führen. Allein hier hilft die Göttinger Handschrift. In dieser hatte die erste Hand geschrieben 'illuc usque ad hunc diem sub carcerali custodia detinetur'; dann hat die zweite Hand durch Aenderung den obigen Text hergestellt. Also ist dieses 4. Buch vor dem Jahre 1477 ausgearbeitet.

Das 5. Buch der Geschichte Ludwig's XI. behandelt insbesondere den Tod Karl des Kühnen (am 5. Jan. 1477). Im 7. Kapitel wird die im August 1477 geschehene Hinrichtung des Herzogs von Nemours erwähnt; doch der ganze folgende Zusatz 'licet etiam diu post hoc verum id fuisse a fide dignis audierimus .... innocens puniretur' ist in der Göttinger Handschrift erst von der zweiten Hand an dem Rand zugeschrieben. Diese Stelle beweist also nur, daß das Buch nach dem August 1477 geschrieben ist.
Im 13. Kapitel desselben Buches (II S. 419) wird berichtet, daß viele Leute nicht glaubten, daß Karl der Kühne todt sei, und wird geschlossen: haec fatuitas in pluribus usque ad annos decem postquam obierat duravit et diutius adhuc erit fortassis duratura. Diese Stelle ist also im Jahre 1487 geschrieben. Allein in der Göttinger Handschrift schließt das 13. Kapitel mit den Worten 'Et obiit anno etatis sue circiter XLV^{to}' und von dem im Drucke, also in der Pariser Handschrift folgenden Stücke 'Non defecerunt tamen nec adhuc desunt' bis zu dem oben ausgeschriebenen Schlusse vom Jahre 1487 ist in dieser Handschrift keine Spur vorhanden. Sogar in der Mitte dieses Kapitels, wo Basin berichtet, gleich nach der Schlacht hätten die Einen gesagt Karl lebe, die

Andern er sei todt, sind in dem Satze 'et ita ultro citroque affirmatione et negatione res dubia a plerisque habebatur per plures dies, immo menses et prope annos' diese letzten Worte 'immo menses et prope annos', welche zu dem Folgenden schlecht passen, in der Göttinger Handschrift erst von zweiter Hand an den Rand geschrieben. Demnach können wir die Abfassung dieses Buches schon in das Ende des Jahres 1477 setzen, jedenfalls brauchen und dürfen wir nicht wie Quicherat in das Jahr 1487 herabgehen.

Das 6. Buch der Geschichte Ludwig des XI. schildert die Ereignisse bis Ende 1482. Quicherat (S. CII) bemerkt 'le 31. chapitre fut écrit lorsque Guillaume de La Marck était encore en possession de Liége, c'est-à-dire avant le 18. juin 1485' ('quam diu enim tam efferum et acerrimam hostem iuxta se ymmo quodammodo intra viscera sua habeant — *so corrigirt die zweite Hand; die erste schrieb* habent —, non secure et absque pavore et periculo in suis possunt vel agris vel opidis quiescere').

Einige Schwierigkeiten bereitet die Bestimmung der Entstehung des 7. Buches der Geschichte Ludwig des XI. Das Buch schildert Ereignisse von Anfang bis September 1483. Im 2. Kapitel sagt Basin von der Wittwe und den Söhnen Eduard des V. 'ipsam . . dicitur obseratam et clausura valida circumdatam facere custodiri, Edwardi autem filios aiunt in dicta turri Londoniarum etiam apposita custodia asservari . . . Vivant vero ipsi pueri regii aut iussu ipsius sui impii patrui necati sint incertum habetur'. (Der Zusatz gegen Schluß des Kapitels III S. 138: 'unde etiam post modum pro vero et indubitato cognitum est, quod ab ipso impio parricida ipsi pueri regii nepotes sui seu iussu ipsius perempti extinctique fuerunt' ist schon von Quicherat als solcher erkannt worden und fehlt wirklich in der Göttinger Handschrift). Quicherat sagt, die obige Stelle weise auf 'la fin de 1484 ou le commencement de 1485': ich weiß nicht, weßhalb. Denn Richard III. hat sich am 1. März 1484 mit Elisabeth ausgesöhnt und sie mit ihren Töchtern in die Residenz aufgenommen; in London war es natürlich damals auch sicher, daß Edward's Söhne todt seien. Die Nachricht hiervon mochte recht langsam sich verbreiten, so mußte sie doch in 3—4 Monaten zu Basin gelangt sein, der im Mai 1484 aus Breda, wo er 11 Monate sozusagen in der Verbannung gelebt hatte, in seine zweite Heimath, Utrecht, zurückkehrte. Darnach scheint es, daß dieses 7. Buch vor dem Juli 1484 geschrieben ist. Dazu würde stimmen, daß die zwei im letzten Kapitel berührten Ereignisse des Jahres 1484, der Tod des Olivier vom

24. Mai und das Parlament in Tours (Februar und März), in der Reinschrift noch nicht vorkamen, vielmehr die betreffenden Stellen (III S. 197 qui paulo post . . est et affixus und S. 198 Quod si quis forsitan bis S. 200 deliberataque erant) erst von Basin beim Durchlesen der Reinschrift am Rand nachgetragen worden sind. Demnach möchte man den Abschluß des 7. Buches lieber in den Anfang als in die Mitte des Jahres 1484 rücken; allein dem widerspricht das 11. Kapitel: revocata etiam illa inique dampnacionis sententia in ducem illum optimum de Nemours suo iussu prolata liberis suis omne patrimonium est restitutum. Diese Worte sind auch in der Göttinger Handschrift schon von der Hand des Copisten geschrieben. Nun wurden auf dem Reichstag in Tours öffentliche Bitten für die Kinder des Herzogs von Nemours vorgebracht; doch von der Regierung wurde nur erneute Untersuchung der Sache versprochen; die Rückgabe der Güter erfolgte erst im August 1484. Es mögen ja vorher den Kindern günstige Verhandlungen stattgefunden haben und bekannt geworden sein; allein die oben ausgeschriebenen Worte können auch dann nur frühestens im Juni oder Juli 1484 geschrieben sein. Demnach hat Basin, sowie er aus der Verbannung in Breda im Mai 1484 nach Utrecht zurückgekehrt war, sich daran gemacht, das Ende seines Todfeindes Ludwig des XI. zu schildern und damit endlich sein Geschichtswerk abzuschließen.

Wann ist die Göttinger Handschrift geschrieben worden? Es war natürlich, daß Basin, sobald der Entwurf seines Geschichtswerkes bis zu dem lang erstrebten Abschlusse gediehen war, das ganze Concept sich rein schreiben ließ und dann dasselbe durchcorrigirte und mit gelegentlichen Zusätzen versah; nach der Mitte des Jahres 1484 entstand also die Handschrift, welche jetzt in Göttingen liegt.
In der Vorlage der Pariser Handschrift befand sich jener Zusatz im 13. Kapitel des 5. Buches, welcher im Jahre 1487 niedergeschrieben ist; in der Göttinger Handschrift ist davon keine Spur; auch das beweist, daß dieselbe vor 1487 geschrieben ist.

III.

Für die Beantwortung der Frage, wie verhält sich die Göttinger Handschrift zu den von Matthaeus gedruckten Bruchstücken und zu der von Quicherat benützten Pariser Handschrift, sind damit die Grund-

lagen gegeben. Diese Frage selbst ist wichtig: sie zu beantworten, schwierig; deßhalb lege ich das, was ich fand, zur Prüfung vor. Ich wählte zur Untersuchung die Stücke aus dem Schlusse des 6. Buches über Ludwig (Kapitel 20—33 in Quicherat's Ausgabe Bd. III S. 73—129: Bl. 233ᵃ—250ᵇ der Göttinger Handschrift), welche Ant. Matthaeus (Veteris aevi Analecta II, 1698, S. 145—184) abgedruckt hat. Denn hier können durch die Vergleichung der 3 Abschriften (**G** = Göttinger, **P** = Pariser, **M** = der von Matthaeus benützten Niederländischen Handschrift) die sichersten Schlüsse gezogen werden.

1. Die Göttinger Handschrift war von sehr ungeschickten oder leichtsinnigen Schreibern geschrieben. Basin hat sehr viele der von jenen gemachten Fehler berichtigt, manche hat er stehen lassen. In demselben Falle begegnet einem Jeden das Gleiche. Einige von diesen Fehlern haben sich sogar in die späteren Abschriften unbemerkt hinübergeschleppt, die meisten sind in der Pariser (**P**) und in der Niederländischen Abschrift (**M**) gebessert. (Kapitel) 25, Seite 96 esset . . existeret **GPM** (Quicherat hat esset getilgt) 26 S. 97 quod eis ad sustinendum tam difficilis belli pondus maioribus eis viribus opus erat **GP**, **M** tilgt das 2. eis 26 S. 97 asciscerent schrieb Quicherat: assisterent **G**, assisteret **P**, objicerent **M** 26 S. 102 plurimum **GM**, plurium richtig **P** 20 S. 73^{C} (d. h. im unteren Drittheil der Seite) heißt der Teufel inimico homine **G**, i. hominum **MP** 22 S. 81 homines quietis ac ediarum impatientes **G**, otiorum **MP** 22 S. 85 Brerode **G**, Brederode **MP** 22 S. 86 eidemque sibi placabilem efficere cupiebant **G**, eundemque **MP** 23 S. 89^{B} (d. h. im mittleren Drittheil der Seite) spectabulum **G**, spectaculum **MP** 24 S. 91^{B} quedam paradisus **G**, quidam **MP** 26 S. 99^{B} cucurerent **G**: cucurrerunt **M** (concurrerunt **P**) 26 S. 102^{B} impletum . . quod in Trenis per prophetam Jeremias de Jherosolimitis lugubri cecinit carmine **G**; der Fehler stand auch noch in der gemeinsamen Vorlage von **P** und **M**; denn **M** corrigirt: quod Jeremias Propheta de J. l. cecinit carmine, **P** aber: quod in Threnis per prophetam Jeremiam de Jerosolymis l. carmine cantatum fuit 22 S. 102^{C} Unde et adversum civitatem et in eius odium (dazu von 2. Hand 'plurium' am Rande ergänzt) animos cumularant **G** (ob statt 'stimularant'?): u. adv. civitatem et in eos odium plurium animis cumularunt **PM**, was ich ebenso wenig verstehe 27 S. 103 et clade **G**, et de clade **P** richtig 27 S. 105^{B} Quin (cum **PM**) profecto iustius an (ac **PM** richtig) verius de ipsis et (et de ipsis **P**) Trajectensibus . . dicere poterat 31 S. 122^{C} ad eum vel in Hoeyo ubi astabat ad expugnandum vel obsidendum **G**, *das 2.* ad *fehlt in* **MP** 32 S. 125^{B} ausi sunt in cathedra quam non deceret . . nunciam esse ausi

sunt . . ingerere G (*ohne jeden Grund für eine rhetorische Wiederholung dieser Worte*): *das 2.* ausi sunt *fehlt in* MP 32 S. 125^{c} decernerunt G, decreverunt MP 33 S. 127^{B} pax . . et amicitie federa . . firmate sunt G, firmata MP.

2. Was Basin in die Göttinger Reinschrift geschrieben hat, bessernd oder zusetzend, all das findet sich aufgenommen in den Text der Pariser und der Niederländischen Handschrift. Anderseits sehen wir im 13. Kapitel des 5. Buches von Ludwig's Geschichte (Bd. II S. 419) ein längeres Stück, welches sicher im J. 1487 und, so gut wie sicher, von Basin selbst geschrieben ist. Von diesem Stück ist keine Spur in der Göttinger Handschrift zu finden: aber in der Pariser steht es. Das führt darauf, daß aus der von Basin verbesserten und vermehrten Reinschrift von 1484 d. h. aus der Göttinger Handschrift eine Abschrift gefertigt wurde, welche dann im Jahre 1487 von Basin durchgesehen und verbessert wurde. Aus diesem Exemplar von 1487, wenn ich es so nennen darf, stammen — mit oder ohne Zwischenglieder — die beiden anderen Abschriften. Ist diese Vermuthung richtig, dann müssen wir erwarten, daß kleine Fehler des Exemplares von 1484 (G), welche Basin beim Durchlesen jenes Exemplares übersehen hatte, jetzt beim Durchlesen dieses Exemplars von 1487 von ihm zum großen Theil berichtigt worden sind, ferner daß in dem Exemplare von 1487 sich mehr oder weniger Aenderungen oder Zusätze finden, welche stilistische Härten oder Unklarheiten des Exemplares von 1484 zu heben versuchen, also Zusätze und Aenderungen, wie sie nicht ein Leser, sondern nur der Verfasser selbst machen konnte.

Da einer Ausgabe eigentlich die Fassung zu Grund zu legen ist, welche Basin seinen Worten zuletzt gab, so ist es wichtig, deutliche Beispiele dieser jüngeren Fassung zu geben: (Kapitel) 20 S. 73 (des 3. Bandes) stehen nach 'in civitate Traiectensi' in M P die Worte 'quam tunc ipsi incolebamus': in G fehlen sie ebenda steht in G 'princeps eiusdem rex . . eiusdem Frisiae; das ist nicht falsch, aber hart; in MP fehlt das 1. 'eiusdem', während vielleicht besser das 2. gestrichen worden wäre 20 S. 74^{c} steht in einem längeren Satze 'quae factio . . est . . penitus extincta', dann folgt in G 'Ea vero que Hůccensium et Cabillonensium vulgo nuncupatur'; P und M haben 'Cabeliavensium inimicitia atque partialitas vulgo', einen nicht eben glücklichen Zusatz, der aber nur von Basin stammen kann 22 S. 82^{c} ist 'eorum' nach 'hominum' ein ganz angenehmer Zusatz, der aber in G fehlt; ebenso 22 S. 83^{c} 'elatus' (erat elatus M falsch) nach 'ambitione', während G elatus nicht enthält 22 S. 84 Sed quidquid verbis exterius iactitarent, aliud tamen . . latebat sub pectore clausum G: P und M lassen das

recht überflüssige verbis weg 23 S. 87C tamdiu constiterunt, quod (quoad ?) adversariis suis spacium sufficiens praebuerunt ad se colligendum et communiendum in platea civitatis G: gefeilter ist der Ausdruck in MP ad se colligendum in platea civitatis et eam communiendam 25 S. 95B de seque semper G: deque se semper MP 26 S. 96C Videntes . . se non potuisse consequi pacem quam habere speraverant cum duce Austrie G: quam habere speraverant aut sperasse finxerant seu simulaverant c. d. A. MP 26 S. 97C prisco more G: *besser* MP pristino (= priore) m. 26 S. 98 vel communi voto vel condicto sehr hart G: v. ex condicto MP 27 S. 104B cum adversus hostes suos incursantes et populantes agros suos . . exiliissent G: MP lassen gut das 1. 'suos' weg. 27 S. 106B Quin potius a cunctis publice iactabatur G: a cunctis verräth die Uebertreibung; es fehlt in MP 27 S. 107 Temptarant G, doch paßt Temptarunt in MP besser zum folgenden 'adegerunt' vi et metu non iniusto (d. h. nicht ungerechtfertigt) aut vano MP: G hat aut vano noch nicht 28 S. 108B geht 'fuisset' (G), doch glatter ist fuisse (MP) 28 S. 110B taedio simul et . . caristia MP, in G steht 'simul' noch nicht 28 S. 110C Clivenses sunt reversi in patriam suam. Reposuerant antea magnam spei sue partem in auxilio ducis Clevensis G; sehr wünschenswerth war allerdings die Bezeichnung des neuen Subjektes, die in MP gegeben ist: partem ipsi rebelles Traiectenses in auxilio . .

3. Die Besserungen, welche Basin in dem Exemplar von 1487 vorgenommen hat, waren, wie ersichtlich, unbedeutend und betrafen leichte Unreinheiten der Form. Dagegen muß die Textesquelle, aus welcher die Pariser und die Niederländische Handschrift geflossen sind (sei dies nun das Exemplar von 1487 selbst gewesen oder eine hieraus genommene Abschrift), schon durch manchen Schreibfehler entstellt gewesen sein. (Kapitel) 20 S. 75 (des 3. Bandes) die Parteileidenschaft 'tam alte radices misit in animis illorum populorum (animis hominum P falsch) et tam tenaciter eos aduncavit, ut G: die Vorlage von MP muß adunavit gehabt haben, was in P steht, in M aber zu adinimicavit verfälscht ist 20 S. 75C circiter 200 viros.. delegerunt, quos eisdem exulibus quo vellent ad suum scilicet oppidum Leydense si possent recuperandum commodarunt G: in der Vorlage von MP muß delegerunt gefehlt haben; im M steht wenigstens noch quos; in P fehlt auch dies. Weiterhin fehlt in M nur Leydense; in P ist dies Wort gerettet, dagegen 'quo vellent' und 'scilicet' verloren 20 S. 77 furtive irruperant G: in P thöricht fortune, woraus in M forte zu machen versucht ist 22 S. 82C profligatis vel amotis G: in P falsch amissis, was in M zu deiectis geändert ist 22 S. 84C Vetere enim proverbio, quos ipsi metuissent, consequens fuit quod et odirent (oderant M, oderint P falsch) G; P fährt weiter: Quem enim metuunt (metuant G falsch),

oderunt inquit comicus; **M** hat 'Caius' und Matthaeus citirt unpassend Sueton Calig. 30. Basin schreibt auch hier den von ihm geliebten Cicero aus, der (de Officiis 2, 7 § 23) sagt 'praeclare enim Ennius . .; Ennius steht auch in **G**: in der Vorlage von **M** und **P** stand ein verderbtes Wort, wahrscheinlich 'comicus' 24 S. 90^{C} hat **G** richtig iniuria proscriptionis: in der Vorlage von **MP** stand wahrscheinlich (nach dem vorangehenden proscriptionibus agitatum verschrieben) iniuria proscriptionibus, woraus **P** iniuria et proscriptionibus, **M** miseriarum proscriptionibus gemacht hat 24 S. 91^{B} steht in **G** mit dem Psalm 106, 34 richtig 'a malitia habitantium': **MP** haben amentia h. 24 S. 91^{C} ubique proch dolor squalent .. arva **G**: ubique procul dubio squalent in **PM** ist wohl nur ein grobes Versehen 25 S. 95 si eas (conditiones) **G**: eam **MP** S. 95 iniquum illud .. odium **G**: in **PM** fehlt illud, wohl nur aus Versehen 25 S. 95^{B} ut omnem pacis . . conditionem . . respuendam pertinacissime obfirmassent **G**: **P** observassent, **M** observarint 25 S. 95^{B} . . sermonem, quod malet pocius videre Traiectum deductum ad aratum totumque rapis virentibus solum ipsius excultum quam quod civitas sub obedienciam sui pontificis referri deberet **G**, wo aratum = Ackerfeld zu nehmen oder mit **P** ad aratrum zu schreiben, sonst aber Alles gut ist: in der Vorlage von **MP** fehlte jedenfalls 'excultum'; denn **P** hat totumque rapinis virentibus solum ipsius civitatis, si sub o. s. p. r. d., **M** nur totumque campis virentibus solum ipsius civitatis referri ebenda: quam quod . . civitatem ad parendum suo . . domino pacificari consentirent: domino ac pacificari hat unverständlich **P**, und **M** hat dann 'ac pac.' ganz weggelassen 25 S. 96 Atqui **G**: atque **MP** unpassend 26 S. 98^{B} insani vulgi vana exultacio . . eisdem in lamentum . . conversa est **G** ohne Anstoß, in **MP** fehlt 'eisdem' 26 S. 98^{C} maiore ex parte **G**: ex p. m. **MP** 26 S. 99 quendam (quendem **G**) burgum . . satis locupletem ac bellicosi et superbi populi multitudine refertum **G**: **MP** ebenso gut locupletis 26 S. 99^{C} se cum armatis viris rei militaris peritis negotium habere **G**: **MP** lassen ohne Grund rei m. peritis weg 26 S. 101^{C} cum maximis difficultatibus sumptibus ac laboribus: sumptibus fehlt ohne Grund in **MP**; ebenso 27 S. 104^{B} florenorum auri **G**: nur 'florenorum' **MP**; plateas civitatis **G**: nur 'civitatis' **MP** 27 S. 105^{C} dolosis commentis vanisque figmentis **G**: variisque **MP** 28 S. 109^{B} quae (civitas Traiectensium) dictis infelicibus (accolis cuiusdam villae) de suis (rebus) fidam securitatem venumdederat **G**: in **MP** (und der Vorlage) fehlt de, dann ließ **M** auch das unverständliche 'suis' weg 28 S. 110 tritumque vulgo commune proverbium **G**: certumque v. comm. pr. **P**, certum vulgo pr. et commune **M** 28 S. 110^{B} ultra (= extra) tamen iactum missilium **G**: **P** tantum, woraus **M** iam machte 31 S. 120 eisdem **G**: eidem **MP** 31 S. 123 centum viginti **G**: CXXX **PM** (octoginta **GM**,

LXXXI **P** also fasch) 33 S. 128^{B} rex vel dictus dominus delfinus aut sui heredes **G**: rex iam dictus aut sui heredes **M**, rex vel sui heredes **P**, so daß offenbar in der gemeinsamen Vorlage dominus delfinus gefehlt hatte und nun in **M** und **P** verschiedentlich geflickt wurde.

4. Das Exemplar von 1487 oder die daraus geflossene Vorlage der beiden Handschriften **M** und **P** war also mit ziemlich vielen Schreibfehlern und Versehen behaftet. Doch sind diese nicht sehr stark, und man kann durch Vergleichung der 3 Handschriften stets erkennen, was in der Vorlage von **MP** oder in dem Exemplar von 1487 gestanden hat. Denn wenn die Pariser Handschrift die eine Lesart, die Niederländische aber mit der Göttinger gemeinsam eine andere hat, so muß diese letztere auch in der Vorlage von **MP** gestanden haben, die Lesart von **P** dagegen kann nur eine Aenderung des Schreibers von **P** sein. Ebenso ist, wenn die Göttinger und die Pariser Handschrift die gleiche Lesart enthalten, jede abweichende Lesart der Niederländischen als Versehen oder falsche Aenderung dessen, der jene Auszüge über die Niederländische Geschichte gemacht hat, stets zu verwerfen. Es ist fast unglaublich, durch wie viele kleinen und großen Versehen oder kecke Aenderungen von geringerem oder größerem Umfange diese Auszüge (**M**) entstellt sind. Ich gebe davon nur wenige Proben: (Buch VI Kap.) 20 S. 76 (des III. Bandes) sicca . . vestigia **GP**: facta (alias: firma) **M** 23 S. 88 fehlt in **M** die Zeile 'ad eundem . . consistebant' 24 S. 90^{B} statt in tribus praecipue oppidis, civitati vicinis, videlicet Wyck, ubi ipse moram faciebat hat **M** in tr. praecipuis opp. civitate unius Wyck ipse m. fac. 24 S. 91 in agros Traiectensium et Amersvoerdensium et vice versa **G** (in agro Trajectensium et vice versa **P**): in agros Tr. et Am. universos **M** 24 S. 92^{B} vi vel astu irrumpere potuissent. Quae perpendens **GP**: vi vel armis irr. pot. Quare prudens **M** 26 S. 100 fehlen die Worte 'carorum (cararum?) affectus suos' in **M** 26 S. 100^{B} Haec fuerunt felicia auspicia . . quae eis . . invexit; hic fructus **GP**: . . attulit. Invexit hos fructus **M** 20 S. 76^{B} Cui inopinate irruptioni cum . . velut iam captivi et subacti obniti non auderent **GP**: cui resistere irruptioni cum . . velut iam captivi et obruti non auderent **M** 22 S. 85 familia que . . fuisse fertur tenacissima parcium Hoeccensis factionis in (Hoeckensium in **P**) Hollandia **GP**: . . partium Hoecksensium factionis contra Cabillionensium factionis per Hollandiam, proch dolor! capita **M** 26 S. 97^{B} intonsas barbas servaverunt, donec eum, suis ut voluntatibus assentiret . . in suam introducerent civitatem **GP**: diese schöne Volkssitte ist in **M** ganz weggewischt: intonsa barba adsciverunt sollicitantes, donec cum suis voluntati eorum assentiret . . inque civitatem introduxerunt Die für die Zeit der Ab-

fassung dieses Buches wichtige Stelle 31 S. 123^{B} lautet nach G und P Quamdiu enim tam efferum . . hostem iuxta se ymmo quodammodo intra viscera sua habeant (habent der Schreiber, habeant der Corrector; Quicherat druckt aus P hier 'habebant', Band I S. CII 'habebunt'), non secure . . in suis possunt vel agris vel opidis quiescere: in M quod diu etiam tam ef. . . . viscera habebant, ut non secure . . in suis possent v. a. v. o. qu.

So ist die Niederländische Handschrift durch sehr viele kleine oder umfangreiche Versehen oder kecke Aenderungen entstellt. Der Schaden ist jetzt gering; denn durch Vergleichung der beiden anderen Handschriften können wir von jeder Lesart in M bestimmen, ob sie aus der mit P gemeinsamen Vorlage stammt und beachtenswerth ist, oder ob sie als Fehler oder kecke Aenderung des Schreibers von M zu verwerfen ist.

5. Dagegen ist es beträchtlich wichtig, durch die Vergleichung der 3 Handschriften zu bestimmen, welche Eigenschaften der Pariser Handschrift zuzuschreiben sind. Denn es stecken in ihr neben eigenen Fehlern die Spuren des Exemplares von 1487, d. h. Basin's Correcturen zweiter Lesung. Wo nun die Lesarten der Göttinger Handschrift nur denen der Pariser gegenüberstehen und die Niederländische fehlt, da ist es oft eine sehr delikate Sache, zu entscheiden, ob die abweichende Lesart der Pariser Handschrift auf eine nachträgliche Correctur Basin's von 1487 oder auf die Thorheit oder die Launen des Schreibers der Pariser Handschrift selbst zurückzuführen ist. Deßhalb ist es wichtig, zuerst das Urtheil über diese Handschrift festzustellen durch Vergleichung mit den beiden anderen. Denn wo der Text der Niederländischen Handschrift mit der Göttinger zusammen stimmt, da ist jede abweichende Lesart der Pariser unzweifelhaft falsch.

5^{a}. Der Schreiber der Pariser Handschrift hat oft Wörter umgestellt: 20 S. 75 divicias magnas parare GM: m. d. comparare P 21 S. 77^{C} ex ipsis iam ab olim GM, iam ab olim ex ipsis P (falsch) 25 S. 94^{B} cum magno applausu civium invexerunt GM, inv. c. m. civ. appl. P 26 S. 101^{C} supped. victum GM, v. s. P 26 S. 102 magna pariter inopia atque famis inedia GM, magna inop. pariterque f. in. P 27 S. 105 multit. magnam GM, m. mult. P 28 S. 110^{B} lucem hanc GM, h. l. P 32 S. 125^{C} intell. auctores GM, auct. int. P An all diesen Stellen kann die Wortstellung der Pariser Handschrift nicht aus dem Exemplar von 1487 stammen, ist also falsch. Das sind Kleinigkeiten; allein sie beweisen, daß, so oft die Pariser Handschrift eine andere Wortstellung hat als die Göttinger und keine besonderen anderen Gründe mitsprechen, die

Wortstellung der Pariser Handschrift nicht in den Text gesetzt werden darf.

5b. Oft hat der Schreiber der Pariser Handschrift Wörter weggelassen: 20 S. 74C steht das gute 'modo' vor miseratione in GM, fehlt in P 23 S. 88 iter inter GM, nur 'inter' P 27 S. 107B apud summum (ipsum M) pontificem se prosequi intendere iactitabant (iactabant M) GM: P hat nur 'se prosequi iactitabant', alles andere fehlt 28 S. 109 neque se neque bona sua GM, neque se fehlt in P 31 S. 120 mense Decembris vel circiter GM, nur 'mense Decembri' P 31 S. 121C nos perpulchre GM: nos fehlt in P 31 S. 123 fuga evasit G (fuga ereptus evasit M): nur 'evasit' P 32 S. 126B in quemvis etiam constantissimum GM, in const. etiam G 32 S. 126B praesens coram adesse GM: coram fehlt in P An all diesen Stellen sind richtige Wörter ausgefallen nur durch die Schuld des Schreibers der Pariser Handschrift.

5c. Oft sind dem Schreiber der Pariser Handschrift leichtere Fehler in die Feder gekommen: 21 S. 79B in magnum erumpant incendium GM: irrumpant P 22 S. 83B instaurator libertatis GM, i. civitatis P 22 S. 84B habent GM, haberent P 25 S. 93B eo usque (Traiectum) omnia . . deferre potuerunt GM: eos omniaque *etc.* P 26 S. 99B adesse GM: esse P 26 S. 101 ampla (amplissima M) patrimonia GM: apostolica p. P 27 S. 103C contulerant GM: contulerunt P (falsch) 27 S. 107C de conceptis criminationibus vel verius confictis GM, . . v. verbis confertis P

5d. Mehr oder minder keck hat der Schreiber der Pariser Handschrift etliche Stellen abgeändert: 21 S. 79B oppida . . se . . devotos atque obedientes exhibuerunt G und (praestiterunt) M: . . devota a. obedientia P 23 S. 87B sub vexillis civitatis GM, vexillo P 23 S. 87C Et si, primum ac (= simulac) sufficiens manus illo coacta fuit, ad occupandam plateam . . tetendissent G (manus illico coacta ad . . tetendisset M): ubi si illico sufficiens manus coacta fuisset et ad occ. pl. . . tetendissent P 31 S. 120B promittens etiam se eidem duci si expedisset GM, prom. etiam si eidem duci sic exp. P 31 S. 122 ulla . . federa GM: ullum . . fedus P 33 S. 128 nullis de se superstitibus liberis GM, P setzt hinzu 'liberis relictis' 22 S. 83C Ad miseram tamen sue calamitatis et ruine (*dann sind 2 Zeilen von der 1. Hand leer gelassen, in welche die 2. Hand schrieb*:) nesciam tunc et crassa quadam ignoracione obcecatam excusandam ipsam Traiectensium civitatem causabantur (*hierauf fährt wieder die 1. Hand weiter*:) plures e civibus nonnullique de clero adversus dominum et pastorem suum: so hat G ganz verständlich; ähnlich M (doch nesciam crassaque ignorantia excusandam); dagegen P . . ruinae fortunam crassa quadam ignoratione ipsa Trai. civitate

se excusante causabantur . . 32 S. 126 ad locum . . ad quem universum clerum iusserant tunc adesse G (clerum acceperant adesse M): ad locum . ., ubi universus clerus tunc aderat P.

Von diesen Gesichtspunkten aus wollen wir das Räthsel untersuchen, wie es kam, daß dieses Geschichtswerk fast 400 Jahre unter dem Namen des Amelgardus ging. In der Pariser Handschrift steht unter Haupttitel, nach Quicherat von anderer Hand, Auctore Amelgardo presbytero Leodiensi. Dieser Autorname kommt sonst nirgends in der Pariser Handschrift vor, allein er ist nicht von einem Fälscher in die Handschrift zugesetzt; vielmehr muß derselbe schon in dem Exemplar von 1487 gestanden und dort Basin's Augen passirt haben. Denn er steht auch in dem Göttinger Exemplar; freilich nicht im Titel, sondern an einer sonderbaren Stelle. Diese Handschrift besteht durchaus aus Lagen zu 5 Doppelblättern. Zwischen Bl. 239 und 240 ist ein Blatt, das letzte der 17. Lage, jetzt ausgeschnitten. Dasselbe kann nicht beschrieben gewesen sein, da der Text von Bl. 239 unmittelbar auf Bl. 240 weiter geht. Sonderbarer Weise ist das letzte Blatt (Bl. 230) der vorangehenden 16. Lage ebenfalls nicht beschrieben, während der Text von 229 auf Bl. 231 ohne Störung weiter geht (VI cap. 17 = Bd. III S. 65^{B}: contra honorem | ac reverenciam). Dieses leere Blatt 230 ist liniirt und abgesehen von einem Riß im Rande gut erhalten. Somit können diese beiden Blätter nur durch ein Versehen des Schreibers leer geblieben sein. Auf der Rückseite des leeren Blattes 230 steht ganz oben: Gesta l. scripta p Amelgardū p (mit diesem p ist eine Abkürzung verbunden: pe oder pr). Die Buchstaben sind dünner und höher als die Basin's in den eng gedrängten Randnoten, allein die Formen der Buchstaben selbst sind sehr ähnlich. Jedenfalls standen diese oder ähnliche Worte auch in dem Exemplar von 1487, wenn auch schwerlich an einer so abgelegenen Stelle, sondern eher im Titel, und wurden dort von Basin geduldet; hieraus gingen sie in die Pariser Handschrift über.

. . . Was bedeuten zunächst diese Wörter? l. (sonst vel) ist hier wohl zu 'Ludovici' zu ergänzen. Man könnte nun meinen, Basin habe, vielleicht scherzend, auf das Corpus delicti selbst den Namen des Schreibers bemerkt, der ihm seine Gesta Ludovici (Bl. 71—285) rein geschrieben und dabei aus Ungeschicklichkeit jene 2 Blätter weiß gelassen hatte. Doch diese Notiz konnte Basin nicht in das Exemplar von 1487 übergehen lassen.

Das Fehlen des Wörtchens 'sunt' deutet vielmehr darauf, daß die Worte 'Gesta Ludovici scripta per Amelgardum pr.' doch ein Titel sind. Wie kam Basin dazu, diesen hierher zu schreiben? Ich glaube, auf folgende Weise. Basin wollte, wie oben (S. 470) bemerkt, seinen Namen nicht nennen; er ersann einen falschen Namen. Diesen schrieb er hier, wie zur Notiz, auf das leere Blatt; diese Handschrift sollte ja sein Eigenthum blei-

ben. Dagegen in dem Exemplar von 1487 stand die pseudonyme Verfasserangabe wohl da, wohin sie gehörte: in dem Haupttitel, und so ging sie in die Pariser Handschrift über.

Wenn die oben dargelegten Ansichten über das Verhältniß der Göttinger Handschrift zu der Pariser und der Niederländischen richtig sind, dann ergeben sich für den künftigen Bearbeiter des Textes folgende Grundsätze: In den Stücken, welche auch in der Niederländischen Handschrift erhalten waren (2. Hälfte des 6. und Anfang des 7. Buches der Geschichte Ludwig's XI.), stellt das, was die Niederländische und die Pariser Handschrift gemeinsam haben, eine 1487 von Basin durchcorrigirte Abschrift dar. Der Text dieser Fassung verdient als der jüngere den Vorzug vor dem älteren, 1484 hergestellten der Göttinger Handschrift. Doch ist schon der Text der Fassung von 1487, wenigstens der, welchen wir aus den gemeinsamen Lesarten der Pariser und der Niederländischen Handschrift wieder herstellen können, mit vielen Schreibfehlern behaftet gewesen, welche (wie oben unter Nr. 3 nachgewiesen) aus dem Göttinger Exemplar gebessert werden können.

Aber in dem weitaus größeren Theile dieses Geschichtswerkes sind die Spuren der Fassung von 1487 nur durch die Pariser Handschrift erhalten. Da diese (wie unter Nr. 5 nachgewiesen) durch die Schuld des Schreibers weitgehende Veränderungen erlitten hat, so ist es sehr schwierig, zu erkennen, was unter dem Wust von Verderbnissen gute Reste jener Besserungen des Basin sein mögen. Sind nun in der Pariser Handschrift Wörter anders gestellt oder welche weggelassen, so muß (vgl. oben 5^a 5^b), wenn nicht besondere Gründe für die Fassung der Pariser Handschrift sprechen, stets der Göttinger Handschrift der Vorzug gegeben werden. Am wichtigsten ist in dieser Hinsicht die Frage, wie es gekommen ist, daß die umfangreichen Stücke in der Charakteristik Ludwig XI. am Ende des 7. Buches in der Göttinger Handschrift stehen, aber in der Pariser fehlen. Sollte Basin selbst, 3 Jahre nachdem er dieselben ausgearbeitet hatte, sie als überflüssig gestrichen haben? Dafür spricht kaum ein guter Grund; vielmehr scheint, wie das vorkommt, der Schreiber der Pariser Handschrift, gegen Ende die Geduld verloren und, was ging, weggelassen zu haben. Wenn die Worte in der Pariser Handschrift anders gefaßt sind als in der Göttinger, so darf (vgl. oben 5^e und 5^d) nur dann, wenn eine Härte des Ausdrucks dadurch beseitigt wird, der Fassung der Pariser Handschrift der Vorzug gegeben werden. Am ehesten darf man in der Pariser Handschrift da Spu-

ren der Fassung von 1487 annehmen, wo sie unverfängliche kleine, und noch mehr da, wo sie größere Zusätze bietet. So ist z. B. der Zusatz im 2. Kapitel des 7. Buches über Ludwig (III S. 138[B]) 'Unde etiam . . fuerunt', welcher in der Göttinger Handschrift gänzlich fehlt, von Basin einstweilen an den Rand geschrieben worden, ohne daß er auch gleich das Vorangehende entsprechend abcorrigirt hätte. So wird sich auch aus dieser schlechten Handschrift einiges Gute gewinnen lassen. Doch das wird nicht eben Vieles sein. Dagegen kann mit Hilfe der Göttinger Handschrift der Wortlaut von Basin's Geschichte an vielen Stellen gebessert und so die Lücke gefüllt werden, welche in der trefflichen Ausgabe Quicherats geblieben ist.

Ich freue mich hinzufügen zu können, daß Leopold Delisle die Lücke, welche J. Quicherat in der Ausgabe der Geschichte Basin's hat lassen müssen, mit Hilfe der Göttinger Handschrift ausfüllen und so das Werk seines Lehrers und Freundes in allen Stücken gleich trefflich machen wird.

Botanische Untersuchungen im Sommer 1892.

Von

A. Peter.

Auf meinen Antrag hat sich die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften bereit erklärt, botanische Untersuchungen, welche die Flora Mitteleuropas betreffen, unter meiner Leitung ausführen zu lassen. Dem Arbeitsplane gemäß, welcher für diesen Zweck der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegt worden war, erschien es vor allem wünschenswerth, die Grenzgebiete der mitteleuropäischen Flora, und dort hauptsächlich höhere Gebirge und wichtigere Tieflandstrecken solcher Gegenden zu studiren, in denen eine größere Mannigfaltigkeit der floristischen Gliederung der Pflanzendecke herrscht. Diesen Gesichtspunkten entsprechend erstreckten sich die im Laufe des diesjährigen Sommers begonnenen Untersuchungen auf folgende Lokalitäten:

1. Die Alpenlandschaft der Südkarpathen vom Eisernen Thor der Donau bis zu den östlich von Kronstadt gelegenen Hoch-

gipfeln. — Diese Gegend erschien deswegen hervorragend wichtig, weil hier bis über 2500 m aufsteigende Bergmassive von differenteigenthümlichem Florencharakter sich nahe neben einander finden; ferner deswegen, weil am Nordfuße dieser Alpenkette eine diluviale Schotterebene von beträchtlicher Ausdehnung sich hinzieht, die von weiten Wiesenländereien und reichem Ackerboden eingenommen wird, und auf deren niedrigen Hügellehnen eine Fülle von Pflanzensippen sich zusammendrängt, welche ihren Haupt-Verbreitungsbezirk erst im fernen Südosten finden; endlich, weil den Südfuß der siebenbürgischen Karpathen das walachische Tiefland berührt, eine der centralungarischen Tiefebene nach landschaftlichem und floristischem Charakter ähnliche Formation. — Die in pflanzengeographischer Hinsicht hervorragend wichtigen Gebirge erfuhren eingehendere Berücksichtigung; die einzelnen Excursionen wurden auf thunlichst große Zeiträume ausgedehnt, so daß die Studien in einem und demselben Gebirgsstock ohne Unterbrechung durchgeführt werden konnten.

2. Ein weiteres Untersuchungsobject bildete ein Abschnitt der Ostkarpathen, welcher sich durch tief eingeschnittene Pässe zwischen höheren Bergen charakterisirt. Hiefür wurde das Grenzgebiet zwischen Ungarn und der Bukowina gewählt, in welchem namentlich die Vertheilung der Holzgewächse das Interesse in hohem Grade fesselt.

3. Längere Studien wurden ferner der niederungarischen Ebene gewidmet, deren Pusztenbildungen an mehreren Punkten studirt werden konnten.

4. Wichtig erschienen endlich einzelne tiefgelegene Gebiete im mittleren Böhmen, welche durch ihren Reichthum an sog. Steppenpflanzen hervorragen, und von denen zugleich anzunehmen ist, daß hier am ehesten in Mitteleuropa ein erfolgreiches Widerstehen der praeglacialen Flora gegen die eiszeitliche Invasion der arktisch-alpinen Florenelemente stattgefunden haben mag.

Berücksichtigung fanden außerdem bei den diesjährigen Untersuchungen

5. die merkwürdige Sumpflandschaft des Hansag am Neusiedler See im westlichen Ungarn, und

6. die Flora der feuchtschattigen, in Sandsteinfels gerissenen Schluchten der „Sächsischen Schweiz"; hier werden dislocirte Fundstellen einzelner pflanzengeographisch wichtiger Pflanzensippen beobachtet.

Meine Bestrebungen fanden in allen besuchten Gegenden die reichste Förderung seitens der Behörden wie zahlreicher Pri-

vatpersonen. Besonderer Dank gebührt dem Entgegenkommen des Königlich Ungarischen Ministeriums der Landwirthschaft, welches eine Empfehlung des Unternehmens an alle Comitatsbehörden und landwirthschaftlichen Vereine Ungarns erließ; nicht minder dem Kaiserlich Deutschen Generalconsulat in Budapest, welches diese Angelegenheit in die Wege leitete und durchführte. Von hervorragendem Werthe waren ferner u. A. die Rathschläge und werkthätigen Förderungen von Seite der derzeitigen Vorstände der Karpathenvereins-Sectionen zu Petroszeny und Kronstadt.

Eine mitgeführte photographische Camera gestattete die Aufnahme von gegen 60 Vegetations- und Landschaftsbildern ansehnlichen Formates. Das gesammelte Pflanzenmaterial beläuft sich auf etwa 500 Proben lebender Gewächse aus allen untersuchten Gegenden, ca. 100 Sämereien und etwa 1400 Herbariumsexemplare getrockneter Pflanzen. Erstere sind dem Pflanzenbestande des botanischen Gartens, letztere dem Universitäts-Herbarium zu Göttingen einverleibt worden.

Ueber einige wichtigere wissenschaftliche Ergebnisse der diesjährigen Untersuchungen wird binnen kurzem Mittheilung erfolgen.

Göttingen, den 5. November 1892.

Bewegung eines Flüssigkeitsstromes über einem gewellten Grunde.

Von

W. Voigt.

Die Helmholtz-Kirchhoff'sche Methode zur Auffindung ebener Potentialbewegungen mit freier Oberfläche beruht bekanntlich auf Folgendem.

Es sei

$$\zeta = \xi + i\eta, \quad \omega = \varphi + i\psi$$

und es bedeute

$$\zeta = F(\omega) \qquad 1)$$

eine Function, welche eine zur Abscissenaxe parallele Gerade $\psi = \psi_0$ der ω-Ebene auf einem Kreisbogen um den Coordinatenanfang in der ζ-Ebene abbildet, dann kann φ als das Geschwindigkeitspotential, ψ als die Strömungsfunction einer ebenen Flüs-

sigkeitsbewegung betrachtet werden, deren freie Grenze durch die Strömungscurve $\psi = \psi_0$ gegeben ist.

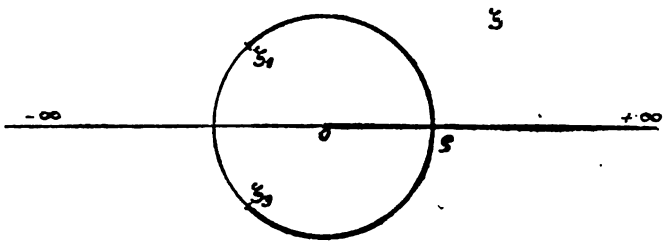
Die Bewegung selbst wird in einer s-Ebene dargestellt, indem

$$s = x + iy = \int \zeta d\omega = \int F(\omega) d\omega \qquad 2)$$

gesetzt wird; ihre Geschwindigkeitscomponenten u und v folgen aus den Beziehungen

$$\xi = \frac{u}{V^2}, \quad \eta = \frac{v}{V^2}, \quad V^2 = u^2 + v^2. \qquad 3)$$

Im Folgenden theile ich eine einfache und elegante Anwendung dieser Methode mit, welche die Bewegung eines Stromes über einem gewellten Grunde ergiebt, falls man den Druck der Flüssigkeit gegen den Boden als in erster Linie durch den äußern Luftdruck hervorgebracht ansehen, von der Wirkung der Schwere also absehen kann. Einen andern ähnlichen Fall habe ich in diesen Nachrichten 1891 p. 46 u. f. mitgetheilt.



Die ζ-Ebene (s. die Figur) sei unendlich vielblättrig gedacht und alle Blätter durch einen Schnitt vom $\zeta = 0$ nach $\zeta = +\infty$ aufgeschnitten. Ferner seien zwei Punkte

$$\zeta_1 = -a + ib, \quad \zeta_2 = -a - ib$$

gegeben, wo a und b positiv sind, und es sei um $\zeta = 0$ als Centrum ein Kreis durch ζ_1 und ζ_2 gezogen; sein Radius ist dann $\varrho = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Längs der Bögen s_1 von $\zeta = \zeta_1$ bis $\zeta = +\varrho$ und s_2 von $\zeta = \zeta_2$ bis $\zeta = +\varrho$ mögen abermals die Blätter der ζ-Ebene aufgeschnitten und dann cyclisch zusammengeheftet werden. Denken wir dann noch alle Blätter durch unendlich große Kreise begrenzt, so hat das erhaltene Gebilde zwei unendlich lange Randcurven, die aus diesen Kreisen und den dazwischen eingefügten Ufern des Schnittes von $\zeta = 0$ bis $\zeta = +\infty$ gebildet werden; wir können es demgemäß als einen Flächenstreifen bezeichnen.

Dieser Streifen wird durch die Function

$$\zeta = \wp\omega - e_2, \tag{4}$$

falls $\wp\omega$ die Weierstrass'sche $\wp$-Function bezeichnet und

$$-\frac{a}{3} + ib = e_1, \quad \frac{2}{a}a = e_2, \quad -\frac{a}{3} - ib = e_3$$

gesetzt wird, abgebildet auf einem durch die Geraden $\psi = 0$ und $\psi = \omega_2'$ begrenzten Streifen der ω-Ebene, wo

$$\omega_2' = \omega_3 - \omega_1$$

und

$$\wp\omega_1 = e_1, \quad \wp\omega_3 = e_3$$

ist. Der zwischen ζ_1 und ζ_3 auf der negativen Seite der reellen Axe gelegene Kreisbogen entspricht dabei der Geraden

$$\psi = \frac{\omega_2'}{2};$$

einer beliebigen anderen Geraden $\psi = \psi_1$, wo $0 < \psi_1 < \omega_2'$ ist, entspricht eine diesen Kreisbogen umschließende Curve, welche sowohl die Axe des Reellen, als auch den Kreis vom Radius ϱ normal schneidet.

Hieraus folgt, daß ein Streifen zwischen den Geraden $\psi = \psi_0$ und $\psi = \frac{\omega_2'}{2}$, wo $0 < \psi_0 < \frac{\omega_2'}{2}$ ist, das Abbild einer Flüssigkeitsbewegung giebt, deren freie Grenze durch die Stromcurve $\psi = \omega_2'$ gebildet ist, während $\psi = \psi_0$ die feste Wand darstellt, längs deren der Strom hinfließt.

Die Strömung in der s-Ebene folgt nach (2) aus der Gleichung

$$\int \zeta d\omega = s,$$

welche wegen

$$\wp\omega = -\frac{d^2}{d\omega^2} l\sigma\omega$$

sehr einfach ergiebt

$$s = C - \frac{\sigma'\omega}{\sigma\omega} - e_2\omega. \tag{5}$$

Die Constante C hängt allein von der Wahl des Anfangspunktes für s ab und kann $= 0$ gesetzt werden. Wegen $\omega = \varphi + i\psi$ folgt hieraus

$$x + iy = -\left(\frac{\sigma'\varphi}{\sigma\varphi} + \frac{\sigma' i\psi}{\sigma i\psi} + \tfrac{1}{2}\,\frac{\wp'\varphi - \wp' i\psi}{\wp\varphi - \wp i\psi}\right) - \frac{2a}{3}(\varphi + i\psi). \tag{6}$$

Nun ist

$$\frac{\sigma' \varphi}{\sigma \varphi} \text{ reell}, \quad \frac{\sigma' i\psi}{\sigma i\psi} \text{ rein imaginär},$$

$$\wp\varphi, \ \wp'\varphi \text{ und } \wp i\psi \text{ reell}, \ \wp' i\psi \text{ rein imaginär},$$

daher giebt die Trennung des reellen und imaginären Theiles sogleich

$$x = -\frac{\sigma' \varphi}{\sigma \varphi} - \tfrac{1}{2} \frac{\wp' \varphi}{\wp\varphi - \wp i\psi} - \frac{2a\varphi}{3}$$

$$iy = -\frac{\sigma' i\psi}{\sigma i\psi} + \tfrac{1}{2} \frac{\wp' i\psi}{\wp\varphi - \wp i\psi} - \frac{2ai\psi}{3}. \qquad 7)$$

Durch Einsetzen eines constanten $\psi = \psi_1$, welches der Ungleichung

$$\psi_0 \leqq \psi_1 \leqq \frac{\omega_2'}{2}$$

genügt, erhält man die Gleichung der diesem ψ entsprechenden Stromcurve.

Die Geschwindigkeitscomponenten folgen aus den Formeln

$$\xi = \frac{u}{V^2}, \quad \eta = \frac{v}{V^2} \text{ der}$$

$$\xi = \tfrac{1}{4} \frac{(\wp' \varphi)^2 + (\wp' i\psi)^2}{(\wp\varphi - \wp i\psi)^2} - (\wp\varphi + \wp i\psi) - \frac{2a}{3},$$

$$\eta = +\frac{i}{2} \frac{\wp' \varphi \, \wp' i\varphi}{(\wp\varphi - \wp i\psi)^2}. \qquad 8)$$

Aus der oben erwähnten Eigenschaft der Bilder aller Stromcurven $\psi = \psi_1$ in der ζ-Ebene, die Axe des reellen und den Kreis vom Radius ϱ normal zu schneiden, folgt ohne alle Rechnung, daß die Geschwindigkeiten am höchsten und tiefsten Punkt einer jeden Stromcurve ihre extremen Werthe, dagegen an der Stelle des stärksten Fallens oder Ansteigens denselben Werth $1/\varrho$ hat, der in der freien Oberfläche stattfindet.

Göttingen, August 1892.

A. Sella und W. Voigt,

Beobachtungen über die Zerreißungsfestigkeit von Steinsalz.

Mitgetheilt von W. Voigt.

Ueber das in der Ueberschrift genannte Problem liegt eine Untersuchung von Herrn L. Sohncke [1]) vor, die schon deshalb ein besonderes Interesse verdient, weil sie eine der ersten gewesen ist, welche überhaupt die Einwirkung mechanischer Kräfte auf krystallinische Körper studirt haben. Eine vollständige Aufklärung der dabei vorliegenden Verhältnisse erbracht zu haben, beansprucht der Verfasser selbst nicht, und so dürfte schon um der auch ihm noch zweifelhaft gebliebenen Fragen willen eine Wiederaufnahme seiner Experimente wünschenswerth erscheinen. Was mich aber besonders zu dieser Untersuchung antrieb, war meine, auch durch die im hiesigen Institut ausgeführten Beobachtungen des Herrn Kowalski [2]) genährte, Ueberzeugung, daß die eigentlichen Bedingungen für die gewaltsame Trennung des Zusammenhanges uns nicht einmal bei isotropen Körpern bekannt sind. Ich hegte die leise Hoffnung, daß, wie bezüglich der Elasticität erst das Studium der Krystalle uns die Mittel zum vollen Verständniß der Erscheinungen geliefert hat, welche die isotropen Körper zeigen, auch betreffs der Festigkeit ähnliches stattfinden möchte. Wenn nicht Alles trügt, haben die im Folgenden mitgetheilten Beobachtungen am Steinsalz bereits in dieser Hinsicht einen Beitrag geliefert.

Herr Sohncke hat rechteckige Prismen von Steinsalz, welche mit ihren Enden in geeignete Fassungen eingekittet waren, durch Zugkräfte zerrissen, die parallel einer Kante ausgeübt wurden. Damit die Trennung nicht innerhalb der Fassungen eintrat, waren die Stäbchen in ihrem mittleren Theile dünner gefeilt. Die Zerreißung fand hierbei so gut wie immer nach Würfelflächen statt; nur wenn die verdünnte Stelle die Form einer kurzen und dünnen Platte zwischen zwei dicken Klötzen hatte, wurden einige Male andere Rißflächen bemerkt; wir wollen diese Fälle aber zunächst außer Betracht lassen.

Die nummerischen Resultate, welche Herr Sohncke erhielt, sind die folgenden:

---

1) L. Sohncke, Pogg. Ann. Bd. 137, p. 177, 1869.

1) Kowalski, Wied. Ann. Bd. 36, p. 307, 1889.

Stabaxe	Querschnitt q	Tragfähigkeit $\bar{p}$ pro 1 □mm
1) Würfelnormale	$7{,}6 < q < 14{,}6$ □mm	35,0 Loth
[2) Pyramidenwürfelnormale	$3{,}2 < q < 6{,}46$ „	66,6 „]
3) Granatoëdernormale	$5{,}2 < q < 10{,}4$ „	69,7 „
4) Octaëdernormale	$2{,}2 < q < 5{,}15$ „	75,2 „

Dabei ist zu bemerken, daß die zweite Reihe nicht bei Stäben von quadratischem Querschnitt erhalten ist, sondern bei solchen, wo der dünnere Theil die Form einer kurzen Platte von 4—6 mm Breite und 0,75—1,70 mm Dicke besaß. Die Beobachtungen, aus welchen die vorstehenden Zahlen die Mittel sind, weichen bedeutend, bei den letzten drei Reihen bis nahe um 50% von einander ab.

Herr Sohncke vermuthet, daß nur die Größe der Componente der Zugkraft normal zur Spaltungsfläche für die Trennung des Zusammenhanges maßgebend ist, und schließt daraus, daß dann die Tragfähigkeit $\bar{p}$ in beliebiger Richtung durch die Tragfähigkeit $\bar{p}_0$ parallel der Würfelnormale gegeben sein müßte nach der Formel

$$\bar{p} = \frac{\bar{p}_0}{\cos^2(a, w)},$$

worin (a, w) den Winkel zwischen der Stabaxe und der Würfelnormalen senkrecht zur Bruchfläche bezeichnet.

Berechnet man nach dieser Formel aus der ersten Beobachtung, welche für $\bar{p}_0$ den Werth 35,0 Loth ergiebt, die drei letzten Beobachtungen, so erhält man resp. 43,8, 70,0 und 105 Loth, — Zahlen, welche den Autor gegen die gemachte Voraussetzung mißtrauisch machen, und welche deutlich hervortreten lassen, daß die vorliegenden Verhältnisse noch weitaus nicht aufgeklärt sind. —

Für die Wiederaufnahme der Beobachtungen war zu überlegen, ob und wie von den bei den früheren Beobachtungen wirkenden Fehlerquellen die wichtigsten sich vermeiden ließen.

Von ihnen halte ich für die bedenklichste die von Herrn Sohncke selbst hervorgehobene Gefahr, daß bei dem Zerreißen durch die ausgeübte Zugkraft nicht nur eine gleichförmige Längsdehnung, sondern daneben noch eine Biegung des untersuchten Stabes bewirkt wird. Der Einfluß, welchen eine nicht ganz centrisch wirkende Kraft besitzt, läßt sich leicht theoretisch auswerthen.

Es liege die Z-Axe in der Stabaxe, $z = c_1$ und $z = c_2$ entspreche zwei Querschnitten diesseits und jenseits der Rißfläche.

Dann kann man jederzeit für die in dem Prisma $c_1 < z < c_2$ wirkenden Molekulardrucke den Ansatz machen

$$X_z = Y_y = 0, \quad Z_z = -(f_1 x + f_2 y + f_3), \quad Y_z = Z_z = X_y = 0,$$

welcher zugleich den Hauptgleichungen und den Grenzbedingungen der Elasticität genügt. Wegen der allgemeinen Gleichungen

$$-x_x = s_{11} X_x + s_{12} Y_y + s_{13} Z_z + s_{14} Y_z + s_{15} Z_x + s_{16} X_y,$$

. . . . . .

in denen die s_{kk} die Elasticitätsmoduln der Substanz in Bezug auf das im Prisma feste System X, Y, Z bezeichnen, giebt dies:

$$\begin{aligned} x_x &= s_{13}(f_1 x + f_2 y + f_3), & y_z &= s_{43}(f_1 x + f_2 y + f_3), \\ y_y &= s_{23}(f_1 x + f_2 y + f_3), & z_x &= s_{53}(f_1 x + f_2 y + f_3), \\ z_z &= s_{33}(f_1 x + f_2 y + f_3), & x_y &= s_{63}(f_1 x + f_2 y + f_3). \end{aligned}$$

Der hieraus folgende Werth der lineären Dilatation λ in der durch die Cosinus α, β, γ gegebenen Richtung lautet:

$$\lambda = (f_1 x + f_2 y + f_3)(\alpha^2 s_{13} + \beta^2 s_{23} + \gamma^2 s_{33} + \beta\gamma s_{43} + \gamma\alpha s_{53} + \alpha\beta s_{63}).$$

Die Größe der gesammten auf einen Querschnitt q ausgeübten Zugkraft Z ist gegeben durch

$$Z = -\int Z_z \, dq,$$

die Coordinaten ξ, η ihres Angriffpunktes durch

$$\xi Z = -\int Z_z x \, dq, \quad \eta Z = -\int Z_z y \, dq.$$

Ist der Querschnitt q ein Rechteck von den Seiten $2a$ und $2b$ parallel X und Y, so wird $q = 4ab$ und

$$Z = f_3 q,$$

$$\xi Z = f_1 q \frac{a^2}{3}, \quad \eta Z = f_2 q \frac{b^2}{3}$$

oder

$$f_1 = \frac{3\xi f_3}{a^2}, \quad f_2 = \frac{3\eta f_3}{b^2}.$$

Betrachtet man nun die Größe der innern Spannung Z_z oder eine ihrer Componenten als maßgebend für das Zerreißen, so giebt die Formel

$$-Z_z = \frac{Z}{q}\left(1 + \frac{3\xi x}{a^2} + \frac{3\eta y}{b^2}\right)$$

den Einfluß der excentrischen Lage des Angriffspunktes an. Bei centrischer Lage ist ξ und η gleich 0, also die Spannung anf dem Querschnitt constant $= Z/q$, bei excentrischer ist sie in den Ecken $x = \pm a$, $y = \pm b$ um den Bruchtheil

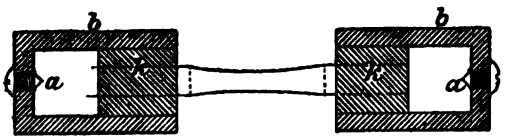
$$3\left(\pm\frac{\xi}{a}\pm\frac{\eta}{b}\right)$$

größer. Um den gleichen Bruchtheil ist also die Tragfähigkeit verringert.

Man erkennt ohne Weiteres, daß hier eine Quelle enormer Fehler vorliegt; sind die Seitenlängen $2a$ und $2b$ je gleich 2 mm, so giebt eine Excentricität $\xi = \eta = 0{,}1$ mm einen Fehler von 3/5 des Gesammtbetrages. Ein solcher Fehler war aber bei Herrn Sohncke's Einrichtung garnicht zu vermeiden.

Die Rechnung führt auf das analoge Resultat, wenn man statt der Spannung die lineäre Dilatation in irgend einer Richtung als maßgebend für das Zerreißen betrachtet.

Hiernach mußte es meine erste Sorge sein, eine Einrichtung zu treffen, die eine centrische Belastung einigermaßen sicherte. Dies suchte ich auf folgende Weise zu erreichen (s. d. Fig.).



In der Dicke der zu untersuchenden Prismen wurde ein stählerner Dorn hergestellt und mit diesem in zwei vierkantige Messingklötze k, k je ein nahezu quadratisches Loch eingeschlagen. Hierauf wurden an die Klötze kräftige Messingbügel b, b gelöthet und die so hergerichteten Klötze auf den auf der Drehbank genau laufend eingespannten Dorn aufgesetzt. Jetzt ließ sich durch den Bügel bei a ein Loch bohren, dessen Axe genau in die Axe des Dornes fiel, und eine gehärtete Schraube einfügen, deren stumpfwinkelige Spitze nun auch in die Axe der vierkantigen Oeffnung der Fassung fiel. Die Stäbchen wurden in zwei gleiche genau anschließende Fassungen mit Wachs-Colophonium-Kitt befestigt und dann mit der Schraube der obern Fassung auf einen horizontal zwischen zwei Stelltischen liegenden Stahlstab aufgehängt; auf die Spitze der untern Schraube wurde ein geeignet gestalteter Bügel gelegt, welcher die Wagschale trug, die zum Aufnehmen des belastenden Gewichtes bestimmt war. Auf diese Weise war wohl so vollkommen, als überhaupt technisch möglich, die centrische Belastung und damit die gleichförmige Spannung des Stäbchens über den Querschnitt erreicht. Wie groß die übrigbleibenden Fehler noch waren, ließ sich nicht bestimmen; jedenfalls erschienen die stark gespannten Stäbe bei der Betrachtung im polarisirtem Lichte vor einem Glimmerblättchen vollständig homogen gefärbt.

Die Genauigkeit hätte sich nach der obigen Formel durch eine Vergrößerung des Querschnittes steigern lassen. Indessen war hier eine ziemlich tief liegende Grenze durch den Umstand gegeben, daß mit dem Querschnitt die Grenzbelastung wächst und der Kitt auch bei Zusatz von viel Colophonium nicht mehr hielt, wenn ein Gewicht von ca. 20 kg am Stäbchen wirkte. Harter Kitt verlangte überdies größere Hitze bei der Verwendung und steigerte so die Gefahr des Zerspringens der Krystallpräparate. Wir haben uns demgemäß meist auf Querschnitte zwischen 4 und 9 qmm und Belastungen unterhalb 12 kg beschränkt. —

Eine weitere Fehlerquelle scheint mir bei den Sohncke'schen Beobachtungen die Form der Stäbchen zu bieten.

Dieselbe zeigte, wie oben gesagt, ein dünnes mittleres Prisma zwischen zwei dickeren Endprismen, welche in die Fassungen gekittet wurden. Aber es ist bei dieser Gestalt, und zwar um so mehr, je kürzer das mittlere Stück gegen seine Dicke ist, durchaus unwahrscheinlich, daß an der Bruchstelle die Spannung sich gleichmäßig über den Querschnitt vertheilt, wie dies doch die Voraussetzung der ganzen Berechnung ist. Ferner waren die Stäbchen nur mit der Feile bearbeitet, also höchst wahrscheinlich an der Oberfläche, und zwar je nach der Orientirung in verschiedener Weise, mit feinen Sprüngen und Rissen bedeckt, und diese können sehr leicht ein vorzeitiges Brechen veranlassen, selbst wenn sie nur wenig tief gehen.

Beide Uebelstände suchte ich auf folgende Weise zu umgehen.

Nachdem die Stäbe in regelmäßiger prismatischer Form mattgeschliffen hergestellt waren, wurden auf ihren vier Seitenflächen mittelst eines Cylinders von ca. zwanzig Centimetern Durchmesser flache Höhlungen eingeschliffen, sodaß jeder Stab nach der Mitte hin sich sehr allmählig verjüngte (s. d. Fig.). Daß die Höhlungen auf allen 4 Seiten gleich tief waren und gleichmäßig lagen, war dann gewährleistet, wenn ihre oberen und unteren Begrenzungen sich rings um das Stäbchen her genau an einander anschlossen. Diese Höhlungen wurden fein polirt, um alle oberflächlichen Störungen zu vermeiden.

Bei den zuerst angefertigten Stäbchen (I N. 1—6, IV, V, VI, VII, VIII, IX) waren die Höhlungen etwa 20 mm lang und 0,5 mm tief; da bei ihnen aber das Zerreißen meist nahe bei der dünnsten Stelle eintrat, so wurden der leichtern Herstellung wegen bei den späteren (I Nr. 7—12, II, III, X, XI, XII, XIII) die Höhlungen nur etwa 12 mm lang und 0,15 mm tief eingeschliffen. Diese geringe Verdünnung der Stäbchen nach der Mitte zu hat sich aber

in einigen Fällen als nicht ganz ausreichend erwiesen; wenigstens geschah hier das Zerreißen häufig gerade an einer Grenze der Höhlung.

Die Firma Dr. W. Steeg und Reuter hat nach der gegebenen Anweisung die Präparate in ausgezeichneter Weise hergestellt, und ich glaube, daß hierdurch auch in Hinsicht auf das Beobachtungsmaterial das überhaupt Mögliche erreicht ist.

Die Belastung geschah durch langsam zufließendes Quecksilber, das aus einem am Ende horizontal umgebogenen engen Rohr in das auf der Wagschale stehende Gefäß floß, ohne so durch seine Geschwindigkeit einen verticalen Stoß auszuüben. Im Moment des Zerreißens wurde der Zufluß durch Drehen eines Hahnes unterbrochen. Um einen etwaigen Einfluß länger andauernder Belastung zu vermeiden, wurde von Anfang an ein solches Gewicht auf die Wagschale gelegt, daß der ganze Versuch in einigen Minuten zu Ende ging; ein Einfluß der innerhalb dieser Grenzen noch variirenden Dauer konnte nicht bemerkt werden.

Durch alle diese Vorsichtsmaßregeln ist zwar die Uebereinstimmung unserer Beobachtungen unter sich erheblich besser geworden, sie erreicht aber doch noch längst nicht das sonst bei physikalischen Messungen, z. B. Elasticitätsuntersuchungen, erreichbare Maaß. Der Grund ist leicht einzusehen. Bei den Elasticitätsbeobachtungen ist die gemessene Größe (z. B. der Pfeil der Biegung eines Stabes) das Product des gesetzmäßigen Zusammenwirkens aller Theile des deformirten Körpers; in Folge dessen kommen lokale Störungen, Inhomogenitäten, Sprünge u. dergl. in kaum merklicher Weise zur Wirkung. Bei den Festigkeitsbestimmungen sind dagegen aber jene lokalen Störungen das eigentlich Ausschlaggebende; an einer fehlerhaften und geschwächten Stelle beginnt der Sprung, der sich unaufhaltsam ausbreitet, wie das schon daraus hervorgeht, daß in den meisten Fällen der Riß nicht genau durch die am meisten gespannte dünnste Stelle des Präparates hindurchgeht, sondern mitunter erheblich seitwärts verläuft. Ob solche fehlerhafte Stellen im Material selbst liegen oder durch die Bearbeitung entstanden sind, ist selten zu entscheiden; bemerkenswerth ist, daß die am schlechtesten übereinstimmenden Reihen an Stäbchen erhalten sind, die keine vollständig ebenen Spaltungsflächen zeigten, und daß mehrfach Stäbchen, welche schon vor der Beobachtung wegen kleiner Vertiefungen in der polirten Oberfläche, die wohl von Hohlräumen im Steinsalz herrührten, als verdächtig notirt waren, schließlich in der That eine besonders geringe Tragfähigkeit erwiesen.

Von den Beobachtungen ist der größere Theil von Herrn Sella ausgeführt, der kleinere von mir.

Die Untersuchung complicirte sich außerordentlich durch einen Umstand, dessen Entdeckung wir als das wichtigste Resultat unserer Arbeit betrachten.

Die Beobachtungen haben nämlich mit voller Sicherheit erwiesen, daß die Tragfähigkeit eines rechteckigen Prismas von krystallinischer Substanz nicht allein von der Orientirung der Prismenaxe, parallel welcher der Zug wirkt, abhängt, sondern in sehr starkem Maaße auch von der Orientirung der das Prisma begrenzenden Seitenflächen.

Diese ganz überraschende Thatsache widerlegt mit einem Schlage die oben citirte Vermuthung Herrn Sohncke's, daß der Werth der Componente des auf das Prisma ausgeübten Zuges senkrecht zur Spaltungsfläche, längs deren der Bruch geschieht, für die Trennung des Zusammenhanges maßgebend wäre, — denn offenbar ist diese Componente von der Orientirung der Seitenflächen ganz unabhängig, — sie giebt auch dem gestellten Problem eine viel größere principielle Bedeutung.

Die durch sie bedingte Complication der Verhältnisse verlangte, um nur einigermaßen die stattfindenden Gesetzmäßigkeiten hervortreten zu lassen, eine sehr große Anzahl verschiedener Messungen, aber selbst die benutzten 13 verschiedenen Orientirungen geben noch keinen vollständigen Ueberblick. Wahrscheinlich ist ein solcher nur durch die Verbindung theoretischer Betrachtungen mit den Beobachtungen zu gewinnen, und als Material zur Prüfung einer zu erwartenden Theorie sind die im Folgenden mitgetheilten Zahlen in erster Linie zu betrachten. —

Die folgenden Tafeln enthalten zunächst eine kurze Characteristik der einzelnen Gattungen von Stäbchen und eine geometrische Darstellung ihrer Orientirung. Für letztere sind auf Kugelflächen, welche in bekannter Weise durch die Hauptaxenebenen (Würfelebenen) der Krystallform getheilt sind, die Richtungen der Längsaxen der untersuchten Stäbe, parallel welchen der Zug ausgeübt wurde, durch von kleinen Kreisen umschlossene Punkte, die Richtungen ihrer Querdimensionen durch Kreuze bezeichnet. So giebt ein Blick auf die Figur das vollständige Bild der Orientirung der betreffenden Präparate.

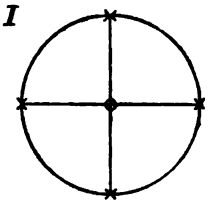
Ferner sind die Stäbchen jeder Gattung in der Reihenfolge ihrer Beobachtung aufgeführt, für jedes einzelne die Querdimen-

sionen der dünnsten Stelle und der daraus berechnete Querschnitt q, das Gewicht $\bar{P}$, bei welchem das Zerreißen eintrat, und die hieraus folgende Grenzspannung oder Tragfähigkeit pro Flächeneinheit $\bar{p} = \bar{P}/q$ mitgetheilt. Als Längeneinheit ist das Millimeter, als Gewichtseinheit das Gramm gewählt.

Daß zur Berechnung von $\bar{p}$ nicht der Querschnitt an der Bruchstelle, sondern der kleinste Querschnitt des Stäbchens benutzt ist, rechtfertigt sich dadurch, daß das Zerreißen an einer andern, als der schwächsten Stelle nur durch einen Fehler des Materiales bewirkt werden kann, und daß jedenfalls an der dünnsten Stelle eine Spannung $\bar{p} = \bar{P}/q$ gewirkt hat, ohne das Zerreißen dort zu bewirken.

Da die Uebereinstimmung der erhaltenen Werthe $\bar{p}$ im Allgemeinen nicht bedeutend ist, so sind alle mitgetheilten Zahlen auf 3 Decimalstellen abgekürzt.

I

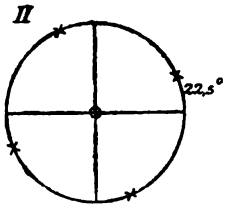


Zugrichtung parallel einer Krystallaxe, Querdimensionen parallel den andern; Orientirung gut. Bruch nach einer ebenen, glänzenden Spaltungsfläche.

Nr.	q	$\bar{P}$	$\bar{p}$	Bruchstelle
1)	2,25 × 2,40 = 5,39	3280	608	ca. 0,5 mm von der Mitte
2)	2,27 × 2,39 = 5,43	3050	562	1 „ „
3)	2,24 × 2,40 = 5,36	3070	572	0,5 „ „
4)	2,21 × 2,38 = 5,27	3080	584	0,6 „ „
6)	2,25 × 2,39 = 5,38	3060	568	0,7 „ „
7)	2,93 × 3,06 = 8,95	5120	566	2,5 „ „
9)	2,94 × 3,06 = 9,08	5300	588	fast centrisch
10)	2,95 × 3,06 = 9,03	4840	537	„
11)	2,93 × 3,06 = 8,98	4990	556	1 mm von der Mitte
	Mittelwerth $\bar{p} = 571$.			

Ausgeschlossen ist Nr. 5), welches bei $q = 5{,}39$, $\bar{p} = 529$ ergab, da es in zu weiten Fassungen eingekittet und demgemäß schlecht centrirt war, Nr. 8) mit $q = 9{,}05$, $\bar{p} = 523$ wegen einer ziemlich großen Grube auf der Mitte der einen Fläche, Nr. 12 mit $q = 8{,}98$, $\bar{p} = 500$ wegen unregelmäßiger Bruchfläche, die auf Störung der Krystallsubstanz an der Bruchstelle deutete. Ueberhaupt zeigten die dickeren Stäbchen, welche aus einem andern Stück gefertigt waren, als die dünneren, meist kleine Schäden, einzelne feine Poren auf den Flächen und kleine Scharten in den Kanten.

II

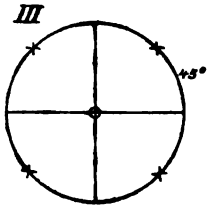


Zugrichtung parallel einer Krystallaxe, Querdimensionen um 22½° gegen die andern geneigt; Orientirung gut. Bruch nach einer ebenen, glänzenden Spaltungsfläche.

Nr.	q	$\bar{P}$	$\bar{p}$	Bruchstelle
1)	2,16 × 2,19 = 4,73	3120	660	ca. 0,5 mm von der Mitte
2)	2,17 × 2,18 = 4,73	3360	710	„ 1,4 „ „
3)	2,16 × 2,17 = 4,68	3170	678	„ 0,2 „ „
4)	2,16 × 2,17 = 4,68	3400	726	„ 1,4 „ „
5)	2,16 × 2,18 = 4,71	3550	753	„ in der Mitte
6)	2,15 × 2,16 = 4,64	3350	721	„ 1,2 „ von der Mitte
7)	2,17 × 2.18 = 4,73	3540	748	„ 0,8 „ „

Mittelwerth $\bar{p}$ = 714.

III

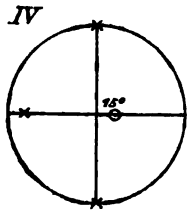


Zugrichtung parallel einer Krystallaxe, Querdimensionen um 45° gegen die andern geneigt; Orientirung gut. Bruch nach einer ebenen, glänzenden Spaltungsfläcke.

Nr.	q	$\bar{P}$	$\bar{p}$	Bruchstelle
1)	2,19 × 2,21 = 4,84	4570	945	ca. 1,6 mm von der Mitte
2)	2,18 × 2,18 = 4,76	4340	913	„ 0,2 „ „
3)	2,19 × 2,19 = 4,80	4330	903	„ 0,8 „ „
4)	2,22 × 2,22 = 4,92	4220	858	„ 0,6 „ „
5)	2,19 × 2,20 = 4,82	4540	941	„ 0,8 „ „
6)	2,20 × 2,21 = 4,86	4330	890	in der Mitte
7)	2,19 × 2,21 = 4,84	4680	967	„ 1,8 „ von der Mitte.

Mittelwerth $\bar{p}$ = 917.

IV

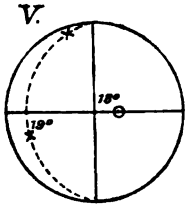


Zugrichtung in einer Würfelebene um 15° gegen eine Krystallaxe geneigt, eine Querdimension in derselben Würfelebene; Orientirung gut. Bruch nach einer ebenen, glänzenden Spaltungsfläche.

Nr.	q	$\bar{P}$	$\bar{p}$	Bruchstelle
1)	2,34 × 2,37 = 5,54	3070	554	ca. 0,6 mm von der Mitte
2)	2,35 × 2,39 = 5,62	3050	543	„ 0,4 „ „
3)	2,36 × 2,40 = 5,64	2820	500	in der Mitte
4)	2,35 × 2,41 = 5,66	3290	582	„ 0,3 „ von der Mitte
5)	2,34 × 2,41 = 5,63	3310	588	„ 0,4 „ „

Mittelwerth $\bar{p}$ = **553.**

V.

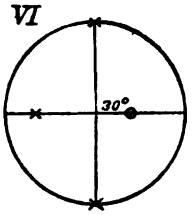


Zugrichtung in einer Würfelebene um 18° gegen eine Axe geneigt, eine Querdimension im Winkel 19° gegen dieselbe Würfelebene; Orientirung befriedigend. Bruch nach einer glänsenden, ebenen Spaltungsfläche.

Nr.	q	$\bar{P}$	$\bar{p}$	Bruchstelle
1)	2,71 × 2,83 = 7,67	3450	450	ca. 1 mm von der Mitte
2)	2,65 × 2,74 = 7,26	3570	492	„ 0,5 „ „
3)	2,66 × 2,78 = 7,40	3150	425	„ 0,5 „ „
4)	2,67 × 2,77 = 7,39	3650	494	„ 2 „ „
5)	2,69 × 2,72 = 7,31	3540	489	„ 0,7 „ „
6)	2,68 × 2,75 = 7,37	3460	469	„ 0,5 „ „

Mittelwerth $\bar{p}$ = **470.**

VI.

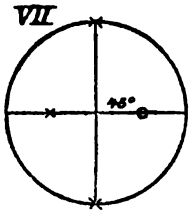


Zugrichtung in einer Würfelebene im Winkel 30° gegen eine Krystallaxe, eine Querdimension in derselben Würfelebene; Orientirung gut. Bruch nach einer meist ebenen Spaltungsfläche.

Nr.	q	$\bar{P}$	$\bar{p}$	Bruchstelle
1)	2,40 × 2,40 = 5,75	4250	739	ca. 2 mm von der Mitte
2)	2,40 × 2,45 = 5,89	4190	712	„ 0,8 „ „
3)	2,41 × 2,45 = 5,90	4410	747	„ 0,2 „ „
5)	2,41 × 2,45 = 5,90	4560	773	„ 0,4 „ „
6)	2,39 × 2,43 = 5,81	4140	713	„ 1,2 „ „

Mittelwerth $\bar{p}$ = **737.**

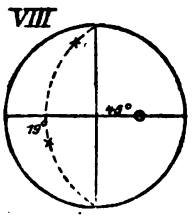
Ausgeschlossen ist Nr. 4 mit q = 5,86 und $\bar{p}$ = 678 wegen stark unebener Bruchfläche.

VII 

Zugrichtung in einer Würfelebene unter 45° gegen eine Krystallaxe, eine Querdimension in derselben Würfelebene; Orientirung gut. Bruch nach ein, zwei oder vier meist ebenen und glänzenden Spaltungsflächen, die häufig das Stäbchen durchsetzten, sodaß es in mehr als zwei Stücke zerfiel.

Nr.	q	$\bar{P}$	$\bar{p}$	Bruchstelle	Bruchfläche
1)	2,00 × 2,05 = 4,10	4280	1040	ca. 0,5 mm v. d. Mitte	1
2)	2,01 × 2,04 = 4,11	4790	1170	„ 2 „ „	1
3)	2,00 × 2,00 = 3,99	4830	1210	„ 3,5 „ „	1
4)	2,00 × 2,02 = 4,04	4330	1070	nahe d. Mitte	1
5)	1,96 × 2,04 = 4,00	4710	1180	„ 2 „ v. d. Mitte	2
6)	1,99 × 2,01 = 4,01	4210	1050	„ 1,5 „ „	1
7)	2,04 × 2,04 = 4,16	5520	1320	„ 0,5 „ „	4

Mittelwerth $\bar{p}$ = 115o.

VIII 

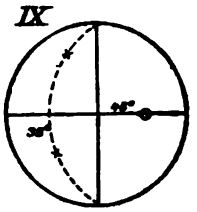
Zugrichtung in einer Würfelebene, um 45° gegen eine Krystallaxe, eine Querdimension um 19° gegen dieselbe Würfelebene geneigt; Orientirung gut. Bruch meist nach zwei verzerrten Spaltungsflächen [1]).

Nr.	q	$\bar{P}$	$\bar{p}$	Bruchstelle
1)	2,75 × 2,77 = 7,62	11930	1570	ca. 2 mm von der Mitte
2)	2,69 × 2,77 = 7,47	12030	1610	nahe der Mitte
4)	2,67 × 2,72 = 7,28	11250	1550	ca. 1 „ von der Mitte
5)	2,67 × 2,72 = 7,27	12690	1750	„ 2 „ „

Mittelwerth $\bar{p}$ = 162o.

Ausgeschlossen ist Nr. 3) mit $q = 7{,}63$, $\bar{p} = 1180$ wegen der auffälligen Kleinheit des letzteren Werthes; ein Schaden war im Voraus am Stäbchen nicht wahrzunehmen.

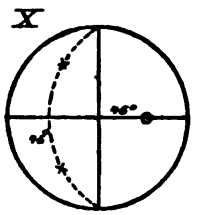
1) Bei den Stäbchen der Gattungen VIII, IX und X durchsetzten die beiden Spaltungsflächen häufig das Stäbchen nicht ganz, sondern trafen sich in der Mitte. Die hier entstehende Kante erschien öfter durch eine schmale Fläche von unregelmäßiger Form — ungefähr einer Granatoëderfläche parallel verlaufend — abgestumpft.



Zugrichtung in einer Würfelebene, um 45° gegen eine Krystallaxe, eine Querdimension um 38° gegen dieselbe Würfelebene geneigt; Orientirung befriedigend. Bruch gewöhnlich nach zwei unebenen Spaltungsflächen.

Nr.	q	$\bar{P}$	$\bar{p}$	Bruchstelle
1)	2,51 × 2,65 = 6,66	11510	1730	nahe der Mitte
2)	2,51 × 2,62 = 6,57	10770	1640	ca. 3 mm davon
3)	2,53 × 2,66 = 6,72	11210	1670	nahe der Mitte
4)	2,55 × 2,63 = 6,69	11150	1670	„
5)	2,54 × 2,65 = 6,74	13200	1960	ca. 2 mm davon.

Mittelwerth $\bar{p}$ = **173o.**

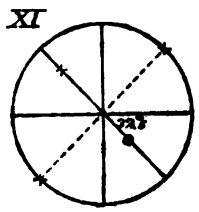


Zugrichtung in einer Würfelebene unter 45° gegen eine Krystallaxe, die Querdimensionen um 45° gegen dieselbe Würfelebene geneigt. Orientirung befriedigend. Bruch meist nach zwei unebenen Spaltungsflächen, die sich mitunter kreuzen.

Nr.	q	$\bar{P}$	$\bar{p}$	Bruchstelle
1)	2,18 × 2,25 = 4,90	8740	1780	ca. 4 mm von der Mitte
2)	2,18 × 2,21 = 4,81	8960	1860	„ 4 „ „
3)	2,18 × 2,22 = 4,85	8810(?)	1820	„ 4 „ „
4)	2,19 × 2,21 = 4,83	8620	1790	„ 4 „ „
5)	2,20 × 2,21 = 4,85	9200	1900	nahe der Mitte
6)	2,18 × 2,23 = 4,86	8890	1830	„ 5 „ von der Mitte
7)	2,20 × 2,22 = 4,88	9070	1860	„ 3 „ „

Mittelwerth $\bar{p}$ = **184o.**

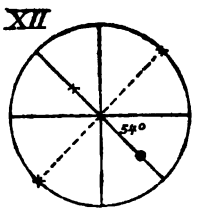
Stäbchen Nr. 1) und 4) sind als etwas schadhaft nur mit halbem Gewicht bei der Bestimmung des Mittelwerthes berücksichtigt. Nr. 3) zerbrach in Folge eines Stoßes wohl etwas vorzeitig.



Zugrichtung in einer Granatoëderfläche, um ca. 32°,5 gegen eine Krystallaxe geneigt, eine Querdimension in derselben Granatoëderfläche; Orientirung sehr abweichend. Bruch nach einer mäßig glatten Spaltungsfläche.

Nr.	q	$\bar{P}$	$\bar{p}$	Orientirung	Bruchstelle
1)	$2{,}22 \times 2{,}23 = 4{,}97$	11140	2240	35°	ca. 3 mm v. d. Mitte
2)	$2{,}22 \times 2{,}23 = 4{,}94$	9340	1890	32°	„ 3 „ „
3)	$2{,}18 \times 2{,}20 = 4{,}78$	8270	1730	31°	„ 3 „ „
4)	$2{,}21 \times 2{,}21 = 4{,}88$	8020	1640	29°	„ 2 „ „
6)	$2{,}19 \times 2{,}19 = 4{,}80$	8200	1710	31°	„ 0,5 „ „
7)	$2{,}21 \times 2{,}23 = 4{,}92$	9910	2010	34°	„ 3 „ „
	Mittelwerth $\bar{p} =$	**187o,**		32,4°.	

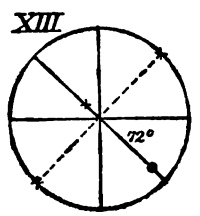
Die hier besonders große Verschiedenheit der einzelnen $\bar{p}$ erklärt sich zum Theil aus der verschiedenen Orientirung. Ausgeschlossen ist Nr. 5) mit $q = 4{,}90$ wegen des sehr kleinen Werthes $\bar{p} = 1400$.



Zugrichtung in einer Granatoëderfläche unter 54⅓° gegen eine Krystallaxe geneigt, eine Querdimension in derselben Granatoëderfläche; Orientirung ziemlich gut. Bruch nach ein oder zwei meist unebenen Spaltungsflächen.

Nr.	q	$\bar{P}$	$\bar{p}$	Bruchstelle	Flächenzahl
1)	$2{,}15 \times 2{,}20 = 4{,}74$	10080	2130	nahe d. Mitte	1
3)	$2{,}16 \times 2{,}19 = 4{,}74$	10520	2220	„	1
4)	$3{,}13 \times 2{,}18 = 4{,}63$	11680	2520	„	2
5)	$2{,}16 \times 2{,}20 = 4{,}74$	10660	2250	„	2
6)	$2{,}17 \times 2{,}19 = 4{,}75$	9080	1910	ca. 3 mm v. d. Mitte	1
7)	$2{,}15 \times 2{,}18 = 4{,}68$	8860	1890	„ 3 „ „	1
	Mittelwerth $\bar{p} =$	**215o.**			

Ausgeschlossen ist Nr. 2 mit $q = 4{,}78$ und $\bar{p} = 1850$ als verdächtig.



Zugrichtung in einer Granatoëderfläche unter 72° gegen eine Krystallaxe geneigt, eine Querdimension in derselben Granatoëderfläche; Orientirung gut. Bruch nach zwei unebenen Spaltungsflächen.

Nr.	q	$\bar{P}$	$\bar{p}$	Bruchstelle
1)	2,12 × 2,18 = 4,64	10570	2280	ca. 3 mm von der Mitte
2)	2,15 × 2,19 = 4,70	9590	2040	„ 3 „ „
3)	2,12 × 2,18 = 4,62	10800	2340	„ 3 „ „
4)	2,13 × 2,19 = 4,67	11030	2360	„ 2 „ „
5)	2,14 × 2,20 = 4,71	10590	2250	„ 3 „ „
6)	2,14 × 2,21 = 4,72	10230	2170	„ 1 „ „

Mittelwerth $\bar{p} = 224_0$.

Daß der Werth $\bar{p}$ für die Gattung XIII größer als der für XII ausgefallen ist, liegt offenbar nur daran, daß bei XII einige Stäbchen besonders abweichend kleine Werthe ergeben haben, nach Symmetrie muß offenbar XII den größten Werth $\bar{p}$ liefern.

Von den vorstehend aufgeführten 13 Gattungen von Stäbchen hat Herr Sohncke I, VII und XII benutzt; reducirt man die von ihm mitgetheilten Zahlen auf Gramme, indem man benutzt, daß ein preußisches Loth = 15,59 gr ist, so erhält man

I	VII	XII
545	1085	1170;

wir fanden resp.

571	1150	2150.

Namentlich die letzte Zahl läßt die Wirkung der verbesserten Beobachtungsmethode hervortreten.

Was nun das vollständige System der von uns erhaltenen Werthe angeht, so überrascht zunächst ihre große Verschiedenheit; die Gattung V liefert für $\bar{p}$ die untere Grenze mit 470 g, die Gattung XIII die obere mit 2240 g, welche nahezu das fünffache von jener ist.

Zur bequemeren Uebersicht wollen wir die Resultate in einige Reihen gruppiren.

1) Stäbe mit der Längs- und einer Querrichtung in einer Würfelebene.

Bezeichnet φ den Winkel der Längsaxe mit einer Krystallaxe, so entspricht sich:

$\varphi =$	0°	15°	30°	45°
$\bar{p} =$	571	553[1])	737	1150.

2) Stäbe mit der Längs- und einer Querrichtung in einer Granatoëderfläche.

1) Dieser Werth dürfte wohl nur durch einen Zufall etwas kleiner sein als der vorhergehende.

Bezeichnet ψ den Winkel der Längsaxe gegen eine Krystallaxe, so entspricht sich:

$\psi =$	0°	32°	54½°	72°	90°
$\bar{p} =$	917	1870	2150	2240	1840.

3) Stäbe mit der Längsrichtung in einer Krystallaxe.

Bezeichnet χ den Winkel der Querdimensionen gegen die beiden anderen Axen, so entspricht sich:

$\chi =$	0°	22½°	45°
$\bar{p} =$	571	714	917.

4) Stäbe mit der Längsrichtung in der Halbirungslinie des Winkels zweier Krystallaxen.

Bezeichnet ω den Winkel der einen Querdimension gegen die Ebene derselben zwei Axen, so entspricht sich:

$\omega =$	0°	19°	38°	45°
$\bar{p} =$	1150	1620	1730	1840.

Von diesen Reihen erwecken die letzten beiden das größte Interesse, denn sie sprechen die bereits oben angekündigte merkwürdige Thatsache aus, daß die Tragfähigkeit eines rechteckigen Prismas sehr bedeutend von der Orientirung seiner Seitenflächen abhängt. Für beide Axenrichtungen ist $\bar{p}$ am kleinsten, wenn eine der Seitenflächen in eine Würfelfläche fällt, am größten, wenn sie um 45° dagegen geneigt ist; das Verhältniß des Maximal- und Minimalwerthes ist beide Male fast genau gleich, nämlich = 1,6, was gewiß nicht zufällig ist.

Um die sonderbare Erscheinung weiter zu verfolgen, haben wir einige Sorten Stäbchen in rein prismatischer Form herstellen lassen und ihre Tragfähigkeit bestimmt, während sie an ihren Enden auf festen Lagern ruhten und in der Mitte belastet wurden.

Man betrachtet in der Regel die mittleren Querschnitte eines so gebogenen Stabes als unter der Wirkung longitudinaler Zugkräfte stehend, welche, wenn man die Z-Axe in die Gerade durch die Schwerpunkte der Querschnitte, die X-Axe in die Biegungsrichtung des Stabes legt, die Form haben:

$$Z_x = -f_1 x.$$

Das Moment M dieser Kräfte über den ganzen Querschnitt summirt, muß dem von außen wirkenden gleich sein, nämlich, wenn P die Belastung, L die Länge des Stabes, $\varkappa_y$ der Trägheitsradius seines Querschnittes um die Y-Axe ist,

$$M = -\int x Z_x \, dq = f_1 q \varkappa_y^2 = \tfrac{1}{4} PL.$$

Ist der Querschnitt rechteckig von der Breite B und der Dicke D, so ist $\varkappa_y^2 = D^2/12$, also

$$f_1 = \frac{3PL}{BD^3} \text{ und } Z_x = -\frac{3PLx}{BD^3}.$$

Die größte Spannung ist an der Oberfläche vorhanden, wo $x = D/2$ ist; es folgt sonach deren Maximalwerth $\bar{p}$ durch die Maximalbelastung $\bar{P}$ ausgedrückt:

$$\bar{p} = \frac{3\bar{P}L}{2BD^2}.$$

Nach dieser Formel sind die folgenden Beobachtungen berechnet.

Sie betreffen zunächst zwei Gattungen W I und W II von Prismen, deren Längsaxen in einer Krystallaxe liegen und deren Seitenflächen resp. entweder mit Würfelflächen oder Granatoëderflächen zusammenfallen, also der Orientirung nach mit I und III in der obigen Tafel übereinstimmen. Die Länge war bei allen gleich 20 mm.

W I (Seitenflächen parallel Würfelflächen).

Nr.	D	B	$\bar{P}$	$\bar{p}$	Bruchstelle
1)	1,97	1,95	309	1220	0,5 mm von der Mitte
2)	1,965	1,99	270	1060	0,5 „ „
4)	1,96	1,945	314	1260	0,3 „ „
5)	1,965	1,93	290	1160	0,3 „ „
6)	1,98	1,96	307	1200	0,5 „ „
7)	1,97	1,94	310	1230	0,3 „ „

Mittelwerth $\bar{p} = 1190$.

Ausgeschlossen ist Nr. 3 mit $\bar{p} = 968$ als verdächtig.

W II (Seitenflächen parallel Granatoëderflächen).

Nr.	D	B	$\bar{P}$	$\bar{p}$	Bruchstelle
1)	1,98	1,965	468	1820	0,5 mm von der Mitte
2)	1,96	1,97	504	1990	0,5 „ „
3)	1,96	1,985	484	1910	central
4)	1,98	1,96	485	1900	„
5)	1,98	1,96	487	1900	0,3 „ von der Mitte
6)	1,97	1,96	472	1860	0,5 „ „

Mittelwerth $\bar{p} = 1900$.

Das Verhältniß dieser beiden Werthe ist wiederum genau gleich 1,6, wie oben; die große Uebereinstimmung läßt schließen,

daß die Erscheinung keine secundäre, durch Störungen verursachte ist.

Ferner wurde eine Anzahl Stäbchen, deren Längsaxe die Winkel zweier Krystallaxen halbirte, und deren eine Fläche in eine Würfelebene, deren andere in eine Granatoëderebene fiel (Gattung VII der obigen Zusammenstellung) durch Biegen zerbrochen, und zwar so, daß die Biegung einmal nach der Richtung senkrecht zur Würfelfläche, das andere Mal senkrecht zur Granatoëderfläche stattfand; das Brechen geschah nahe central.

G I (Biegung normal zur Würfelfläche).

Nr.	L	B	D	$\overline{P}$	$\overline{p}$
1)	26,0	1,945	1,945	511	2710
2)	26,0	1,94	1,95	528	2790
3)	15,5	1,97	1,96	1119	3430
4)	26,0	1,95	1,97	600	3200
5)	26,0	1,93	1,95	652	3480
6)	26,0	1,94	1,95	671	3540

Mittelwerth $\overline{p} = 318$.

G II (Biegung normal zur Granatoëderfläche)

Nr.	L	B	D	$\overline{P}$	$\overline{p}$
1)	19,6	1,97	1,945	827	3270
2)	26.0	1,96	1,94	612	3240
3)	17,0	1,96	1,95	930	3160
4)	26,0	1,97	1,95	633	3300
5)	26,0	1,96	1,94	486	2580
6)	26,0	1,94	1,92	533	2890

Mittelwerth $\overline{p} = 307$.

Diese Werthe stimmen überein, es findet sich also keine Verschiedenheit der Tragfähigkeit, wenn man dasselbe Stäbchen nach seinen zwei verschiedenwerthigen Querdimensionen biegt.

Vergleicht man die absoluten Werthe der Grenzspannungen $\overline{p}$, welche die Biegungsbeobachtungen ergeben haben, mit den beim Zerreißen erhaltenen, so finden sich die ersteren viel größer als die letzteren. Dies Resultat ist gleichfalls vollständig unerwartet und im Widerspruch mit dem von Herrn Kowalski am Glase gefundenen. Die Untersuchung dieser Frage verschiebe ich indessen und kehre zu der eigentlichen Veranlassung der Biegungsbeobachtungen zurück.

Wenn durch Vorstehendes als unzweifelhaft festgestellt be-

trachtet werden darf, daß bei Dehnung und Biegung die Grenzspannung eines rechteckigen Prismas aus krystallinischer Substanz bei gleicher Richtung seiner Axe von der Orientirung seiner Seitenflächen abhängt, so bietet sich nun die Aufgabe, diese sonderbare Thatsache zu erklären. Die Heranziehung von Sprüngen, die in den verschieden orientirten Oberflächenschichten durch die Bearbeitung verschieden tiefgehend entstehen könnten, wird durch die beobachteten Thatsachen meines Erachtens vollkommen unmöglich gemacht. Es spricht dagegen die enorme Größe der erhaltenen Unterschiede, die tadellose Politur der Oberflächen und das durchaus regelmäßige optische Verhalten der gespannten Prismen im belasteten Zustande bei Betrachtung mit polarisirtem Lichte. Es spricht dagegen die Gleichheit des bei Biegung und Dehnung erhaltenen Verhältnisses Max : Min = 1,6, denn die Biegungsbeobachtungen waren mit eben geschliffenen Stäben, die Dehnungsbeobachtungen mit hohlgeschliffenen, die eine wesentlich verschiedene Bearbeitung erfahren hatten. Es spricht dagegen die vollkommene Uebereinstimmung des elastischen Verhaltens der Gattungen *W* I und *W* II, welche durch besondere Messungen constatirt ist. Und entscheidend widerlegt sie, wie mir scheint, die Thatsache, daß bei derselben Orientirung die Grenzspannung $\bar{p} = \bar{P}/q$ von der Größe des Querschnittes unabhängig ist; denn wenn die Querschnitte der Stäbe durch oberflächliche Sprünge geschwächt würden, müßte dies offenbar bei größeren Querschnitten in verhältnißmäßig geringerem Maaße stattfinden, als bei kleineren. Die mit der Gattung I angestellten Beobachtungen beweisen aber, daß, wenn überhaupt eine Verschiedenheit von $\bar{p}$ für dickere oder dünnere Stäbe vorhanden ist, diese gerade im entgegengesetzten Sinne stattfindet.

Nach mancherlei Ueberlegungen scheint uns gegenwärtig folgende Erklärung die einzig haltbare zu sein.

Daß die Oberflächenschicht eines festen Körpers in Folge der Molekularkräfte eine andere Constitution besitzt, als die innern Theile, ist nicht zu bezweifeln, und man muß, nachdem die Elasticitätsbeobachtungen eine Abhängigkeit der innern Drucke von der Richtung ergeben haben, annehmen, daß auch diese Oberflächenschicht mit der Orientirung der Grenzflächen wechselt. Ihre Dicke muß gegen die Dimensionen der gewöhnlich benutzten Beobachtungsobjecte unmerklich sein, denn sonst könnten die Elasticitätsmessungen einerseits nicht den theoretisch geforderten Zusammenhang zwischen Deformation und Dimension ergeben, andererseits müßte die Biegung eines Stabes von der Orientirung sei-

ner Seitenflächen abhängen, was, wie oben erwähnt, nach mit den Gattungen *W* I und *W* II angestellten Messungen in Wirklichkeit nicht stattfindet.

Aber diese unmerklich dünne, in ihrem Verhalten nach Innen zu stetig in den normalen Zustand der Materie übergehende Schicht kann trotzdem die Tragfähigkeit stark beeinflussen, wenn sie die Eigenschaft hat, bei einer geringeren Dehnung zu zerreißen, als ein Faden im Innern. Denn ein bei einer gewissen Dehnung entstehender Riß in der Oberflächenschicht bedeutet eine Schwächung des bezüglichen Querschnittes, und breitet sich nothwendig, da die innern Spannungen mit abnehmendem Querschnitt wachsen, über den ganzen Querschnitt aus.

Die Eigenschaft, welche die Tragfähigkeit bestimmt, würde hiernach, beim Steinsalz wenigstens, nicht eine Volumen- sondern eine Flächenfestigkeit sein, und da eine solche sowohl von der Orientirung der bezüglichen Fläche, als auch von der Lage der Zugrichtung in derselben abhängen muß, so ist begreiflich, daß die experimentelle Untersuchung der Zugfestigkeit sehr mannigfaltige und schwer zu übersehende Resultate liefern muß. Die Verhältnisse compliciren sich noch dadurch, daß man bei Prismen, die von krystallographisch verschiedenwerthigen Flächen begrenzt sind, von vorn herein nicht wissen kann, welches der beiden Flächenpaare dasjenige geringerer Oberflächenfestigkeit ist, auf welchem also das Brechen eigentlich begonnen hat. Von den von uns benutzten Stäben haben nur diejenigen der Gattungen I, II, III und X gleichwerthige Flächenpaare, geben also nur diese eindeutige Werthe.

Die Annahme dieser Oberflächenfestigkeit erklärt unseres Erachtens auch besonders ungezwungen die trotz des besten Materiales und trotz der größten aufgewandten Vorsicht noch immer nur mäßige Uebereinstimmung der erhaltenen Resultate, denn sie läßt die Einwirkung der mechanischen Behandlung ev. Beschädigung der Oberfläche auf die Tragfähigkeit als nahe selbstverständlich erscheinen.

Gegen die vorgeschlagene Erklärung würde geltend gemacht werden können, daß die Kanten der Prismen in Wahrheit scharf gekrümmte Cylinderflächen sind, daß also z. B. unsere Präparate I, II und III dieselben Flächen nur in verschiedener Größe besitzen, und daß sie hiernach gleiche Werthe $\bar{p}$ ergeben müßten. Indessen könnte man dagegen wohl mit Recht bemerken, daß einerseits bei so starker Krümmung die Oberflächenschicht geändert sein dürfte, andererseits ein Sprung in einer Kante eine Schwä-

chung des Querschnittes bewirkt, die nur unendlich klein ist gegen die durch einen Sprung in einer Fläche erzielte und deshalb vielleicht keine Wirkung äußert. Ueberdies sind bei der von uns benutzten Gestalt der Präparate diejenigen Elementarfäden, welche in den Kanten liegen, offenbar etwas weniger gespannt, als die übrigen. Eben diese Ueberlegungen veranlassen uns überhaupt, den Beginn des Zerreißens in eine Fläche zu legen und nicht in eine Kante, wozu man sonst wohl neigen könnte; auch würde die letztere Annahme bei Cylindern von stetig gekrümmtem Querschnitt Schwierigkeiten bereiten.

Noch scheint gegen unsere Erklärung die oben mitgetheilte Beobachtung zu sprechen, daß ein von zwei verschiedenwerthigen Flächenpaaren begrenztes rechteckiges Prisma, nach der einen oder andern Querdimension gebogen, merklich dieselbe Grenzspannung $\bar{p}$ aushält. Aber es ist wohl zu bedenken, daß, wenn die Biegung normal zu den Flächen größerer Festigkeit geschieht, die ihr benachbarten Theile der Flächen geringerer Festigkeit nahe dieselbe Spannung erfahren, wie die eine der ersteren, und demgemäß sehr wohl ihre Grenzspannung eher erreichen können, als die absolut am stärksten gespannte Fläche größerer Festigkeit.

Selbstverständlich halten wir aber die als Hypothese eingeführte Oberflächenfestigkeit noch fernerer Untersuchung bedürftig; darauf zielende Beobachtungsreihen sind bereits im Gange.

Ueber Neurogliazellen in peripherischen Nerven.

Von

Dr. E. Kallius.

Vorgelegt von Fr. Merkel.

Wenn man von Sehnerven, die nach der Methode von Ramon y Cayal behandelt worden sind, Schnitte anfertigt, so findet man in ihnen sehr zahlreiche, feine Ausläufer besitzende Zellen, die von dem Silberniederschlag schwarz gefärbt sind. Diese Zellen haben ganz das Aussehen von Neurogliazellen, wie man sie in Schnitten vom Centralnervensystem, das auf dieselbe Weise behandelt wurde, so häufig sieht und sind mit ihnen ohne Zweifel zu identificieren.

Der Zellleib ist ziemlich klein, ein Kern ist an den geschwärz-

ten Präparaten nicht zu erkennen. Die Ausläufer sind außerordentlich fein, alle nahezu von gleicher Stärke, nur einige zeigen an ihrem Ende eine knopf- oder spindelförmige Anschwellung. Auf Querschnitten wie auf Längsschnitten vom Opticus, haben die Zellen immer annähernd dieselbe Gestalt Durch die ganze Dicke der Sehnerven sind sie ziemlich gleichmäßig verteilt. Allerdings sieht man bei Schnitten von Sehnerven des Menschen und großer Tiere, die in toto eingelegt sind, die Zellen am zahlreichsten am Rande; allein wenn man der Länge nach halbierte oder sonst wie zerteilte Nerven in Schnitte zerlegt, so zeigt sich, daß diese scheinbar ungleiche Verteilung der Neurogliazellen nur an dem mangelhaften Eindringen der Fixierungsflüssigkeit oder der Höllensteinlösung liegt; denn an der jeweiligen Peripherie der Schnitte sind die Zellen am meisten gefärbt. Auch in den einzelnen Längsabschnitten des Opticus sind sie gleichmäßig verteilt, man findet sie vom Chiasma bis zum Eintritt der Nerven in den Bulbus.

Ihre Lage zu den einzelnen Bündeln der Nerven ist folgende. Zumeist findet man sie innerhalb der gröberen Bündel liegen, nur vereinzelte haben ihre Lage zwischen den Bündeln und senden hie und da einen Ausläufer in ein benachbartes Bündel hinein. Die Fortsätze der innerhalb der Bündel liegenden Zellen, gehen gewöhnlich nur bis zur Peripherie derselben und enden dort ab und zu in den oben beschriebenen Anschwellungen. Jedoch kommen fast bei jeder Zelle einzelne Ausläufer vor, die durch mehrere der umliegenden Bündel quer hindurch gehen.

Die Zahl der Zellen ist im Sehnerven sehr groß; an gut gelungenen Präparaten findet man sie fast ebenso dicht liegen, wie im Gehirn, das mit derselben Methode behandelt worden ist. Ihre Ausläufer bilden ein sehr feinmaschiges Flechtwerk, in dessen Lücken dann die Optikusfasern eingelagert sind.

Außer beim Menschen haben sich diese Neurogliazellen auch in den Sehnerven vom Pferd, Rind, Hund, Kaninchen und Maus gefunden.

Ihr Vorhandensein beweist die entwicklungsgeschichtlich genügend feststehende Thatsache, daß der Sehnerv als ein modificierter Gehirnteil anzusehen ist.

Beim Durchmustern der übrigen Gehirnnerven fanden sich derartige Zellen auch im Trigeminus, Akustikus und Vagus. In größerer Anzahl sind sie in diesen Nerven jedoch nur gleich nach ihrem Austritt aus dem Gehirn zu finden. Die Vermutung liegt nahe, daß diese Zellen auch in den übrigen Nerven, die sich in

analoger Weise wie die eben genannten entwickeln, vorkommen. Bisher ist es mir jedoch noch nicht gelungen sie dort nachzuweisen, ich bin jedoch mit dahin zielenden Versuchen beschäftigt.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

Februar 1892.

(Fortsetzung.)

14) St. Tomkovicz: Henryka Korneliusza Agryppy O ślachetności a zacności płci niewieściej, przekład Macieja Wirzbięty 1575. Ebd. 1891.
15) J. Rostafiński: Teodora Zawackiego Memoriale Oeconomicum 1616. Ebd. 1891.

Pamiętnik akademii umiejętności w Krakowie. (Denkschriften der Akademie der Wissenschaften in Krakau.) Wydziały: Filologiczny i historyczno-filosoficzny. Tom VIII. Kraków 1890. — Wydział matematyczno-pezyrodniczy. Tomu XVIII. Zeszyt. I. Ebd. 1891.

Rocznik zarządu akademii umiejętności w Krakowie. (Jahrbuch der Verwaltung der Akademie der Wissenschaften in Krakau.) Rok 1889. Ebd. 1890.

Rozprawy i Sprawozdania z posiedzén. (Sitzungsberichte und Abhandlungen.) Wydziału filologicznego. Tom XIV u. XV. Ebd. 1891. — Wydzialu historyczno-filozoficznego. Tom XXV u. Serya II. Tom I (= T. XXVI) u. T. II (= T. XXVII). Ebd. 1891. — Wydział matematyczno-przyrodniczy Sery II, Tom I (= Tom XXI) u. Tom III (= Tom XXIII). Ebd. 1891.

Monumenta medii aevi historica res gestas Poloniae illustrantia. Tomus XII. Ebd. 1891.

Collectanea ex Archivo Collegii Historici. Tomus VI. (Archivum Komisyi Historycznej. Tom VI. Ebd. 1891.

Kotula, B.: Rozmieszczenie roślin naczyniowych w Tatrach. (Distributio plantarum vasculosarum in montibus Tatricis.) Ebd. 1889—90.

Sprawozdania komisyi językowéj. (Berichte der sprachwissenschaftlichen Commission.) Tom IV. Ebd. 1891.

Sprawozdania komisyi fizyiografioznej. (Berichte der physiographischen Commission.) Tom XXV u. XXVI. Ebd. 1890. 91.

Zbiór wiadomości do antropologii krajowej. (Berichte der anthropologischen Commission.) Tom XIV u. XV. Ebd. 1890. 91.

Sprawozdania komisyi do badania historyi sztuki w Polsce. (Berichte der kunsthistorischen Commission.) Tom IV, Zeszyt 4 u. Tom V, Zeszyt 1. Index osobowy i rzeczowy do Tomów I, II, III i IV opracował Włodzimierz Demetrykiewicz. Ebd. 1891.

Atlas geologiczny Galicyi. Zeszyt IV. (mit Karten). Ebd. 1891.

März und April 1892.

Sitzungsberichte der Kön. Pr. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. XI—XXI. Berlin 1892.

Preussische Staatsschriften aus der Regierungszeit König Friedrichs II., im Auftrag d. Kön. Akademie der Wissenschaften hrsg. von H. v. Sybel und G. Schmoller. 8. Band. Berlin 1892.

Societatum Litterae. V. Jahrbuch 1891. Berlin 1891.

Helios. 9. Jahrgang. N. 10—12. Januar, Februar, März 1892. Berlin.

Königl. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig.
a. Berichte über die Verhandlungen. 1. Philologisch-historische Classe. 1891. II. III. 2. Mathematisch-physische Classe. 1891. IV, V.
b. Abhandlungen 1. des XIII. Bandes der philologisch-historischen Classe. N. IV: Die erzählenden Zeitformen bei Polybios v. Friedr. Hultsch. 2. des XVIII. Bandes der mathematisch-physischen Classe N. III u. IV: Studien zur Energetik der Pflanze v. W. Pfeffer. Ueber die Farbe der Ionen von W. Ostwald. Leipzig 1892.

Jahresbericht der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft. Leipzig. März 1892.

Germanisches Museum zu Nürnberg:
a. Katalog der im germ. Museum befindlichen Drechslerarbeiten des 16.—18. Jahrhunderts.
b. Katalog der Bronzeepitaphien des 15.—18. Jahrhunderts.
c. Anzeiger. Jahrgang 1891. No. 1. Januar u. Februar.
d. Mitteilungen. Jahrg. 1891. Nürnberg 1891.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik begr. durch Carl Ohrtmann. Band XXI. Jahrg. 1889. Heft 1. Berlin 1889.

Leopoldina. Heft XXVIII. N. 3—4. Febr. 1892. Halle a. S.

Handbuch der organischen Chemie, von Dr. F. Beilstein. Dritte Auflage. 1. Lieferung. Band 1. Lieferung 1. Hamburg u. Leipzig 1892.

Physikalisch-medicinische Gesellschaft zu Würzburg.
a. Sitzungsberichte. Jahrg. 1891. N. 6—9. Würzburg 1892.
b. Verhandlungen. N. F. XXV. Band. N. 7. Titel zu N. F. XXV. Band. 1890—91. Würzburg 1892.

Mittheilungen aus dem naturwissenschaftl. Verein für Neu-Vorpommern und Rügen in Greifswald. 23. Jahrgang. 1891. Berlin 1892.

Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. 27. Jahrgang. Erstes Heft. Leipzig 1892.

Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft v. Dr. Heinrich Hertz. Leipzig 1892.

Königl. Bairische Akademie der Wissenschaften zu München.
a. Philos.-philol. und historische Classe. Sitzungsberichte. 1891. Heft IV.
b. Mathem.-physik. Classe. Sitzungsberichte 1891. Heft 3. München 1892.

Studien über die Anwendung der Elektrolyse zur Darstellung, zur Veränderung und zur Zerstörung der Farbstoffe etc. von Prof. Dr. Friedrich Goppelsroeder (aus der „Elektrotechnischen Rundschau“. N. 18 und 19. 1891. Frankfurt a. M.

The Royal astronomical society
Monthly notices. Vol. LII. N. 4. 5. Febr. March 1892. London 1892.

The London mathematical society
Proceedings. N. 426—432. London 1892.

The Royal society
Proceedings. Vol. L. N. 305. 306. London 1892.

The Royal microscopical society
Journal 1892. Part. 2. April. London and Edinburgh 1892.

The zoological society of London
a. Proceedings for the year 1891. Part. IV. Nov. Dec.
b. Index to the proceedings 1881—1890.
c. Transactions. Vol. XIII. Part 4. London 1892.

(Fortsetzung folgt.)

Inhalt von Nr. 14.

Wilhelm Meyer, Die Göttinger Handschrift von Thomas Basin's Geschichte Karls VII. und Ludwigs XI. — *A. Pater*, Botanische Untersuchungen im Sommer 1892. — *W. Voigt*, Ueber Bewegung eines Flüssigkeitsstromes über einem gewellten Grunde. — *A. Sella* und *W. Voigt*, Beobachtungen über die Zerreissungsfestigkeit des Steinsalzes. — *E. Kallius*, Ueber Neurogliazellen in peripherischen Zellen. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Stuppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

21. December **№ 15.** 1892.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 5. November 1892.

Ueber die aus dem Bereiche der Vögel hergenommenen Attribute des Dionysos und seiner Thiasoten.

Von

Friedrich Wieseler.

Von den Attributen aus dem Vogelreiche haben die neueren kleineren Schriften über den Gott und seine Genossen nichts zu melden. Es giebt auch im Bacchischen Kreise keins, welches eine solche Bedeutung hätte wie der Adler für Zeus, der Pfau für Hera, der Rabe und der Schwan für Apollon, der Jynx, die Taube und der Schwan für Aphrodite; aber wir finden doch auch für Dionysos und seine Genossen Beispiele genug, mehrere als man bisher geahnt oder gewußt hat. Es wird sich also wohl der Mühe lohnen, dieselben zusammenzustellen und genauer zu erörtern.

Die alten Schriftsteller bieten uns freilich nur sehr wenige Beispiele.

Zu den belangreichsten gehört Athenäos in dem, was er nach Kallistratos über die Bacchische Pompa des Ptolemäos Philadelphos in B. V berichtet.

Aus der Grotte, welche dem Dionysoskinde als Behausung dient, fliegen περιστεραὶ καὶ φάσσαι καὶ τρυγόνες heraus (p. 200, c). Im Aufzuge befinden sich außer anderen συνωρίδες auch solche στροιθῶν (p. 200, f) und werden in Käfigen getragen ψιττακοὶ καὶ ταὼ καὶ μελεαγρίδες καὶ φασιανοὶ ὄρνιθες καὶ ἄλλοι αἰθιοπικοὶ πλήθει πολλοί (p. 201, b). Vögel hausen auch sonst in Grotten, vgl. die Κωρυκὶς πέτρα, κοίλη, φίλορνις, δαιμόνων ἀναστροφὴ bei Aeschyl. Eum. 22 fg. Wenn in der Grotte auch Götter verweilen, so wird man in der Regel anzunehmen haben, daß die Vögel zu ihnen in Beziehung stehen. Daß das für die an der ersten Stelle bei Athenäos genannten Vögel gilt, erhellt daraus, daß Tauben auch sonst bei dem Gotte vorkommen. Sie sind dem Dionysos mit der ihm eng verbundenen Aphrodite gemein. Die an der zweiten Stelle erwähnten Vögel kommen dem Dionysos wegen seiner Beziehungen zum Oriente zu.

Auch in den prächtigen Bäumen vor dem Eingange der Grotte des Dionysoskindes auf der durch den Fluß Triton gebildeten Insel Nysa nisten nach Diodor. III, 69 ὄρνεα παντοδαπὰ ταῖς φύσεσι, ἃ τὴν χρόαν ἔχει ἐπιτερπῆ καὶ τὴν μελῳδίαν προσηνεστάτην. Also darf man unter den Vögeln bei Dionysos auch solche, die sich durch ihren Gesang auszeichnen, voraussetzen.

Wenden wir uns nun zu den bildlichen Darstellungen.

In den Bildwerken findet es sich nur sehr selten, daß Dionysos einen Vogel in der Hand hat, wodurch die Zugehörigkeit dieses zu jenem außer Zweifel gesetzt wird. Das beachtenswertheste Beispiel dieser Art bietet ein auch in anderer Hinsicht merkwürdiges Gemälde an einer etwa aus dem dritten Jahrhundert v. Ch. stammenden, im Herzogl. Museum zu Gotha aufbewahrten unteritalischen, unseres Wissens noch gar nicht besprochenen Thonvase. Hier erscheint Dionysos mit einer Eule auf der linken Hand, während er mit der rechten einen Thyrsos hält. Die Eule bezieht man zunächst wohl auf den Dionysos Nyktelios (Welcker Griech. Götterlehre I, S. 443 fg., II, S. 631).

Sonst finden wir Eulen bei Dionysos auf Bildwerken noch drei Male.

Drei den Dionysos umschwirrende Eulen zeigt ein Sarder der früheren Hertz'schen Sammlung (Catal. of the collection formed by B. Hertz, London 1851 n. 510, Koner in der Arch. Ztg. IX, 1851, S. 99).

Auf dem Mosaik aus der Villa Nomentana bei Caylus Rec. d'antiq. T. VII, pl. XLII erscheinen in und an den Weinranken um Bacchus herum mehrere Vögel, darunter auch eine Eule.

Von größerem Interesse ist ein Relief, welches Dorow „Die Denkmale german. und röm. Zeit in den Rheinisch-Westfälischen Provinzen“ Bd. I, 1823, Taf. XIX, Fig. 5 abbildlich mitgetheilt und S. 47 fg. so beschrieben hat: „Eine Allegorie auf den Weinbau, 5 Fuß hoch, 1¾ Fuß breit, 8½ Zoll dick. Jüngerer Flötzkalk oder Muschelkalk mit vielen Versteinerungen, wie er bei Mainz und Frankfurt a. M. gewonnen wird. — Die Arbeit ist leicht und verräth einen guten Künstler. Ein Akanthusblatt ruht auf einem Hasen, zwei andere ähnliche Thiere — jedoch kleiner — tragen ausschießende Blätter, worauf zwei Genien stehen, deren Einer mit einem Vogel spielt. Aus dem Kelch des Hauptblatts erhebt sich der Kopf eines Jünglings bis zur Brust, — wahrscheinlich des Bachus. Diesem Kopfe entsprießt der Thyrsusstaab, um welchen sich, von den Händen des Jünglings gehalten, zwei Weinreben mit vollen köstlichen Trauben ranken. Zunächst dem Bachuskopfe steigt ein Ziegenbock auf der einen Rebe hinunter, dann kommen Vögel, und das Ganze wird oben auf der einen Rabe durch ein Eichhörnchen, auf der anderen durch eine ruhig sitzende Eule beschlossen“. Die beiden letzten Bildwerke erinnern an eine Stelle des ältern Philostratos Imag. II, 17 *Ἀμφιλαφεῖς δ' οὕτω τι οἱ βόθρυς, ὡς καὶ τῶν πετρῶν ἁπηρτῆσθαι, καὶ τῇ θαλάττῃ ἐπικρέμασθαι ὁπωρίζουσι δὲ προσπενόμενοι θαλάττιοί τε καὶ ἠπειρῶται ὄρνιθες. Τὴν γὰρ ἄμπελον ὁ Διόνυσος παρέχει κοινὴν πᾶσιν, πλὴν τῆς γλαυκός. Ἐκείνην δὲ μόνην ἄρα ἀπωθεῖται τῶν βοτρύων, ἐπειδὴ τοῖς ἀνθρώποις ἀναβάλλει τὸν οἶνον. Ὠὰ γὰρ τῆς γλαυκὸς εἰ φάγοι παιδίον, νήπιόν τε καὶ ἄοινον, ἀπεχθάνεται τῷ οἴνῳ πᾶσαν ἡλικίαν, καὶ οὔτ' ἂν πίοι καὶ φοβεῖται τοὺς μεθύοντας.* Mit den letzten Worten vgl. auch Philostr. Vit. Apollonii III, 40. In der That kennen wir kein Bildwerk, auf welchem eine Eule an einer Traube naschend dargestellt wäre.

Auch in einer Verwandlungssage des Dionysischen Kreises spielen Eulen eine Rolle.

Bei Antoninus Liberalis Transform. X, der nach Nikandros und Korinna berichtet, lesen wir, daß die Töchter des Minyas zu Orchomenos, die dem Bacchischen Dienst widerstrebten [1]), nachdem sie in Wahnsinn versetzt waren und das Kind der einen zerrissen hatten, verwandelt wurden, die eine in eine *νυκτερίς*, die andere in eine *γλαῦξ*, die dritte in eine *βύζα*. Auf dieselbe Sage bezie-

1) Bei Westermann Script. poet. histor. Gr. p. 210, Z. 1 ist gewiß vor *ἀπέβησαν* ausgefallen: *οὐκ*, vgl. Ovid. Metam. IV, 52 fg.

hen sich die Stellen Plutarchs Quaest. Gr. 38, Aelians Var. histor. III, 42 (welcher an der Stelle der *βύζα* eine *κορώνη* erwähnt).

Wir gehen jetzt von der Eule zu andern Vögeln bei Dionysos auf Bildwerken über.

Auf einem im Berliner Museum befindlichen rothfigurigen Vasenbilde strengen Stils (Gerhard Ges. Abhandl. Taf. LXVII, n. 1, A. Furtwängler Beschr. d. Vasensammlung im Antiquar. n. 2172) sieht man auf dem großen Phallos einer Dionysosherme einen Vogel („Raben"?) stehen und mit der Spitze seines Schnabels den Mund des Gottes berühren.

In einem in den Annali d. inst. arch. Vol. XIII, tav. F, a abgebildeten Vasenbilde hält Dionysos eine Gans oder einen Schwan auf der Hand, welche beiden Vögel in dem Bacchischen Kreise öfter vorkommen.

In einem in den Ann. d. inst. arch. Vol. XVII, t. M und der Élite des monum. céramogr. T. IV, pl. LXXXI abbildlich mitgetheilten Vasenbilde hält Stephani Compte rendu de la commiss. imp. archéol. pour l'ann. 1863, p. 78, Anm. 3 das Paar auf einem von Schwänen gezogenen Wagen mit großem Scheine nicht, wie früher angenommen ist, für Adonis und Aphrodite, sondern für Dionysos und Ariadne.

Zwischen diesen beiden befindet sich am Boden eine Gans, die Körner frißt, auf einem Vasenbilde im Stil des spätesten Verfalls zu St. Petersburg, vgl. Stephani Vasen-Sammlung der K. Ermitage Th. I, S. 301.

Derselbe Gelehrte führt im Compte rendu a. a. O. in Anm. 5 und 6 Vasengemälde mit der Darstellung des bald jugendlichen bald bärtigen Dionysos und seines Gefolges an, in denen Schwäne auftreten.

Einen Schwan vermuthet Chabouillet Catal. génér. et rais. des cam. et pierr. grav. de la biblioth. Impér. suivi de la descr. des autres monum. dans le cab. des méd. et antiq. p. 437 fg. auf einem Silbergefäße mit bacchischen Darstellungen.

Auch der Kranich oder Reiher findet sich bei Dionysos und Ariadne und sonst im Bacchischen Kreise (Stephani Compte rend. pour 1865, p. 132 fg.).

Auch in Darstellungen der Pflege des Dionysos als kleinen Kindes kommen Vögel vor, wenn auch nur sehr selten.

Wir wollen mit der beginnen, welche sich in Betreff des Vogels zunächst an die vorhererwähnten anschließt, obgleich die Beziehung des Vogels auf Dionysos uns nicht so sicher zu stehen scheint wie Stephani a. a. O. p. 78, Anm. 4 und p. 120 annimmt.

Es handelt sich um ein später in der Gazette archéol. 1879, pl. 3 abgebildetes Vasengemälde, welches früher dem Duc de Luynes gehörte, jetzt in der Nationalbibliothek zu Paris befindlich ist. Auf ihm ist dargestellt „ein Kind mit Stierkopf von einer Frau auf dem Schooße gehalten" und „es ist unzweideutig ausgesprochen, daß dieses Kind der kleine Dionysos ist. Denn nicht nur ist dem kleinen Gott eine Gans oder ein Schwan beigesellt, sondern es sind auch die in den Bildern der Außenseite auftretenden Personen sämmtlich vollkommen deutlich bezeichnete Satyrn und Maenaden, welche Thyrsos-Stäbe und Glieder eines Menschen in den Händen halten, den sie in wilder Raserei zerrissen haben." Stephani bemerkt a. a. O. p. 78, Anm. 4, „daß wenn das Thier eine Gans ist, der Ton auf der Geburt und Pflege des kleinen Gottes, dem Geschäft der Hausfrau, liegt, wenn es ein Schwan ist, auf dem üppigen Wesen des Weingottes." Im ersteren Falle wäre die Gans nicht als Attribut des Dionysos, sondern seiner Mutter oder Pflegerin zu betrachten. In dem anderen Falle müßte es sehr auffallen, wenn bei dem Dionysos ὠμηστής, ὠμάδιος oder ἀνθρωποροραίστης, der doch gewiß in dem Kinde mit Stierkopf zu erkennen ist (s. die Abhandlung über den Stierdionysos in diesen Nachrichten 1891, S. 371 fg., wo auch die anderen Besprechungen angeführt sind), gerade die Ueppigkeit des Weingottes betont wäre. Der Vogel befindet sich zu den Füßen des Weibes, wird also schon aus diesem Grunde auf dieses zu beziehen sein.

Demnach haben wir neu zu verzeichnen das Gemälde einer Apulischen Lekythos (abgebildet in den Ann. d. inst. arch. 1865 t. E, zuletzt besprochen von Heydemann „Dionysos' Geburt und Kindheit" S. 40, η), welches darstellt, wie Eros dem an der Brust einer sitzenden Nymphe saugenden Dionysos zum Spielen eine Taube bringt.

Wir kommen nun zu einigen Darstellungen, welche ganz sicher den Dionysos zeigen und bei ihm Vögel, die aber von uns nicht genau bestimmt werden können. Hierher gehört das Mosaik aus der Villa Nomentana (oben S. 518), auf dem nun die Eule sicher steht, und das Mosaik bei Bartoli Sepolcri (Rom 1697) tav. 14.

Dann ist eine Anzahl von Darstellungen zu berücksichtigen, hinsichtlich deren von den Erklärern zwischen Dionysos und Silen geschwankt und auch der Vogel zwiefach gefaßt wird.

Es handelt sich hier um die Münztypen der Makedonischen Stadt Mende, welche um so wichtiger sind als sie zu den älteren Darstellungen eines Vogels, der zu dem Dionysischen Kreise gehört, zu rechnen sind. Eine Uebersicht der Typen mit Abbil-

dungen giebt Head in dem Catalogue of the Gr. coins in the Brit. Mus., Macedonia etc., p. 80 fg. Andere Abbildungen bei Mionnet Descr. d. méd., Suppl. T. III, pl. VII, n. 1, Müller-Wieseler Denkm. d. a. Kunst, Bd. I, Taf. XVII, n. 8, und Bd. II, Taf. XXXI, n. 349 und in der Numism. Ztg. Bd. XVI, 1884, Wien 1885, Taf. IV, n. 14 und 15, in Sallet's Zeitschr. für Numismatik X, Taf. III, n. 3, XII, S. 358, Daremberg's und Saglio's Dictionn. des antiq. Gr. et Rom. I, 1, Fig. 698, Annuaire de la société Fr. de numismatique et d'archéologie T. III, P. I, 1868, pl. I, n. 40, Head in der Synopsis of the contents of the Brit. Mus., Coins and Medals, London 1880, pl. II, n. 9, und in der Hist. num. p. 187, Percy Gardner The types of the Gr. coins, pl. VII, n. 7. Die ältesten dieser Münzen zeigen nur einen Esel, nach Anderen ein Maulthier, auf der Vorderseite, theils allein, nur mit einem Weinstock dahinter oder mit einem Trinkgefäß darüber, theils in Verbindung mit einem Vogel, welcher aus dem After des Esels sich nährt, oder auf dem Rücken des Thiers, von dem Hintertheile desselben abgewandt, steht und Etwas im Schnabel hält, das gewiß ein Stück Mist sein soll. Auf den Münzen der zweiten und der dritten Periode erblickt man einen bärtigen auf dem Rücken des Thieres gelagerten Mann mit um den Unterleib oder Unterkörper geschlagenem Himation, welcher mit der Hand des ausgestreckten rechten Arms einen Kantharos, einmal ein Rhyton, hält; vor dem Reitthier meist der Vogel, der auf einem Weinstock steht; ausnahmsweise, z. B. in Heads Synopsis a. a. O., und im Catalog des Brit. Mus., Maced. p. 81, n. 4, ein Hündchen zwischen den Vorderbeinen und den Hinterbeinen des stehenden Reitthieres. Kleinere Silbermünzen der zweiten Periode zeigen auf der Vorderseite den nackten Silen neben dem Esel und auf der Rückseite den stehenden Vogel; dieser aber steht nicht auf einem Weinstock, sondern anscheinend unmittelbar auf der Erde, vgl. Mionnet Suppl. T. III, pl. VII; n. 4, im Catal. des Brit. Mus. p. 82, n. 5 und 6, Imhoof-Blumer Monn. Gr. pl. C, n. 19 und 20. Was nun die Deutung des Reiters anbelangt, so haben sich, während die älteren Numismatiker (angeführt mit Ausnahme von Eckhel Doctr. num. I, p. 72, Pellerin Rec. T. I, pl. 132, Müller Mus. Thorwaldsen n. 580, in J. Friedlaender's Repertorium der ant. Numismatik, herausg. von R. Weil. S. 143) sich für Silen aussprachen und diesen nach W. Helbig in der Arch. Ztg. 1862 S. 309 fg. folgte, in Schriften, die seit 1862 erschienen, für Dionysos erklärt, (Stephani im Compte rendu de la commiss. imp. archéol. de St. Petersbourg pour l'ann. 1863, p. 229 fg., Fr. Lenor-

mant in Daremberg's und Saglio's Dictionn., I, 1, p. 621, Fröhner im Annuaire de la soc. Fr. de num. et d'arch. T. III, P. I, p. 54, Friedlaender und Sallet Berlin. Münzkab. 1877, S. 105, Friedlaender in der Arch. Ztg. Jahrg. 31, S. 103 — zu einem Exemplar der Fox'schen nach Berlin verkauften Sammlung —, Imhoof-Blumer Monn. Gr. p. 83, n. 87, Thraemer „Dionysos in der Kunst" in W. Roscher's Lexikon der Gr. und Röm. Mythologie S. 1103, J. P. Six in der Sallet'schen Zeitschr. für Numism. XIV, 1886, S. 147, Anm.), während J. Braun das Münzwesen in Vorderasien S. 537, Head a. a. O. und Percy Gardner a. a. O. zu der früheren Bezeichnung als Silen zurückgekehrt sind. Wir entscheiden uns für Dionysos, zu welchem das Malteserhündchen auch besser paßt als zu Silen. Der Vogel wird von Einigen als Krähe gefaßt, von Anderen, und zwar den Meisten, als Rabe. Wir entscheiden uns in allen Fällen, in denen er neben den Reiter vorkommt oder auf dem Esel steht, für einen Raben. Ob da, wo der Vogel als Reverstypus zu dem Typus des Silens neben dem Esel auf dem Avers vorkommt, an eine Krähe zu denken ist, mag dahingestellt bleiben.

Auf zwei Vasenbildern finden wir Dionysos und Silen gemeinsam mit einem Vogel beschäftigt. Das eine ist das aus Tischbein's Collect. of engrav. T. II, pl. 32 in den Denkm. d. a. Kunst II, 42, 520 wiederholte. Hier steht Papposilen mit einem kleinen Vogel in der linken Hand vor dem auf einem Felsen sitzenden jugendlichen Dionysos, welcher dem ihm hingehaltenen Vogel mit kleinen Früchten fütterte.

Eine entsprechende Darstellung sah ich an einer aus Cervetri stammenden bemalten Vase in der Sammlung des Alterthumsvereins zu Mannheim: Silen dem Dionysos eine Taube hinhaltend, der in der Rechten eine Fruchtschale und einen Perlenkranz hält und stehend mit der Linken den Thyrsos aufstützt. In beiden Fällen ist der Vogel als dem Dionysos gehörend zu betrachten.

Unter den Thieren, welche dem Dionysos geopfert werden, befinden sich auch Vögel. So die Gans (Stephani Compte rend. pour 1863, p. 78 fg., Anm. Parerg. arch. XXVI, 1867, Taf. n. 1, vgl. p. 5), und das junge Huhn sowie Hahn, vgl. die Sarkophagreliefs des Mus. Pio-Clement. V, 8, Millin's Gal. mythol. pl. LXIII, n. 241, und in Gerhard's Ant. Bildwerken T. CX, 2. 3.

Dem Dionysos steht ursprünglich gleich der Gott von Lampsakos, Priapos, der in der Pompa des Ptolemäos einen Epheukranz trug (Athen. V, p. 201, 5). Auch auf späteren Bildwerken finden wir bei diesem dieselben Attribute wie bei jenen. So unter den

Vögeln Tauben (Gori Antiq. Etr. 1770 t. VIII, n. 12. 13, Adr. de Longpérier Bronzes du Louvre p. 80, n. 376). Sie findet sich auch als Opferthier des Gottes (Caylus Rec. d'Ant. III, 48, Bracci Mem. d. ant. incis. I, tav. d'agg. 22, 1, Gori Mus. Florent. I, 90, 4—8, II, 74, 5; Wicar Mus. de Flor. III, 40). Ferner die Gans deliciae Priapi nach Petron. 137, welche dem Priapos auch als Opfer dargebracht wird, wie dem Dionysos (Stephani Compte rend. pour 1863, p. 78, Anm. 8). In Bronzen erscheint Priapos mit hahnenartigem Kopf (Friederichs Berlins ant. Bildwerke II, n. 1972, 1972 b).

Wir gehen nun zu den Vögeln bei dem allein dargestellten Silen über.

Mit einem kleinen Vogel in der rechten Hand erscheint Papposilen auch auf einem mehrfach abgebildeten (zuerst im Mus. Borbonico Vol. XII, t. 9) und besprochenen rothfigurigem unteritalischen Vasenbilde des Mus. nazionale zu Neapel (in Heydemann's Verzeichn. S. 402, n. 2846) vor der auf einem Felsen sitzenden Sphinx stehend und dieser den Vogel entgegenhaltend. Wohl möglich, ja wahrscheinlich, daß man den Vogel nicht bloß als symbolisches Zeichen, sondern auch als dem Silen eigen zu betrachten hat.

Auf einem Scarabäus bei Caylus Rec. d'antiq. T. VII, pl. 22, n. 3 erblickt man neben einem leierspielenden Silen einen Schwan oder eine Gans. Stephani nimmt an, daß das Thier den Tönen der Leier lausche (Compte rend. p. 1863, p. 79). Ob mit Recht, zumal wenn, wie wahrscheinlich, eine Gans gemeint ist, muß dahingestellt bleiben.

In einem Pompejanischen Wandgemälde ist nach Helbig Wandgem. der vom Vesuv verschütteten Städte Campaniens S. 103, n. 416 dargestellt „Silen, die Linke auf eine Urne legend, unter ihm Wasser, dahinter Fontaine, zu jeder Seite eine Fontaine und ein Vogel." — Niccolini Case di Pomp., Terme stab. Tav. VII, Bull. nap. (n. 5) IV, p. 20.

Eine in den Denkm. d. a. Kunst II, 42, n. 512 wiedergegebene Gemmendarstellung zeigt den Kitharspielenden Silen vor einem Sacellum, das auf einem Felsen steht neben dem Bäume und der accompagnirende Esel des Kitharspielers erscheinen, während auf dem Sacellum ein Vogel, anscheinend eine Krähe, steht, welcher seinen Kopf nach den Zweigen der Bäume hin richtet. Gewiß hat man ein Dionysisches Heiligthum zu erkennen, der Vogel aber scheint eher zu Silen als zu Dionysos zu gehören.

Einen Papagei gewahrt man bei Silen auf dem eine exotische Pflanzenart nachahmenden Schafte eines Lychnuchos aus Hercula-

neum, der in den Denkm. d. a. Kunst II, 41, 504, nach Mus. Borbonico VII, 30 wiedergegeben ist. Auf einer mir durch gefällige Mittheilung Bachofens in Abbildung vorliegenden Thonlampe des Mainzer Centralmuseums ist aller Wahrscheinlichkeit nach der sitzend schlafende Silen dargestellt, welchem sein Papagei auf den Schooß geflogen ist. Diesen Vogel haben wir schon oben in der Dionysischen Pompa des Ptolemäus Philadelphos gefunden. Gelegentlich sei bemerkt, daß die ältesten mir bekannten Beispiele einer auf uns gekommenen Darstellung des Papageis die von Stephani im Compte rend. pour 1870 et 1871, p. 6 und 8 angeführten sind, welche von ihm auf Aphrodite bezogen werden, wie auch von mir der Papagei auf dem Relief in den Denkm. d. a. K. II, 261. Andere Beispiele des Papageis in Pitt. d'Erc I, 48, bei Ad. de Longpérier Bronzes du Louvre p. 206, n. 948, Viola in Pompei e la reg. sotter. dal Vesuvio, P. II, p. 75, Figure ornamentali n. 4, Heydemann in der Arch. Ztg. Jahrg. 1827, S. 40 (auf dem Orpheusmosaik zu Palermo).

Ein Pfau wird in der Nähe Silens erwähnt in dem Gemälde bei Sogliano in Pompei e la regione sotterranea dal Vesuvio, Napoli MDCCCLXXIX, P. 2, p. 121, n. 169. Auch diesen Vogel finden wir als Dionysischen in der Pompa bei Athenäos.

In der Darstellung eines Bacchischen Gelages, an welchem sich Silen, ein Satyr und eine Flötenspielerin betheiligen, bei Klügmann und Körte Etrusk. Spiegel V, Taf. 43. erscheint ein größerer Vogel, am Wahrscheinlichsten eine Gans, der von dem Tische nascht.

Gehen wir nun zu den Satyrn über, so mag an erster Stelle erwähnt werden ein uns nur durch Schriftstellerzeugniß bekanntes Kunstwerk, das berühmte Gemälde des Protogenes, welches einen Satyr und neben ihm auf einem Pfeiler ein Rebhuhn darstellte und durch die Ausführung des letzteren sich besonders auszeichnete (Strabo XIV, p. 652, Eustath. zu Dionys. Perieg. 304). Stephani äußert im Compte rend. pour 1856, p. 156, daß hier das Rebhuhn „ohne Zweifel" neben dem Satyr angebracht war mit Rücksicht auf die Beiden gemeinsame aphrodisische Lüsternheit. Das läßt sich sehr wohl hören, aber zweifellos ist es doch keineswegs. Rebhühner wurden auch zur Jagd abgerichtet (Stephani a. a. O. p. 153), konnten also als Attribute eines Jägers dienen, und — was wohl noch eher in Betracht zu ziehen ist — sie galten als schlau und listig, schlaue Menschen erhielten den Beinamen „Rebhühner" vgl. Athen. VIII, c. 10 nebst Casaubonus und andere von Stephani a. a. O. p. 153, Anm. 2 angeführte Stellen. Zu

den Eigenschaften der Satyrn gehört auch die der Verschmitztheit. Wenn Stephani a. a. O. S. 158 meint, daß man in Betreff der zwei gegeneinander gewendeten Rebhühner auf dem Schilde eines Satyrs bei Gerhard Auserles. Vasenbilder Taf. I darüber streiten könnte, „ob der Künstler mehr die aphrodisische, im Besondern die paiderastische Bedeutung dieser Thiere im Sinne gehabt haben möge, oder ihre Kampflust", so werden wir uns — da die Stelle des Horapollo Hierogl. II, 95 *παιδεραστίαν βουλόμενοι σημῆναι δύο πέρδικας ζωγράφουσιν* für ein Griechisches Werk schwerlich maßgebend sein kann — gewiß für das Zweite entscheiden, wie denn auch der als Schildzeichen auf Griechiechen Vasenbildern öfter vorkommende Hahn entschieden als Kampfsymbol zu fassen ist. Doch muß es dahingestellt bleiben, ob der Vasenmaler die Rebhühner auch als Attribut des Satyrs gefaßt wissen wollte, wie das in Betreff des Hahnes nur ausnahmsweise der Fall ist (z. B. bei Idomeneus nach Pausan. V, 25, 5).

Dem Rebhuhn entspricht der Hahn sowohl in der Beziehung auf die *ἀφροδισιακὰ* als auch in der auf Kampf. Zwei Satyrn mit je einem Hahne in den Händen treffen wir auf der Paste in den Denkm. d. a. Kst. II, 40, 467 zu den Seiten einer Hermesherme. Man könnte Bedenken hegen, ob man den Hahn als Attribut von Satyrn betrachten dürfe. Doch sprechen dafür die Darstellungen von Eroten, die Hähne mit einander kämpfen lassen (Denkm. d. a. Kst. II, 52, 654, Jahn Arch. Beitr. S. 439), da es ja die Besitzer der Hähne sind, welche diese mit einander kämpfen lassen und der Hahn als Attribut von Eroten außer Zweifel steht. Bei Satyrn findet sich auch der Hahnenkamm als Attribut, ähnlich und aus demselben Grunde wie bei Priapos.

Schwäne bei einzelnen Satyrn, „welche sich dem Genusse des Weins oder der Liebe hingeben", signalisirt Stephani Compte rend. pour 1863, p. 79, Anm. 1 u. 2; desgleichen „bei wilden und rauschenden Gelagen, an denen außer Satyrn und Mänaden auch ihr gewöhnlicher Gefährte Herakles Theil nimmt", ebenda p. 78 Anm. 7.

Auf einem Vasenbilde ist ein Satyr dargestellt, welcher die Rechte nach einer Gans oder Ente spielend ausstreckt (Heydemann Mus. naz. S. 776 n. 632).

Stephani führt im Compte rend. pour 1865, p. 133 einen geschnittenen Stein an, auf welchem ein bärtiger Satyr einen Kranich oder Reiher oder auch Strauß zu ergreifen suche. Ueber die ersten Vögel als im Dionysischen Kreise vorkommend, ist schon

oben S. 520 die Rede gewesen, den Strauß finden wir auch in der Dionysischen Pompa bei Athen. V, p. 200 f.

Bei der Marmorstatue aus Villa Albani in Claracs Mus. de sculpt. T. IV, pl. 716 B, n. 1685 C gewahrt man an dem als Stütze dienenden Baumstamm einen Vogel, der sowohl als Attribut des Satyrs als auch in Verbindung mit dem Baumstamm als zur Andeutung des Locals dienend betrachtet werden kann.

Dasselbe gilt auch von dem Vogel hinter einem Satyr auf dem Vasenbilde bei Heydemann Mus. nazionale zu Neapel n. 2928. A.

Auf dem bekannten sogenannten Amalthearelief (Denkm. d. a. Kst. II, 40, 482, Benndorf und Schöne Die ant. Bildwerke des Lateran. Mus. n. 24), welches die Nährung eines auf einem Felsen sitzenden, bis auf das Spitzohr vollkommen menschlich gebildeten Knäbchens vor einer Felsengrotte, in deren Eingang ein Panisk steht, zur Darstellung bringt, erblickt man unter dem Knäbchen an dem Felsen zwei Ziegen, und hinter dem Felsen einen „Feigenbaum", um dessen Stamm sich eine Schlange zu einem „Rabennest" emporringelt, in welchem ängstlich vier Junge flattern, denen die beiden Alten Hülfe zu bringen bereit sind, endlich auf dem Felsen über der Grotte einen Adler, der einen Hasen zerfleischt. Benndorf und Schöne äußern nach Gerhard Beschr. d. Stadt Rom II, 2, Beil. S. 2 fg. die Ansicht, daß „man schwerlich in den beigegebenen Thieren etwas anderes als eine natürliche Symbolik der freien Natur zu sehen habe". Aber die Ziegen gehören doch gewiß zu dem durch das Pedum als Hirt bezeichneten Panisken. Den Raben finden wir auch sonst bei Personen des Dionysischen Kreises (s. oben S. 522 ff. und das Sarkophagrelief bei Armallini Scult. del Campidoglio. II, 68), und der Adler kann auch in Beziehung zu dem Pan stehen. Selbst der Feigenbaum braucht für eine Scene aus dem Bacchischen Kreise nicht bedeutungslos zu sein. Auch die Vögel in der Grotte des Dionysoskindes in dem Festzuge des Ptolemäos Philadelphos sind solche, welche wir als Bacchische Attribute kennen (s. oben S. 517 fg.).

Auf einem Etruskischen Spiegel bei Klügmann und Körte a. a. O. mit Bacchischen Scenen (in denen Dionysos selbst nicht vorkommt) gewahrt man kleine Vögel, welche an Blättern des die Scenen umgebenden Epheus picken. Auch an der einen Seite des bekannten Pariser Onyxgefäßes (Denkm. d. a. Kst. II, 50, n. 626, b) treffen wir auf Bäumen ähnliche kleine Vögel, die doch wohl nicht weniger dem Dionysischen Kreise angehören sollen, als Ziegenbock und Panther unten am Boden. Eben dasselbe gilt von den drei Vögeln auf dem Relief in Campana's Ant. opere in plastica

tav. XXXIX, welche sich auf den Weinstöcken befinden, von denen zwei Satyrn Trauben pflücken, wenn dieselben auch keineswegs nur zu diesen gehören, sondern zunächst zu den Weinstöcken. Vgl. die Vögel zwischen Weinblättern auf der Pompejanischen Glasamphora bei Overbeck Pompeji S. 626 der vierten Ausg. und Deville Historie de l'art de la verrerie dans l'antiquité, Paris 1873, pl. X.

Auch neben den zum Dionysischen Kreise gehörenden Phlyaken kommt ein paar Male ein Vogel vor, anscheinend eine Ente und eine Gans; vgl. das Pariser Vasenbild in der Arch. Ztg. von 1885, besprochen von H. Dierks S. 46, wo Dionysos selbst dargestellt ist, der Vogel der zunächst zu dem Phlyaken gehört, und das Vasenbild des Britt. Museums bei Heydemann Phlyakendarstellungen im Jahrbuch des K. Deutschen archäol. Institut, Bd. I, 1886, H. 4, S. 295, wo der Vogel bei dem vermuthlich von einem Symposion kommenden Phlyaken steht.

Wenden wir uns jetzt zunächst zu den weiblichen Wesen des engeren Dionysischen Kreises, soweit dieselben nicht schon oben in Verbindung mit männlichen berücksichtigt sind, so finden wir von Attributen aus dem Vogelreiche, die einzelne Figuren angehen, nur wenige Beispiele. Auf einem Ruveser Vasenbilde (Heydemann Vasensamml. des Mus. naz. zu Neapel n. 3172) hat eine Mänade einen Vogel in der Linken. Daß hier ein „Perlhuhn" gemeint sein kann, ist wohl möglich; auch in dem Festzug des Ptolemäos Philadelphos wurden μελεαγρίδες mit aufgeführt. Ein ebenfalls aus Ruvo herstammendes Vasenbild (Denkm. d. a. Kst. II, 46, 584) zeigt die Bacchantin Erato mit einem Schwane oder einer Gans (Stephani Compte rend. pour 1863, p. 78) auf der linken Hand. Einzelnen Mänaden Gänse beigegeben (Stephani a. a. O. p. 77, A. 7). Auf einem Vasenbilde im Stile des dritten Jahrhunderts v. Chr. ist eine Mänade dargestellt, der ein Eros mit der Rechten eine weiße Taube darreicht, während er in der Linken einen Kranz hält. Ohne Zweifel handelt es sich um ein Liebesverhältniß von Seiten des hinter der Mänade stehenden, nach ihr hingewendeten jugendlichen Satyrs, der ihr mit der Rechten eine Schale darreicht, während er mit der Linken einen Kranz hält (Stephani Vasen-Samml. d. K. Ermitage Th. II, S. 10, n. 1081). Hier ist also die Taube zunächst Attribut des Eros, kann aber daneben auch als Beleg für die Taube als Spielzeug von Mänaden gelten. Auf einem von Millin Peint. de vases II, 19 und Gal. myth. pl. LX, n. 233 abbildlich mitgetheilten gewiß aus Unteritalien stammenden zuletzt von Heydemann Dionysos' Geburt und

Kindheit S. 57 berührten Vasenbilde mit der Darstellung der Pflege des Dionysos „spielt" eine der Pflegerinnen des Kleinen „mit dem kleinen Panther, indem sie dem Thiere einen Vogel hinhält". Dieser darf gewiß als ihr gehörend betrachtet werden.

Von den alten Genossen des Dionysos wenden wir uns endlich zu denen, welche erst später mit ihm verbunden wurden, aber dann auf den Bildwerken außerordentlich häufig in seinem Kreise erscheinen, zu Pan und den Panen, sowie zu den Kentauren.

So zahlreich auch Pans bildliche Darstellungen aus der Zeit nach Alexander dem Großen sind, so gering ist die Zahl derjenigen, in denen er in Verbindung mit dem Vogelreiche erscheint, was immerhin auffallen kann, wenn man bedenkt, daß er als ein in den Waldungen und in den Grotten, in denen auch Vögel ihren Sitz haben, wie z. B. die Korykische Aeschyl. Eum. 22 fg., Pausan. X, 32, 5 hausender Gott gedacht wurde, so wie als Vögel schützend (Aeschyl. Agam. 55 fg.) und die Vogeljagd treibend (Welcker Griech. Götterlehre II, S. 662 und Sogliano in Pompei e la reg. sotter. del Vesuvio II, p. 125) und in enger Verbindung nicht allein mit Dionysos und seinem Kreise, sowie den Nymphen stehend, sondern auch mit der Aphrodite und ihrem Kreise.

Man hat angenommen, daß auf Arkadischen Münzen der Adler als Attribut Pans vorkomme. Daß aber die stehende bekleidete Figur auf dem Revers einer von Prokesch von Osten in den Abhandl. der K. Preuß. Akad. der Wissensch. aus dem J. 1845 S. 92 verzeichneten und Taf. III, n. 46 abbildlich mitgetheilten Arkadischen Silbermünze mit einem Adler auf der rechten Hand nicht den Pan sondern den Zeus darstellt, haben wir schon in den Nachrichten 1875, n. 17, S. 457 fg. bemerkt. Was dann die Arkadischen Münzen betrifft, welche auf der Vorderseite den Kopf des Zeus und auf der Rückseite den auf einem Fels sitzenden Pan mit einem Adler vor ihm oder zu seiner Seite (Mionnet descr. d. Méd. II, p. 250, n. 37 fg., und Suppl. IV, p. 281, n. 55, E. Curtius in Pinder's und Friedlaender's Beitr. zur Münzkunde, Weil in Sallet's Zeitschr. für Numism. IX, S. 29 und 38 fg., und Taf. II, n. 12) anbetrifft, so könnte man sich etwa veranlaßt fühlen, den Adler als Attribut Pans zu betrachten, wenn Mionnet's nach Sestini Descr. num. vet. p. 218 gegebene Beschreibung, nach welcher auf der Bronzemünze Suppl. IV, p. 281, n. 550 Pan den Adler auf dem Knie haben soll, das Richtige träfe. Das glauben wir aber mit nichten, wie es denn auch für die Silbermünze in der Zeitschr. für Numism. a. a. O. Taf. II, 12 nicht an-

zunehmen ist. Vergleicht man die ebenda n. 14 abgebildete Bronzemünze, so wird man nicht zweifeln, daß der Adler sich auf den Zeuskopf der Vorderseite beziehen soll, womit etwa zusammenzustellen, daß auf der von Prokesch von Osten herausgegebenen Silbermünze neben dem Zeuskopf der Vorderseite die ganze Figur desselben Gottes auf der Rückseite erscheint, wie andererseits auf der Rückseite der von Weil a. a. O. n. 11 und 13 abbildlich mitgetheilten Münzen mit dem Zeuskopf auf der Vorderseite ein Mal der sitzende Pan selbst und das andere Mal nur seine Syrinx auf der Rückseite.

Dagegen steht ein Vogel bei Pan auf unteritalischen Vasenbildern sicher. Auf dem im Mus. naz. zu Neapel bei Heydemann Vasensamml. S. 706, n. 312 liegt seine Rechte auf einem Schwan, der auf seinem Schooße sitzt; auf zwei anderen auch aus Unteritalien stammenden Vasenbildern (Tischbein Collect. of engrav. II, 33 und J. de Witte Coll. Durand n. 671, Cat. of the Gr. and Etrusc. vases in the Brit. Mus. Vol. II, n. 1293) hält er einen Vogel auf der Hand, vielleicht die Iynx. In den betreffenden drei Fällen, in welchen Pan als gehörnter Jüngling erscheint, ist er mit Aphrodite verbunden und dürften die Vögel mit Recht als von dieser auf ihn übertragen gelten, vergl. Nachrichten 1875, S. 242 Anm.

Auf geschnittenen Steinen erscheint er mit einem Hasen und einem Vogel an einer Tragstange (King Gems pl. LV, n. 3, Murray Catal. of engrav. gems in the Brit. Mus. n. 1101).

Minder sicher, aber doch nicht unwahrscheinlich ist, daß man auf einer Paste der Göttingischen Universitätssammlung Pan als Vogeljäger zu erkennen hat, vgl. G. Hubo Originalwerke in der archäol. Abtheilung des archäol. numism. Instituts der Georg-Augusts-Univ. S. 156, n. 962.

Die Kentauren kommen hauptsächlich wegen der von ihnen getriebenen Jagd in Betracht, die sich auch auf Vögel bezieht. Beispiele von Bildwerken aus frühester Zeit für die Jagd auf andere Thiere, und die nur weniger berücksichtigte auf Vögel bei Stephani Compte rend. pour 1862, p. 71, pour 1867, p. 77, Anm. 3, und pour 1873, p. 100, Anm. 2; vgl. auch Arch. Ztg. XXXIX, Taf. 17 und dazu Klügmann S. 199, sowie O. Jahn Beschr. der Vasensammlung der Pinakothek zu München n. 611. Wir sehen durchweg nicht die Jagd selbst, sondern die an Baumzweigen aufgehängte Jagdbeute dargestellt. Auch auf einem alterthümlichen Vasenbilde, welches aus Micali's Mon. ined. t. XXXIX n. 2

in den Denkm. d. a. Kst. II, 47, 590 wiederholt ist, gewahrt man einen Vogel auf dem Schwanze eines Kentauren. Ist an einen zur Ausübung der Jagd dienenden Vogel zu denken, welcher dem Kentauren gehört, wie der Kentaur mit Jagdbeute an einem Baumstamm auf dem schwarzfigurigen Vasenbilde bei Jahn Beschr. der Vasensamml. in der Pinakothek zu München n. 611 und sonst einen Hund neben sich hat?

Ein späteres Vasenbild bei Tischbein Collect. of engrav. T. I, pl. 42 = Denkm. d. a. Kst. II, 46, 589 zeigt einen schreitenden Kentauren, der in der erhobenen Rechten eine Fackel hält und im linken Arme einen Baumzweig, an welchem ein Votivtäfelchen und ein anscheinend todter Vogel hängt, vor dem Kentauren einen sich nach diesem umwendenden bärtigen Satyr oder Silen. Stephani hält den Zweig für den gewöhnlichen Fichtenzweig, den Vogel für Jagdbeute. Allein der Zweig sieht ganz so aus als sei er von der Olive oder wahrscheinlicher dem Lorbeer, und daß es sich nicht um die Rückkehr von der Jagd oder um ein jägerisches Attribut handele, liegt doch wohl auf der Hand. Daß Fackeln auch sonst bei den Kentauren vorkommen, ist bekannt (Stephani Compte-rend. pour 1873, v. 99 fg., Anm. 8), aber nicht von solchen, die sich an der Jagd betheiligten, und wenn man auch für diese die Fackel zugeben wollte, in derselben Beziehung wie sie bei der Jägerin Artemis vorkommt, also nicht als Jagdwaffe, so würde das doch nicht für das in Rede stehende Vasenbild passen, auf welchem es sich nicht mehr um eine Jagd handelt. Ich habe im Text zu den Denkm. a. a. O. an eine Procession gedacht. Ein Komos scheint gemeint zu sein auf dem Vasenbilde, welches Stephani Vasensamml. d. K. Ermitage n. 916 verzeichnet, Compte-rend. pour 1874, p. 86 genauer beschrieben und ebenda p. 5, Vign., abbildlich mitgetheilt hat. Man erblickt hier einen gehörnten bärtigen vorwärts sprengenden Kentauren, der einen Krater auf der linken Achsel und eine brennende mit einer Binde geschmückte Fackel in der rechten Hand hält. Es handelt sich also auf dem Tischbein'schen Vasenbilde um eine Darbringung an die Gottheit, sicherlich Dionysos, und der Vogel ist, ebenso wie das Votivtäfelchen, zunächst als Weihegabe zu fassen. Dabei kann er natürlich immerhin als Jagdbeute des Kentauren betrachtet werden.

Ganz und gar nicht ist aber als Vogeljäger zu fassen der Kentaur mit einer Ente oder einem anderen Wasservogel in der Hand auf einem Medaillon Marc Aurels bei Cohen Méd. impér. T. II, pl. XV, n. 380 und Froehner Medaillons de l'emp. Rom. p. 81, n. 3, wenn auch Stephani Compte-rend. pour 1867, p. 113, Anm. 3

an einen solchen gedacht hat. Er selbst bemerkt ja, daß der betreffende Kentaur als Repräsentant einer Jahreszeit erscheine. Der Medaillon, welcher aus dem J. 148 n. Chr. stammt, also noch während der Regierungszeit des Antoninus Pius geprägt ist, stellt auf dem Reverse den Hercules mit einem Tropäum in der erhobenen Linken und der Keule in der gesenkten Rechten dar auf einem Triumphwagen, der von vier Kentauren gezogen wird, welche die Attribute der vier Jahreszeiten haben, der eine, der Frühling, den Hirtenstab, der andere, der Sommer, die Sichel, der dritte, der Herbst, einen Fruchtkorb, und der vierte, der Winter, einen Wasservogel, und im Abschnitt mit der Inschrift TEMPORVM FELICITAS versehen ist. Es liegt auf der Hand, daß es sich nur insofern bei dem Vogel um Jagdbeute handeln kann, als der Vogel allem Anscheine nach todt ist und der Winter die eigentliche Jagdzeit ist, weshalb der geflügelte Repräsentant desselben auf dem von Froehner beschriebenen Sarkophagrelief im Louvre (Notice de la sculpt. n. 233, p. 245), der ebenfalls todte Vögel hält, einen Hund neben sich hat. Aber für Kentauren als Entenjäger darf man die Darstellung mit nichten in Anschlag bringen.

Griechische Steininschriften aus Aegypten.

Von

Fritz Krebs.

Den letzten Ausgrabungen, die Heinrich Brugsch im vergangenen Winter in Aegypten gemacht, verdankt das Berliner Museum drei griechische Steininschriften, die ich im Folgenden besprechen will.

I.

Die erste befindet sich auf einem rechteckigen Stein (Kalkstein) von 35 cm Höhe und 31 cm Breite, den Brugsch in Tell Muqdam, einer Ruinenstätte des alten Tanis, fand. Die 4½ cm hohen Buchstaben sind tief eingemeißelt, zeigen scharfe schöne Formen und weisen uns, besonders das runde Sigma (C), in die römische Zeit. Der Text lautet:

Ἀσκληπιάδης
Χαιρήμονος γυ-
μνασιαρχήσας
καὶ ἐξηγητεύ-
σας ἐνθάδε ἀ-
πόκειται L ξ ς

Wir haben hier also den Grabstein eines im Alter von 66 Jahren gestorbenen Mannes namens Asklepiades vor uns. Er hatte das Amt eines Gymnasiarchen und das eines Exegeten (vgl. darüber Mommsen R. G. V 568 Anm. 1 und Wilcken Hermes XX p. 471 fgg.) bekleidet, und zwar anscheinend in der Stadt Tanis, in deren Nähe dieser Stein ja gefunden ist. Bei seinem Tode war er — das beweisen die Aoriste — bereits außer Amt. Wilcken hat a. a. O. S. 472 zuerst nachgewiesen, daß sich das ursprünglich alexandrinische Amt des Exegeten auch in Provinzialstädten findet. Diese Inschrift giebt einen neuen Beleg dafür.

II.

Die größere der beiden ptolemäischen Inschriften befindet sich auf einer 51 cm hohen, 27 cm breiten Stele aus schwarzem Granit, die oben von einem Giebel gekrönt ist. Die zierlichen Buchstaben sind 1,1 cm hoch und nur leicht eingeritzt. Brugsch fand den Stein in den bei dem Dörfchen Dîme am Nordwestufer der Birqet el Qurûn befindlichen Ruinen eines Tempels. Der Text lautet:

Ὑπὲρ βασιλέως Πτολε-
μαίου τοῦ καὶ Ἀλεξάν-
δρου θεοῦ Φιλομήτορος
Ἀπολλώνιος Ἰσχυρίωνος
γραμματεύων Πανταλέ-
οντι τῶν ὁμοτίμων τοῖς
συγγενέσι καὶ οἰκονό-
μοι σιτικῶν τῆς Ἡρακλεί-
δου μερίδος τὸ ιηL
κατηρτίσατο δίδοσθαι
παρά τε ἑαυτοῦ καὶ τῶν
διὰ τῆς μερίδος ἀσχο-
λουμένων ὑπ' αὐτοὺς
καὶ εἰς τὸν μετέπειτα
χρόνον κατ' ἔτος πυροῦ
ἀρτάβας ρπβL, ὃ καὶ κα-
τήρξατο ἀπὸ νουμηνίας
τοῦ Θῶυθ τοῦ ιθL εἰς τὸ
ἀρτοκόπιν sic Σοκνοπαίωι καὶ
Νεφερσῆι θεοῖς μεγίστοις.

Die Inschrift lehrt uns zunächst, daß die Ruinen bei Dîme einem Tempel des Gottes Soknopaios und der Neferses angehören. Soknopaios ist, wie Brugsch nachgewiesen hat, die graecisierte Form des demotischen „Sbk n pa a“ d. h. „Sobk der Insel.“

Sobk, der Krokodil-Gott, ist schon in den ältesten Zeiten des Pharaonenreiches der Lokal-Gott des Faijum, dem schon der König Amenemēs III einen großen Tempel, das sog. Labyrinth, errichtete. Hier heißt er „Sobk der Insel." Obgleich nämlich das heutige Dîme (der Name ist aus dem koptischen Me„time" = Stadt entstanden) eine Strecke von den Ufern des Sees entfernt liegt, beweisen doch Reste von Quai-Mauern in den Ruinen, daß früher die Fluten des Sees bis an den Tempel heranreichten. Damit erklärt sich der Name des Gottes höchst einfach: Sein Tempel lag eben auf einer Insel[1]). Als θεὸς σύνναος gesellt sich ihm hier die Isis Neferses. Denn daß die hier nur mit diesem Beinamen genannte Göttin die Isis ist, beweist eine demselben Tempel entstammende Tempelrechnung aus röm. Zeit, in der sie als Ἶσις Νεφερσῆς angeführt wird[2]). Dieser neue Name der „tausendnamigen" Isis stammt, wie Brugsch nachweist, gleichfalls aus dem Demotischen und bedeutet: „mit dem schönen Throne" (nfr-s = εὔθρονος).

Gesetzt ist unsre Inschrift ὑπὲρ βασιλέως Πτολεμαίου, wozu wir vielleicht σωτηρίας (wie C. J. G. III 4713) oder τύχης (wie C. J. G. III 471) zu ergänzen haben. An einen bestimmten historischen Anlaß zu denken, ist nicht nötig, obgleich die Inschrift im Todesjahre des Königs Ptolemäus Alexander, seinem 19ten (vgl. Z. 18), gesetzt ist. Was für das Wohlergehen eines Königs irgend einer Gottheit gewidmet wird, ist meistens nur die Inschrift selbst. Hier ist es, wie der Text besagt, eine fromme jährliche Stiftung zu Gunsten der Tempelverwaltung. Der Dedicant, der Sohn des Ischyrion, nimmt die Stellung eines Schreibers bei Pantaleon ein (so ist γραμματεύων Παντα-λέοντι aufzufassen). Dieser Pantaleon bekleidet das uns hier zum ersten Male begegnende Amt eines οἰκονόμος σιτικῶν τῆς Ἡρακλείδου μερίδος. Die οἰκονόμοι im allgemeinen waren königliche Finanzbeamte in den einzelnen Gauverwaltungen[3]). Nach dem Pariser Papyrus 63. 140 fgg. nahmen sie teil an den Beratungen über die königl. Domanialwirtschaft unter dem Vorsitz des

---

1) In römischer Zeit heißt ein derselben μερὶς angehöriges Dorf, dem eine große Anzahl der neuen Berliner Papyri der Sammlung Brugsch 1891 entstammt, κώμη Σοκνοπαίου Νήσου; vgl. u. a. „Aegyptische Urkunden aus den Königl. Museen zu Berlin. Griechische Urkunden." Band I. Heft 1. No. 2. Z. 1—4.

2) Berl. Urk. Bd. I. Heft 1. Nr. 1. Z. 26.

3) Vgl. Lumbroso rech. sur l'écon. polit. de l'Egypte. 342/3 und Mahaffy, the Flinders Petrie papyri 16. 2. 5: οἰκονόμῳ τῆς Ἀρσινοιτικῆς νομαρχίας.

ὑποδιοικητής[1]). Die Einkünfte der Kgl. Kasse bestanden teils in Naturalien (σιτικά), teils in baarem Gelde (ἀργυρικά)[2]). Dementsprechend gab es nun in jedem Gaue einen οἰκονόμος ἀργυρικῶν und einen οἰκονόμος σιτικῶν. Ersterer ist uns bereits bekannt aus dem Turiner Pap. 6. 5, wo er als ὁ πρὸς τῇ οἰκονομίᾳ τῶν ἀργυρικῶν τοῦ Παθυρίτου bezeichnet wird. Hier zuerst lernen wir den οἰκονόμος σιτικῶν kennen.

Der arsinoitische Gau war, wie wir bisher wußten, in römischer Zeit, vermutlich seiner Größe wegen, zu Verwaltungszwecken in zwei Bezirke geteilt (vgl. Wilcken obs. p. 12), deren einer die μερὶς Ἡρακλείδου, der andre die μερίδες Θεμίστου καὶ Πολέμωνος umfaßte. Unsre Inschrift beweist, was schon Wilcken a. a. O. vermutet hat, daß die Römer diese Doppelteilung des Gaues, wie vieles andre, von den Ptolemäern übernommen haben.

Wie jeder der beiden Teile für die Verwaltung als besondere Strategie galt, so hatte er auch seine besonderen οἰκονόμοι.

Der οἰκονόμος σιτικῶν τῆς Ἡρακλείδου μερίδος, namens Pantaleon, steht im hohen Range eines ὁμότιμος τοῖς συγγενέσι, einer Vorstufe des höchsten Ranges der συγγενεῖς (Lumbr. a. a. O. S. 190).

τὸ ιηL (L Sigle für ἔτος) ist auf γραμματεύων zu beziehen.

Apollonios, ein Grieche, macht diese Stiftung (κατηρτίσατο δίδοσθαι) in seinem Namen und dem sämmtlicher ἀσχολούμενοι der μερίς. Wahrscheinlich sind es dieselben, die im Berliner Pap. P. 1506[3]) unter der Bezeichnung Ἀρσινοιτικὰ ἀσχολήματα zusammengefaßt werden. Wir haben darunter vielleicht die Kaufmannschaft des Bezirks zu verstehen.

Die Stiftung besteht in jährlicher Lieferung von 182½ (ρπβL) Artaben Weizen — d. h. (für das gewöhnliche Jahr berechnet) pro Tag ½ Artabe = 19,6 Liter — an die Tempelbäckerei (ἀρτοκόπι(ο)ν) des Soknopaios; und zwar soll sie nicht nur bei Lebzeiten der Dedicanten (ὑπ' αὐτούς), sondern auch „für die Folgezeit" (εἰς τὸν μετέπειτα χρόνον), also von ihren Erben, ausgeführt werden.

Die erste Lieferung ist bereits am Neujahrstage des 19ten Jahres (des Ptol. Alexander) an die Bäckerei abgeliefert.

---

1) Vgl. Lumbroso a. a. O. 341 und Wilcken, Abh. d. Berl. Acad. 1886. Actenstücke der Kgl. Bank zu Theben. S. 7 und S. 28 Anm. 1, und Wilcken Jahrb. d. Ver. v. Altertumsfreunden im Rheinlande, LXXXVI. 234 fgg.

2) Vgl. Inschr. v. Rosette 11: ἀργυρικάς τε καὶ σιτικὰς προσόδους, und 21: δαπάνας ἀργυρικάς τε καὶ σιτικάς. Peyron. Pap. graeci musei reg. Tur. 1. 42. Wilcken, Jahrb. des Vereins der Altertumsfreunde im Rheinland. LXXXVI. S. 235.

3) Berl. Urk. I. Heft 1. Nr. 8. Col. II Z. 4 u. 17. Vgl. Viereck, Hermes XXVII S. 516 ff.

Den Ruinen desselben Tempels entstammt offenbar eine kleine, jetzt im Museum von Gizeh befindliche Inschrift, deren Kenntnis ich einem von Brugsch angefertigten Papierabklatsch verdanke:

Ὑπὲρ Καίσαρος Αὐτοκράτορος Θεοῦ ἐκ Θεοῦ [1]) *ἡ οἰκοδομὴ τοῦ περιβόλου τῷ θεῶι καὶ κυρίῳ Σοκνοπαίωι παρὰ τω*sic *ἐκ Νείλου πόλεως προβατοκτηνοτροφην*sic *καὶ τῶν γυναικῶν καὶ τῶν τέκνων εὐχὴν Lς Καίσαρος Φα*[.....].

Die Inschrift ist datiert von einem Tage des Phamenoth oder Phaophi des 6ten Jahres des Caesar d. h. des Augustus (= $^{25}/_{24}$ v. Chr.) und ist somit die älteste bekannte Kaiserinschrift aus Aegypten. Abgefaßt ist sie von den Familien der Schafzüchter (ich lese *παρὰ τῶν προβατοκτηνοτρόφων* (das Wort begegnet wohl hier zum ersten Male) des Dorfes *Νείλου πόλις* (daher das mangelhafte Griechisch), als sie infolge eines Gelübdes (etwa *κατ' εὐχὴν* dürfte zu ergänzen sein) für das Wohl des Augustus dem Gotte Soknopaios den Bau eines *περίβολον* ausführten oder es ausbesserten; denn zu *ἡ οἰκοδομὴ* dürfte *κατεσκευάσθη* oder ähnliches zu ergänzen sein. In einen Stein dieses *περίβολον* scheint die Inschrift eingemeißelt zu sein. Vergleichen wir hiermit die ähnliche Inschrift aus Tentyra (C. J. G. III 4716c, vgl. Letronne rec. d' inscr. 99): *Ὑπὲρ Αὐτοκράτορος Καίσαρος Τραιανοῦ Σεβαστοῦ Νεωτέρᾳ θεᾷ μεγίστῃ Ἰσιδώρα Μεγίστου ἀπὸ Τεντύρων κατεσκεύασεν ἐκ τοῦ ἰδίου τό φρέορ*(sic) *καὶ τὸ περίβωλον*(sic), so wird es wahrscheinlich, daß auch in unserer Inschrift, entsprechend den Vermögensverhältnissen der Dedicanten, unter *περίβολον* nicht etwa eine Umfassungsmauer des Tempels, sondern nur die Brustwehr einer Cisterne im Tempel oder Aehnliches gemeint ist.

III.

Die kleinere Inschrift aus Ptolemäerzeit befindet sich auf einem 30 cm hohen und 32,5 cm breiten viereckigen Steine, den Brugsch unweit des Ortes Ghazi(n) auf dem Ostufer des Rosette-Armes des Nils, ganz am Oberlaufe desselben, fand. Die 9 mm hohen Buchstaben sind äußerst zierlich und fein, nur sehr flach in den Stein eingemeißelt und waren mit roter Farbe ausgemalt. Einige Buchstaben sind unvollendet geblieben. Den oberen und unteren Rand der einzelnen Zeilen hat der Steinmetz durch eingeritzte horizontale Linien bezeichnet.

Der Text lautet:

Βασιλεῖ Πτολεμαίωι καὶ βασιλίσσηι
Κλεοπάτραι Θεοῖς Φιλομήτορσι τοῖς

1) Vgl. Mommsen, Staatsrecht II 2 756/7.

ἐγβασιλέως Πτολεμαίου καὶ
βασιλίσσης Κλεοπάτρας Θεῶν
Ἐπιφανῶν καὶ Εὐχαρίστων
χρηματισταὶ οἱ τὸ η καὶ Θ L
κεχρηματικότες ἐν τῶι
Προσωπίτηι καὶ τοῖς ἄλλοις
τοῖς μεμερισμένοις νομοῖς
Ἡρακλέων Πυθαγόρου
Νικόστρατος Δημητρίου
Ἄρειος Διονυσίου
καὶ εἰσαγωγεὺς Ἀμύντας Ἀμύντου
καὶ γραμματεὺς Δημήτριος Ἀπολλωνίου
καὶ ὑπηρέτης Μεννέας Διονυσίου.

Das Richtercollegium der Chrematisten also stellt nach Schluß seiner zweijährigen Amtsthätigkeit „im Prosopitischen und den ihnen außer diesem zugeteilten Gauen", welche das 8te und 9te Regierungsjahr des Ptolemäus Philometor und der Königin Kleopatra umfaßt hat, diesen zu Ehren irgend ein μνημεῖον auf, dem diese Inschrift als Dedicationsschrift anscheinend gedient hat. Sie ist datiert vom 10ten Jahre des Philometor, also 172 v. Chr., und nennt neben diesem schon die Königin Kleopatra. Ueber das Jahr der Verheiratung des Philometor mit seiner Schwester Kleopatra haben bisher Papyros und Inschriften ebensowenig ein sicheres Datum geliefert wie die Schriftsteller. Champollion (annales des Lagides II 159) setzte sie in's Jahr 164. Nun gab Philometor seine Tochter schon 151 dem Alexander von Syrien zur Frau. Sie hätte also, wäre Champollions Ansetzung richtig, 151 erst 12 Jahr alt sein können.

Lepsius (Ueber einige Ergebnisse etc. Abh. d. Berl. Akad. 1853. 12/13) sagt, daß nichts hindere, Philometors und Kleopatras Vermählung schon „einige Jahre" früher anzusetzen.

Sharpe (Gesch. Aeg. S. 258) setzt sie in's Jahr 170. Unsre Inschrift aber, die die Kleopatra schon als Königin nennt, bringt jetzt den Beweis, daß die Hochzeit spätestens 172 anzusetzen ist. Philometor, der damals noch im 16ten Lebensjahre stand, scheint also diesen Schritt gethan zu haben, sobald er von den Fesseln mütterlicher Bevormundung befreit war.

Aber nicht nur für die Familiengeschichte der Ptolemäer, sondern auch zur Geschichte der χρηματισταί liefert unsre Inschrift wertvolle Anhaltspuncte.

Peyron hat behauptet (Pap. mus. reg. Taur. I 95), daß sich der Amtsbezirk eines Chrematistencollegiums mit dem einer Epi-

strategie decke. Er geht dabei aus von den Worten Tur. Pap. 12. 5: τοῖς ἐν τῇ Θηβαίδι χρηματισταῖς, und zieht zum Beweis den Pariser Pap. 14. 34—35 (= Tur. Pap. 3. 35—36) heran: τοὺς ἀπὸ Συήνης μέχρι Πανοπολίτου χρηματιστάς, wo sich die bezeichnete Ausdehnung des Amtsgebietes seiner Meinung nach mit der Epistrategie „Thebais" deckt. Wäre dem wirklich so, wäre in beiden Fällen derselbe Bezirk der „Epistrategie Thebais" als Amtsbezirk ein und desselben Kollegiums zu verstehen, so würde an beiden Stellen sicher eine übereinstimmende offizielle Bezeichnung gewählt sein. Einen Beweis gegen Peyrons Ansicht liefert unsere Inschrift. Der Amtsbezirk des Kollegiums umfaßt hier nur einige Gaue des südwestlichen Deltas, deren hervorragendster wohl der Prosopites gewesen zu sein scheint, wenn er nicht etwa nur deshalb allein namentlich genannt ist, weil in ihm die Inschrift gesetzt ist. Daß sich der hier bezeichnete Amtsbezirk mit dem einer Epistrategie decke, dafür findet sich nicht der geringste Anhaltspunct. Von einer Epistrategie des Deltagebietes ist bisher überhaupt noch nichts bekannt.

Auch über die Zusammensetzung eines Collegiums erfahren wir hier Genaues. Aristeas (ed. Schmidt. 34) sagt darüber: χρηματιστὰς καὶ τούτων ὑπηρέτας ἐπέταξε (scil. Philadelphus) κατὰ νομούς. Unsre Inschrift lehrt uns, daß die Kommission aus 6 Mitgliedern, nämlich 3 Richtern, 1 Vorsitzendem (εἰσαγωγεύς), 1 „Gerichtsschreiber und 1 Gerichtsdiener bestand, welchen letzteren ja auch Aristeas besonders hervorhebt. Die Anzahl der Richter dürfte je nach der Größe der Amtsbezirke verschieden gewesen sein.

Sämmtliche 6 Mitglieder sind Griechen, wie ihre Namen lehren. Und das ist von Wichtigkeit, weil dadurch die bisher geltende Ansicht über die Tendenz, die Philadelphus mit Einsetzung der Chrematisten verfolgte[1]), eine neue Stütze gewinnt.

1) Vgl. darüber Lumbroso a. a. O. 184 fg. und Mitteis, Reichsrecht und Volksrecht etc. S. 48.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

März und April 1892.

(Fortsetzung.)

Nature. Vol. 45. N. 1167—1174.
The geological Survey of India
Records. Vol. XXV. Part 1. 1892. Calcutta 1892.
Geological Survey of New South Wales
Department of Mines. Memoirs of the Geological Survey etc. Palaeontology. N. 8. Contributions to a catalogue of works, reports etc. of the Australian and Tasmanian Aborigines. Part II. Sidney 1891.
The Royal society of South Australia
Transactions and proceedings. Vol. XIV. Part II. Adelaide 1891.
The Royal Society of Victoria
a. Proceedings. Vol. III (New Series). April 1891.
b. Transactions. Vol. II. Part I. 1890. Melbourne 1891.
L'Académie Impériale des Sciences de St. Petersbourg
a. Bulletin Nouvelle Série II (XXXIV) feuilles 26—41.
b. Mémoires. Tome XXXVIII. N. 7. 8. Tome XXXIX. Prem. Partie. St. Petersbourg 1891.
De Kongl. Vitterhets historie och Antiquitets Akademien Antiquarisk Tidskrift for Sverige. Del 8. 3. 4, 9. 3, 10. 6, 11. 4. Stockholm.
Koninklijk Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indie.
Bijdragen tot de Taal-, Land- en Volkenkunde. 1892. 5e Volgr. Deel VII. 2. Aflevering. 'S Gravenhage 1892.
Académie Royale de Belgique
a. Bulletin 62e annee, 3e serie, tome 23. N. 2, 3.
b. Classe des sciences, Programme de concours pour 1893. Bruxelles 1892.
La Société Royale des Sciences de Liège.
Mémoires. Deuxième série. Tome XVII. Bruxelles 1892.
La Société Mathématique de France.
Bulletin. Tome XX. N. 1. 2. Paris.
Ouvrages de M. Ed. Bornet:
a. Algues du Département de la Haute-Vienne etc. (Extrait du Bulletin de la Société botanique de France). Paris.
b. Note sur quelques ectocarpus.
c. Note sur l'ostracoblabe implexa Born. et Flah.
Société d'histoire et d'archéologie de Genève.
Mémoires et documents. Histoire monetaire de Genève de 1792—1848. Tome II. Cahier 1. Genève 1892.
Astronomische Mittheilungen von Dr. Rudolf Wolf. Zürich Jan. 1892.
Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas. Vol. X. N. 5. Coimbra 1892.
El nuevo bronce de Italica. Que publica de Real orden Manuel Rodriguez de Berlanga. Malaga 1891.
Reale Accademia dei Lincei:
a. Atti Anno 1891 Serie quarta Classe di scienze morali storiche e filologiche. Vol. IX. Parte 2a. Notizie degli scavi.
b. Atti 1892. Serie quinta. Rendiconti. Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. I. Fasc. 3—5. 1° Semestre. Roma 1891—92.
Reale Accademia delle scienze di Torino.
Atti. Vol. XXVII. Disp. 1—6. 1891—92 und Schlussheft. Torino 1892.
Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa.
a. Memorie. Vol. VI. 3° e ultimo. Pisa 1892.

b. Processi verbali Vol. VIII. Adunanza del di 15° Nov. 1891 e 17 Gennaio 1892. Pisa 1891—93.

Circolo matematico di Palermo.

Rendiconti. Tomo VI. Anno 1892. Fasc. I e II. Palermo 1892.

Rassegna delle scienze geologiche in Italia.

Anno I. 2° semestre. Fasc. 3° e 4° (parte 1°). Roma 1892.

Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.

Bollettino. 1892. N. 149—152. Firenze 1892.

Biblioteca Nazionale Centrale Vittorio Emanuele di Roma.

Bollettino. Vol. VI. 1891. Indice alfabetico. Vol. VII. N. 14. Roma 1892.

Fauna. Année 1892. N. 1. Jahrg. 1892. Luxemburg.

University of Nebraska.

Agricultural Experiment Station. a. Fifth annual report. (2 Exemplare) Lincoln, Nebraska.

b. Bulletin. N. 21. (Sugar beet Series II). (2 Exemplare). Lincoln, Nebraska.

Johns Hopkins University.

a. University circulars. Vol. XI. N. 96. 97. Baltimore March e April 1892.

b. American journal of mathematics. Vol. XIV. N. 1. Baltimore 1891.

c. University studies in historical and political science. Ninth series IX, X, XI—XII. Tenth series I, II, III. Baltimore 1891—92.

Smithonian Institution.

a. Miscellaneons collections. 1. Nr. 478. Catalogue of publications 1846—1882. With an alphabetic index of articles. Washington 1882.

2. Nr. 156. Catalogue of Minerals. 3. Nr. 238. List of the Institutions libraires, colleges and other establishments in the U. S. in correspondence with the Sm. Inst. Washington 1872.

4. Nr. 335. List of the principal scientific and litterary institutions in the U. S. 5. Nr. 167. New species of North American Coleoptera. Part I. 6. Nr. 140. List of the Coleoptera of North America. Part I. Washington 1863.

b. Contributions to knowledge. 1. Meteorological observations made at Providence. Part I. Washington city 1860.

2. Discussion of the Magnetic and Meteorological observations made at the Girard college observatory. Phil. Part. II.

c. Appendix. Publications of learned societies and periodicals in the library of the Sm. Inst. Part II.

d. Directory of officers, collaboratres, employers etc. Washington 1882.

e. Enlogy on Prof. Alexander Dallas Bache (from the report for 1870). Washington 1872.

American Geographical Society.

Bulletin. Vol. XXIII. N. 4. Part 2. 1891. Vol. XXIV. N. 1. March 31. 1892. New York.

Buffalo Society of natural sciences.

Bulletin. Vol. V. N. 3. Buffalo 1891.

California Academy of sciences.

Proceedings Second Series. Vol. III. Part I.

Academy of Natural Sciences of Philadelphia.

Proceedings 1891. Part III. Sept.—Dec. Philadelphia 1891.

New Jessey natural history society (Trenton n. h. society) Journal. Vol. II. N. 2. Jan. 1891. Trenton, New Jersey 1891.

(Fortsetzung folgt.)

Inhalt von Nr. 15.

Friedrich Wieseler, Ueber die aus dem Bereiche der Vögel hergenommenen Attribute des Dionysos und seiner Thiasoten. — *Fritz Krebs*, Griechische Steininschriften aus Aegypten. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Sauppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen.

28. December. **№ 16.** 1892.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Oeffentliche Sitzung am 3. December, 4 Uhr.

Wagner, Die dritte Weltkarte Peter Apians v. J. 1530. Vorläufige Mitteilung.
Klein legt eine Abhandlung von Dr. E. Ritter in Frankfurt a/M. vor: „Die automorphen Formen von beliebigem Geschlecht".

Sodann sprachen: Heinrich Weber zum Andenken von Leopold Kronecker;
U. v. Wilamowitz-Moellendorff zum Andenken von August Nauck;
Albert Peter über den Vegetationscharakter der siebenbürgischen Karpathen;
Hermann Wagner über die Bedeutung der Kolumbusfeier.
Zum Schluß der Jahresbericht des Beständigen Sekretärs.

Die dritte Weltkarte Peter Apians v. J. 1530 und die Pseudo-Apianische Weltkarte von 1551.

Vorläufige Mitteilung von

Hermann Wagner.

Eine richtige Würdigung der Stellung Peter Apians innerhalb der Geschichte der Kartographie, zu der zuerst d'Avezac, dann Breusing, Nordenskiöld den Anfang gemacht haben, erscheint erst möglich, wenn es uns gelingt, seine verschiedenen

Kartenwerke wieder ans Tageslicht zu ziehen. Die Vorbedingung dafür freilich, die Prüfung, welche Karten denn überhaupt auf ihn zurückzuführen sind, ist bisher noch von keinem der zahlreichen Biographen Apians unternommen. Wäre die Behauptung S. Günther's, des einzigen, der bisher eine eigene Monographie über diesen namhaften Kosmographen des XVI. Jahrhunderts geschrieben, begründet, daß „in erster Linie der Verschleiß der Landkartenniederlage Apians zu Ingolstadt es gewesen sei, der den Verleger zum reichen Manne machte", so müßten sich die Erzeugnisse doch entweder noch in größerer Zahl erhalten oder ihre Titel in Werken über die Geschichte der Kartographie wenigstens erwähnt sein. Das gerade Gegenteil ist der Fall. Es ist in der That auffallend, wie außerordentlich dürftig die Notizen über Apians eigene oder aus seiner Offizin hervorgegangene Karten in den litterarhistorischen, biographischen und bibliographischen Sammelwerken aller Jahrhunderte sind, obwohl Apians Name in den meisten derselben unter Anführung einzelner Schriften wiederkehrt. Gesner, der doch die Karten des Orontius Finaeus nennt, führt in seiner Bibliotheca (1545) keine einzige Karte an, und außer dem oft genannten *Typus Orbis* von 1520 findet man auch bei den neueren Biographen, einem Kobolt (1797 und 1824), Wiedemann (1858) und S. Günther (1882) kaum eine andere Karte erwähnt.

So dürftig, wie es hiernach erscheinen sollte, ist nun freilich die ältere Litteratur nicht, aber bis vor kurzem ging unsere Kenntnis Apian'scher Karten nicht über die fünf Erzeugnisse hinaus, die Ortelius in seinem bekannten Verzeichnis älterer oder zeitgenössischer Kartographen 1570 mitteilte, nämlich unter Apians Namen den *Typus universalis*, *Europa*[1]), *Peregrinatio D. Pauli*[2]), unter Collimitius dessen neue Ausgabe der *Tabula Hungariae*

1) Eine Karte von Europa, bei Lipenius (Biblioth. philos. 1682, 490) als *Europa in tabulis Ingolstadii 1534* bezeichnet, wird sich bei allmählicher Durchsicht älterer Kartenbestände unserer Bibliotheken vielleicht noch auffinden lassen.

2) Was die *Peregrinatio D. Pauli* betrifft, so erscheint es mir trotz ihrer Anführung bei Ortelius, der keineswegs seinen Catalogus auctorum auf Grund von Autopsie aller genannten Karten aufgestellt hat, fraglich, ob hier wirklich eine Karte vorliegt und es sich nicht vielmehr um jene kurze chronologische Tabelle der Reisen (nebst Aufenthaltszeiten) des Apostels Paulus handelt, wie sie uns Lossius erhalten hat (Epitome concionis et peregrinationis D. Pauli juxta supputationem et seriem P. Apiani in Annotationum in nov. testamentum Lucae Lossii. Tomus IV. Francof. Egenolph (1558) S. 17—20). Gesner sagt im 2. Bande seiner Bibliotheca (Pandectae, Tig. 1548, 111): „Peregrinatio Pauli per H. Krafft et P. Apianum, utriusque puto in tabulis depicta"

Lazari (quam Cuspinianus edidit) [1]), unter Seb. Rotenhan [2]) dessen *Franconia orientalis*, von denen die beiden letzten zu den Verlagsartikeln der Apianischen Offizin zu rechnen wären. Gregorii, der 1713 den ersten größern Versuch eines Kartenkataloges in seinen „Curieusen Gedancken von Land-Charten" machte, verweilt allein bei der Weltkarte Apians etwas länger und seine Worte [3]) lassen keinen Zweifel darüber, daß er den *Typus Orbis universalis* von 1520 vor sich hatte.

Erst seitdem d'Avezac (1863) die Aufmerksamkeit auf einen eigenen, dem Apian zuzuschreibenden Kartenentwurf in ellipsoidischer oder Eiform gelenkt und d'Avezac, Harrisse (1866), F. Ad. de Varnhagen (1869) begonnen hatten, die Schriften Deutscher zur Entdeckungsgeschichte Amerikas ans Licht zu ziehen, hat man sich auch mit Apians bekanntem *Cosmographicus liber* (1524) und zwei älteren Schriftchen, der *Declaratio et Usus Typi cosmographici* und der *Isagoge in Typum cosmographicum seu Mappam mundi* mehr beschäftigt. Hierdurch gelangte die Frage nach den kartographischen Gesammtleistungen Apians in ein neues Fahrwasser und speziell fing man an, sich in Vermutungen über etwa verschollene Weltkarten dieses Autors zu ergehen. Nachdem A. Breusing 1883 [4]) auf wichtige Punkte hingewiesen, hat dann Nordenskiöld in seinem unvergleichlichen Facsimile-Atlas (1889) den ersten größern Versuch einer Würdigung Apians als Kartograph gemacht. Jüngst hat dann Henry Harrisse in seinem neuesten Prachtwerk (The Discovery of North America, Paris 1892) von neuem die Nachrichten über Apian'sche Weltkarten erörtert. Zur Orientierung über den Stand der Frage wird es am besten sein, die Zusammenstellung von Harrisse (S. 506) hier mitzuteilen:

---

1) Bei der *Tabula Hungariae* finde ich den Zusatz „*ex Academia Apiana 1528*" erst bei J. G. Gregorii 1713 (Curieuse Gedancken von Land-Charten, 593). Auch diese Karte existiert gewiß noch.

2) Ueber Sebastiani à Rotenhan, *Franconia orientalis* oder Franckenland, bereits bei Ortelius mit „excusum Ingolstadii 1533" bezeichnet, ist jüngst näher von L. Gallois in seiner trefflichen Schrift „Les géographes allemands de la renaissance", Paris 1890, 213 auf Grund eigener Einsicht in ein Pariser Exemplar der Karte berichtet worden.

3) „Peter A. hat die ganze Erde aus vier Theilen bestehend in der Figur eines Herzens vorgemahlet und die Circulos über selbiges hergezogen und in einer unordentlichen Fläche präsentiret. Auf einer Seite ist der Thier-Kreiß, auf der andern finden sich rund herum die Winde gezeichnet und auf dem Rande ihre Namen beigefüget" (a. a. O. 324).

4) Leitfaden durch das Wiegenalter der Kartographie bis 1600, Frankf. 1883.

1. 1520 Vienna, The Tipus orbis universalis.
2. Ante 1522, to accompany the „Declaratio etc." (lost).
[3. 1522, Small planisphere inserted in the work just mentioned.]
[4. 1524, Two diminutive maps in the „Cosmographicus liber".]
5. Circa 1524, Described in the „Isagoge" (lost).
6. 1530 Ingolstadt. From his own private press.
7. 1530 Antwerp. Printed by Peter de Vales de Guldenhant.
[8. A MS. mappa mundi made for Charles V, formerly preserved in the Escurial (lost).]

Mit den gleichen Fragen seit länger beschäftigt, um sie einer größern Arbeit über den Kosmographen Peter Apian einzuverleiben, glaube ich nach Auffindung der bisher von keinem mir bekannten Historiker der Erdkunde gesehenen dritten Weltkarte v. J. 1530 einige vorläufige Resultate meiner Untersuchungen bekanntgeben zu sollen in der Hoffnung, auf diesem Wege vor Abschluß der letztern der einen oder andern Quelle und besonders der verschollenen Weltkarte von 1522, vielleicht aber auch anderen Karten Apians noch auf die Spur zu kommen.

Kurz zusammengefaßt, lauten die Ergebnisse hinsichtlich des hier herausgegriffenen Punktes der größern Weltkarten dahin, daß Peter Apian nicht etwa nur eine, die bekannte Karte von 1520, entworfen oder, wie Nordenskiöld meint, in verschiedenen Ausgaben veröffentlicht hat, aber auch nicht vier oder fünf, wie Harrisse meint, sondern drei, die sich kurz als

Typus orbis universalis v. J. 1520 (Wien),

Mappa mundi v. J. 1522 (Wien oder Regensburg?),

Tabula orbis cogniti universalior v. J. 1530 (Ingolstadt)

bezeichnen lassen, wogegen die

Charta cosmographica v. J. 1544 bezw. 1551 (Antwerpen)

als Pseudo-Apianische ausgemerzt und dem Gemma Frisius zugeschrieben werden muß. Im Folgenden sollen für diese Klassifikation einige der Hauptbeweise gegeben werden. Die kleinen Kärtchen der Declaratio und des Cosmographicus liber, die Harrisse in seine Liste mit aufgenommen hat, berühre ich an dieser Stelle weiter nicht, ebenso wenig die Manuskript-Karte, welche Apian für Karl V. gezeichnet haben soll. Man weiß über dieselbe gar nichts; die Notiz von Cl. Clemens[1]), 1635, auf welche allein sich auch Harrisse bezieht, spricht aufs allerdeutlichste von einem „Instrument" und nicht von einer Karte.

1) Cl. Clemens, Musei sive Bibliothecae Extructio etc. Acc. descriptio R. Bibl. S. Laur. Escurialis. Lugd. 1635, 4°, S. 528. Es wird von „globi, sphaerae, tabulae" und „Instrumenti Mathematicorum" gesprochen. Dann heißt es sofort: „Est unum

I.

1. Die erste Weltkarte Apians: *Tipus Orbis universalis juxta Ptolomaei cosmographi traditionem et Americi Vespucii aliorumque lustrationes a Petro Apiano Leysnico elucubratus An. Do. MDXX* ist zu oft erörtert, als daß es hier eines längern Verweilens bedürfte. Sie ist auch nicht so gar selten und neuerdings öfter in Facsimile reproduciert, so bekanntlich in Originalgröße (407×280 mm) von Santarem und Nordenskiöld (Tab. XXXVIII). Ihre Erhaltung gegenüber den später zu erwähnenden verdankt sie bekanntlich dem Umstande, daß sie zwei größern Druckschriften beigegeben ist, wie zuerst des Solini Enarrationes von Camers, welche auf Kosten von Lucas Alantse in Wien 1520 erschienen. Des letzteren Name steht auch im Monogramm auf der Karte selbst, und wir würden dies als ein unzweideutiges Zeichen, daß die Karte in Wien entstanden und hergestellt ist, gar nicht nochmals anführen, wenn nicht mehrfach die Ansicht verbreitet wäre, auch diese Karte sei schon in Ingolstadt veröffentlicht. Apian ist aber sicher nicht vor 1524 nach Ingolstadt gekommen und hat seine dortige Druckerei keinesfalls vor 1527 eröffnet. Daß dieselbe Alantse-Karte d. h. der Abdruck von demselben Block auch der Ausgabe des Pomponius Mela von Vadian beigegeben ist, welche 1522 in Basel bei A. Cratander erschien, hängt ohne Zweifel mit den engen Beziehungen zusammen, die Vadian mit Wien seit seinem bis 1519 reichenden Aufenthalt daselbst hatte. Irgend welche Beziehungen hatte die Karte zu dem Text der genannten Schriften auch nicht, es war eine buchhändlerische Beigabe.

Nordenskiöld läßt der Karte mehr Gerechtigkeit widerfahren als A. Breusing[1]), der meinte, abgesehen von dem Umstande, daß sie die erste gedruckte Karte sei, auf der der Name Amerika figuriere, verdiene sie kaum, genannt zu werden. Daß sie dieses Urteil vom Standpunkt der Geschichte der Kartographie wohl nicht verdient, werde ich in meiner größern Arbeit zu zeigen versuchen.

2. Spätere Ausgaben des Typus Orbis von 1520. Mehrfach hat man vermutet, daß Apian dieselbe Weltkarte, wenn auch vielleicht in größerm Maßstabe, herausgegeben habe. Hierzu

---

(sc. instrumentum) a. P. Ap. ejus auctore oblatum Carolo V. Imp., locorum sitibus, altitudinibus, distantiis et amplitudinibus explorandis commodum; ejus usui cognoscendo quatuor grandes tomos scripsit, quorum alii editi sunt in lucem, alii MSti (sc. tomi!) cum eodem instrumento hic asservantur".

1) Leitfaden S. 10.

haben die Erörterungen über die zweite Weltkarte und das Auftauchen der dritten, Ingolstadt 1530, mit welcher sich diese Mitteilung beschäftigt, Veranlassung gegeben. In diesem Sinn haben sich Van Raemdonck und Nordenskiöld (s. u.) ausgesprochen., doch läßt sich dies nunmehr bestimmt auf einen Irrtum zurückführen. Nachgewiesen scheint mir dagegen nur eine spätere Ausgabe, ein Antwerpener Nachdruck v. J. 1530. H. Harrisse[1]), welcher m. W. zuerst (1866) auf diese Karte aufmerksam gemacht hat, nennt sie in seinem neuesten Werk *The Antwerp Apianus 1530.* Er hatte sie einst in der Alcalá-Ausgabe der Decaden des Petrus Martyr von 1530 gesehen, und fügt hinzu: „It is said to be precisely like the mappa mundi of 1520". Ich habe dieser Ausgabe bezw. Karte bis jetzt nicht habhaft werden können. Wenn der Titel aber wirklich, wie Harrisse erst jetzt in der Discovery von 1892 mitteilt: *Tipus orbis universalis iuxta Ptolomaei Cosmographi traditionem et amrici* [*sic*] *Vespucii alio*[*rum*]*que lustrationes a Petro Apiano Leysnico et elucubrando MDXXX* heißt, statt wie auf dem Original abgekürzt: . . . *A PETRO APIANO LEYSNICO ELUCUBR*$^{T}_{A}$*9 AN: DO MDXX*, so liegt schon in dieser haarsträubenden Abschrift der alten Ueberschrift der Beweis, daß Apian selbst mit der Ausgabe nichts zu thun gehabt hat. Der Zusatz: *Ghedruct t' atwerpen by mo peter de vales*[2]) *de guldenhant* zeigt weiter, daß es sich nur um einen reinen Antwerpener Nachstich handeln kann, wie ja in Belgien der Nachdruck damals in hoher Blüte stand und kurz zuvor auch der Cosmographicus liber durch einen einfachen Nachdruck (Antwerpen bei Bollaert 1529 ed. Gemma Frisius) seiner bairischen Heimat für immer entzogen ward (s. u. Abschn. IV.). Nicht umsonst begegnen wir daher auf der dritten Weltkarte zum ersten Male einem „Privilegium imperiale", durch welches sich Apian später vor gleichen Ausbeutungen zu schützen suchte.

II.

Die zweite Weltkarte von 1522, *Mappa mundi.* Wie schon angedeutet, knüpfen die Streitfragen über die Existenz weiterer Weltkarten teilweise an den nur wenige Blätter umfassenden Schriftchen „*Declaratio*" und „*Isagoge*" an. Ich bin einem Hinweis auf dieselben auch ihrem Titel nach in der von mir durchforschten Litteratur nicht vor 1796 (Jen. Lit.-Zeit. No. 60) bezw. 1801 (Panzer IX, 480) begegnet. Beide Schriften sind äußerst selten, die *Decla-*

1) Bibliotheca Americana vetust. 1866, 276.

2) In der Bibl. Americana vetust. 1866, 276 steht „by P. de Wale".

ratio jedoch noch ungleich mehr, obwohl sie in zwei Ausgaben existiert, und von allen neueren Schriftstellern, welche sich mit letzterer beschäftigt haben, wie Harrisse (1872, 1892), v. Varnhagen (1870/72), S. Günther (1882), Nordenskiöld (1889), Gallois (1890), hat sie bis jetzt allein Varnhagen wirklich in der Hand gehabt, um sie freilich merkwürdiger Weise auch dann noch miszuverstehen.

Die genannten Schriften sind zwar in gewissem Sinne, wie Günther nach Einsicht in die Isagoge (Peter und Philipp Apian S. 69) hervorhebt, als Vorläufer zum Cosmographicus liber anzusehen, richtiger sind sie mit Harrisse, Varnhagen, Nordenskiöld, Gallois als Begleitworte zu einer Weltkarte zu betrachten. Ob aber zu ein und derselben Karte, ob dies etwa nur die Karte von 1520 oder ein wirklich neuer Entwurf sei, oder ob die Schriften zu mehreren Karten gehören, darüber gehen die Ansichten selbst so gewiegter Kenner auseinander. Aus Nordenskiölds Worten (S. 101) über die Isagoge vermag ich nicht deutlich zu erkennen, ob er diese Schrift selbst vor sich gehabt hat. Es ist mir zweifelhaft[1]), da er sonst kaum zu dem Schluß kommen konnte, es handle sich dabei wohl nur um den Text zu einer Karte, die „identisch mit derjenigen von 1520 sei". Neuerdings hat sich der unermüdliche Henry Harrisse wiederum mit der Sache beschäftigt, freilich auch diesmal ohne von der *Declaratio* Einsicht nehmen zu können. Er gelangt, die Notizen anderer, wie besonders F. Ad. de Varnhagens[2]) kombinierend, zu dem Schluß, es seien zwei Weltkarten verschollen, eine solche von 1522, zu welcher die *Declaratio*, und eine von 1524, zu welcher die *Isagoge* gehöre.

Entgegen allen diesen Vermutungen werde ich in jener Arbeit nachweisen, daß die beiden Ausgaben, die uns von der Declaratio erhalten sind, in Regensburg gedruckt sind, und zwar wahrscheinlich beide 1522, daß ferner die Isagoge nur in einer Ausgabe existiert und aus dem Jahre 1523 (nicht 1524[3]) stammt, jedenfalls (entgegen den Ansichten Varnhagens und Nordenskiölds) jünger als die Declaratio ist. Mit Bestimmtheit geht bei näherer Einsicht in diese seltenen Schriftchen hervor, daß sich alle drei auf ein und dieselbe Karte beziehen und daß diese zweite

1) Die Isagoge hat 13 Propositionen, nicht, wie Nordenskiöld anführt, deren 11.

2) Joh. Schöner e P. Apianus, Vienna 1872.

3) Wie Wiedemann, Günther u. a. aus dem Druckjahr des Appendix geschlossen haben, der zufällig dem Münchener Exemplar beigebunden ist, aber wie aus dem Text desselben klar hervorgeht, erst nach Abschluß des Cosmographicus liber gedruckt ist.

Apianische Weltkarte von 1522 mit der ersten von 1520 nichts gemein hat. Auch war sie keinesfalls nur eine vergrößerte Ausgabe derselben, sondern sie ist in derjenigen Projektion entworfen gewesen, welche im Cap. VII u. VIII des Cosmographicus liber beschrieben und durch Zeichnungen erläutert ist.

Mit geraden gleichabständigen Breitenparallelen und Halbkreisen als Meridianen war diese von d'Avezac (1863 [1])) als Apiansche Projektion bezeichnet. Nordenskiöld will (S. 106) zwar die Priorität dieser eiförmigen Entwurfsart nicht dem Apian, sondern dem Italiener Bordone zusprechen, meines Erachtens mit Unrecht. Besonders der Haupteinwand, daß Apian in dieser nach ihm benannten Projektion keine Karte entworfen habe, ist unzutreffend, auch wenn eine solche bis jetzt noch nicht wieder aufgefunden worden ist. Denn weder der Text der *Declaratio* und der *Isagoge*, noch das Titelblatt der erstern Schrift, auf welchem sich ein verkleinertes Kärtchen in der nämlichen ellipsoiden oder länglich eiförmigen Projektion abgedruckt findet (ich werde ein Facsimile des Titelblattes bringen), lassen einen Zweifel darüber, daß Apian besagte Projektion wirklich einer größern Weltkarte zu Grunde gelegt hat. Diese Karte von 1522 war nach astronomischer Art mit dem Süden nach oben orientiert; sie enthielt zugleich eine Reihe von interessanten Nebenkarten und — wie die Begleitworte ausführlich darlegen — eine solche in Horizontalprojektion, bezogen auf den Horizont von Wien. S. Günther, welcher in seiner Monographie über Peter und Philipp Apian (S. 69 ff.) eine Analyse des Inhalts der Isagoge giebt, hat diesen Sachverhalt völlig verkannt [2]). Es scheint uns endlich kein Zweifel, daß diese Karte noch in Wien selbst entstanden ist, für den Horizont von Wien ist das Nebenkärtchen entworfen, und die Beispiele in der *Declaratio* beziehen sich gleichfalls auf die Koordinaten von Wien. Sie ist also vielleicht schon 1521 gezeichnet, aber erst 1522 mit jenem Schriftchen zugleich veröffentlicht. Daher muß es zweifel-

---

1) Coup d'oeil hist. s. la proj. des cartes. Bull. Soc. Géogr., Paris 1863, I, 311.

2) Günther imputiert Apian ein unmögliches Verlangen, daß nämlich neben dem Zodiakus auch der „Horizon Germaniae" auf derselben Karte markiert werden solle. Nun kann man zwar auf eine Aequatorialprojektion den Tierkreis als Kurve zwischen den Wendekreisen eintragen, aber wie soll man auf einer den Pol nicht überschreitenden Karte mit geraden Parallelen auch den Horizontkreis von Wien einzeichnen? Uebrigens verfiel Gallois (Les géogr. allem. de la renaissance 1890, 100), der sonst das Verhältnis der Isagoge zu einer eigenen Weltkarte richtig erkannt hat, in den gleichen Fehler, indem er sagt: „Enfin un grand cercle indiquait l'horizon de l'Allemagne par rapport à Vienne pris comme pôle".

haft bleiben, ob Wien oder Regensburg als Ursprungsort (Druckort) zu bezeichnen ist.

Leider ist diese zweite Weltkarte von 1522 (welche wir an Stelle der von Harrisse vermuteten beiden von 1522 und 1524 setzen) bis jetzt noch verschollen. Die obigen kurzen Andeutungen würden zur Wiedererkennung sicher genügen. Jedenfalls steht auch Apians Namen auf ihr, da dieser bekanntlich sein Licht nicht unter den Scheffel stellte, sondern überall seinen Namen mit Bezeichnung seines Charakters und seiner Herkunft (ex Leisnigk, Leisnicus etc.) auf Werken und Karten anbrachte. Es existiert, wie es scheint, nur eine anonyme Schrift von ihm: *Cosmographiae introductio*, die zu vielen Verwechselungen über die Ausgaben des Cosmographicus liber hauptsächlich Veranlassung gegeben hat, auch den beiden jüngsten Biographen Apians, Günther und Gallois, als Apianische Schrift unbekannt geblieben ist.

III.

1. Die dritte Weltkarte Apians: *Universalior cogniti orbis Tabula* v. J. 1530. Oben ist bereits bewiesen, daß hierunter nicht jener Nachdruck der ersten Weltkarte von 1520, welchen Harrisse „*The Antwerp Apianus 1530*“ nennt, verstanden werden soll. Hier handelt es sich um seinen „*The Ingolstadt Apianus*“, eine Karte, die, obwohl sie die erstere an Größe, Schönheit und wissenschaftlichem Wert so außerordentlich übertrifft, bis 1885 gänzlich unbekannt in geographischen Kreisen gewesen zu sein scheint. Soviel ich zur Zeit ersehen kann, ist sie zuerst durch die Aufnahme in einen Katalog des bekannten Londoner Antiquars B. Quaritch (Cat. 362. N. 28142), 1885, der Vergessenheit entrissen.

Dieser Katalog hat mir selbst nicht vorgelegen, doch kann es keinem Zweifel unterworfen sein, daß die darin über die Karte mitgeteilten Angaben identisch sind mit denjenigen, welche Nordenskiöld unter Hinweis auf Quaritch im Facsimile-Atlas S. 104 anführt: „*Apiani Universalior Cogniti Orbis Tabula, 21⅜ × 15½ inches (Ingolstadii) Unique*“. *The map is dedicated to Leonardus ab Eck. At its upper parts there are two small maps of the world: Observatio Ptolem. and Observatio Vespu.* Die Karte ward für £ 40 = 800 ℳ ausgeboten.

So kurz diese Angaben sind, so weichen sie doch in zu auffallendem Maße von denjenigen des Typus universalis von 1520 ab, um nicht die Vermutung aufkommen zu lassen, es handle sich um

ein anderes Werk Apians. Indessen haben sich zwei hervorragende Kenner im entgegengesetzten Sinn ausgesprochen. J. Van Raemdonck hat aus jenen Angaben bei Quaritch unmittelbar geschlossen, es sei diese Karte nur eine neue Ausgabe der ältern. Der verdienstvolle belgische Autor sagt in seiner Schrift über die erste Weltkarte Mercators[1]): „Elle (la mappe-monde d'Apianus de 1520) parut séparément, sortie de la presse privée d'Apianus à Ingolstadt en 1530 sous le titre de *Petri Apiani Universalior cogniti Orbis Tabula*, mesurant 21³/₄ sur 15¹/₂ pouces". Und dieselben Worte Van Raemdoncks druckt Harrisse mit ab, ohne seinerseits eine Meinung über „The Ingolstadt Apianus" auszusprechen, ein Zeichen, wie leicht eine Vermutung bei andern zu einem Irrtume Veranlassung geben kann, sobald sie sich in die Form einer positiven Behauptung kleidet. Vorsichtiger drückt sich Nordenskiöld aus: „It seems to be a reproduction on a larger scale of the map of 1520".

Die fragliche Karte mußte also 1885 noch existieren. Und in der That ist sie, wie sich mir durch weitere Nachforschungen bei Mr. Quaritsch selbst ergab, aus seiner Hand in den Besitz des Britischen Museums übergegangen, wo sie unter „S. 159 (17) Map Room" aufbewahrt wird. Durch gütige Vermittelung des Mr. C. H. Coote erhielt ich von der Verwaltung die Erlaubnis, mir einen Facsimile-Druck der Karte auf photographischem Wege herstellen zu lassen. Dieselbe, in trefflichster Weise von James Hyatt, London, ausgeführt, liegt nun in Originalgröße vor mir. Ich werde eine Kopie in gleicher Größe meiner Abhandlung beifügen. Vorläufig möchte ich den Freunden der Geschichte der Kartographie über diese dritte und beste Weltkarte Apians von 1530 einige Notizen zukommen lassen, sicher voraussetzend, daß sie noch in manchen Bibliotheken vergraben liegt.

2. Die Karte ist wesentlich größer als die ältere — sie ist 535 mm hoch und 390 mm breit[2]) —, übertrifft in Hinsicht der Ausführung des Entwurfes, der Zeichnung, der künstlerischen Beigaben, des Holzschnittes etc. diejenige von 1520 beträchtlich. Sie ist von einem tüchtigen Formschneider der Nürnberger Schule (?)[3]) geschnitten.

---

1) Annales du cercle archéol. du pays de Waas. X, 1886, Orbis Imago p. 329.

2) Nach meinem bereits in Lichtdruck ausgeführten Facsimile. Es stimmen die Zahlen nicht ganz mit den Angaben bei Quaritch (552 mm × 394 mm).

3) Das Monogramm $\mathcal{M}$, das sich neben den beiden Figuren findet, gehört nach Bartsch, Peintre graveur VII, 475 zwar „einem unbekannten Formschneider

In dem leeren Raume über der Karte findet sich ein *Privilegium imperiale* in Versen. Unten rechts heißt es in gothischer Schrift:

Nobiliſs. ſimul et prudentiſs. viro ac D. Do|mino LEONHARDO ab Eck in Wolfs et | Randeck do: oratori et philoſopho inſigni me|coenati ſuo cum primis humaniſsimo P. Api|anus et Leyſsnigk Academie Ingolſtadiane | Mathematicus hanc univerſaliorem cogniti | orbis Tabulam ex recentibus obſervationibus confectam: Dedicat. Anno M.DXXX die. 9. Nov.

Die linke untere Ecke füllt das Wappen Leonh. v. Eck[1]), des bekannten Kanzlers der Universität Ingolstadt, aus. Die oberen Ecken nehmen die Brustbilder zweier Kosmographen ein, von denen jeder eine kleine Herzprojektion in vier Hauptlinien (Mittelmeridian = 30 mm) in der Hand hält. In der linken Figur, über welcher steht: *Observatio Ptolem.*, ist das bewohnte Erdviertel der alten Welt mit einem rohen Kärtchen bedeckt, das übrige weiß gelassen, in der rechten, überschrieben: *Observatio Vespu.*, ist dieser innere Teil weiß, die übrigen drei Erdviertel dagegen mit Land- und Wasserflächen ausgezeichnet. Zwölf hübsch gezeichnete Windköpfe umgeben die Karte. Ein Meilenzeiger ist unten angebracht.

Die Hauptkarte, 37 cm hoch, 28 cm breit, giebt die Gesammtoberfläche der Erde in einem einzigen Gradnetz und zwar der zweiten herzförmigen Projektion von Stabius-Werner[2]), welche Peschel, Steinhauser u. a. mit Recht die erste flächentreue Entwurfsart für die Gesammtoberfläche der Erde genannt haben. Das eben giebt dieser Karte das Hauptinteresse. Der Mittelmeridian ist 294 mm lang, der Maßstab der Karte beträgt also ca. 1 : 38,000 000.

Wie es scheint, hat man in Deutschland noch bis vor kurzem geglaubt, daß diese interessante, wenn auch die äußern Quadranten stark verzerrende Projektion eines vollen Herzens nie-

---

um 1530" an, aber schon der Umstand, daß man, nach dem Monogramm zu urteilen, mehrere Stiche von ihm hat, ist wichtig.

1) Nicht „Leonard van Eyk", wie Harrisse (Discovery 578) schreibt.

2) Im Ausland scheinen die triftigen Einwürfe Breusings, daß Joh. Werner die von ihm 1514 ausführlich behandelten vier Netzentwürfe nicht selbst erfunden, sondern sie seinem Lehrer und Freund Stabius verdanke, noch nicht überall zur Geltung gekommen zu sein. Sowohl Nordenskiöld als Harrisse sprechen nur von Wernerscher Projektion. Breusing giebt die eigenen Worte Werners zwar noch nicht in seiner Rede über Mercator 1869, welche Nordenskiöld allein citiert (S. 88), wohl aber im Leitfaden durch das Wiegenalter der Kartographie S. 9, und Steinhauser hat sie gleichfalls in extenso 1885 (s. o.) wiederholt. „Joh. Stabio haud vulgari Mathematico earundem figurationum theoriam ac primaria incunabula mihi suggerente", sagt Werner in der Vorrede zu seinem Libellus de quatuor terrarum orbis in plano figurationibus, Norimb. 1514. Man sollte also, da Stabius keine Entwickelung gegeben, die Projektionen, wie oben geschehen, stets nach beiden Autoren benennen, wie dies auch bereits Van Raemdonck (l. c. p. 328) und Gallois (l. c. p. 127) gethan haben.

mals einer ausgeführten Weltkarte zu Grunde gelegt sei, daß sie vielmehr nur in den doppeltherzförmigen Karten wiederkehre, bei denen man die untere Herzspitze bis an den Aequator fallen läßt und die südliche Halbkugel in das Spiegelbild des Gradnetzes der nördlichen einzeichnet. Solche Karten waren von Orontius Finaeus (1531), Mercator (1538) u. a. bekannt, welche ja auch in Nordenskiölds Atlas wiederkehren [1]).

Erst neuerdings hat Nordenskiöld (S. 89) auf die Karte von Joh. Paulus Cimerlinus v. J. 1566 hingewiesen, die er im Lafreri-Atlas fand, und ein Facsimile derselben gegeben. Die Inschrift „*Cosmographia universalis ab Orontio olim descripta*" weist auf Orontius Finaeus als Urheber hin und Nordenskiöld meint, daß eine solche im J. 1536 von dem letztern ediert sei. Dies hat sich inzwischen bestätigt. L. Gallois hat sie in den Archives du Ministère des Affaires Étrangères gefunden und in seiner Schrift „De Orontio Fineo" 1890 in Lichtdruck mitgeteilt. Es kann gar kein Zweifel sein, daß ebensowohl die Karte des Cimerlino als eine türkische Karte des XVI. Jahrh., von welcher d'Avezac 1865 im Bull. Soc. de géogr. V. Ser. Vol. VII eine Kopie gab, die Karte des Orontius Finaeus zum Vorbild hat. Auf diesen Umstand hatte übrigens, was Nordenskiöld entgangen ist, schon d'Avezac selbst in seinem Coup d'oeil historique [2]) aufmerksam gemacht, ohne jedoch damals eine andere Karte als die des Cimerlinus zu kennen.

Hiernach datierten also die ältesten bis jetzt bekannten und gestochenen oder in Druck gegebenen Weltkarten in echter Herzform aus 1536 bezw. 1531, und beide rühren von Orontius Finaeus her [3]).

1) Vgl. Breusing, Leitfaden 10; Steinhauser, Stabius rediv., Zeitschr. f. wiss. Erdk. V, 1885, 289.

2) Bull. Soc. Géogr., Paris 1863, I., 310.

3) Freilich führt H. Harrisse in seinem neuesten Werke (Discovery, 513) auch noch einen Orontius Finaeus *in cordiform projection* aus 1521 an, indem er sich auf die Legende der Karte von 1536 bezieht: „Decimus quintus circiter agitur annus quo universam orbis terrarum designationem in hanc humani cordis effigiem primum redegimus". Es handelt sich dabei übrigens nur um eine handschriftliche, dem König Franz I. von Frankreich überreichte Karte. Wäre diese Angabe der Legende richtig, so würde man allerdings mindestens auf 1521 schließen müssen, da die wirklich publizierte Karte des Finaeus „*in unicam cordis humani effigiem*" schon in dem 1536 veröffentlichten Katalog der Werke des Finaeus (Gallois S. 38) vorkommt. Aber dann kann es sich keinesfalls um das unmittelbare Vorbild der Karte von 1536 handeln, denn auf letzterer sind die Ergebnisse der Entdeckungen der Magelhaeschen Weltumsegelung schon enthalten, die natürlich 1521 noch nicht vorgelegen haben können. Andererseits weist Gallois

Diesen tritt nunmehr unsere *Tabula Orbis cogniti* des Apianus von 1530 hinzu, und die Priorität der Anwendung der vollen Herzform würde demnach dem deutschen Kosmographen gebühren.

Aber größeres Interesse beansprucht sie dadurch, daß sie auch die erste Karte ist, welche die aequivalente (sog. zweite) Stabius-Wernersche Projektion zu Grunde legt und damit ein treffliches Zeugnis für Apians Verständnis der damaligen Errungenschaften der mathematischen Kartenentwurfslehre abgiebt.

Man darf nur unter herzförmiger Projektion nicht alles zusammenfassen, was annähernd die Gestalt einer solchen Herzfigur hat. Man sollte wenigstens die drei Stabius-Wernerschen Entwürfe als eigentlich herzförmige (cordiform) den herzähnlichen (pseudocordiform, cordoid) gegenüberstellen. Zu letzteren gehören die älteren Versuche, die Ptolemäische Projektion mit gekrümmten Meridianen seitwärts über die Halbkugel hinaus zu erweitern, wie dies von Sylvano zuerst 1511, später in anderer Weise von Peter Apian in seiner ersten Weltkarte von 1520 geschehen. Die Stabius-Wernerschen Entwürfe unterscheiden sich von diesen auf den ersten Blick dadurch, daß sie sämmtlich Nordpolarprojektionen insofern sind, als das Zentrum der Parallelkreise in dem auf der Karte noch abgebildeten Nordpol liegt. Es erscheint hiernach nicht gerechtfertigt, wenn H. Harrisse (Discovery, 512) sagt: „The first map of Finaeus was not a novelty. The cordiform projection had already been employed by Sylvano 1511 and described scientifically by Joh. Werner", oder wenn S. Ruge schreibt: „In der Weltkarte von Apian 1520 begegnen wir zuerst der herzförmigen Projektion. Dieselbe hat der Nürnberger Werner 1514 zuerst vorgeschlagen" [1]). Hier sind zwei Gattungen von Projektionen allein ihrer äußern Aehnlichkeit wegen confundiert.

Die drei Stabius-Wernerschen Herzform-Projektionen von 1514 unterscheiden sich nun bekanntlich dadurch, daß die Länge des Kreisbogens, welcher dem ganzen Aequator entspricht, bei der ersten = 360°, also ein Vollkreis ist, bei der zweiten = 229$^1/_6$°, bei der dritten = 240°. Wenn sich danach alle drei äußerlich stark gleichen, so unterscheiden sich jedenfalls die zweite und dritte so wenig, daß ein scharfes Auge oder besser die Anlegung eines Transporteurs erforderlich ist, um zu erkennen, ob die Länge des halben Aequatorbogens = 114° 35′ (der ganze = 229° 11′) oder = 120° ist (ganzer = 240°). Natürlich kann von Aequivalenz oder Flächentreue nur die Rede sein, wenn der Aequatorbogen in der Zeichnung viermal so groß ist, als der geradlinige Abstand des Pols vom Aequator, also als der Radius des Kreises ($r = 57°,_{29}$ im Bogen; $4.57°,_{29} = 229^1/_6$°, genauer 229° 11′) [2]). Von allen drei Projektionen zeichnet sich also nur die zweite durch Erfüllung dieser Anforderung aus.

Kehren wir jetzt zu den herzförmigen Karten des Orontius

(S. 52) nach, daß die Karte von 1536 nichts enthalte, was später als 1522 entdeckt sei. Hiernach ist also das Gewicht auf „circiter" zu legen und die uns übrigens nicht überlieferte Karte mindestens bis auf das Jahr 1523 hinaufzurücken.

1) Hamburger Festschrift z. Entdeckung Amerikas, 1892, I, 113.

2) Also nicht 239° 11′, wie d'Avezac (S. 304) und Gallois (Les géogr. allem. S. 127) schreiben.

Finaeus zurück, so hat schon d'Avezac 1863 die Karte des Cimerlinus richtig als eine Anwendung der dritten Wernerschen Projektion erkannt. „C'est, comme il arrive trop souvent", sagt d'Avezac, „à cette projection de moindre valeur que la vogue attache le nom d'Oronce". Es ist daher ein Irrtum, wenn Nordenskiöld 1889 sie ausdrücklich als eine Anwendung der zweiten, also der aequivalenten Wernerschen Projektion bezeichnet: „I know any maps drawn on Werner's first and third projection: but his second projection is strictly applied to the handsome kopper-engraving by Joh. P. Cimerlinus" etc. Die Abbildung S. 89 des Facsimile-Atlas gestattet, sofort die Probe zu machen: man wird erkennen, daß auf der Karte des Cimerlinus der halbe Aequator einem Kreisbogen von 120° entspricht, folglich die dritte Stabius-Wernersche Projektion vorliegt. Dasselbe ergiebt eine Messung auf der Karte von Orontius von 1536, welche Gallois 1890 veröffentlicht. Eine Karte in der aequivalenten zweiten Stabius-Wernerschen Projektion war also bisher in der ältern kartographischen Litteratur noch nicht nachgewiesen, eine solche liegt nunmehr in der dritten Weltkarte Apians von 1530 vor, und dies giebt ihr vom Standpunkt der wissenschaftlichen Kartographie den Vorzug vor derjenigen des Orontius von 1536. Der Aequatorbogen ist hier in der That $229^1/_6{}^0$ lang. Die Karten des Orontius von 1531 und Mercator von 1538 in doppeltherzförmigem Entwurf sind übrigens gleichfalls in dieser aequivalenten Projektion gezeichnet.

3. Nur kurz berühren wir an dieser Stelle den geographischen Inhalt der Tabula orbis cogniti. Die Länderzeichnung ist wie bei den meisten deutschen Holzschnitt-Karten ziemlich roh und in groben Zügen entworfen. Wenn manches noch an die Karte von 1520 erinnert, so sind doch auch erhebliche Unterschiede vorhanden.

Das auffallendste ist, daß von Amerika nur die Ostküste eingezeichnet ist. Die Rückseite des Kontinents ist von 50° N. bis 48° S. durch eine Art von Meereswogensignatur in kontinuierlichem Bogen, der sich von 80° W. im Norden allmählich bis 40° W. im Süden hinzieht, abgeschlossen. Diese Darstellung scheint die Ansicht Apians zum Ausdruck bringen zu sollen, daß jene Westküsten noch zu unbekannt sind, um durch feste Linien markiert zu werden, andererseits, daß der Kontinent von Amerika in diesen mittlern Breiten nicht mit Asien zusammenhängt. Den umgekehrten Standpunkt vertrat bekanntlich damals Orontius Finaeus (1531). — Die mittelamerikanische Straße, wie sie die Karte von 1520, die ältern Schönerschen Globen etc. zeigen, findet sich allerdings nicht mehr vor. Das Festland heißt im Norden *Terra Cuba*, im Süden *America* und *Nova terra*. Im Norden Südamerikas steht: *Illi sūt sub Carolo Rom: Imperatore*, im Innern noch zwei unbedeutende Inschriften, kurz die Nomenklatur ist z. B. im Verhältnis

zur Karte des Finaeus von 1531 äußerst dürftig. Eine Terra australis enthält die Karte durchaus nicht; eine unter 28—32° S. Br. sich südwestwärts erstreckende Meeresstraße ist ohne Zweifel nicht das fretum Magellanicum, sondern soll die Laplata-Mündung andeuten. Im Ganzen zeigt sich Amerika also doch noch ähnlich wie bei Schöner 1520 etc. Völlig abweichend ist dagegen ein größerer Landcomplex nördlich einer zwischen 50° und 55° gezeichneten Verbindung der Ozeane, welcher eine große Landzunge (mit *Gruenlant* bezeichnet)[1] nach Osten streckt, nach Westen zu aber mit Asien zusammenhängt[2]. Nur in Beziehung auf die Polargegenden bestehen also ähnliche Auffassungen, wie bei Finaeus. — Auch in Ost- und Westasien erinnert in der Zeichnung nichts an die Fahrt des Magalhaës. Ein Schiffskurs ist allerdings eingezeichnet: *hac via Portugalenses navigāt ad Callicutiū.* Das Cap der guten Hoffnung heißt *caput de bona sperantza.* Neben Taprobane steht *Zumara.* Demnach manche Anzeichen einer Benutzung portugiesischer Karten, im übrigen Asien ganz nach ptolemaischer Anschauung.

Am bemerkenswertesten erscheint, daß Calicut an die Spitze einer Halbinsel gesetzt wird, welche sich von den Landschaften Carmanien und Gedrosien — also westlich der Indusmündung(!) — bis etwa zu 13° N. Br. südwärts zieht, sodaß der arabische Meerbusen durch dieselbe in zwei tiefe Golfe zerschnitten wird. Diese total falsche Küstenzeichnung findet sich fast ebenso schon bei Sylvanus 1511 (cf. Nordenskiöld Tab. XXXIII). Das Auffallendste ist aber, daß Apian Calicut an die Spitze dieser apokryphen Halbinsel setzt. Damit giebt er allerdings die geographische Länge (ca. 100° Ö. d. Canaren) viel richtiger an, als weitaus die meisten zeitgenössischen Karten, die Calicut (ca. $93^1/_2$° Ö. v. Ferro) meist auf den 120° Ö. verlegen.

Bis jetzt habe ich erst eine Karte mit der gleichen Position von ca. 100° Ö. für Calicut gefunden[3], die Globusstreifen, über welche Nordenskiöld 1884 in der Zeitschrift Ymer berichtet und von denen er Taf. XXXVII seines Atlas eine Abbildung gegeben hat. Es bestehen zwischen dieser undatierten „Mappa mundi ad globum inducendum" und der dritten Weltkarte Apians übrigens noch eine ganze Reihe von Aehnlichkeiten (mit Ausnahme der Polargegenden), sodaß die letztere ohne Zweifel mit dazu dienen

1) Varnhagen berichtet (Schöner e Apianus, 1872, S. 14), daß Santarem gelegentlich von einer anderen Ausgabe des Apianschen Typus orbis spreche, auf welcher sich der Name Grönland befinde. Vielleicht hat Santarem also doch einmal unsere Tabula von 1530 gesehen (?).

2) K. Kretschmer sieht in dieser nach Osten weit vorgestreckten Halbinsel Asiens auf den Karten der ersten Dezennien des XVI. Jahrh. portugiesischen Einfluß (Ponta d'Assia(?)): Die Entdeckung Amerikas in ihrer Bedeutung f. d. Gesch. des Weltbildes; Festschrift d. Berl. Ges. f. Erdk., 1892, S. 438.

3) Die Karte in Grynaeus Novus Orbis 1532 (Nordenskiöld Tab. XLII) hat übrigens die gleiche Position für Calicut (westl. des Indus!), aber etwas andere Konturen.

wird, diese „*Nordenskiöld Gores*“, wie Harrisse sie nennt (Discovery, S. 497), auf denen bekanntlich auch der Name Ingolstadt steht, nach Verfasser und Abfassungszeit fester zu bestimmen. Meine Untersuchung in dieser Hinsicht ist noch nicht abgeschlossen, doch glaube ich es aussprechen zu müssen, daß die fraglichen Globusstreifen, wenn man sie mit Apian in Zusammenhang bringt, keinesfalls, wie Harrisse zu meinen scheint[1]), vor 1520 zu setzen sind, sondern wesentlich später.

Gar keine Anlehnung ist dagegen bei der Tabula Apians von 1530 an die Globusstreifen zu entdecken, welche der gründliche Forscher Franz v. Wieser[2]) 1888, ebenso wie R. Stevens[3]) als dem verschollenen Globus Joh. Schöners von 1523 zugehörig glaubten nachweisen zu können (Nordenskiöld Tab. XL). Auf diesen Globusstreifen ist bekanntlich die Fahrt des Magalhaẽs eingetragen. Gegen Wiesers Ansicht, die durch sprechende Beweise begründet schien, haben sich dennoch Nordenskiöld (S. 80), Harrisse (Discovery, 519—528) und S. Ruge[4]) mit Entschiedenheit ausgesprochen. Zu den von diesen Forschern vorgebrachten Gründen tritt die jetzt aufgefundene Karte Apians von 1530 als neues Argument hinzu. Doch will ich mich für jetzt nur ganz vorsichtig aussprechen, da ich der Frage ein gründliches Studium noch nicht widmen konnte. Aber es erschiene mir in hohem Grade auffallend, daß Apian sich noch 1530 gegen die Errungenschaften der Magalhaẽsschen Entdeckungen so ganz ablehnend verhalten haben sollte, wenn dieselben in Deutschland seit sieben Jahren durch solche Karten (oder einen durch Druck vervielfältigten Globus) zum Gemeingut geworden wären. Die Kartographen damaliger Zeit haben sich selten beeilt, Nachrichten über neue Entdeckungen in ihre Darstellungen sofort aufzunehmen. Man sollte übrigens — beiläufig gesagt — bei den Identificationen etwas mehr Gewicht auf die von den einzelnen Kartographen angenommenen Positionen charakteristischer Punkte legen, als es gemeiniglich geschieht. Ein treffliches Hülfsmittel dazu ist gewiß die Uebertragung der verschiedenen Karten in eine gemeinsame Projektion, wie es Kretschmer bereits vielfach mit glücklicher Hand in dem neuesten Atlas zur Geschichte der Entwickelung des Weltbildes (Festschrift der Ges. f. Erdkunde, 1892) gethan. Um aber die Bilder

1) Discovery, S. 497.

2) Der verschollene Globus Joh. Schöners von 1523, Wien 1888, aus Sitz.-Ber. d. K. Akad. d. Wiss., Wien, hist.-philol. Cl. Bd. CXVII.

3) Joh. Schöner, A reprod. of his Globe of 1523, long lost, London 1888.

4) Hamburger Festschr. z. Entdeck. Amerikas, 1892, I, 112.

ganz vergleichbar zu machen, bedarf es doch wohl noch mehr des Ausgangs von möglichst gleichen (absoluten) Längen.

Zu untersuchen bleibt ferner, in welchen Beziehungen unsere Karte zu dem sog. vierten Globus Joh. Schöners von 1533 steht, welchen Franz v. Wieser 1881 in einem der in Weimar aufbewahrten Globen zuerst wiedererkannt hat [1]). Harrisse [2]) pflichtet ihm hierin bei, ist aber der Ansicht, daß dieser Globus von 1533 im wesentlichen nur eine Kopie des verschollenen von 1523 sei. Wir besitzen jedoch bis heute keine volle Reproduktion dieses Globus. Nach Wieser sollte derselbe zu den gedruckten Globen gehören [3]) und der Weimarsche Globus eines der erhaltenen Exemplare sein. In diesem Falle konnte es sich dann meines Erachtens nicht um den Globus handeln, zu welchem Schöners *Opusculum geographicum* v. J. 1533 gehört, weil in dem Anhang zu diesem Schriftchen [4]), betitelt *Globi terrestris seu geographici descriptio*, eine Anweisung gegeben wird, wie man das Gradnetz unmittelbar auf die Globuskugel auftragen kann bezw. aufgetragen hat. Harrisse, welcher den Globus neuerdings durch Dr. Leidenfrost untersuchen ließ, sagt denn auch 1892 ausdrücklich, er habe 261 mm im Durchmesser und sei *„depicted by hand"*. Wenn jener Anhang also bereits der Originalausgabe des Opusculum beigegeben war [5]), so darf dieser neue Hinweis als ein weiteres Argument für die Zusammengehörigkeit des Weimarschen Globus mit Schöners Opusculum betrachtet werden, wie sie ja bereits Wieser und Harrisse aufgestellt haben. — Fr. Wieser hat 1881 die Südhemi-

1) Magalhães-Straße und Austral-Continent a. d. Globen J. Schöners, S. 77 ff.

2) Discovery of North America, 584, 592 ff.

3) Petermanns Geogr. Mitt., 1890, 275.

4) Die Originalausgabe des Opusculum in 4° ist selten (stand mir jetzt auch nicht zur Verfügung), sie ist aber vollständig in der Ausgabe der Gesammtschriften „Opera mathematica" (Nürnb. 1551, 2. ed. 1561, in fol.) enthalten; im Inhaltsverzeichnis, welches H. Coote in seiner wertvollen Bibliographie mitteilt, figuriert sie jedoch nur unter dem Spezialtitel „De globi terrestris usu" (Joh. Schöner and his Globe of 1523, by H. Stevens, ed. by C. H. Coote, London 1888, S. 166).

5) Wieser sagt (Der verschollene Globus J. Schöners, S. 11), die fragliche Stelle, auf welche Breusing anspiele (s. folg. S.), befinde sich nicht in der Originalausgabe von 1533, sondern erst in den Opera mathematica, giebt aber nichts Näheres darüber an. Mir liegt nur die zweite Ausgabe der letztern von 1561 vor. Dort folgt nach den Worten „Finis libelli de usu Globi terrestris" auf fol. CXLV jener Anhang von einer Folioseite, aus welchem im Text die Auszüge gegeben werden. Bei dem Prioritätsstreit zwischen Finaeus und Schöner (s. folg. S.) spielt also die Frage, wann Schöner den Anhang „Globi terrestris seu geographici descriptio" geschrieben, eine Rolle.

sphäre dieses Globus abgebildet [1]), Harrisse fügt jetzt die Westhälfte (S. 520) in stereographischer Projektion hinzu. Es fehlt uns also noch das wichtige Erdviertel der alten Welt, um ihn voll zu beurteilen [2]).

Litterarhistorisch läßt sich die Streitfrage, ob Schöner seine Zeichnung der Karte des Orontius Finaeus von 1531 entlehnt habe oder umgekehrt jedoch, wie ich glaube, durch den Hinweis auf Schöners eigene Worte erledigen. Es handelt sich dabei sicher um dieselbe Stelle, welche Breusing [3]) im Gedächtnis hatte, als er 1883 bemerkte, Schöner sage selbst, Finaeus habe ihm als Grundlage gedient. Daraufhin hat Fr. Wieser 1888 seine frühere Vermutung [4]) des umgekehrten Verhältnisses ausdrücklich zurückgezogen [5]). Dennoch hält Harrisse an der Abhängigkeit des Finaeus von Schöner fest, weil er eben der Meinung ist, der Globus Schöners von 1533 sei nur eine verbesserte Ausgabe des verschollenen von 1523. Letztere Ansicht wird durch Thatsachen von Harrisse jedoch nicht belegt (cf. S. 584). Dem gegenüber meine ich, daß die deutlichen Worte Schöners im Opusculum kaum einen Sinn hätten, wenn er überzeugt gewesen wäre, daß Finaeus seine (Schöners) früheren Globen kopiert hätte.

Nachdem Schöner die Art und Weise der Zeichnung des Gradnetzes beschrieben, schildert er, wie alsdann Flüsse, Küsten, Berge etc. *ex descriptionibus Cosmographicis universalibus desumantur, eaque in globo eadem penitus ratione depingantur. Hac autem in parte*, fährt Schöner unmittelbar fort, *summas tribuemus doctissimis viris D. Orontio Finaeo Delphinati et D. Petro Apiano in descriptione cordis Cosmographici, D. vero Gemmae Frisio in Globoso corpore, quos hac in re consulendos potius duximus, quam quod fastidiosa prolixitate libri animo studiosorum obstreperemus* [6]).

---

1) Magalhães-Str., 1881, Tab. V.

2) Ohne den Globus selbst gesehen zu haben, möchte ich die Abbildung eines großen Globus, welche sich in der Folioausgabe der Opera mathematica auf der Rückseite des Titelblatts zum Opusculum geographicum findet, allerdings nicht mit dem erstern identifizieren. Weder Wieser noch Harrisse äußern sich, soviel ich sehen kann, über diese Abbildung. Der Durchmesser des Globus ist hier 125 mm groß, die Zeichnung ist annähernd in orthographischer Horizontalprojektion (deren Pol in Assyrien) entworfen, aber merkwürdiger Weise (wie schon C. H. Coote a. a. O. S. 159 hervorhebt) ist die Länderzeichnung in Spiegelbild gegeben (Osten links, Westen rechts, aber Norden oben etc.). Diese Abbildung ist viel zu groß, als daß sie in der Quartausgabe des Opusculum von 1533 sich finden könnte. Vielleicht ist sie erst nach Schöners Tode († 1547) für die Gesammtausgabe hergestellt (?).

3) Leitfaden S. 32.

4) Magalhães-Straße S. 80.

5) Der verschollene Globus des Joh. Schöner, S. 11 Anm.

6) Harrisse zitiert S. 584 die Worte „Hac autem" selbst, fügt aber hinzu: „But this does not prove that Schöner borrowed his geographical information from Finaeus". Ich wiederhole, daß allerdings zunächst festgestellt werden muß, ob Schöners Worte schon 1533 geschrieben sind.

Was Apian betrifft, so darf, nachdem sich gezeigt hat, daß die Weltkarte von 1530 in herzförmiger Projektion entworfen ist, ein Zweifel wohl nicht mehr obwalten, daß Schöner dieses Cor Cosmographicus (und nicht etwa die Karte von 1520) im Auge hatte. Freilich läßt sich sowohl rücksichtlich des Südpolarlandes, als in Betreff der Westhälfte der Erde ein Anschluß Schöners an Apian absolut nicht entdecken. Die angeführte Stelle ist bis jetzt die einzige, in der ich bei den Zeitgenossen Apians einer Erwähnung seiner Karte begegnet bin [1]), ich habe indessen die betreffende Litteratur auf diesen Punkt noch durchaus nicht erschöpfend durchsehen können.

IV.

1. Die Pseudo-Apianische Weltkarte von 1551. Bekanntlich enthalten zahlreiche der spätern von Gemma Frisius edierten Ausgaben der Apianschen Kosmographie (die sämmtlich in kl. 4^0 gedruckt sind) eine kleine nicht in den Text gedruckte aber dem Formate angepaßte Weltkarte, betitelt: *Charta cosmographica, cum ventorum propria natura et operatione.* Die Weltkarte (222 × 104 mm), in einer Projektion entworfen, die äußerlich an diejenige des Typus orbis von 1520 erinnert und allenfalls noch als die eines „plattgedrückten Herzens" bezeichnet werden kann, nimmt nur etwa die Hälfte des Holzschnittbildes (275 × 187 mm) ein, das im übrigen durch Windköpfe, Wolken und zwei allegorische Figuren (Jupiter und der Kaiser) ausgefüllt ist. Sie zeigt kein ausgeführtes Gradnetz. Es sind außer Aequator nur die Wendekreise und der Nord-Polarkreis ausgezogen. Ueberschrift und die Namen der Winde pflegen dann in Druckschrift und demnach je nach den Ausgaben in verschiedenen Sprachen rings um die vier Seiten gestellt zu sein.

Lelewel hat sie 1852 in seinem Atlas durch eine kleine Skizze wiedergegeben, bei welcher er ihr aber ein selbstentworfenes Gradnetz nach Analogie des von Apian 1520 angewandten unterlegt. Nordenskiöld liefert uns in Tab. XLIV in dankenswertester Weise wieder einen Facsimiledruck, wie er allein bei einer Untersuchung nach dem Ursprung eines Kartenwerks in Frage kommen kann. K. Kretschmer nimmt dagegen

1) Die Worte des Biographen Apians, Chr. Gotl. Schwarzius (Vita P. Apiani, Akad. Festschr. Altdorf, 28. Sept. 1724, 4^0) in seiner Aufzählung der Werke desselben: Tabula quatuor partium orbis, in figuram cordis redacta" beziehen sich keinesfalls auf die Karte von 1530, denn er hat, wie er selbst angiebt, die Notiz dem oben zitierten Werke (s. S. 543) Gregoriis (bei Schwarz: Georgii) entlehnt.

das für seinen Zweck allein in Betracht kommende Weltbild ohne die genannten Breitenparallelen in seinen Atlas Taf. XIX auf. Uebrigens sind von den spätern Ausgaben der Kosmographie Apians fast auf jeder größern Bibliothek Exemplare vorhanden, wenn auch das einzeln beigeheftete Karten-Blatt in manchen fehlen mag.

2. Die Ansichten über den Ursprung der Karte gehen auseinander. Auf Lelewels Urteil ist nicht viel zu geben, sobald es sich um eine Betrachtungsweise der mathematischen Grundlage einer Karte handelt. Er stand diesen Dingen ganz fern. Doch nimmt er [1]) bei seiner Unbekanntschaft mit dem Verhältnis zwischen Apian und Gemma erstern als Autor unserer Charta cosm. an und glaubt, Gemma habe im Text eine Liste von Längen und Breiten mitgeteilt „pour redresser les grossières erreurs du graveur". D'Avezac berührt in seinem grundlegenden Coup d'oeil historique sur la projection des cartes etc. 1863 diese Karte gar nicht. Dennoch beschäftigt sich S. Günther gerade im Anschluß an d'Avezac mit derselben, indem er ihr in seiner großen Monographie über beide Apians einen eigenen Abschnitt, betitelt „neue Projektionsmethode", widmet. Diese Abhandlung ist den Denkschriften der K. Böhmischen Akademie der Wissenschaften (VI. Folge 11. Bd., Math.-naturw. Kl., No. 4, 1882) einverleibt, war also für ein streng wissenschaftliches Publikum bestimmt. Dort heißt es:

„Wichtiger (als das kleine Paralleltrapez im Text) ist ein dem Cosmographicus liber beigegebener Entwurf einer Universalkarte der Erde in der Form eines plattgedrückten Herzens. In dem uns zu Gebote stehenden Exemplar der Urausgabe ist diese Weltkarte nicht enthalten, auch d'Avezac legte seinen Studien über dieselbe [sic] die Ausgabe von 1533 zu Grunde und wir selbst bedienten uns jener von 1551. Indeß rührt die Karte zweifellos von Apian her; anderenfalls würde auch der Herausgeber nicht angestanden haben, sich als Autor zu nennen. D'Avezac beschreibt uns die Apiansche Karte mit folgenden Worten: etc. etc."

Wir kommen sogleich auf diese Darlegungen zurück. Doch hören wir erst noch andere Stimmen. Nordenskiöld hat (leider) die gleiche Pariser Ausgabe der Kosmographie von 1551 zu Grunde gelegt und setzt unter die Abbildung die Unterschrift „Cosmographia P. Apiani, per Gemmam Frisium illustrata, Parisiis 1551", im Text (S. 88, 102) jedoch redet er von „the map of Gemma Frisius in the edition of 1544, 1545, 1551 etc. of the Cosmography of Apianus". Harrisse beschäftigt sich in seiner mit bewundernswertem Fleiß zusammengetragenen Cartographia Americana vetustissima, welche er seinem neuesten Werk: The discovery of

1) Géogr. du moy. âge 1852, II, S. 176, Anm. 861.

North America 1892 einverleibt, mit dieser Karte nicht mehr eingehend, doch kann man über seine Ansicht nicht im Zweifel sein, wenn er gelegentlich bemerkt (S. 524): „We are inclined to see in the Nordenskiöld Gores a late derivative of the map consulted by Gemma Phrysius for constructing the mappamundi which he added to his numerous editions of the cosmography of P. Apianus". S. Ruge bezeichnet die Karte 1892 direkt als eine solche von Gemma Frisius [1]), ebenso nennt K. Kretschmer [2]) sie eine von Gemma Fr. der Kosmographie beigegebene Karte, im Prospekt dagegen: Petrus Apianus 1551.

Also auf der einen Seite die mit großer Bestimmtheit gestellte und ausführlich begründete Behauptung Apianschen Ursprungs für die Karte, auf der andern die Annahme des Gemma Frisius als Verfasser derselben, jedoch ohne Angabe von Gründen. Demgegenüber verlohnt es sich, eine nähere Untersuchung der Frage anzustellen. Die Ergebnisse der meinigen lauten dahin:

1) daß die Charta cosmographica keinesfalls Peter Apian zum Urheber hat;

2) daß es keinen Sinn hat, sie mit dem Jahre 1551 zu verquicken, statt mit 1544;

3) daß sich für die nahen Beziehungen zu Gemma Frisius eine solche Reihe von Thatsachen anführen lassen, daß man sie wohl als Karte des Gemma bezeichnen darf.

3. Was den ersten Punkt betrifft, so ist es nicht schwer, die Trugschlüsse aufzudecken, in denen sich die Darstellung Günthers bewegt. Er ist zu denselben durch ein viel seltsameres Misgeschick als durch den Mangel an Bekanntschaft mit den Apianschen Schriften gekommen. Von der Kosmographie waren ihm nur die Originalausgabe (Landshut 1524) und die Pariser Ausgabe von 1551 durch Autopsie bekannt. Auch die Karte von 1520 hat er nicht gesehen, als er die Auszüge aus d'Avezac und v. Humboldt (S. 67) niederschrieb. In der Ueberzeugung, daß d'Avezac sich im XIV. Abschnitt seines Coup d'oeil mit der Charta cosmographica „in Form eines plattgedrückten Herzens" beschäftige, druckt Günther, wie oben erwähnt, wörtlich die ganze Analyse ab, welche d'Avezac in Betreff der eiförmigen Projektion mit geradlinigen Breitenparallelen [3]) und halbkreisför-

1) Hamb. Festschr. z. Entdeck. Amerikas, I, 118.

2) Berliner Festschr., Text, 439.

3) Allerdings fehlt bei Günther das Hauptstichwort „droites", in den Worten d'Avezacs „une série de lignes droites équidistantes" (Bull. Soc. Géogr. V. Ser. T. V, 1863, S. 312). Sein Zitat aus Peschel ist sinnlos: „Sanson verbesserte den

migen Meridianen nebst ihren Anwendungen durch Cabot, Münster, Ortelius gab und Apiansche Projektion nannte[1]). Günther zitiert ferner Peschels Worte über die Verbesserungen an der Apianschen Entwurfsart durch Sanson, ja er zieht sogar ihre damals neueste wissenschaftliche Einordnung durch Tissot (1881) heran — und bezieht, ohne durch alle diese ganz verschiedenartigen Quellen oder die Namen der Kartographen auf seinen fundamentalen Irrtum aufmerksam zu werden, dies alles auf die ihm in der Ausgabe von 1551 entgegentretende Weltkarte in der Form eines plattgedrückten Herzens mit Kreisbogen als Parallelen. Es bedarf der Hinzufügung nicht, daß es sich um zwei total verschiedene Entwürfe handelt. Die „neue Projektionsmethode" hat mit dem Typus orbis von 1520 und der Charta cosmographica absolut nichts zu thun. D'Avezac, Peschel, Tissot hatten lediglich die Projektion im Auge, welche Apian durch die kleinen Figuren des Cap. VII und VIII seines Cosmographicus liber illustrierte.

4. In wiefern rührt die Karte nun positiv nicht von Apian her? Ich muß mich über das Hauptargument hier kurz fassen. Ich entnehme es einer Thatsache, die, soviel ich ersehen kann, bisher von sämmtlichen Autoren über das oft genannte Werk vollkommen übersehen ist. Ich nenne unter den Litteraten nur Gesner (1545), Gerh. Vossius (1650), Chr. G. Schwarzius (1724), Baumgarten[2]) (1754), Kobolt (1797 und 1824), Brunet (1842), Wiedemann (1858), Grässe (1859); unter den Fachmännern Kästner (1796), Lalande (1803), Harrisse (1866 u. 1872), Varnhagen (1869—72), Bruhns (1875), R. Wolf (1877), Günther (1882), Nordenskiöld (1889), Gallois (1890), von denen außer Kästner und Varnhagen kaum einer einen Vergleich mehrerer Ausgaben angestellt hat. Ich spreche also von der Thatsache, daß Peter Apian an keiner einzigen der spätern Ausgaben der Kosmographie, mit Ausnahme eben der Urausgabe, Landshut 1524, irgend einen Anteil hat. Dies muß allerdings gegenüber der andern Thatsache auffallen, daß sämmtliche von 1524—1609 erschienenen 26 Ausgaben der Kosmographie, welche ich glaube als authentisch

---

Entwurf des Bienewitz, bei welchem die Breitenkreise geradlinig und gleichabständig, jedoch als Curven aufgetragen sind". G. hat die Worte „die Mittagskreise gleichabständig, jedoch etc." ausgelassen.

1) Der Ausdruck eiförmig wird übrigens nicht von d'Avezac gebraucht.

2) Baumgarten (Nachr. v. merkwürdigen Büchern, Halle 1754), nicht Baumgartner, wie Günther (nach Wiedemann) stets zitiert.

nachweisen zu können, nicht nur den Namen Peter Apians an der Spitze tragen, sondern diesen Autor auch gelegentlich in erster Person redend einführen, wie es in der Urausgabe geschieht. Dennoch vermag ich den Beweis für meine Behauptung an dieser Stelle nicht zu geben; er erfordert ein Eingehen auf zahlreiche bibliographische Einzelheiten, soll aber selbstverständlich ausführlich in der Abhandlung nachgeholt werden. Ich würde den Satz in einer vorläufigen Mitteilung mit solcher Bestimmtheit nicht aussprechen, wenn ich nicht den vollen Beweis in Händen zu haben glaubte. Nur das mag noch gesagt werden, daß die spätern Herausgeber (Buchhändler) ängstlich den Schein zu erhalten suchten, die Schrift sei durchaus das eigene Werk des berühmten P. Apian.

Es herrscht seit der Mitte des XVI. Jahrhunderts in den litterarhistorischen Werken über diese Ausgaben bis in die neueste Zeit eine merkwürdige Verwirrung; erst die Bibliotheca Belgica (1880—90) hat einen vortrefflichen Anfang zur Lösung gemacht, indem sie die wirklich in Belgiens Bibliotheken vorhandenen Ausgaben kurz analysiert. Abgesehen von der Unvollständigkeit der Zusammenstellungen laufen Verwechselungen[1]) mit den Ausgaben der *Cosmographiae introductio* (auch bei Harrisse, Varnhagen, Gallois u. a.) unter, und eine Prüfung über die Pseudoausgaben hat kein Autor bisher versucht. Hier nur soviel, daß es eine deutsche Ausgabe dieses Werks niemals gegeben hat. Meinen trefflichen Freund Breusing, der bestimmt glaubte, einst eine solche gesehen zu haben[2]), habe ich noch kurz vor seinem Tode vom Gegenteil zu überzeugen vermocht. Auch eine italienische Ausgabe hat es gewiß nie gegeben. Der Cosmographicus liber (seit 1539 Cosmographia genannt) ist überhaupt, abgesehen von 1524 zu Landshut und 1574 zu Köln, niemals in Deutschland wieder gedruckt worden, sondern nur zu Antwerpen, Paris und Amsterdam (also auch nicht in Ingolstadt, Venedig, Basel, Augsburg, Freiburg etc.) und besonders hat eine Nürnberger Ausgabe von 1541 niemals existiert, obwohl sie seit drei Jahrhunderten in fast allen litterarischen Quellenwerken wiederkehrt. Ich werde nachweisen, daß dieser Irrtum auf Simmlers leichtfertige Bearbeitung (1574) von Gesners Bibliotheca zurückzuführen ist; eine böhmische Ausgabe ist erst 1882 durch S. Günther neu geschaffen, indem er Varnhagens Angaben über Seb. Münsters Kosmographie auf die Apiansche übertragen hat, ebenso wie er Varnhagens spanische Worte über die 16 Ausgaben des kleinen Kompendiums von Glarean in extenso mitteilt und dann plötzlich abbricht, ohne zu merken, daß er die Aufzählung Varnhagens von

---

1) Eine Titelverwechselung liegt doch wohl auch nur bei Gelcich vor, da es sonst schwer verständlich wäre, wie er in seiner neuesten Schrift über die ältesteren nautischen Instrumente (Hamburger Festschr. z. Entd. Amerikas, 1892, I, S. 61) gerade zum Beweis der Priorität Apians gegen Finaeus und Frisius in Betreff der Längenbestimmung durch Mondabstände schreiben konnte: „Das *Astronomicum Caesareum* des Sachsen P. Bienewitz, gen. Apian, wurde 1524 fertig". Das Astronomicum ist bekanntlich 1540 erschienen und enthält nichts über Längenbestimmungen.

2) S. auch Leitfaden durch d. Wiegenalter etc., 1883, S. 10.

22 Ausgaben des Cosmographicus liber und von 9 Ausgaben der Cosmographiae introductio dem Leser vorenthält (!). Eine Augsburger Ausgabe, welche Günther bei Wiedemann gefunden haben will, zitiert dieser sorgfältige Gelehrte faktisch nicht.

Die erste Antwerpener Ausgabe „Cosmographicus liber P. Apiani, Mathematici, studiose correctus ac erroribus vindicatus per Gemmam Phrysium", von dem rührigen Buchhändler Bollaert 1529 ediert, kann nun nicht anders als ein ganz unverschämter Nachdruck des nützlichen Werkes bezeichnet werden, wenn auch einige — keineswegs alle — Fehler darin von dem 21jährigen Gemma verbessert sind. Seitdem stand der Name dieses tüchtigen Mathematikers, der schon im folgenden Jahre mit einer eigenen Schrift hervortrat, auf allen Ausgaben der Kosmographie neben dem Apians. Die nachfolgenden Antwerpener Ausgaben 1533—40 unterscheiden sich von den vorhergehenden nur durch die Zugabe einiger eigenen Schriftchen Gemmas. Erst im Beginn der vierziger Jahre hat Gemma das Werk einer Neuredaktion unterzogen, welche dann 1544 in Antwerpen bei Bonte zuerst in französischer, dann rasch bei demselben in lateinischer, flämischer, spanischer Sprache erschien. Unter Beibehaltung fast des gesammten Textes zeichnet sich diese Neuredaktion durch kleinere oder größere Zusätze zu den einzelnen Kapiteln aus; diese letztern sind aber auch fast überall besonders als Ergänzungen Gemmas bezeichnet, sodaß nach dieser Seite der niederländische Mathematiker loyal gegen Apian verfahren ist. Aber es findet sich nach meinen Vergleichen keine Stelle irgendwelcher Art vor, welche auf eine Mitwirkung Apians hindeutete, man wird ihm also auch nicht die Streichungen zur Last legen können, die seit 1544 im Abacus auffallen, indem jede Anspielung auf die Männer der Reformation unterdrückt ist. Ganz abgesehen von diesem Werke ist mir bei meinen Studien auch nicht das geringste Zeichen entgegengetreten, daß Apian und Gemma je in persönlichen oder brieflichen Verkehr gekommen wären. Gemma Frisius als Schüler Apians zu bezeichnen, wie es d'Avezac [1]) thut, erscheint mir durch nichts gerechtfertigt, und wenn der Biograph Gemmas, C. Ekama [2]), 1825 indirekt auf solche Beziehungen zu schließen scheint, weil „Apian" die Stadt Dockum als „patria Gemmae Frisii Medici ac Mathematici apud Lovanienses praeclarissimi" bezeichne, so beweist dies nur, daß Ekama sich über das Verhältnis Gemmas zu jenem

1) Bull. Soc. Géogr., Paris 1863, I, 327.

2) Verhandel. der I Kl. v. h. K. Nederlandsch Instituut v. Wetensch. te Amsterdam, VII, 1825, S. 229. Ekama benutzte die Ausgabe von 1584 (!).

Werke gar keine Rechenschaft gegeben hat. Auch beschränkt er sich auf den Ausdruck des Bedauerns, daß man so wenig über die Beziehungen beider vielgenannten Kosmographen wisse.

5. Der Pariser Nachdruck der Kosmographie. Ich verfolge an dieser Stelle das Schicksal des Buches, soweit es die Antwerpener, Kölner, Amsterdamer Ausgaben betrifft, nicht, sondern verweile nur bei der Pariser Ausgabe. Eine solche erschien bei Gaultherot zuerst 1551 in lateinischer [1]) und 1553 in französischer Sprache und die erste von diesen ist es, welche in europäischen Bibliotheken eine größere Verbreitung zu haben scheint, da sie von Nordenskiöld ebenso seinen Betrachtungen und Reproduktionen zu Grunde gelegt ist wie von Günther. Es muß nun sofort konstatiert werden, daß diese 1551 erschienene Pariser Ausgabe ebensowenig von Gemma (oder gar Apian) beeinflußt ist, wie die Antwerpener etc. durch Apian: es ist ein litterarischer Raub, wie diese letzteren. Derselbe stellte zur Bedingung die Herstellung neuer Holzstöcke für alle Figuren und Karten. Mit Ausnahme der Charta cosmographica, die getreu wiedergegeben ist, sind alle andern Kärtchen und Figuren sehr verschieden von denen der Originalausgabe und eine ganz fremde, nur der Pariser Ausgabe angehörige, Zugabe ist ein großer Globus zu p. 22, welchen Nordenskiöld auf Tab. XLIV gleichfalls in Facsimile gegeben hat. Wir dürfen zu Ehren eines auf der Höhe seiner Zeit stehenden Kosmographen Karls V. annehmen, daß Gemma Frisius für diese Globuszeichnung nicht verantwortlich zu machen ist. Denn wenn auch in damaliger Zeit noch zahllose Unrichtigkeiten und Phantasien die Karten verunzierten, im J. 1551 wußte man, daß der Aequator durch Südamerika und nicht nördlich von Cuba entlang laufe. Faktisch zeigt sich aber, daß der Pariser Zeichner des Globus bei Amerika aus Versehen um 20° zu weit nach Süden gekommen ist, sodaß der Aequator der alten Welt und der Wendekreis der neuen Welt in eine einzige „L'équateur" benannte Linie zusammenschmelzen! Irreführend ist der Zusatz im Titel *figurisque novis illustrata*, der allein bei der Pariser Ausgabe sich findet: „*Cosmographia Petri Apiani, per Gemmam Frisium . . . . ab omnibus vindicata mendis, ac nonnullis quoque locis aucta, figurisque novis illustrata*". Ich wiederhole, dieser Zusatz fehlt in allen Antwerpener Ausgaben, und es ist deshalb sicher unrichtig, dieses „illustrata mit „per Gemmam" zu verbinden, wie dies Nor-

1) Eine lateinische Ausgabe von 1553 (Paris) ist nur Titelausgabe.

denskiöld im guten Glauben gethan hat, indem er (Tab. XLIV) schreibt: Cosmographia P. Apiani, per Gemmam Frisium illustrata. Die Pariser Ausgabe von 1551 bezw. 1553 sollte also womöglich nicht als Quellenschrift benutzt werden.

6. Der wesentlichste Text-Zusatz, welchen die Ausgabe von 1544 bringt, ist ein kurzer „*Appendix Gemmae Frisii*". Er handelt von der Entdeckung der Regio Peru („Ea sita est in long. 290 gr., ab occasu versus ortum facto ordine: Ab orbe medio dissidet austrum versus partibus quasi 5") und steht fast unmittelbar hinter dem alten Kapitel über Amerika, in welchem nach mehr als 50 Jahren genau mit denselben Worten, wie sie schon 1522 in der „*Declaratio*" enthalten sind, auf die Weltkarte von 1522 verwiesen wird. Jener Appendix bezw. die wichtige Entdeckung in Südamerika erforderte nun die neue Karte. Dieselbe ist fast immer hinter dem Appendix eingeheftet. Sie findet sich bestimmt zuerst in der Ausgabe von 1544[1]) und man sollte sie daher nach dieser Zahl datieren und nicht nach 1551.

Wenn die Karte mit einem gewissen Anschluß an den Typus orbis von 1520 rücksichtlich der äußern Form und nicht an die im alten Text erwähnte von 1522 gezeichnet ist, so erscheint dies erklärlich, denn letztere war nach astronomischer Art mit dem Süden nach oben orientiert[2]), während dies für Weltkarten 1544 nicht mehr üblich war.

Auf diese Charta cosmographica wird im Text der Kosmographie nirgends Rücksicht genommen und ein direktes Zeugnis, daß sie von Gemma stammt, kann ich zur Zeit nicht beibringen. Aber es liegen doch mehr Wahrscheinlichkeitsgründe vor, als es auf den ersten Blick erscheint und als sich aus ihrem ersten Auftreten in der von Gemma speziell umgearbeiteten Ausgabe von 1544 ergiebt.

Man hat die Karte öfters mit der Kunde in Verbindung gebracht, Gemma habe 1540 eine Weltkarte für Karl V. entworfen und die

---

1) D'Avezac konnte sie daher in keinem Falle in der Ausgabe von 1533 vor sich haben, wie Günther annahm. — Den Grund dieses Misverständnisses haben wir oben schon klar gelegt. Vgl. S. 561.

2) „Quamvis in nostra charta appareat America in oriente — weil Amerika dennoch am linken Ende der Karte gezeichnet war — oportet enim ut Mappa (quam vocant) incurvetur, donec aequinoctialis in circulum perfectum redigatur. Deinceps apparebit nobis in occidente" (Cosm. Liber II, Cap. IV, de America; ebenso in der Declaratio 1522 und Isagoge). Beiläufig sei mit Bezug auf Breusings Darlegungen in Betreff des Ausdrucks „Karte" (Zeitschr. f. wiss. Geogr. II, 1881, S. 192) bemerkt, daß das Wort Charta, ganz wie oben mitgeteilt, bereits 1522 in der „Declaratio" vorkommt.

Charta cosmographica sei eine verkleinerte Kopie derselben. Nordenskiöld bezieht diese Kunde jedoch unmittelbar auf die letztere, trotzdem er (S. 126) an Ortelius, welcher von einer „Universi orbis Tabula" spricht, und an Gesner anknüpft, nach welchem sie 1540 in Löwen erschienen ist. Harrisse beschränkt sich [1]) auf Wiedergabe eines speziellen Titels nach Foppens [2]), ohne nähere Stellung zu nehmen. Indessen besitzen wir in der ältern Litteratur viel unzweideutigere Anzeichen der einstigen wirklichen Existenz einer größern Karte Gemmas v. J. 1540, als wir sie in Autoren finden, die, wie Foppens, immer ihre Kompilationen nur aus andern Werken zusammenschreiben; dieselben können uns dabei nicht viel nützen, wenn nicht aus ihren Worten hervorgeht, daß sie die Werke selbst in der Hand gehabt haben. Dies letztere ist in Betreff der Gemmaschen Karte auch nicht bei einem der Biographen Gemmas, Suffridus Petri, 1619, der Fall, der den Titel gleichfalls mitteilt und im Text erzählt [3]) — Suffridus Petri hat die Schwester des Gemma Frisius noch persönlich gekannt —, daß Gemma beim Kaiser sehr beliebt gewesen sei, besonders wegen seiner astronomischen und geometrischen Kenntnisse. In letztern sei auch Karl V. so bewandert gewesen „ut et Gemmam erroris admonuerit in mappa mundi, quam postea errore sublato illi Gemma dedicavit". Neben diesem spricht sich jedoch, was den bisherigen Autoren über Gemma entgangen zu sein scheint, ein Augenzeuge über diese Karte aus, und bietet mehr als alle andern, Conrad Gesner in der Originalausgabe seiner Bibliotheca [4]). Es verlohnt sich, den Text wörtlich wiederzugeben:

„Charta sive mappa, ut vulgus vocat, qua continetur generalis totius orbis descriptio, partim ex veteribus, partim ex recentioribus collecta et Carolo V Aug. nuncupata. Impressa anno 1540, Lovanii, ut videtur; elegantissima forma qualem hactenus in hoc argumento non vidi. Verba authoris: »In hac descriptione partim ex veteribus, partim ex recentiorum navigationibus confecta, artificium Ptolemaei secuti sumus, ejusque traditas nobis locorum longitudines, quantum fieri potuit, servavimus. Adduntur et lineae et circuli longitudinum ac latitudinum itemque nauticae pro dirigendis navigiis. Chartam ambiunt ventorum effigies, nomina et naturae ac directorium nauticum instrumentum et mensurae pro locorum distantiis« etc."

1) Discovery of N. Am., p. 578.

2) Bibliotheca Belgica, 1729, p. 331.

3) De scriptoribus Frisiae Decades XVI, Franequerae 12°, 1619, p. 161.

4) Bibliotheca universalis sive Catalogus omnium scriptorum locupletissimus. Tiguri 1545, fol., p. 267. Diese Ausgabe verdient vor den folgenden, an Namen reichern von Simmler, Frisius etc. edierten deshalb den Vorzug, weil er so oft kurze Auszüge aus Vorreden hinzufügt, welche die spätern Herausgeber strichen.

Zunächst geht unzweideutig aus diesen Worten hervor, daß die bisher leider verschollene Weltkarte von 1540 nicht identisch mit der kleinen Charta cosmogr. der Kosmographie ist. Denn s.e besaß ein Gradnetz, Schiffskurse, Kompaßscheibe, Meilenmaßstäbe. Aber das wichtige Wort *naturae ventorum* bringt, wie wir sofort sehen, beide Karten in einen innigen Zusammenhang.

Schon früher hatten die Figuren über der Karte auf solchen hingedeutet. Der in den Wolken thronende Herrscher mit dem Reichsadler auf der Brust neben Jupiter kann nur auf den Kaiser gedeutet werden. Es liegt nahe anzunehmen, daß dieser künstlerische Schmuck unmittelbar der Karte von 1540, die nach allen Zeugnissen Karl V. gewidmet war, entnommen ist. Im Rahmen des kleinen Lehrbuchs der Kosmographie hat diese Verzierung gar keinen Sinn. Dazu tritt die bisher kaum beachtete Ueberschrift *Charta cosm. cum propria natura ventorum et operatione*; auf diese letztere hat der Verfasser auch bei seiner größern Karte nach den von Gesner mitgeteilten Worten besondern Wert gelegt. Und in der That als ganz eigenartig müssen die kleinen Signaturen im Windhauch der blasenden Köpfe angesehen werden, die offenbar Gemmas Erfindungen sind zur bildlichen Erläuterung der Angaben über die Natur der Winde im alten Cap. XV der Kosmographie: Sonnen als Zeichen der Trockenheit bei den Ostwinden, Wolken (Südsüdost), Hagel (Nordwest), Kräuter als Zeichen der Krankheiten, die manche Winde laut Text aus dem Quadranten West bis Süd bringen. Ich habe diese aus dem Facsimile bei Nordenskiöld deutlich erkennbaren Signaturen auf andern Karten nicht gefunden.

7. Aber die Projektion! Die Karte wird nach Entwurf und Inhalt von den neuern Autoren ziemlich geringschätzig beurteilt. Meist wird sie als eine unmittelbare Wiederholung derjenigen angesehen, welche Apian 1520 anwandte, indem er die zweite Ptolemäische nach beiden Seiten hin über die Halbkugel erweiterte. Genau in der gleichen Weise hat Jaques Sévert sie schon 1598 als „Mappa Gemmae Frisii in cordis effigiem retinens“ beschrieben und durch eine Figur aus den fünf Hauptparallelkreisen und sieben Meridianen, welch letzte oben in eine Spitze auslaufen, rekonstruiert mit der Ueberschrift: *Integrae Mappae Frisii Typus.* Man könnte hieraus schließen, auch die große Karte Gemmas von 1540 habe die gleiche Projektion gehabt. Darüber belehren uns aber ältere Autoren eines Bessern und wir müssen schließen, daß letztere Karte dem Franzosen Sévert schon nicht mehr bekannt war. Er

hat aber ebenso wie Lelewel (oben S. 559) u. A. auch die Charta cosmographica von 1544 nicht verstanden [1]). Nach seiner (Séverts) Zeichnung sind, wie auf den meisten Weltkarten jener Zeit, welche Projektion ihnen auch zu Grunde liegt, beide Wendekreise und beide Polarkreise je gleichweit vom Aequator entfernt, wie auf der Erdkugel. Betrachtet man aber die Karte von 1544, so sieht man auf den ersten Blick, daß dies hier nicht der Fall ist. Nordenskiöld [2]) beschränkt sich auf die Bemerkung: „Judging from the rude drawing, the paralleles are in the map not equidistant". Das ist richtig, aber, soweit man aus den allein eingezeichneten Linien des südlichen Wendekreises, Aequators, nördlichen Wendekreises und des Polarkreises schließen kann, ergiebt sich doch auch sofort, daß hier eine progressive Erweiterung der Distanzen von Norden nach Süden stattfindet. Die nördliche gemäßigte, 43 Breitengrade umfassende Zone (A) ist auf der Karte nicht breiter als die Zone vom Wendekreis des Krebses bis zum Aequator ($23^1/_2{}^0$) (B), diese letztere wesentlich schmaler als die entsprechende Südhälfte der heißen Zone (C). Das kann unmöglich ein bloßer Fehler der „worthless map", wie sie Nordenskiöld nennt, sein, sondern muß eine bestimte Absicht haben. Die Ptolemäischen Klimata, die im linken Kartenrande eingezeichnet sind, deuten dieselbe Tendenz einer Erweiterung der Distanzen nach Süden an. Eine solche kam in damaliger Zeit wesentlich nur auf den Karten in stereographischer Projektion zur Geltung. Man weiß, welche Vorliebe Gemma Frisius gerade dieser für die Astronomie besonders wichtigen Entwurfsart widmete, damals noch teils mit dem antiken Namen *Planisphærium*, teils als *Astrolabium* bezeichnet [3]). Wir erinnern an Gemmas Schrift über das Universal-Astrolabium [4]), die allerdings erst nach seinem Tode gedruckt ist, sowie an die Versicherung Rumold Mercators [5]) auf seiner Karte von 1587, daß er bei seiner (in stereographischer Projektion entworfenen) Karte derjenigen Entwurfsart gefolgt sei, „*quam Gemma Frisius in suo planisphærio adinvenit, quae omnium longe optima est*". Bei den Astrolabien kamen in erster Linie nur vier Kreise: Aequator, beide Wendekreise und

1) Mit Recht sagt d'Avezac (a. a. O. S. 331) von Séverts Werk: oeuvre des plus mediocres en verité pour n'en rien dire de pis.

2) Atlas S. 88 Anmerkung.

3) Vgl. hierüber die Darstellungen Fiorini's in seinem ausgezeichneten Werke Le projezioni delle Carte geografiche, Bol. 1881, S. 120 ff.

4) De Astrolabio catholico 1556.

5) Vgl. Nordenskiöld, Atlas S. 93.

nördlicher Polarkreis in Betracht, wie sie auch in der Charta cosm. allein ausgezogen sind, und die Entwerfung der nötigen Figuren lief auf die Herstellung einer stereographischen Horinzontalprojektion für verschiedene Breiten hinaus.

Eine solche stereographische Horizontalprojektion ist meines Erachtens auch bei unserer Karte mit im Spiele. Die Distanzen der genannten Kreise deuten darauf hin. Ausgeschlossen ist von vornherein die stereographische Aequatorial-(Meridian-)Projektion, welche gleichen Abstand der Wendekreise von dem Aequator im Kartenbilde erfordert, ausgeschlossen aber auch die Polarprojektion, welche nicht gestattet, der gemäßigten Zone nur die Breite der Nordhälfte der heißen zu geben. Allerdings läßt sich zwischen Pol und Aequator auch kein Punkt finden, für dessen Horizont die stereographische Projektion die Abstände zwischen jenen vier Kreisen, wie auf der Karte

$$22\text{ mm} : 22\text{ mm} : 28\text{ mm} = 1 : 1 : 1{,}3$$

reduzierte.

Wir müssen bei solchen Untersuchungen uns nur von unserer Gewohnheit befreien, welche den Punkt, für dessen Horizont wir das Netz entwerfen, in den Mittelpunkt der Karte stellt, wie dies z. B. die Land- und Wasserhalbkugeln unserer Atlanten thun. Auf denselben erscheinen nur wenige Breitenparallelen um den Pol zu vollen Kreisen ausgezogen. In damaliger Zeit scheute man sich nicht, diesen charakteristischen Punkt scheinbar ganz exzentrisch zu stellen, indem man dafür alle Breitenparallelen, deren man bedurfte, zu vollen Kreisen auszog. Daher steht z. B. Nürnberg auf der stereographischen Projektion Werners v. J. 1514, die Nordenskiöld S. 92 abbildet, halbwegs zwischen unterm Rand und geometrischem Mittelpunkt der Karte, d. h. des größten Kreises, der noch ausgezogen ist, in diesem Fall des 10° S. Br.

Um nun für die Abstände der vier in Frage kommenden Kreise annähernd zu solchen Werten zu gelangen, wie sie uns auf der Charta cosmogr. entgegentreten, dürfen wir nicht vom Projektionsmittelpunkt direkt südwärts gehen, sondern in entgegengesetzter Richtung über den Nordpol der Karte hinüber auf die andere Halbkugel, mit andern Worten, wir müssen den Projektionsmittelpunkt nicht auf dem uns zugekehrten atlantischen Nullmeridian, der auch in der Charta cosmographica von 1544 als geradliniger Mittelmeridian erscheint, sondern auf dem 180° (pazifischen) Meridian suchen. Nehmen wir z. B. den Schnittpunkt des 70° N. Br. und 180° L. als Projektionsmittelpunkt an, so ist die Entfernung der Schnittpunkte der Breitenparallelen mit dem Nullmeridian oder der sphärische Radius δ für den

Polarkreis	$= 20° + 23°\,1/_2 = 43°\,1/_2$	Aequator	$= 20° + 90° = 110°$
N. Wendekreis	$= 20° + 66°\,1/_2 = 86°\,1/_2$	S. Wendekreis	$= 20° + 113°\,1/_2 = 133°\,1/_2$

folglich nach der bekannten Formel der stereographischen Projektion

		$r = 2 \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}$	Abstand d. Kreise
Zone A	Polarkreis	0,798	
			1,083 = 1
	N. Wendekreis	1,881	
Zone B			0,975 = 0,9
	Aequator	2,856	
Zone C			1,799 = 1,6
	S. Wendekreis	4,655	

Verlegen wir den Projektionsmittelpunkt noch näher an den Pol, so vergrößern sich alsbald wieder die Differenzen zwischen Zone A und B, gehen wir andrerseits von ihm weiter als 70° ab, so wächst Zone C rasch über das Doppelte je von Zone A und B. Kurz, unmittelbar lassen sich die vorhandenen Abstände 1 : 1 : 1,3 nicht den Regeln der stereographischen Horizontalprojektion entnehmen.

Denkt man sich jedoch eine solche Horizontalprojektion für einen Punkt des 70° N., 180° Ö. entworfen, alsdann im 180. Meridian auseinandergeschnitten und von beiden Seiten so zu einer herzähnlichen Anordnung der Meridiane herumgebogen, wie sie die zweite Ptolemäische Projektion oder die Apiansche Karte von 1520 zeigte, so könnte in der That ein Gradnetz entstehen, wie es sich der Charta cosmographica anpassen ließe. Die Länge des Aequators läßt sich wenigstens noch mit derjenigen auf einer stereographischen Horizontalprojektion für 70° N. in Verbindung bringen. Der Radius des Horizontalkreises $\delta = 20° + 20°$ ist $= 2 \operatorname{tg} \frac{40}{2} = 0{,}728$, derjenige für den Aequator, wie oben schon berechnet, $= 2{,}856$, also ca. das vierfache des ersten. In der That ist der Aequator auf unserer Karte mit einem Radius gezogen, welcher etwa viermal der Entfernung des Aequators von 70° N. Br. gleichkommt. Seine Länge entspricht auf diesem Kreise einem Bogen von ca. 70°. — Endlich ergiebt eine aufmerksamere Betrachtung der vom Wendekreis des Krebses durchschnittenen Länder, daß auch bei Einzeichnung der Meridiane das Prinzip einer Erweiterung der Abstände nach dem Kartenrande zu, wie sie die stereographische Projektion erfordert, in gewissem Sinne gewahrt ist. Die Sache läßt sich natürlich auch hier nicht im einzelnen verfolgen, da die Meridiane nicht ausgezeichnet sind bis auf den 180° O. u. W., welcher den Kartenrand selbst bildet. Den 180° O. verlegten die meisten Karten damaliger Zeit durch den Sinus magnus Sinarum, also ca. durch den heutigen Busen von Tongking. Interpolieren wir nun auf unserer Karte den 90° Ö. L., so zog man denselben damals meist durch die Ostspitze Arabiens (Apian 1520 und 1530, Orontius Finaeus 1531, Grynaeus 1532, Mercator 1538). Auf allen Karten, auf denen die Parallelkreise in gleiche Teile geteilt sind, muß also der Sinus Sinarum (180°) doppelt so weit im Bogen abstehen, als die Ostspitze Arabiens (90°). In der Charta cosmographica ist dagegen das Verhältnis der Abstände etwa wie $1 : 1\frac{1}{2}$. Auch dies kann kein reiner Zufall bezw. Fehler der Karte sein. In einer stereographischen Horizontalprojektion für 70° Br. schneidet der 90. Meridian den Wendekreis des Krebses derart, daß sich die Abweitung von 0°—90° : 90°—180° = 77° : 103°, also ca. wie 1 : 1,34 verhalten.

Ich leugne natürlich keinen Augenblick, daß die hier gegebene Erklärung nicht volle Beweiskraft hat, sie soll nur dazu dienen, auf die Thatsache aufmerksam zu machen, daß der Projektion ein eigenartiger Gedanke zu Grunde zu liegen scheint. So mangelhaft

das Resultat des Versuches einer Kombination der herzähnlichen Projektion mit einer stereographischen Horizontalprojektion auch ist, es reiht sich derselbe doch allen jenen übrigen Versuchen der Vor-Mercatorischen Periode an, in der man nach etwas Neuem rang. Und eben deshalb bin ich der Ansicht, daß auch Gemma Frisius dem Entwurf nicht fernsteht.

9. Nur wenige Worte noch in Betreff des Inhalts dieser Karte. Man hat sie kürzlich mit den Nürnberger Globusstreifen in Verbindung gebracht, welche Wieser und Stevens als zum Schönerschen Globus 1523 gehörig betrachtet hatten. Aber Harrisse (s. oben S. 561) u. A. haben dabei meist ihre Blicke allein auf Amerika gerichtet. Faktisch ist aber auch selbst hierbei gar keine Aehnlichkeit mit beiden Karten. Die außerordentliche Schmalheit Nordamerikas bei Gemma kontrastiert gewaltig gegen den mehr als 55 Längengrade bedeckenden Körper, wie ihn die Nürnberger Globusstreifen zeigen. Außerdem zahlreiche Gegensätze in andern Küstenumrissen und kaum eine Spur von Aehnlichkeit in der Nomenklatur.

Viel näher liegt es, sie mit der zeitlich und räumlich ihr so nahe stehenden Karte G. Mercators v. J. 1538 in Verbindung zu bringen. Zeichnet man sich diese letztere aus ihrer so vielfach in den Randpartien das Auge täuschenden Stabius-Wernerschen Herzprojektion in eine Karte um, die nach Art des Typus orbis von 1520 leicht zu entwerfen ist, so wird man zahlreiche Aehnlichkeiten überraschender Art finden neben einzelnen Differenzen. Man beachte besonders die Südseite Asiens mit der auf beiden Karten den 10° N. Br. nicht mehr überschreitenden Regio Sinarum. In Amerika liegt der Hauptunterschied in einer beträchtlichen Ausdehnung des Westrandes von Südamerika. Die Karte von Gemma war bestimmt, die gewaltige Größe Perus ganz besonders vor Augen zu führen. Dazu tritt, daß sich auf der Charta cosmographica kaum ein Name findet, der nicht auch auf derjenigen Mercators von 1538 sich fände. Auch die Schreibweise ist meist identisch. Daß die verschollene Karte des Gemma Frisius von 1540 sich im übrigen inhaltlich nicht weit von derjenigen Mercators entfernt haben wird, kann man von vornherein aus dem Umstand entnehmen, daß beide Männer damals in persönlicher Beziehung standen und daß beide Karten in Löwen erschienen sind.

Göttingen. Abgeschlossen 20. Dezember 1892.

Bericht des Beständigen Sekretärs der Königl. Ges. d. Wiss. über das Jahr 1892.

Auch in diesem Jahre haben wir uns nach dem Maaß unserer Kräfte und Mittel die Wissenschaften in hergebrachter Weise zu fördern bemüht. Dafür mögen zunächst Band 38 der Abhandlungen, und die Nachrichten, bisjetzt 14 Nummern (516 Seiten), zeugen. Der Band der Abhandlungen umfaßt diesmal vier aus dem Gebiet der Historisch-philologischen, eine aus dem der Physikalischen, zwei aus dem der Mathematischen Klasse, endlich Riecke's Rede zum Andenken an Wilhelm Weber. Die erste und zweite der ersten Abtheilung gehören noch zu den Septuagintastudien de Lagardes: es sind die, welche er im Inhaltsverzeichniß von Band 37 als III und IV ankündigt, IV ist die, welche jetzt mit 38, S. 59 beginnt. Durch die Veröffentlichung der physikalischen Abhandlung „über die Vulkane Centralamerikas" wurde endlich eine Pflicht erfüllt, die wir dem Andenken unseres früh dahin geschiedenen Kollegen Karl von Seebach schuldeten. Wir bedauern sehr die späte Ausführung: daß sie jetzt uns möglich wurde, verdanken wir der hingebenden, umsichtigen Bemühung unseres Kollegen Wagner.

Die Nachrichten geben, wie früher die wissenschaftlichen Mittheilungen, welche in den regelmäßigen Sitzungen der Gesellschaft, bis jetzt 10, vorgetragen oder vorgelegt worden sind. Hier eine gedrängte Uebersicht des Inhalts:

Nr. 1: Heinrich Burkhardt, Zur Reduction des Problems der 27 Geraden der allgemeinen Fläche dritter Ordnung auf das Transformationsproblem der hyperelliptischen Functionen $p = 2$. — Hilbert, Ueber die Theorie der algebraischen Invarianten. II. — Hartlaub, Zur Kenntniß der Anthomedusen. — Nr. 2 und 6: H. Usener, Unser Platontext. — Nr. 3: Frensdorff, Eine Krisis in der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. — Nr. 4: Kielhorn, Jacobis Tafeln zur Berechnung Indischer Daten und Mâdhavâchârya's Kâlanirṇaya. — Fritz Krebs, Altchristliche Texte im Berliner Museum. — Disse, Ueber die Veränderungen der Epithelien in der Niere bei der Harnsekretion. — Kröker, Ueber die Abhängigkeit der specifischen Wärme des Boracits von der Temperatur. — Nr. 5: Bürger, Zur Systematik der Nemertinenfauna des Golfs von Neapel. — Nr. 7: Wieseler, Zu den Attributen und Symbolen

des Dionysos. Ueber den Stier und Widder. — Wallach, Ueber neue chemische Verbindungen aus Pflanzenstoffen. — Marmé, Ueber die Wirkung der Pinyl-, Fenchyl-, Carvyl-, Menthyl- und Thujolamine auf den thierischen Organismus. — Hecht, Beiträge zur geometrischen Krystallographie. — Hurwitz, Zur Theorie der Abel'schen Functionen. — Nr. 8: Schönflies, Ueber gewisse geradlinig begränzte Stücke Riemann'scher Flächen. — Fricke, Ueber discontinuirliche Gruppen, deren Substitutionscoefficienten ganze Zahlen eines biquadratischen Körpers sind. — Zur Theorie der Modularcorrespondenzen. — Ueber die zur Verzweigung (2. 3. 7) gehörende s-Function. — Ritter, Die eindeutigen automorphen Formen vom Geschlechte Null. — Lindemann, Ueber die Auflösung algebraischer Gleichungen durch transcendente Functionen. II. — Nr. 9: Hallwachs, Ueber die Lichtgeschwindigkeit in verdünnten Lösungen. — Klein, Ueber Realitätsverhältnisse im Gebiete der Abelschen Functionen. — Leo Meyer, Etymologische Mittheilungen. — Kielhorn, Malayagiri's Sanskrit-Grammatik. Bodländer, Das Verhalten von Molekularverbindungen bei der Auflösung. — Nr. 10: H. Wagner, Die Kopien der Weltkarte des Museum Borgia (XV. Jahrh.). — H. Traube, Ueber die Krystallformen optisch einaxiger Substanzen, deren Lösungen ein optisches Drehungsvermögen besitzen. — Drude, In wieweit genügen die bisherigen Lichttheorieen den Anforderungen der practischen Physik? — Nr. 11: Drude, Fortsetzung. — Nr. 12: Ehlers, Zur Kenntnis von Arenicola marina L. — Rhumbler, Eisenkiesablagerungen im verwesenden Weichkörper von Foraminiferen, die sogenannten Keimkugeln Max Schultze's u. A. — Nernst, Ueber die mit der Vermischung konzentrirter Lösungen verbundene Aenderung der freien Energie. — Hilbert, Ueber die Theorie der algebraischen Invarianten. III. — Nr. 13: Fricke, Ueber ein allgemeines arithmetisch-gruppentheoretisches Princip in der Theorie der automorphen Functionen. — Kohlrausch, Ueber Lösungen von Natrium-Silikaten, insbesondere auch über den Einfluß der Zeit auf deren Constitution.

Auch die Anzeigen sind wie früher bestrebt gewesen, durch gründliche, nur auf die Sache gerichtete, parteilose Beurtheilung einen wohlthätigen Einfluß auf das Leben der Wissenschaft zu gewinnen und zu bewahren.

Aber wir haben uns nicht begnügt auf diesen altgewohnten Wegen thätig zu sein, sondern da unsere Mittel auch dies Jahr wieder wie schon zwei Jahre vorher vom hohen Königlichen Kultusministerium durch eine außerordentliche Zuwendung von 3000

Mark vermehrt worden (Kuratorialrescript vom 7. April), haben wir auch außerordentlicher Weise Untersuchungen, welche von wissenschaftlichen Nutzen zu sein schienen, angeregt und unterstützt. So hat die Gesellschaft die Kosten für den Druck des 2. Theils der astronomischen Mittheilungen der Kön. Sternwarte, herausg. von Herrn Prof. Schur, (857 Mk.) bestritten, den Herrn Riecke und Voigt für ihre piëzoelektrischen Untersuchungen 480 Mk., Herrn Liebisch für Untersuchungen über die specifische Wärme der Mineralien, die im mineralogischen Institute angestellt wurden, 930 Mk. bewilligt und Herrn Peter, der die Idee einer topographischen Flora von Mitteleuropa mit besonderer Beziehung auf Deutschland der Gesellschaft zur Ausführung empfohlen hatte, als erste Zahlung für dies Jahr 1500 Mk. überwiesen. Außerdem hat die Gesellschaft der Gesammtausgabe der Werke Wilhelm Webers fortwährend ihre Aufmerksamkeit zugewendet und die Freude gehabt die zwei ersten Bände in stattlicher Ausführung erscheinen zu sehn. Da von den Herrn, welche die Herausgabe zu leiten übernommen haben, Professor Braune in Leipzig gestorben war, ist aus unserer Mitte Merkel für ihn eingetreten. Um aber den hohen Behörden die Ueberzeugung zu geben, daß wir, sobald uns reichere Mittel zur Verfügung ständen, der Anstrengung würdige und nach vielen Seiten erwünschte und bedeutsame Unternehmungen ins Werk zu setzen bemüht sein würden, haben wir im Monat August dem hohen Kultusministerium eine Denkschrift überreicht, in der eine Anzahl solcher Unternehmungen nach ihrer Bedeutung und unter Angabe der Summen, die für ihre Verwirklichung etwa erforderlich sein möchten, erörtert ist.

Indessen nicht allein eine Vermehrung unserer Mittel wünschen wir, sondern auch die Kräfte der Gesellschaft haben wir zu verstärken für wünschenswerth gehalten. Bei der geringen Anzahl der Mitglieder war es vorgekommen, daß jüngere Männer voll Geist und Schaffenslust nicht aufgenommen werden konnten. Dies zu verhüten und die Gesellschaft nicht Mangel an jugendfrischen Mitgliedern leiden zu lassen, ist durch ein Rescript des hohen Ministeriums vom 26. April uns, wie wir gewünscht, die Befugnis zu Theil geworden, wenn ein Mitglied das 75. Lebensjahr überschritten hat, ein neues Mitglied derselben Klasse hinzuzuwählen, auch wenn dadurch die Zahl von 24 ordentlichen Mitgliedern überschritten werden sollte. Dreimal haben wir im Laufe des Sommers von dieser Befugniß Gebrauch gemacht und die Herrn Professoren Karl Dilthey, August Kluckhohn und

Wilhelm Meyer zu ordentlichen Mitgliedern in der Historisch-philologischen Klasse gewählt.

Doch ich komme zu dem für unsere Gesellschaft weitaus bedeutsamsten Ereigniß. Paul de Lagarde war seit dem Jahre 1876 ordentliches Mitglied der Historisch-philologischen Klasse und hat bis zu dem Tage seines Todes, dem 22. December 1891, eine Menge großer und kleiner Abhandlungen und Aufsätze in den Bänden der Abhandlungen und Nachrichten veröffentlicht, viele von der größten Bedeutung, alle Zeichen eisernen Fleißes, umfassender und gründlichster Gelehrsamkeit, eines hellen, tiefen und tapfern Geistes. Es hat kaum jemals einen so regelmäßigen und eifrigen Theilnehmer an allen Berathungen und Verhandlungen der Gesellschaft gegeben. Dennoch waren wir sehr überrascht, als bei Eröffnung des Testaments, das am 20. Juli 1886 abgefaßt ist und Nachträge vom 8. September 1889 und 15. December 1891 hat, sich ergab, daß er die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zum Erben eingesetzt habe. Manche Bedenken standen der Annahme entgegen, aber nach sorgfältiger Erwägung aller Umstände entschloß sich dennoch die Gesellschaft in ihrer Sitzung vom 5. März

> „die Erbschaft unter den vom Testator gestellten Bedingungen und gemachten Auflagen anzunehmen und durch Vermittlung des Königlichen Universitätskuratoriums die Bitte an S. Majestät den König zu richten, seine Genehmigung zur Annahme dieser letztwilligen Zuwendung zu ertheilen."

Seine Majestät der König hat durch seinen allerhöchsten Erlaß, gegeben Schloß Oberglogau den 3. Juni 1892, seine Genehmigung ausgesprochen, die uns am 8. Juli durch das K. Kuratorium übersandt wurde. In Folge davon wurde das Haus und die Bibliothek nach Lösung der Siegel dem Beständigen Secretär, der von Herrn Dr. Emil Beyer als juristischem Beistand begleitet war, am 5. August von dem Curator massae, Herrn Ludwig, übergeben und dadurch der Besitz angetreten. Wir haben es für das Richtigste und Vortheilhafteste gehalten, das Haus an die Wittwe, Frau Geh. Rath de Lagarde, ihrem Wunsche gemäß auf Lebenszeit zu vermiethen (Vertrag vom 6. August). Die Bibliothek, welche eine große Menge seltener und werthvoller Werke enthält, erschien es nach dem Rath erfahrner Sachkenner am besten im Ganzen zu verkaufen. Dazu aber war es nöthig einen Katalog anfertigen und drucken zu lassen, um ihn nach allen Seiten verbreiten zu können. Er ist, als Manuscript gedruckt, jetzt (Ende November) fertig und zum größten Theil versendet. Sobald der Verkauf der Bibliothek erfolgt ist und sich der Betrag der Erb-

schaft genau bestimmen läßt, wird es die Aufgabe der Gesellschaft sein, ein Statut auszuarbeiten und überhaupt die Verwaltung, soweit es möglich ist, zu ordnen.

Das Andenken des außerordentlichen Mannes in würdiger Weise zu feiern behält sich die Gesellschaft für eine andere Gelegenheit vor.

Ich gehe zu den Preisaufgaben über. Für dieses Jahr hatte die Historisch-philologische Klasse die Aufgabe gestellt:

Für die älteste Geschichte Athens ist es von außerordentlicher Bedeutung zu wissen, an welchen Orten sich Heiligthümer der verschiedenen Götter und Heroen fanden, sowol in Athen selbst, als in der gesammten Landschaft, soweit es nach dem jetzigen Stande der topographischen, epigraphischen, genealogischen Forschungen möglich ist. Die Historisch-philologische Klasse stellt daher für 1892 die Aufgabe, daß eine sorgfältige Uebersicht der Kultstätten in Attika nach den Oertlichkeiten, in denen sie sich fanden, gegeben und, was sich daraus für die älteste Geschichte Attikas folgern lasse, dargestellt werde.

Es hat sich kein Bewerber um den Preis gemeldet.

Für das Jahr 1893 stellt die Gesellschaft nach dem Vorschlag der Physikalischen Klasse folgende Aufgabe:

Aus den Untersuchungen von W. C. Röntgen und A. Kundt über die Aenderungen der optischen Eigenschaften des Quarzes im elektrischen Felde ergiebt sich ein enger Zusammenhang zwischen den elektrooptischen Erscheinungen und den elastischen Deformationen, welche jene piëzoelektrische Substanz unter der Einwirkung elektrostatischer Kräfte erfährt. Eine Ausdehnung dieser Forschungen auf eine größere Reihe piëzoelektrischer Krystalle von verschiedenen Symmetrieeigenschaften erscheint in hohem Grade erwünscht. Gleichzeitig würde die Untersuchung darauf zu richten sein, ob die elektrooptischen Erscheinungen in piëzoelektrischen Krystallen ausschließlich durch die im elektrischen Felde eintretenden Deformationen oder außerdem durch eine direkte Einwirkung der elektrostatischen Kräfte auf die Lichtbewegung hervorgerufen werden.

Für das Jahr 1894 stellt die Gesellschaft auf den Antrag der Mathematischen Klasse die Aufgabe:

„Zwischen dem Zustand eines harten elastischen Körpers und dem einer Flüssigkeit liegt eine Reihe von Zwischenzuständen; durch geeignete Mischung von festen Körpern mit flüssigen kann

man alle möglichen Grade von Weichheit oder Zähflüssigkeit, einen ganz allmähligen Uebergang von einem festen Körper zu einem flüssigen erzeugen. Unsere Kenntnisse von den Eigenschaften jenes Zwischenzustandes sind aber noch sehr unvollständig und es wird daher verlangt, dieselben durch erneute Experimentaluntersuchungen zu fördern. Insbesondere soll ermittelt werden, wie sich bei zähflüssigen Körpern die Gesetze solcher Bewegungen verändern, welche bei Flüssigkeiten von geringer Viscosität zur Bestimmung der innern Reibung verwandt werden können."

Die Aufgabe, welche die Historisch-philologische Klasse für das Jahr 1895 vorzuschlagen hat, soll nächstens in den Nachrichten bekannt gemacht werden.

Die zur Bewerbung um einen der Preise bestimmten Arbeiten müssen, mit einem Spruch versehn, vor Ablauf des Septembers des bestimmten Jahres an die Kön. Gesellschaft der Wissenschaften portofrei eingesandt werden und von einem versiegelten Zettel begleitet sein, welcher außen den Spruch trägt, der die Arbeit kennzeichnet, und innen Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Der Preis für jede Aufgabe beträgt 500 Mk.

Am 1. October trat als Director an die Stelle von Herrn Wüstenfeld der Senior der Physikalischen Klasse, Herr Ernst Ehlers. Er wurde durch das Kuratorialrescript vom 6. Oktober bestätigt.

Mit herzlichen Glückwünschen begrüßten wir zu ihren fünfzigjährigen Jubiläen unter Uebersendung von Adressen

die Herrn Ernst Curtius in Berlin am 22. December 1891,
Albert v. Kölliker in Würzburg am 26. März 1892,
Wilhelm Wattenbach in Berlin am 20. Juli 1892.

Mündlich sprachen wir diese Wünsche unsern verehrten Kollegen Ferdinand Wüstenfeld und Friedrich Wieseler am 7. Juli aus.

Durch eine deutsche Adresse haben wir Herrn Charles Hermite in Paris an seinem 70. Geburtstage, dem 24. December zu begrüßen beschlossen.

Endlich überbrachte Herr Voigt der Universität Padua, die am 5. December die Feier des Tages beging, an dem Galileo Galilei vor 400 Jahren seine Professur antrat, unsere Huldigung und Glückwünsche.

In Tauschverkehr hat die Gesellschaft mit dem Schweizerischen Historischen Verein der fünf Orte am 5. Januar, mit der Australasian association for the advancement of sciences zu Sydney und der Ἐπιστημονικὴ ἑταιρεία zu Athen am 9. Juli nach dem von denselben ausgesprochenen Wunsche einzutreten beschlossen.

Ueber die Thätigkeit der Wedekindschen Stiftung für die deutsche Geschichte kann noch berichtet werden, daß der Druck der Chronik von Hermann Korner begonnen ist und das Manuscript für denselben bis zu Ende fertig vorliegt. Das Werk wird im Verlag der Ruprechtschen Buchhandlung erscheinen.

Durch den Tod wurde der Gesellschaft

1. am 17. September der Geheime Oberjustizrath Professor Dr. Rudolf von Jhering entrissen, den die Gesellschaft erst am 6. August, dem Tage, an dem er vor 50 Jahren promovirt worden war, zu ihrem Ehrenmitgliede ernannt hatte, um dem um die Wissenschaft hochverdienten Manne ihre tiefe Ehrfurcht zu bezeigen.

2. Am 16. Mai hatte Herr Hanssen, der seit 1869 ordentliches Mitglied war, seiner Altersschwäche und Schwerhörigkeit wegen, seinen Austritt erklärt, aber um sich eine Verbindung mit dem ehrwürdigen, um die Wissenschaften hochverdienten Manne zu erhalten, wählte ihn am 28. Mai die Gesellschaft einstimmig zum Ehrenmitglied.

3. Einem Ruf nach Berlin folgte zu Ostern von den ordentlichen Mitgliedern der Mathematischen Klasse Herr Hermann Amandus Schwarz.

4. Von auswärtigen Mitgliedern starben

a. aus der Physikalischen Klasse:

Ernst von Brücke in Wien, am 8. Januar, ausw. Mitglied seit 1889.

Hermann Kopp in Heidelberg, am 20. Februar, ausw. Mitglied seit 1863.

August Wilhelm von Hofmann in Berlin, am 5. Mai, ausw. Mitglied seit 1860.

b. aus der Mathematischen:

Leopold Kronecker in Berlin, am 29. December 1891, ausw. Mitglied seit 1867.

George Biddel Airy in Greenwich, am 1. Februar, ausw. Mitglied seit 1851.

Iohn Couch Adams in Cambridge, am 21. Januar, ausw. Mitglied seit 1877.

Enrico Betti in Pisa, am 11. August, ausw. Mitgl. seit 1865.

5. Von Korrespondenten starben:

a. von der Historisch-philologischen Klasse:

A. R. Rangabé in Athen, am 29. Januar, Korrespondent seit 1857.

F. A. Freeman in Sommerleaze (England), am 17. März, Korrespondent seit 1872.

Matthias de Vries in Leiden, am 9. August, Korrespondent seit 1865.

August Nauck in St. Petersburg, am 16. August, Korrespondent seit 1881.

Arthur Breusing in Bremen, am 28. September, Korrespondent seit 1889.

Giulio Minervini in Neapel, Korrespondent seit 1872.

b. von der Physikalischen:

J. F. Stas in Brüssel, am 13. December 1891, Korrespondent seit 1873.

Ferdinand Römer in Breslau, am 14. December 1891, Korrespondent seit 1862.

Justus Roth in Berlin, am 1. April, Korrespondent seit 1889.

Charles Upham Shepard in Amhorst, U. St. A., 1. Mai 1886 (wie uns erst vor kurzem bekannt wurde).

c. von der Mathematischen:

Heinrich Schröter in Breslau, im Januar d. J., Korrespondent seit 1882.

Pierre Ossian Bonnet in Paris, Korrespondent seit 1877.

Um die erlittenen Verluste zu ersetzen, wurden zu ordentlichen Mitgliedern in der Historisch-philologischen Klasse:

am 23. Januar Herr Ulrich von Wilamowitz-Moellendorff und

am 26. November Herr Julius Wellhausen,

in der Mathematischen:

am 26. November Herr Heinrich Weber erwählt.

An dem gleichen Tage wurden ferner

zu auswärtigen Mitgliedern

und zwar

1. in der Physikalischen Klasse:

die Herrn Emil Dubois Reymond in Berlin, Korr. seit 1861,
Adolf von Baeyer in München, Korr. seit 1879,
Eduard Suess in Wien, Korrespondent seit 1884;

2. in der Mathematischen Klasse:

die Herrn Hermann Amandus Schwarz in Berlin, bisher ordentliches Mitglied unserer Gesellschaft,
Josef Stefan in Wien,
Dr. Sophus Lie in Leipzig, vorher Korr. seit 1872,
Henri Poincaré in Paris, vorher Korr. seit 1884,

erwählt.

Ferner wurden zu Korrespondenten ernannt

1. in der Historisch-philologischen Klasse:

die Herrn Konstantinos Kontos in Athen,
Dr. Moritz Ritter in Bonn,
Dr. Goswin Freiherr von der Ropp in Marburg i. H.

2. in der Physikalischen:

die Herrn Dr. Max Bauer in Marburg i. H.,
Dr. Camillo Golgi in Pavia,
Dr. Friedrich Leopold Goltz in Straßburg i. E.,
Dr. Victor Hensen in Kiel,
Sr. Excellenz Herr Alexander Karpinsky in St. Petersburg,
Dr. Dmitri Mendelejeff in St. Petersburg,
Dr. Simon Schwendener in Berlin,
Dr. Karl von Zittel in München;

3. in der Mathematischen:

die Herrn Dr. Heinrich Bruns in Leipzig,
Dr. van 't Hoff in Amsterdam,
Rowland in Baltimore,
Max Noether in Erlangen,
Adolf Hurwitz in Zürich.

Endlich wurde noch zum Korrespondenten der Historisch-philologischen Klasse am 3. September

Herr Henry Harrisse in Paris

erwählt.

Bei der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangene Druckschriften.

Man bittet diese Verzeichnisse zugleich als Empfangsanzeigen ansehen zu wollen.

März und April 1892.

(Fortsetzung.)

Museum of comparative Zoölogy at Harvard college.
Bulletin. Vol. XXIII. N. 1. Cambridge U. S. A. 1892.
Journal of comparative Neurology. Contents of Vol. I 1891 und Titelblatt. Granville, Ohio U. S. A.
Sociedad cientifica Argentina:
a. Anales. Die de 1891. Entrega VI. Tomo XXXII. Enero — Marzo 1892. Entrega I—III. Tomo XXXIII. Buenos Aires 1891—92.
b. La minería en la provincia de Mendoza.
El paramillo de Uspallata. Buenos Aires 1890.

Nachträge.

Geological and natural history survey of Canada.
Annual report. New series. Vol. IV. 1888—89. Montreal 1890.
Zeitschrift für Naturwissenschaften. Im Auftrage des naturwissensch. Vereins für Sachsen und Thüringen. 64. Band. Fünfte Folge. Zweiter Band. Sechstes Heft. Leipzig 1892.
La société des naturalistes de la Nouvelle-Russie. Mémoires. Section mathématique. Tome XII et XVI. P. II. Odessa 1892.
Meteorologische Beobachtungen angestellt in Dorpat in den Jahren 1886—1890. 21. bis 25. Jahrg. Bd. V. S. 209—273 mit Titel und Register. Dorpat 1892.
Höhenschichtenkarte von Ost- und Westpreussen von Prof. Dr. Jentzsch mit drei Karten. Königsberg i. Pr.
K. K. geologische Reichsanstalt.
Verhandlungen. 1892. N. 2—5. Wien 1892.
Die Mammuthjäger-Station bei Předmost v. Japetus Steenstrup. (Separatabdruck aus Band XX der Mittheilungen der Anthropologischen Gesellsch. in Wien). Wien 1890.
Verein für siebenbürgische Landeskunde:
a. Jahresbericht für 1890—91. Hermannstadt 1891.
b. Archiv. Neue Folge 24. Band. 1. Heft. Hermannstadt 1892.
Sprawozdania Komisyi Jezykowéj Akademii umiejétności. Tomo III. W. Krakowie 1884.
Akademie der Wissenschaften in Krakau. 1892. Anzeiger. Febr. März. Krakau 1892.
Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. 9. Band. Okt. 1890—Okt. 1891. Zweite Hälfte. Berlin Budapest 1892.
Ungarische Revue. III. IV. Heft. 1892. März u. April. 12. Jahrgang. Budapest 1892.
Köngl. Ung. Geologische Anstalt:
a. Jahresbericht für 1890. Budapest 1892.
b. Földtani Közlöny. Jahrg. XXII. Heft 1—4. Budapest 1892.
Königl. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften in Prag:
a. Sitzungsberichte 1891.
b. Abhandlungen. VII. 4. Beider Classen.
c. Jahresbericht. 1891.
d. Böhmische Preisschriften. VI.

Mai 1892.

Deutsche Morgenländische Gesellschaft.
Zeitschrift. 45. Band. IV. Heft. Leipzig 1891.
Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde. Achtundzwanzigster Bericht. Giessen 1892.
Kaiserlich Leopoldinisch-Carolinische deutsche Akademie der Naturforscher:
a. Verhandlungen. 55 u. 56ster Band.
b. Catalog der Bibliothek. Lief. 3. Halle 1891.
Handbuch der organischen Chemie von Beilstein. 3. Aufl. 2. Lieferung. (Band 1, Lieferung 2). Hamburg und Leipzig 1892.
Naturhistorische Gesellschaft in Hannover.
40. und 41. Jahresbericht für 1889/90 u. 1890/91. Hannover 1892.
Naturwissenschaftlicher Verein für Schleswig-Holstein.
Schriften. Band IX, Heft 2. Kiel 1892.
v. Koelliker:
a. Ueber den feineren Bau des Bulbus olfactorius (Sitzungsberichte der Würzburger Phys.-med. Ges.).
b. Eröffnungsvortrag bei den Sitzungen der Anatomischen Gesellschaft zu München. 5. Jahresversammlung.
Beiträge zur Kenntniss der Lage der weiblichen Beckenorgane etc. von Dr. W. Waldeyer. Bonn 1892.
Nature. Vol. 46. 1175—1177.
Royal Astronomical Society.
Monthly notices. Vol. LII. N. 6. London 1892.
Royal Irish Academy.
Transactions. Vol. XXIX. Part XIX. Dublin 1892.
Geological Survey of New South Wales.
Records. Vol. II. Part IV. 1892. Sidney 1892.
Académie Royale de Belgique.
Bulletin. 62e année, 3e série, tome 23, N. 4. Bruxelles 1892.
Observatoire météorologique de l'Université d'Upsal.
Bulletin mensuel. Vol. XXIII. Année 1891. Upsal 1891—92.
Die Triangulation von Java. Im Namen der Niederländischen Regierung. Dritte Abtheilung. Haag 1891.
Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indië. 12de Jaargang 1890. (Uitg. op last der Nederl. Ind. Regeering). Batavia 1891.
Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen.
a. Nederlandsch-Indisch Plakaatboek 1602—1811. 9. Deel.
b. Beschrigving der Outheden nabij de Grens der Residentiés Soerakarta en Djogdjakarta. Mit Atlas.
c. Tijdschrift voor Indische Taal-, Land- en Volkenkunde. Deel XXXV. Aflevering I.
d. Notulen van de algemeene en Bestuurs-Vergaderingen. Deel XXIX. Afl. III. 1891. Batavia 's Hage 1891.
Die accessorischen Geschlechtsdrüsen der Säugethiere von Dr. J. Th. Oudemans. (Natuurkundige Verhandelingen van de Hollandsche Maadschappij der Wetenschappen). 3de Verh. Deel V. 2de Stuek. Haarlem 1892.
Programma e Naamlijst van Directeuren en Leden van de Hollansche Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem 1891. Haarlem 1891.
Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden. Tijdschrift. 11. Deel. Niewre Reeks, 3e Deel. 1. Afl. Leiden 1892.
Musée Teyler.
Archives. Série II. Vol. III. Septième Partie. Haarlem 1892.
Reale Accademia dei Lincei:
a. Classe di scienze morali storiche e filologiche.
1. Rendiconti. Serie V. Vol. I. Fasc. 1. 2.
2. Atti. Série IV. Vol. IX. Parte 2. Notizie degli Scavi e Indice topographico per l'anno 1891.
b. Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.
Rendiconti. Serie Quarta. Vol. I. Fasc. 6—8. 1. Semestre. Roma 1892.

Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
Bollettino. 1892. N. 153. Firenze 1892.
Biblioteca Nazionale Centrale Vittorio Emanuele di Roma Bollettino delle opere moderne straniere. Vol. V. N. 5—12. Maggio-Dicembre 1890 e Indice Alfabetico. Vol. VI. 1891. N. 12. Roma 1891.
Verein für Natur- und Heilkunde in Pressburg.
Verhandlungen. Neue Folge. 7. Heft. Jahrg. 1887—1891. Pressburg 1891.
Akademie der Wissenschaften in Krakau:
a. Anzeiger 1892. April. Krakau 1892.
b. Bibliotheca auctorum Polonorum. Orichoviana. Opera inedita et epistulae Stanisl. Orzechowsky. 1543—1566.
4 Bände polnische Schriften ebendaher. Krakau 1892.

Nachträge.

Magnetical and Meteorological Observatory at Batavia Observations. Vol. XIII. 1890. Batavia 1891.
ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΟΣΣΤΑΛΟΓΟΣ ΠΑΡΝΑΣΣΟΣ. ΛΟΓΟΔΟΣΙΑ etc. 1890—1891. *ΑΘΗΝΑΙΣ* 1892.
Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokio.
Mittheilungen. 47. Heft. Band V. Seite 295—348. Yokohama.
Sociedad Cientifica Argentina.
Anales. Buenos Aires 1892.
Antiquarische Gesellschaft in Zürich.
Mittheilungen. Band XXIII. Heft 3. 4. Leipzig 1891—92.
Ungarische Revue. V. Heft. 1892. Mai. 12. Jahrg. Budapest 1892.
Société Imp. des Naturalistes de Moscou.
Bulletin. Année 1891. N. 4. Moscou 1892.
Naturforschender Verein in Brünn.
a. Verhandlungen. XXIX. Band. 1890.
b. IX. Bericht der meteorologischen Commission 1889. Brünn 1891.

Juni 1892.

Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin.
Sitzungsberichte. XXII—XXVIII. 1892. Berlin 1892.
Königl. Bair. Akademie der Wissenschaften in München.
Sitzungsberichte: a. philos.-philolog. und histor. Classe 1891. Heft V. b. mathematisch-physikalische Classe 1892. Heft I. (München 1892).
Königl. Sächsische Gesellsch. der Wissensch. zu Leipzig.
a. Berichte. Mathematisch-physische Classe. 1892. I.
b. Abhandlungen des XVIII. Bandes der mathematisch-physischen Classe. N. V. VI. Leipzig 1892.
Physikalisch-medicinische Gesellschaft zu Würzburg.
a. Sitzungsberichte. 1892. N. 1—3. Titel zu 1891.
b. Verhandlungen. N. F. XXVI. Band. N. 1. 2. 3. Würzburg 1892.
Physikalisch-medicinische Societät in Erlangen.
Sitzungsberichte. 24. Heft. 1892. Erlangen 1892.
Naturwissenschaftlicher Verein in Bremen.
Abhandlungen. XII. Band. 2. Heft. Bremen 1892.

(Fortsetzung folgt.)

Inhalt von Nr. 16.

Hermann Wagner, Die dritte Weltkarte Peter Apians v. J. 1530 und die Pseudo-Apianische Weltkarte von 1551. — Bericht des Beständigen Sekretärs der Königl. Ges. d. Wiss. über das Jahr 1892. — Eingegangene Druckschriften.

Für die Redaction verantwortlich: *H. Stuppe*, Secretar d. K. Ges. d. Wiss.
Commissions-Verlag der *Dieterich'schen Verlags-Buchhandlung*.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

THE UNIVERSITY LIBRARY
UNIVERSITY OF CALIFORNIA, SANTA CRUZ
SCIENCE LIBRARY

This periodical is due on **DATE** stamped below.
To renew by phone, call **459-2050**

SCI. LIB.
STORED AT NRLF

Series 1665

STORED AT NRLF